# DETERMINAREA

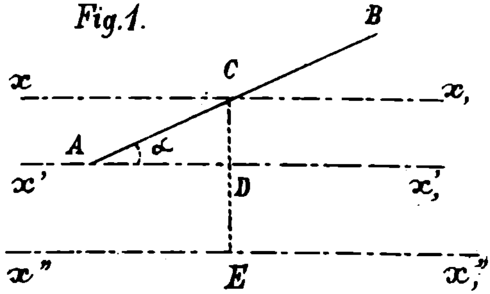
**prin metóde algebrice, a momentuluĭ de inerţie la figurile geometrice plane cele maĭ usitate în aplicaţiunĭ.**

---

(Urmare).

Casul când axa considerată trece prin C, mijlocul dreptei.

*Fig. 1.*




Fie I acest moment de inerţie ce căutăm; fie I′ momentul de inerţie în raport cu axa $x'x'_1$ pe care 'l am găsit egal cu $\frac{l^3 \sin^2\alpha}{3}$ După theorema IV avem:

$I' = I + l \times \overline{CD}^2$ déră $CD = \frac{l}{2} \sin\alpha$ deci

$I' = I + \frac{l^3}{4} \sin^2\alpha$ de unde înlocuind pe I′ prin valórea sea $\frac{l^3 \sin^2\alpha}{3}$ vom deduce

$$I = \frac{l^3 \sin^2\alpha}{3} - \frac{l^3 \sin^2\alpha}{4} = \frac{l^3 \sin^2\alpha}{12}$$

*Insemnare.* Putem scrie $I = \frac{l^3 \sin^2\alpha}{12} = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3 \sin^2\alpha}{3} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3 \sin^2\alpha}{3}$ cea ce însemnéză că momentul de inerţie al dreptei A B în raport cu axa x x, ce trece prin centrul ei nu este alt-ceva de cât suma momentelor de inerție al porțiunilor C A și C B în raport cu aceiași axă; de unde resultă că:

*Momentul de inerție al unuĭ tot este egal cu suma momentelor de inerție ale părților ce compun acel tot.*

Casul când porțiunea de drépta A B nu întêlnesce axa considerată x″ x″₁. Dacă însemnăm prin I″ momentul de inerție în raport cu acéstă axă, după theorema IV avem:

$$I'' = I + l \times \overline{CE}^2 = \frac{l^3 \sin^2 \alpha}{12} + l\, \overline{CE}^2 \text{ séŭ}$$

inlocuind pe C E prin $d$ avem:

$$I'' = \frac{{}^3 \sin^2 \alpha}{12} + l d^2$$

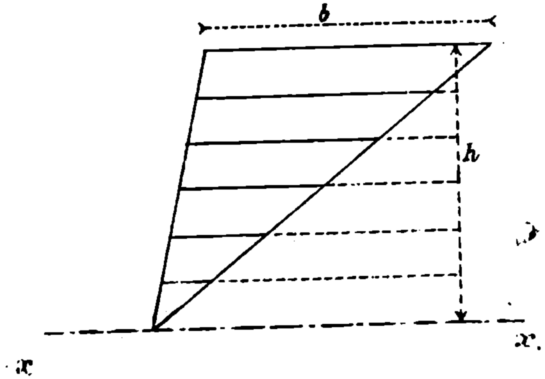
Déca facem $\alpha = 0$, atuncĭ sin $\alpha = 0$ și formula ne dă momentul de inerție al uneĭ drepte în raport cu o axă paralelă cu drépta.

$$I'' = l d^2.$$

*Momentul de inerție al unuĭ triunghiŭ.*

1). Casul când axa trece printr'un vêrf al triunghiuluĭ și este paralelă cu laturea opusă la vêrf.

*Fig. 2.*



Fie $x x_1$, axa considerată. Să însemnăm prin $b$ lungimea laturi paralelă cu axa și prin $h$ distanța acestei laturi la axe. Dacă împărțim distanța $h$ în $n$ părți egale și ducem prin punctele de divisiune paralele cu axa, elementele cari compun momentul de inerție sunt următórele:

$$\frac{b}{n} \cdot \frac{h}{2n} \left(\frac{h}{2n}\right)^2 = \frac{b h^3}{8n^4} \cdot 1^3$$

$$\frac{3b}{n} \cdot \frac{h}{2n} \left(\frac{3h}{2n}\right)^2 = \frac{b h^3}{8n^4} \cdot 3^3$$

$$\frac{5b}{n} \cdot \frac{h}{2n} \left(\frac{5h}{2n}\right)^2 = \frac{b h^3}{8n^4} \cdot 5^3$$

$$\vdots$$

$$\frac{(2n-3)b}{n} \cdot \frac{h}{2n} \left[\frac{(2n-3)h}{2n}\right]^2 = \frac{b h^3}{8n^4} (2n-3)^3$$

$$\frac{(2n-1)b}{n} \cdot \frac{h}{2n} \left[\frac{(2n-1)h}{2n}\right]^2 = \frac{b h^3}{8n^4} (2n-1)^3$$

