

CALCULUL GRINDILOR SCHWEDLER

(Continuare)

De și formulele (1) și (2) nu sunt aplicabile grindilor cu tablîer superior pentru cari relațiunea $s=c \cos x$ nu mai există (fig. 4), totuși ele pot servi pentru determinarea formei acestor grindî, pentru că s , intrând ca factor în expresiunea lui D , dispăre în ecuațiunea de condițiune $D_0 = 0$.

În resumat formulele cari determină elementele grindei Schwedler sunt următoarele, cari se aplică atât la grindile cu tablîer inferior cât și la cele cu tablîer superior :

$$h = \frac{gh_0}{l} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} + 1 \right)^2 \frac{x(l-x)}{gl+px} \quad (7)$$

$$c = \frac{hd x}{dh} = \frac{x(l-x)(gl+px)}{gl(l-x) - x(gl+px)} \quad (8)$$

Pentru grindile cu tablîer inferior

$$s = c \cos x \quad (9)$$

Pentru grindile cu tablîer superior

$$s = (c-a) \cos x \quad (10).$$

În aceste formule x , reprezintă abcisa verticalei considerate.

Pentru înlesnirea calculului vom pune

$$\frac{l}{a} = N, \quad \frac{x}{a} = n, \quad \frac{c}{a} = k \frac{s}{a} = z$$

Formulele de mai sus devin

$$h = \frac{gh_0}{N} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} + 1 \right)^2 \frac{n(N-n)}{gN+pn} \quad (11)$$

$$k = \frac{n(N-n)(gN+pn)}{gN(N-n)-n(gN+pn)} \quad (12)$$

$$z = k \operatorname{Cos} \alpha \text{ (tablier inferior)} \quad (13)$$

$$z = (k-1) \operatorname{Cos} \alpha \text{ (tablier superior)} \quad (14)$$

CAPITOLUL II.

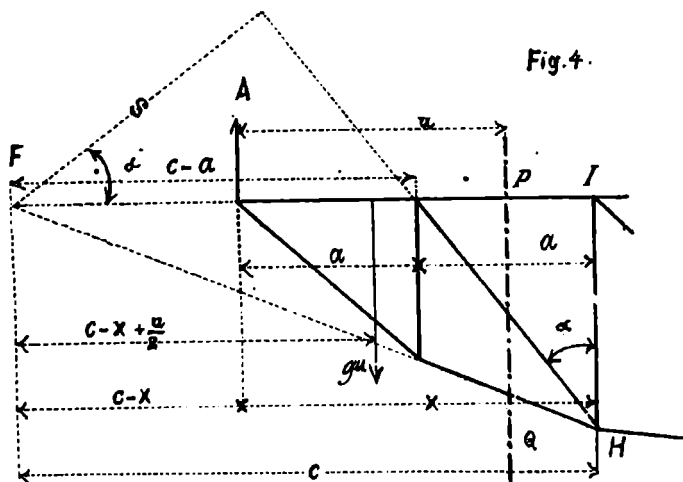
Studiul tensiunilor séu forțelor elastice

GRINȚI CU TABLIER SUPERIOR

Tensiunile diagonalelor aferente părților poligonale ale talpei inferioare

a) *Calculul tensiunii produse de greutatea permanentă, D_g .*

Pentru determinarea tensiunii D_g , a diagonalei definită prin abscisa $x = AI$ a piciorului séu H , vom face o secțiune verticală PQ la distanța u de punctul de reazădim din stînga (fig. 4).



După cele dișe mai înainte vom avea :

$$D_g \text{ s} = A_g (c-x) - g_u (c-x + \frac{u}{2}) \text{ séu}$$

$$D_g \text{ s} = \frac{gl}{2} (c-x) - g_u (c-x + \frac{u}{2}) \quad (14^{bis})$$

