

Grinzi rezemate pe mediu elastic

Vintilă Grigorescu, Ștefan Mavrodin
Nicolae Vraca
Ingineri

Se știe că pentru determinarea elementelor elastice ale unei grinzi rezemate continuu pe un mediu compresibil, se procedează prin găsirea ecuației fibrei medii deformată, care se obține integrând ecuația diferențială :

$$(1) \quad EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} = p = -b k \eta$$

EI fiind modulul de rigiditate al grinzii,

η săgeata pozitivă în jos,

p încărcarea unitară pe care am admis-o proporțională cu η , cu lățimea b a grinzii și cu o constantă K ce depinde de natura mediului pe care reazemă.

Integrarea ecuației 1 duce la următorul rezultat :

$$(2) \quad \eta = e^{\alpha x} \left[A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x \right] \\ + e^{-\alpha x} \left[A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \alpha x \right]$$

unde

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{b k}{4 E I}}$$

Ecuația (2) cuprinde patru constante arbitrare ce se vor determina prin condițiile impuse la limită.

Din moment, însă, ce pe grindă avem n forțe concentrate dispuse oricum, vom avea aface cu $n+1$ ecuațiuni de forma (2) și prin urmare vom avea de determinat 4 $(n+1)$ constante.

Prin procedeele pe care le cunoaștem, aceste constante se deduc rezolvind simultan 4 $(n+1)$ ecuațiuni, fapt care îngreuiază calculul făcându-l aproape imposibil când forțele sunt mai multe de cât trei.

Surprins de dificultatea procedurii și având siguranța existenței unei soluțiuni mult mai simple, D l Prof. Gh. Em. Filipescu ne-a sugerat problema pe care vom rezolva-o în cele ce urmează și care constă în a reduce întreg sistemul de 4 $(n+1)$ necunoscute, numai la patru.

Soluțiunea se bazează pe observațiunea foarte simplă că ecuațiunile ce reprezintă fibrele medii deformată a două ramuri adiacente trebuie să reducă la una și aceeași când forța ce le separă dispare.

Să studiem două ramuri adiacente separate de o forță P la distanța a de origină.

Ecuatiia primei ramure este de tipul (2) și fie ea :

$$\eta_1 = f(x) = e^{\alpha x} \left[A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x \right] + e^{-\alpha x} \left[A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \alpha x \right]$$

Ecuatiia ramurei a doua va fi de același tip însă s'o punem sub forma :

$$\eta_2 = f(x) + \varphi(x), \text{ unde evident } \varphi(x) = e^{\alpha x} \left[B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x \right] + e^{-\alpha x} \left[B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x \right]$$

vom dovedi că constantele $B_1 \dots B_4$ se pot determina independent de celelalte ecuațiuni și depind numai de încărcare și de poziția ei.

În adevăr se observă imediat că :

pentru $x = a$ avem :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = 0 \\ \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0 \\ \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \\ \text{El } \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} = P \end{array} \right.$$

Sistemul (3) se traduce în următoarele patru ecuațiuni :

$$B_1 e^{x a} \cos x a + B_2 e^{x a} \sin x a + B_3 e^{-x a} \cos x a + B_4 e^{-x a} \sin x a = 0$$

$$B_1 e^{x a} [\cos x a - \sin x a] + B_2 e^{x a} [\cos x a + \sin x a] + B_3 e^{-x a} [\cos x a + \sin x a] + B_4 e^{-x a} [\cos x a - \sin x a] = 0$$

$$- B_1 e^{x a} \sin x a + B_2 e^{x a} \cos x a + B_3 e^{-x a} \sin x a - B_4 e^{-x a} \cos x a = 0$$

$$- B_1 e^{x a} [\cos x a + \sin x a] + B_2 e^{x a} [\cos x a - \sin x a] + B_3 e^{-x a} [\cos x a - \sin x a] + B_4 e^{-x a} [\cos x a + \sin x a] = \frac{P}{2 x^3 E I}$$

Rezolvind aceste ecuațiuni găsim :

$$B_1 = \frac{-P [\cos x a + \sin x a]}{8 x^3 e^{x a} E I}$$

$$B_2 = \frac{P [\cos x a - \sin x a]}{8 x^3 e^{x a} E I}$$

$$B_3 = \frac{P [\cos \alpha a - \sin \alpha a]}{8 \alpha^3 e^{-\alpha a} E I}$$

$$B_4 = \frac{P [\cos \alpha a + \sin \alpha a]}{8 \alpha^3 e^{-\alpha a} E I}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația lui $\varphi(x)$ obținem, făcând transformări cunoscute, funcția :

$$\varphi(x) = \frac{P}{4 \alpha^3 E I} [\operatorname{ch} \alpha(x-a) \sin \alpha(x-a) - \operatorname{sh} \alpha(x-a) \cos \alpha(x-a)]$$

Din modul cum am găsit expresiunea funcțiunei $\varphi(x)$ putem deduce imediat ecuațiile fibrelor medii deformate ale unei grinzi rezemate pe un mediu elastic și încărcată cu sarcinile P_1, P_2, \dots, P_n la distanțele respective de origină a_1, a_2, \dots, a_n în modul următor :

$$\begin{aligned} \text{Pentru ramura I} \quad \eta_1 = & e^{\alpha x} [A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x] \\ & + e^{-\alpha x} [A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \alpha x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pentru ramura II} \quad \eta_2 = & \eta_1 + \frac{P_1}{4 \alpha^3 E I} [\operatorname{ch} \alpha(x-a_1) \sin \alpha(x-a_1) \\ & - \operatorname{sh} \alpha(x-a_1) \cos \alpha(x-a_1)] \end{aligned}$$

etc.