și făcênd sumă vom avea

$$I = \frac{b h^3}{8n^4} \left[1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3\right]$$

Se deduce fără dificultate că $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$ prin urmare

$$I = \frac{b h^3}{8n^4} \cdot n^2(2n^2-1) = \frac{b h^3}{8n^4}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)n^4 = \frac{b h^3}{8}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Décă facem acum să créscă $n$ tindiend cotra $\infty$, $\frac{1}{n^2}$ tinde cotra 0, deci la limită, vom avea

$$I = \frac{b h^3}{4}.$$

2). Casul când axa paralelă cu una din laturi trece prin centrul de gravitate al triunghiului.

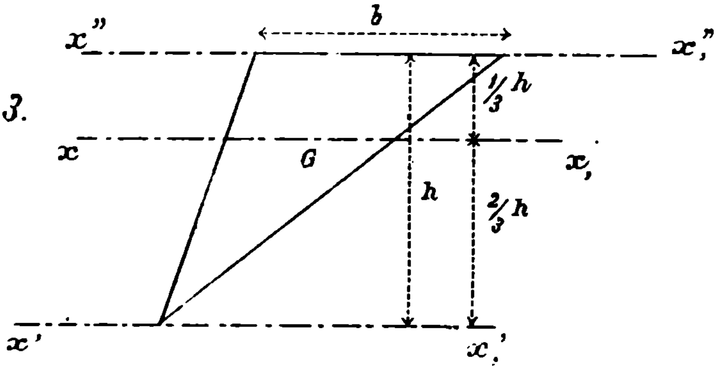



Fig. 3.

Fie I momentul de inerție căutat și I' momentul de inerție în raport cu axa $x'x'_{,}$. După theorema IV avem:

$$I' = I + \frac{b\,h}{2}\left(\frac{2\,h}{3}\right)^2 = I + \frac{2\,b\,h^3}{9} \text{ deci}$$

$$I = I' - \frac{2\,b\,h^3}{9}; \quad \text{însă } I' = \frac{b\,h^3}{4}; \text{ prin urmare}$$

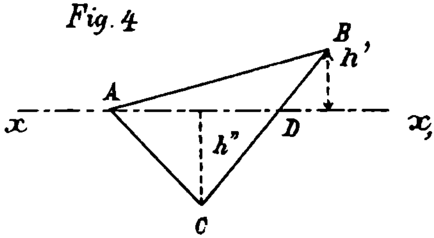
$$I = \frac{b\,h^3}{4} - \frac{2\,b\,h^3}{9} = \frac{b\,h^3}{36}.$$

3). Casul când axa coincide cu una din laturi. Păstrând notația de mai sus și însemnând prin I'' momentul de inerție căutat, tot după theorema IV avem:

$$I'' = I + \frac{b\,h}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h^3}{18} = \frac{b\,h^3}{12}.$$

4). Casul când axa taie triunghiul trecênd printr'unul din vêrfurile lui. Considerăm triunghiul ca compus din

Fig. 4

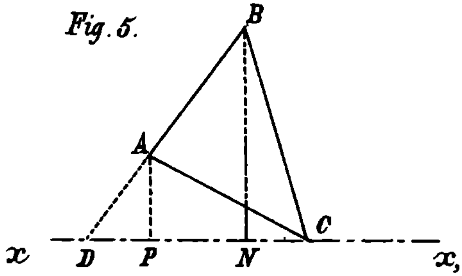


două triunghiurĭ adecă ABD și ADC și pentru fie care din aceste triunghiurĭ putem aplica casul de sub 3o); prin urmare vom avea :

$$I = \frac{AD.h'^3}{12} + \frac{AD.h''^3}{12} = \frac{AD}{12}(h'^3 + h''^3)$$

5). Casul când axa trecênd printr'unul din vêrfurile triunghiuluĭ nu taie triunghiul.

Fig. 5.




Fie ABC triunghiul considerat; dacă prelungim AB până ce întâlnesce axa, avem triunghiul BCD care este compus din triunghiul ABC și ACD. Dacă însemnăm prin

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | momentul | de inerție | al triunghiuluĭ | ABC |
| I' | » | » | » | ACD |
| I'' | » | » | » | BCD |

vom avea

$I'' = I + I'$ de unde

$I = I'' - I'$ însă d'altă parte avem :

$$I'' = \frac{DC \cdot \overline{BN}^3}{12}$$

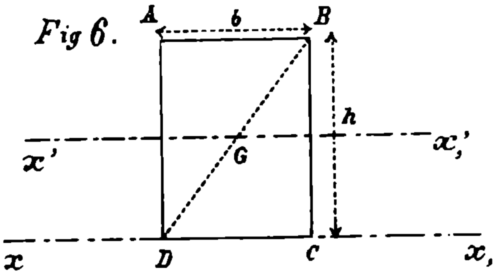
$$I' = \frac{DC.\overline{AP}^3}{12}$$ și prin urmare

$$I = \frac{DC}{12}(\overline{BN}^3 - \overline{AP}^3)$$

*Momentul de inerție al unuĭ dreptunghiŭ.*

1). Casul când axa coincide cu una din laturî. Se póte determina momentul de inerție direct cum s'aŭ determinat pentru triunghiu în casul de sub 1 ; se determină însă și în modul următor : se póte considera dreptunghiul ca format din două triunghiurî

Fig 6.