După această formulă se vede că maximum séu mi-

nimum lui D_g corespunde pentru minimum său maximum lui u avem dară în panoul considerat, pentru

$$u = x - a, \quad \max D_g s = \frac{gl}{2}(c - x) - g(x - a)\left(c - \frac{x + a}{2}\right) \quad (15) \text{ și}$$

$$u = x \quad \min D_g s = \frac{gl}{2}(c - x) - g \cdot x \left(c - \frac{x}{2}\right) \quad (16)$$

său

$$\max D_g = \frac{a g}{2 z} \left[N(k - n) - (n - 1)\left(k - \frac{n + 1}{2}\right) \right] \quad (17)$$

$$\min D_g = \frac{a g}{2 z} \left[N(k - n) - n\left(k - \frac{n}{2}\right) \right] \quad (18)$$

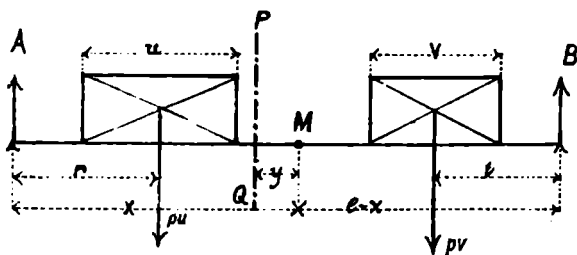
Se poate demonstra ușor că D_g este tot de a una pozitiv pentru diagonalele cuprinse între punctul de reazem din stînga și centrul grindei

În adevăr după formula $-D_g s = T(c - d)$ se vede că D_g are același semn cu T , care este pozitiv în partea de grindă considerată.

b) *Variațiunea tensiunii unei diagonale cu poziția supraîncărcării.*

Să considerăm o grindă în care să facem o secțiune PQ la distanța y de piciorul M al unei diagonale (fig. 5) și să însemnăm cu :

Fig. 5.



$p u, p v,$ Resultantele supraîncărcării aflate la stînga

și la dreapta planului P Q.

$r, t,$ Depărtările acestor forțe de punctele de readăm extreme.

$Au, Av,$ Reacțiunea produsă în punctul A de aceste forțe.

Du, Dv și Dp Tensiunea produsă în diagonala considerată de forțele pu, pv și $p(u + v)$.

Vom avea $Du s = Au(c - x) - pu(c - x + r)$

$Dv s = Av(c - x)$

Deră

$Au = pu\left(1 - \frac{r}{l}\right)$ și $Av = pv\frac{t}{l}$

Prin urmare

$Du s = pu\left(1 - \frac{r}{l}\right)(c - x) - pu(c - x + r)$

$Dv s = pv\frac{t}{l}(c - x)$

séu

$Du s = -pu\frac{r}{l}(c - x) - pur$

$Dv s = pv\frac{t}{l}(c - x)$

de unde

$Dp s = -pu\left[(c - x)\frac{r}{l} + r\right] + pv\frac{t}{l}(c - x)$ (19)

Din această formulă deducem :

1) Supra încărcarea aflată la stînga planului secant produce în diagonala o compresiune; supraîncărcarea aflată la dreapta aceluși plan produce o extensiune.

2) Maximum compresiunii séu extensiunii se produce când grinda este încărcată complet la stînga planului secant, respectiv la dreapta lui.—În calculul tensiunilor, vom considera dară numai aceste cazuri.

3) Tensiunea totală produsă într'o diagonală de greutatea permanentă și de supra încărcare este tot-de-a-una *extensiune*.

În adevăr, avem :

$$D s = D g s + p v \frac{t}{l} - p u \left[(c-x) \frac{r}{l} + r \right]$$

În aceeași secțiune a diagonalei vom avea minimum tensiunii pentru pozițiunea supra încărcării care dă cea mai mare valoare absolută a termenului negativ și cea mai mică valoare a termenului pozitiv, adică pentru $u=x-y$, și $v=0$.

