rența este prea mare între prețul de producțiune și prețul de vindare pentru a fi anulată de tacsa de intrare de 5 leĭ.

**C. O.**

---

## Determinarea progresiunilor aritmetice ale căror termenĭ nu sunt cunoscuțĭ de cât aproximativ

Sub acest titlu, acum duoĭ anĭ, domnul inginer M. F. Lucas, membru în consiliul de administrațiune al căilor ferate al Statuluĭ frances, publică uă lucrare interesantă, și care póte găsi uă aplicațiune imediată în unele chestiuni de probabilitățĭ.

De acea reproducem maĭ la vale uă traducțiune după citata lucrare care se deosibește încă prin originalitatea metodei întrebuințată de autor.

Se dă uă serie de $n$ quantitățĭ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots a_n$$

cari represint aproximativ, cu óre-carĭ variațiunĭ fortuite aprópe, termenĭ consecutivĭ aĭ uneĭ progresiunĭ aritmetice cunoscute;

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n.$$

trebue să se determine acéstă progresiune ast-fel ca ea să pótă fi substituită in modul cel mai avantagios posibil serieĭ date.

Fie $\mu$ valórea medie a termenilor acesteĭ progresiune; este evident că vom putea scri:

$$(1) \qquad \mu = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}.$$

Fie de altă parte, $x$ raportul progresiuneĭ, și să considerămŭ diferințele:

$$(a_1 - \alpha_1),\ (a_2 - \alpha_2),\ \ldots\ldots\ (a_n - \alpha_n);$$

Vom exprima, după teoria luĭ Gauss, că suma pătratelor lor trebue să fie un maximum.

Vom avea dar:

$$(2) \quad (a_1-\alpha_1)^2+(a_2-\alpha_2)^2+\ldots\ldots+(a_n-\alpha_n)^2=\text{maximum},$$

de unde printr'uă derivaţiune,

$$(3) \quad (a_1-\alpha_1)\frac{d\alpha_1}{dx}+(a_2-\alpha_2)\frac{d\alpha_2}{dx}+\ldots+(a_n-\alpha_n)\frac{d\alpha_n}{dx}=O.$$

Acéstă equaţiune ne va servi pentru a determina valórea lui $x$; dér sunt două casuri de observat după cum $n$ este un număr cu soţiu, sau un număr fără soţiu.

*Casul I: n este un număr cu soţiu.*

Sĕ scrimŭ prima jumĕtate a termenilor din progresiune:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_i,\ \ldots\ \alpha_{\frac{n}{2}-1}\ \ldots\ \alpha_{\frac{n}{2}},$$

şi de desubt cea altă jumĕtate dar resturnând ordinea:

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1}\ \ldots\ \alpha_{n-i},\ \ldots\ \alpha_{\frac{n}{2}+2},\ \ldots\ \alpha_{\frac{n}{2}+1}$$

Este evident că suma celor duoĭ termenĭ care se corespund pe aceaşĭ verticale este constantă şi egală cu $2\mu$; avem dar:

$$(4) \qquad \alpha_i+\alpha_{n-i+1}=2\mu,$$

de unde:

$$(5) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx}=-\frac{d\alpha_{n-i+1}}{dx}.$$

Dar atuncĭ, equaţiunea (3) póte să fie scrisă, grupându-se termeniĭ seĭ duoĭ cu duoĭ,

$$(6)\begin{cases}(a_n-a_1-\alpha_n+\alpha_1)\dfrac{d\alpha_1}{dx}+(a_{n-1}-a_2-\alpha_{n-1}+\alpha_2)\dfrac{d\alpha_2}{dx}+\ldots\ldots\\ \qquad +\left(a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}-\alpha_{\frac{n}{2}+1}+\alpha_{\frac{n}{2}}\right)\dfrac{d\alpha_{\frac{n}{2}}}{dx}=O\end{cases}$$

Dar pentru ori-ce valóre pentru indiciul $i$ avem evidamente:

$$(7) \qquad \alpha_i=\mu+\frac{2i-n-1}{2}x,$$

de unde:

$$(8) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx}=\frac{2i-n-1}{2}.$$

Equaţiunea (6) póte dar lua forma:

$$(9)\begin{cases}[a_n-a_1-(n-1)x]\dfrac{n-1}{2}\\ +[a_{n-1}-a_2-(n-3)x]\dfrac{n-3}{2}+\ldots+\left(a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}-x\right)\dfrac{1}{2}=O.\end{cases}$$

de unde deducem:

$$(10)\quad x=\frac{(n-1)(a_n-a_1)+(n-3)(a_{n-1}-a_2)+\ldots+\left(a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}\right)}{(n-1)^2+(n-3)^2+\ldots+1^2}$$

formula căutată, in care vedem că numitorul este suma patratelor celor $\frac{n}{2}$ prime numere fără soţiu.

*Casul II: n este numĕr fără soţiu.*

Décă $n$ este fără soţiu, se găsesçte in progresiunea căutată un termen mijlociu:

$$\alpha_{\frac{n+1}{2}}=\mu$$

a cărei derivată luată relativ la $x$ este identic nulă. Şi equaţiunea (3) póte atunci fi scrisă, inperechindu-se termenii seĭ şi lăsênd la uă parte termenul mijlociu care se anulează:

$$(11)\left\{\begin{aligned}&(a_n-a_1-\alpha_n+\alpha_1)\frac{d\alpha_1}{dx}+(a_{n-1}-a_2-\alpha_{n-1}+\alpha_2)\frac{d\alpha_2}{dx}+\ldots\\&\qquad+\left(a_{\frac{n+3}{2}}-a_{\frac{n-1}{2}}-\alpha_{\frac{n+3}{2}}+\alpha_{\frac{n-1}{2}}\right)\frac{d\alpha_{\frac{n-1}{2}}}{dx}=0.\end{aligned}\right.$$

Şi eliminând ca in casul precedent termenii in $\alpha$ şi derivatele lor, găsim:

$$(12)\quad x=\frac{(n-1)(a_n-a_1)+(n-3)(a_{n-1}-a_2)+\ldots+\left(a_{\frac{n+3}{2}}-a_{\frac{n-1}{2}}\right)}{(n-1)^2+(n-3)^2+\ldots+2^2}$$

formula căutată, in care vedem că numitorul este suma pătratelor celor $\frac{n-1}{2}$ prime numere cu soţiu.

*Applicaţiune.* Aceste formule pot fi întrebuinţate pentru a determina progresiunea probabilă a traficului uneĭ reţele de căĭ ferate, când se cunoscŭ resultatele uneĭ serie de anĭ. Décă, de exemplu, cunóscem resultatele relative celor ḑece anĭ consecutivĭ din perióda 1873—1882, vom calcula raportul $x$ al progresiuneĭ prin formula:

$$(13)\quad x=\frac{9(a_{10}-a_1)+7(a_9-a_2)+5(a_8-a_3)+3(a_7-a_4)+(a_6-a_5)}{1^2+3^2+5^2+7^2+9^2}$$

Valórea medie $\mu$ a termenilor fiind:

$$(14)\qquad \mu=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}{10},$$

Valórea probabilă a traficului pe exerciţiul $(1882+i)$ va fi:

$$(15)\qquad \mu+\frac{9+2i}{2}x.$$

**C. O.**