Fie $I_1$ momentul de inerție al luî ABD
„ $I_2$ „ „ BCD
și décă însemnăm prin I momentul de inerție al dreptunghiuluî ABCD vom avea :

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{însă}$$

$$I_1 = \frac{b\ h^3}{4}$$

$$I_2 = \frac{b\ h^3}{12} \quad \text{deci}$$

$$I = \frac{b\ h^3}{4} + \frac{b\ h^3}{12} = \frac{b\ h^3}{4}.$$

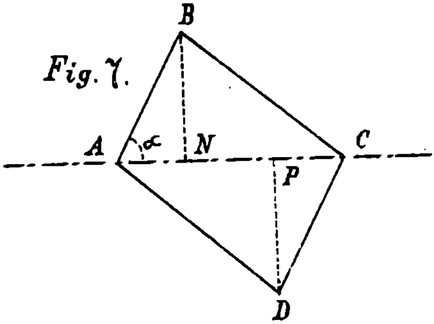
2). Casul când axa paralelă cu una din laturî trece prin centrul de gravitate al dreptunghiuluî. Insemnând prin I' momentul de inerție în raport cu axa $x' x'_1$ și prin I pe cel în raport cu axea x x , după theorema IV vom avea :

$$I = I' + b\ h.\left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \text{de unde}$$

$$I' = \frac{b\ h^3}{3} - \frac{b\ h^3}{4} = \frac{b\ h^3}{12}.$$

3). Casul când axea coincide cu una din diagonale

*Fig. 7.*




In acest cas avem fără nici uă dificultate

$$I = \frac{AC}{12} \cdot \overline{BN}^3 + \frac{AC}{12} \overline{PD}^3$$ si fiindcă BN = PD vom avea

$$I = \frac{AC}{6} \overline{BN}^3.$$

Décă însemnăm pe AB prin $b$ și pe AD prin $h$ vom avea

$$BN = b \sin \alpha \text{ și } AC = \frac{h}{\sin \alpha} \quad \text{deci}$$

$$I = \frac{b\, h^3 \cos^2 \alpha}{6} = \frac{h\, b^3 \sin^2 \alpha}{6}.$$

Pentru casul când axea trecênd printr'unul din vêrfurile dreptunghiuluĭ este paralelă cu diagonala, se operédiă identic ca în cazurile tratate maĭ sus aplicând theorema IV.

*Momentul de inerție al unuĭ patrat.* Pentru pătrat n'avem de cât să aplicăm formulele de la dreptunghiŭ făcênd $b = h$; deci vom avea:

1⁰) Pentru casul când axea coincide cu una din laturĭ

$$I = \frac{c^4}{3} \qquad c \text{ fiind laturea pătratuluĭ.}$$

2⁰) Pentru casul când axa paralela cu una din laturĭ trece prin centrul de gravitate, vom avea.

$$I = \frac{c^4}{12}$$

3). In fine pentru casul când axea coincide cu una din diagonale vom avea:

$$I = \frac{c^4}{6} \sin^2 \alpha$$

ênsĕ în casul unuĭ patrat $\alpha = 45^0$ şi prin urmare $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; decĭ $\sin \alpha = \frac{2}{4}$ şi atuncĭ

$$I = \frac{c^4}{12}$$

Décă comparăm casul 2) cu 3) de la patrat vedem că momentul de inerţie al unuĭ patrat în raport cu diagonala ca axa, este egal cu momentul sĕŭ de inerţie în raport cu axa ce trecând prin centrul sĕŭ este paralelă cu una din laturĭ. Acéstă egalitate de momente de inerţie în aceste două casurĭ face să reese următorul fapt că: uă grindă cu secţiune pătrată lucrézā la flexiune în condiţiunĭ aprópe egale de resistenţă, fie că forţele carĭ produc flexiunea lucrédă paralel cu o lature, fie că ele lucrédă paralel cu diagonala; saŭ cu alte cuvinte că uă grindă cu secţiune patrată, din puntul de vedere al flexiuneĭ se póte aşeda fie pe una din laturĭ, fie pe una din muchiĭ şi resistenţa va fi aprópe aceiaşĭ.

(Va urma).