Considerând și formula (14^{bis}) vom avea :

$$\min D s = \frac{gl}{2}(c-x) - g(x-y)(c-x) - g \frac{(x-y)^2}{2} - p(x-y) \left[(c-x) \frac{x-y}{2l} + \frac{x-y}{2} \right]$$

Dacă în această formulă considerăm $y=0$, vom avea secțiunea făcută imediat la stînga piciorului diagonalei pentru care după definiția grindilor Schwedler avem $D=0$, deci

$$\frac{gl}{2}(c-x) - g x (c-x) - \frac{gx^2}{2} - \frac{px^2}{2l}(c-x) - \frac{px^2}{2} = 0$$

Scăzînd această ecuațiune din cea precedentă obținem

$$\min D s = g y (c-x) + \frac{y}{2} (2x-y) \left[g + \frac{p}{l} (c-x) + p \right]$$

$2x-y$, fiind tot de-a-una pozitiv urmîdă ca tensiunea totală a diagonalei este tot de-una pozitivă și că cea mai mică valoare a sa este zero.

c) *Calculul tensiunii produsă de supra-încărcare, D_p .*

Maximum compresiunii produsă de supraîncărcare într-o diagonală definită prin abscisa x a piciorului său este dupe cum am vădut

$$D_p s = - p (c-x) \frac{(x-y)^2}{2l} - p \frac{(x-y)^2}{2} \text{ s\u00e9u}$$

$$D_p s = - p \frac{(x-y)^2}{2l} (c-x + l).$$

În panoul considerat vom avea dar\u00e2 pentru

$$y = a \quad \max Dp s = -p \frac{(x-a)^2}{2l} (c-x+l) \text{ și}$$

$$y = 0 \quad \min Dp s = -p \frac{x^2}{2l} (c-x+l)$$

séu

$$\max Dp = -\frac{ap}{2Nz} (n-1)^2 (k+N-n) \quad (20)$$

$$\min Dp = -\frac{ap}{2Nz} n^2 (k+N-n) \quad (21)$$

Maximum extensiunii produsă de supraîncărcare într-o diagonală definită prin abscisa x a piciorului său, este după formula (19) pentru $v = l - x + y$ și pentru $u = 0$

$$Dp s = p \frac{(c-x)}{2l} (l-x+y)^2$$

In panoul considerat vom avea dără pentru

$$y = a \quad Dp s = p \frac{(c-x)}{2l} (l-x+a)^2 \text{ și}$$

$$y = 0 \quad Dp s = p \frac{(c-x)}{2l} (l-x)^2$$

séu

$$\max Dp = \frac{ap}{2Nz} (k-n)(N+1-n)^2 \quad (22)$$

$$\min Dp = \frac{ap}{2Nz} (k-n)(N-n)^2 \quad (23)$$

Maximum tensiunii totale a diagonalei se obține prin formula

$$\max D = \max Dg + \max Dp, \text{ adică}$$

$$\max D = \frac{ag}{2z} \left[N(k-n) - (n-1) \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \right] + \frac{ap}{2Nz} (k-n)(N+1-n)^2 \quad (24)$$

$$\min D = 0 \quad (25)$$

Tensiunile diagonalelor aferente părților paralele ale tălplilor.

Aceste tensiuni se obțin prin formulele stabilite pentru grinzi paralele (fig. 6) care sunt :

a) *Tensiunea produsă de greutatea permanentă:*

$$\text{pentru } y = a \quad \max Dg = \frac{g}{2 \cos \alpha} (l - 2x + 2a)$$

$$y = 0 \quad \min Dg = \frac{g}{2 \cos \alpha} (l - 2x)$$

séu

$$\max Dg = \frac{ag}{2 \cos \alpha} (N + 2 - 2n) \quad (26)$$

$$\min Dg = \frac{ag}{2 \cos \alpha} (N - 2n) \quad (27)$$

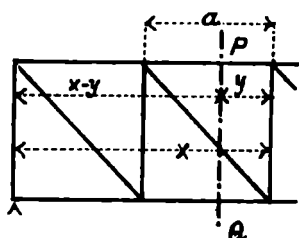


Fig 6.