Pentru ramura $n+1$

$$\eta_{n+1} = \eta_n + \frac{P_n}{4 \alpha^3 E I} [\operatorname{ch} \alpha(x-a_n) \sin \alpha(x-a_n) - \operatorname{sh} \alpha(x-a_n) \cos \alpha(x-a_n)]$$

Problema ce ne-am propus este rezolvată, căci după cum se vede am redus numărul de $4(n+1)$ necunoscute la cele 4 aferente primei ramuri și care se vor determina impunând condițiuni ce privesc numai raourile extreme.

Înainte de a face o aplicație vom da o altă formă ecuațiunei $\varphi(x)$.

Însemnând cu :

$$\sqrt[4]{\frac{4 E I}{b K}} = \frac{1}{\alpha} = L$$

$$\frac{x}{L} = \xi \quad \frac{a_1}{L} = \lambda_1 \dots \dots \dots, \quad \frac{a_n}{L} = \lambda_n,$$

se găsește :

$$\varphi(x) = \frac{P}{b K L} [\operatorname{ch}(\xi - \lambda) \sin(\xi - \lambda) - \operatorname{sh}(\xi - \lambda) \cos(\xi - \lambda)]$$

Am dat această expresie funcției φ pentru a atrage atenția că formula găsită de D-nul Dr. Inginer K. Hayashi în „Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage“ [1921] este greșită de semn la unul din factorii membrului al doilea.

De altfel Domniasa ajunge la această formulă pe altă cale care nu are nici o legătură cu teoria noastră.

Aplicațiune.

Să găsim ecuațiunile fibrei medii deformate ale grinzei studiate de D-nul Profesor Gh. E. Filipescu în articolul din Buletinul Politehnicei No. 1 anul XXXV 1921, intitulat „Flexiunea șinelor de tramvai.”

Conform celor expuse ecuațiile sunt :

$$\eta_1 = e^{\alpha x} [A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x] + e^{-\alpha x} [A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \alpha x]$$

$$\eta_2 = \eta_1 + \frac{P}{4 \alpha^3 E I} [\operatorname{ch} \alpha (x - a) \sin \alpha (x - a) - \operatorname{sh} \alpha (x - a) \cos \alpha (x - a)]$$

Punând condițiile la limita care se găsesc în op. cit. avem

Pentru $x = 0$

$$A_1 = A_3.$$

$A_2 = -A_4$ mai departe pentru $x = a$ va trebui ca :

$$e^{\alpha x} [A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x] + e^{-\alpha x} [A_1 \cos \alpha x - A_2 \sin \alpha x] + \frac{P}{4 \alpha^3 E I} [\operatorname{ch} \alpha (x - a) \sin \alpha (x - a) - \operatorname{sh} \alpha (x - a) \cos \alpha (x - a)] = 0$$

Grupând în raport cu $\sin \alpha x$ și $\cos \alpha x$ găsim :

$$\begin{aligned} \cos \alpha x & \left[A_1 - \frac{P e^{-\alpha a}}{8 \alpha^3 E I} \sin \alpha a - \frac{P e^{-\alpha a}}{8 \alpha^3 E I} \cos \alpha a \right] + \\ \sin \alpha x & \left[A_2 + \frac{P e^{-\alpha a}}{8 \alpha^3 E I} \cos \alpha a - \frac{P e^{-\alpha a}}{8 \alpha^3 E I} \sin \alpha a \right] = 0 \end{aligned}$$

de unde rezultă evident că :

$$A_1 = \frac{P}{8 \alpha^3 E I} e^{-\alpha a} [\sin \alpha a + \cos \alpha a]$$

$$A_2 = \frac{P}{8 \alpha^3 E I} e^{-\alpha a} [\sin \alpha a + \cos \alpha a]$$

n'am mai utilizat a patra ecuație de condiție de oarece nu avem nevoie, fapt care se întâmplă întotdeauna când considerăm grinda infinită.

Constantele fiind determinate ecuațiunile iau forma următoare :

$$(4) \begin{cases} \eta_1 = \frac{P}{4 \alpha^3 E I} [(u + v) \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + (v - u) \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x] \\ \eta_2 = \frac{P}{4 \alpha^3 E I} e^{-\alpha x} [(l - m) \cos \alpha x + (l + m) \sin \alpha x] \end{cases}$$

unde am făcut notațiunile următoare :

$$u = e^{-\alpha x} \cos \alpha a$$

$$v = e^{-\alpha x} \sin \alpha a$$

$$l = \operatorname{ch} \alpha a \cos \alpha a$$

$$m = \operatorname{sh} \alpha a \sin \alpha a$$

Ecuațiunile sistemului (4) sunt exact acelea găsite de D-nul Prof. Gh. Em. Filipescu.

Am făcut această aplicație pentru a vedea modul general de procedare și am ales exemplul de mai sus care poate fi la îndemâna cititorilor Buletinului pentru a putea fi verificat.

Chestiunea prezintă însă avantagii considerabile pentru mai multe forțe și mai ales pentru grinzi cu lungime finită cum sunt cele reale — căci calculul penibil pentru rezolvarea unui sistem de 16 ecuațiuni cu 16 necunoscute cum ar fi cazul curent a trei forțe pe o grindă, este înlocuit prin o rezolvare relativ comodă a 4 ecuațiuni.