b) *Compresiunea produsă de supraîncărcare*

$$y = a \quad \max Dp = - \frac{p (x-a)^2}{2 l \cos \alpha}$$

$$y = 0 \quad \min Dp = - \frac{p x^2}{2 l \cos \alpha}$$

séu

$$\max Dp = - \frac{ap (n-1)^2}{2 N \cos \alpha} \quad (28)$$

$$\min Dp = - \frac{a p n^2}{2 N \cos \alpha} \quad (29)$$

c) Tensiunea produsă de supraîncărcare

$$y = a \quad \max D\rho = \frac{p(l-x+a)^2}{2l \cos \alpha}$$

$$y = 0 \quad \min D\rho = \frac{p(l-x)^2}{2l \cos \alpha}$$

séu

$$\max D\rho = \frac{ap}{2N \cos \alpha} (N-n+1)^2 \quad (30)$$

$$\min D\bar{\rho} = \frac{ap(N-n)^2}{2N \cos \alpha} \quad (31)$$

d) Tensiunea totală $D = D\rho + Dg$

$$\max D = \frac{ag}{2 \cos \alpha} (N + 2 - 2n) + \frac{ap}{2N} (N-n+1)^2 \quad (32)$$

$$\min D = \frac{ag}{2 \cos \alpha} (N - 2n) - \frac{ap \cdot n^2}{2N \cos \alpha} \quad (33)$$

TENSIUNEA

verticalelor aferente părților poligonale ale tălpei inferioare

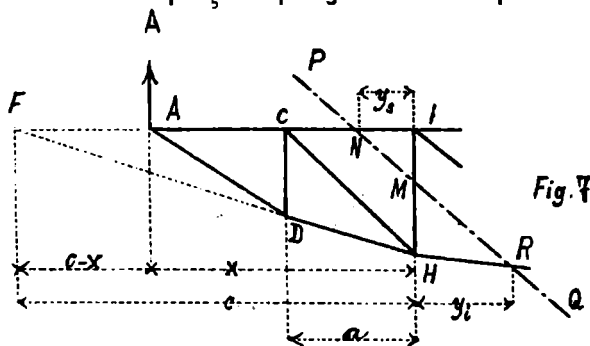


Fig. 7

Se considerăm verticala I H definită prin abscisa x a piciorului său și să facem o secțiune cu un plan înclinat P.Q.

Vom avea echilibru între forțele elastice $-S$, $-V$, și $-I$ exercitate de partea dreaptă a grindei asupra părții stinge și forțele exterioare aflate la stînga aceluia plan.

Vom determina dară tensiunea V exprimând egalitatea momentelor acestor două sisteme de forțe în raport cu

punctul F (fig. 7).

a) *Tensiunea produsă de greutatea permanentă V_g .*

Vom presupune pentru simplificare că greutatea g pe metru liniar se repartisează uniform pe cele două talpi și vom însemna cu g_s și g_i greutatea pe metru liniar de talpă superioară și inferioară.

Forțele exterioare la stînga planului secant sunt dăra

$$A = \frac{gl}{2} \quad \text{---} \quad P = gx - g_s y_s + g_i y_i$$

$$P_s = - g_s y_s$$

$$P_i = g_i y_i$$

Ecuatiunea momentelor va fi dăra

$$V_g c = - \frac{gl}{2} (c - x) - gx \left(c - \frac{x}{c} + \frac{x}{2} \right) + g_s y_s \left(c - \frac{y_s}{2} \right) - g_i y_i \left(c + \frac{y_i}{2} \right)$$

sau

$$V_g = - \frac{g}{2} \frac{(c-x)(l-2x)-x^2}{c} - g_s y_s \left(1 - \frac{y_s}{2c} \right) + g_i y_i \left(1 + \frac{y_i}{2c} \right)$$

său înlocuind pe c cu valoarea sa din ecuațiunea (8)

$$\text{avem } V_g = - \frac{pgx(l-x)}{2(gl+px)} - g_s y_s \left(1 - \frac{y_s}{2c} + g_i y_i \left(1 + \frac{y_i}{2c} \right) \right) \quad (34)$$

Făcând să varieze poziția planului secant între extremitățile I și H ale verticalei considerate vom obține :

$$\max V_g = - \frac{pgx(l-x)}{2(gl+px)} + a g_i \left(1 + \frac{a}{2c} \right) \quad \text{pentru } y_i = a \text{ și } y_s = 0$$

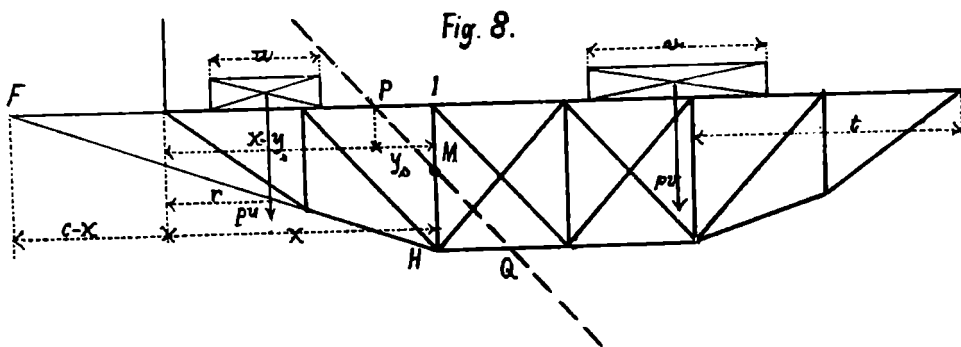
$$\min V_g = - \frac{pgx(l-x)}{2(gl+px)} - a g_s \left(1 - \frac{a}{2c} \right) \quad \text{pentru } y_s = a \text{ și } y_i = 0$$

Aceste formule devin întrebuintănd notațiunile obișnuite :

$$\max V_g = -a \left(\frac{pgn(N-n)}{2(gN+pn)} + g_i \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \right) \quad (35) \quad y_s = 0$$

$$\min V_g = -a \left(\frac{pgn(N-n)}{2(gN+pn)} + g_s \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \right) \quad (36) \quad y_s = a$$

b) *Variațiunea tensiunii unei verticale cu pozițiunea supraîncărcării.*



Insemnând cu V_u , V_v , V_p tensiunea produsă în verticala I H de supraîncărcarea u , v și $u + v$, vom avea:

$$V_u = -\frac{Au}{c} (c-x) + \frac{pu}{c} (c-x+r)$$

$$V_v = -\frac{Av}{c} (c-x) \quad \text{și}$$

$$V_p = -\frac{Au}{c} (c-x) + \frac{pu}{c} (c-x+r) - \frac{Av}{c} (c-x)$$

însă $A_u = pu - \frac{pur}{l}$

$$A_v = \frac{pvt}{l} \quad \text{deci:}$$

$$V_p = +\frac{pur}{lc} (c+l-x) - \frac{pvt}{lc} (c-x) \quad (37)$$

Din aceste formule deducem:

1) Supraîncărcarea aflată la stânga planului secant produce în verticala tăiată o extensiune; supraîncărcarea aflată la dreapta aceluși plan secant produce o compresiune.

2) Maximum sau minimum compresiunii se produce

când grinda este încărcată complet la stânga planului secant, respectiv la dreapta lui. - În calculul tensiunilor V_p vom considera numai aceste două cazuri.

c) *Calculul tensiunilor produse de supraîncărcare V_p*

Maximum extensiunii, corespunde după cele șise mai sus, (fig. 8) pentru $u = x - y_s$ și $v = 0$ adică :

$$V_p = \frac{p (x - y_s)^2}{2 l c} (c + l - x)$$

Făcând să varieze pozițiunea planului secant între I și H extremitățile verticalei considerate avem:

$$\max. V_p = \frac{p x^2}{2 l c} (c + l - x)$$

$$\min. V_p = \frac{p (x - a)^2}{2 l c} (c + l - x)$$

Înlocuind în aceste ecuațiuni c prin valoarea sa din (8) avem:

$$\max. V_p = \frac{p g x (l - x)}{2 (g l + p x)} \quad y_s = 0$$

$$\min. V_p = \frac{p g (x - a)^2 (l - x)}{2 x (g l + p x)} \quad y_s = a$$

sau întrebuițând notațiunile obicinuite

$$\max. V_p = \frac{a p g n (N - n)}{2 (g N + p n)} \quad (38) \quad Y_s = 0$$

$$\min. V_p = \frac{a p g (n - 1)^2 (N - n)}{2 n (g N + p n)} \quad (39) \quad Y_s = a$$

Maximum compresiunii corespunde pentru $u = 0$ și

$$v = x + y_s;$$

$$\text{avem dară } V_p = - \frac{p (l - x - y_s)^2}{2 l c} (c - x); \quad \text{avem}$$

dară pentru verticala I H

$$\max. V_p = - \frac{p (l - x)^2}{2 l c} (c - x) \quad Y_s = a$$

$$\min. V_p = - \frac{p (l - x + a)^2}{2 l c} (c - x) \quad Y_s = a$$

sau :

$$\max. V_p = - \frac{p(p+g)x(l-x)^2}{2(gl+px)}$$

$$\min. V_p = - \frac{p(p+g)x(l-x-a)^2}{2(l-x)gl+px}$$

sau intrebuintând notatiunile obicinuite

$$\max. V_p = - \frac{ap(p+g)n(N-n)^2}{2(gN+pn)} \quad (40)$$

$$\min. V_p = - \frac{ap(p+g)n(N-n+1)^2}{2(gN+pn)(N-n)} \quad (41)$$

Tensiunea totală va fi dată

$$\max. V = -a \left[\frac{pgn(N-n)}{2(gN+pn)} - gi \left(1 + \frac{1}{2k} \right) \right] + \frac{apgn(N-n)l}{2(gN+pn)}$$

sau simplificând

$$\max. V = a gi \left(1 + \frac{1}{2k} \right) \quad (42)$$

$$\min. V = -a \left(\frac{pgn(N-n)}{2(gN+pn)} \right) + gs \left(1 - \frac{1}{2k} \right) - \frac{ap(p+g)n(N-n+1)^2}{2(gN+pn)} \quad (43)$$

TENSIUNEA

verticalelor aferente tălpilor paralele.

Vom obține valoarea acestor tensiuni din formulele precedente în care vom face $c = \infty$; vom avea dăra:

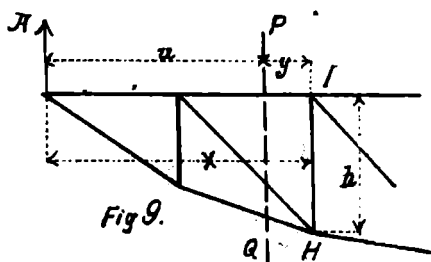


Fig. 9.

a) Tensiunea produsă de greutatea permanentă

$$\max. V_g = - a \left[g \frac{N-2n}{2} - gi \right] \quad (44)$$

$$\min. V_g = - a \left(g \frac{N-2n}{2} + gs \right) \quad (45)$$

Extensiunea produsă de supraincărcare.

$$\max. V_p = \frac{a p n^2}{2 N} \quad (46)$$

$$\min. V_p = \frac{a p (n-1)^2}{2 N} \quad (47)$$

Compresiunea produsă de supraincărcare

$$\max. V_p = - \frac{a p (N-n)^2}{2 N} \quad (48)$$

$$\min. V_p = - \frac{a p (N-n+1)^2}{2 N} \quad (49)$$

Tensiunea totală

$$\max. V = -a \left(g \frac{N-2n}{2} - g_i \right) + \frac{a p n^2}{2 N} \quad (50)$$

$$\min. V = -a \left(g \frac{N-2n}{2} - g_s \right) - \frac{a p (N-n+1)^2}{2 N} \quad (51)$$

Tensiuni in tălpile aferente grindei poligonale.

TALPA SUPERIOARA

a) Tensiunea produsă de greutatea permanentă S_g

Vom face o secțiune cu un plan PQ depărtat de extremitatea A a grindei cu distanța u însemnând cu S_g tensiunea talpei superioare la dreapta planului secant adică tensiunea exercitată asupra nodului I în panoul (n), vom avea luând momentele forțelor elastice și exterioare în raport cu punctul H definit prin abscisa x .

$$-S_g h = \frac{g l}{2} x - g u \left(\frac{u}{2} + y \right) = \frac{g l}{2} x - \frac{g (x-y)^2}{2} - g (x-y) y$$

În panoul (n) vom avea dară

$$\max. S_g = - \frac{g x}{2 h} (l-x) \quad y = 0$$

$$\min. S_g = - \frac{g x}{2 h} (l-x) - \frac{a^2 g}{2 h} \quad y = a$$

sau

$$\max. S_g = - \frac{a^2 g}{2 h} n (N-n) \quad (52)$$

$$\min. S_g = - \frac{a^2 g}{2h} n(N-n) - \frac{a^2 g}{2h} \quad (53)$$

b) *Tensiunea produsă de supraîncărcare S_p .*

Conservând notațiunile de pe pagina 209, vom avea luând momentele în raport cu piciorul M al diagonalei fig. 9.

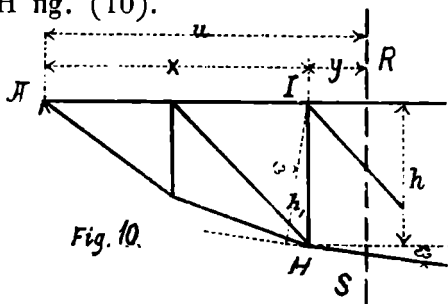
$$-S_p h = p u (1 - \frac{r}{l}) x - p u (x - r) + p v \frac{t}{l} x$$

sau simplificând

$$S_p = - \frac{p}{l h} (u r (l - x) + v t x)$$

După acesta se vede că maximum compresiunii în talpa superioară se produce pentru maximum lui u și v , adică când grinda este încărcată compl.t.

În acest caz avem luând momentele în raport cu punctul H fig. (10).



$$-S_p H = \frac{pl}{2} x - pu \left[\frac{u}{2} + y \right]$$

Vom avea dară ca în cazul precedent

$$\max. S_p = - \frac{a^2 p}{2h} n (N-n) \quad (54)$$

$$\min. S_p = - \frac{a^2 p}{2h} n (N-n) - \frac{a^2 p}{2h} \quad (55)$$

c) *Tensiunea totală S.* Cele două tensiuni produse de greutatea proprie și de supraîncărcare fiind negative, vom avea:

$$\max. S = - \frac{a^2 g}{2h} n (N-n) \quad (56)$$

$$\min, S = - \frac{a^2(p+g)n}{2h}(N-n) + \frac{a^2(p+g)}{2h} \quad (57)$$

TALPA INFERIOARA

a) Tensiunea produsă de greutatea permanentă I_g fig. (10).

Vom face o secțiune verticală prin planul R S și vom însemna cu I_g tensiunea exercitată în panoul $(n+1)$ asupra nodului H, adică la stînga planului secant.

Luând momentele în raport cu punctul I vom avea :

$$I_g h_1 = \frac{gl}{2} x - gu \left(x - \frac{u}{2}\right)$$

punând $h_1 = h \cos \omega$

și $u = x + y$

această formulă devine

$$y = -\frac{gl}{2h \cos \omega} (1 \cdot x - x^2 + y^2)$$

vom avea dară

$$\max. I_g = \frac{a^2 g n}{2h \cos \omega} (N - n) + \frac{a^2 g}{2h \cos \omega} \quad (58) \quad y = a$$

$$\min, I_g = \frac{a^2 g n}{2h \cos \omega} (N - n) \quad (59) \quad y = 0$$

b) Tensiunea produsă de suprîncărcare I_p . — Se poate vedea ca mai sus că maximum acestei tensiuni se va produce când grinda este încărcată complet. Vom avea dără ca mai sus

$$\max. I_p = \frac{a^2 p n}{2h \cos \omega} (N - n) + \frac{a^2 p}{2h \cos \omega} \quad (60)$$

$$\min. I_p = \frac{a^2 p n}{2h \cos \omega} (N - n) \quad (61)$$

c) Tensiunea totală I

$$\max. I = \frac{a^2 (p+g) n (N-n)}{2h \cos \omega} + \frac{a^2 (p+g)}{2h \cos \omega} \quad (62)$$

$$\min, I = \frac{a^2 g n}{2h \cos \omega} (N-n) \quad (63)$$

(Va urma)