Determinarea prin metóde algebrice a momentuluĭ de inerție la figurile geometrice plane cele maĭ usitate în aplicațiunĭ.

(Urmare)

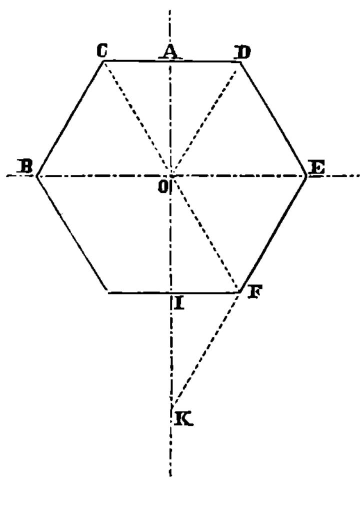
In mod identic că pentru drept unghiŭ și pătratu se determină momentul de inerție al unuĭ paralelogram, romb și chiar al unuĭ trapez.

Momentul de inerție al unui exagen regulat.

1°) In raport cu una din diagonalele sale ca axe:

Fie c laturea exagonuluĭ; descompunênd exagonul în triunghiurĭ vom avea: că momentul de inerție I al exagonuluĭ este egal au îndoitul momentuluĭ de inerție al părțĭ B C D E.

Pentru partea B C D E vom avea:



Momentul de inerție al lui COD $=\frac{CD.\,\overline{SO}^3}{4}$

» » » » » BOC $=\frac{BO.\,\overline{SO}^3}{12}$

» » » » » DOE $=\frac{OE.\,\overline{SO}^3}{12}$

prin urmare :

$$I=2\left(\frac{c.\,\overline{SO}^3}{4}+\frac{c.\,\overline{SO}^3}{4}\right)$$

De altă parte sciu din geometrie că $BO=\frac{c}{2}\sqrt{3}$ și

$\overline{SO}^3=\frac{3c^3\sqrt{3}}{8}$ decĭ atuncĭ

$$I=2\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{48}\right)3c^4\sqrt{3}=\frac{5\,c^4\sqrt{3}}{16}$$

2°) In raport ca axe cu uă linie care trecând prin centru să fie perpendiculară pe diagonala BE.

Păstrând notațiunile de maĭ sus vom avea :

$I=\frac{2\,OI.\,\overline{IF}^3}{12}+\frac{2.\,OK}{12}(\overline{OE}^3-\overline{IF}^3)$ și cum după figură avem :

$OI=\frac{c}{2}\sqrt{3}$ $IF=\frac{c}{2}$....$OK=c\sqrt{3}$. $OE=c$ substituind și semplificând vom obține.

$$I=\frac{5\,C^4\sqrt{3}}{16}$$

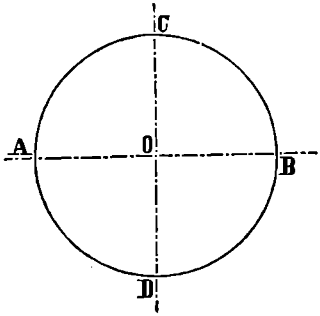
Adică cele două momente de inerție, unul în raport cu uă diagonală ca axe și altul în raport, ca axe, cu uă linie care trecând prin centru este perpendiculară pe două laturĭ paralele esagonuluĭ, sunt egale; cas analo, cu cel care 'l am vĕḑut la pătratu.

In mod analog se determină momentul de inerție a tutulor poligónelor regulate și chiar neregulate; și de óre-ce metódele sunt identice ca cele deja întrebuințate cred înutil de a insista şĭ asupra celor alte poligóne.

Momentul de inerție al unuĭ cerc.

1o) In raport cu un diametru ca axe :

Pentru cerc nu putem întrebuința acelaș mod de descompunere, ce am întrebuințat pentru linie dréptă, pentru triunghiu etc. pentru a evita calcule destul de complicate și de lungi și cari câte uă dată devin obositóre, în casul de față vom face us de proprietățile momentului de inerție exprimate prin theorema II (vedi buletinul din Martie și Aprilie).



Din causa proprietăților cercului, momentul sĕu de inerție în raport cu un diametru, ca axe, este același pentru tóte diametrele (ori-care din diametru).

Fie dar I momentul de inerție în raport cu un diametru óre care.

Fie I_0 momentul de inerție al cercului în raport cu punctul o (momentul de inerție polar).

După theorema II vom avea:

$$I_0 = I + I = 2I \text{ și prin urmare}$$

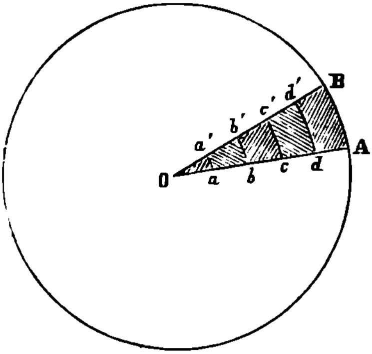
$$I = \frac{I_0}{2}$$

Prin urmare dacă am cunósce momentul de inerție polar al cercului; jumĕtate din acest moment ar fi momentul de inerție în raport cu un diametru; să căutăm dar mai ântâi:

Momentul de inerție polar al cercului în raport cu centrul sĕu.

Fie cercul de rad̦ă r=OA; se considerăm sectorul AOB. Rad̦a OAO împărțim în n părți egale oa, ab, bc....

Fie-care din aceste porțiuni de rad̦ă vor avea ca valórea $\frac{r}{n}$.



Să însemnăm prin ω lungimea arcului pe rada egală cu unitatea şi corespundător la unghiul de la centru AOB.

Evaluănd suprafeciele elementare oa,a, ab b,a, b,c, c,b precum şi momentele lor de inerţie în raport cu punctul o (centrul cercului) vom avea :

supr. lui o a $a_1 = \frac{\omega r}{n} \cdot \frac{r}{2n} = \frac{\omega r^2}{2n^2}$; şi mom. de in. $= \frac{\omega r^2}{2n^2} \cdot \frac{r^2}{2n^2} = \frac{\omega r^4}{2n^4} \cdot 1^3$

» $abb_1a_1 = \frac{\omega^2 r}{n} \cdot \frac{r}{n} - \frac{\omega r^2}{2n^2} = \frac{3\omega r^2}{2n^2}$ » $\frac{3\omega r^2}{2n^2} \cdot \left(\frac{2r}{2n}\right)^2 = \frac{\omega r^4}{8n^4} \cdot 3^3$

» $bcc_1b_1 = \frac{\omega 3r}{n} \cdot \frac{3r}{2n} - \frac{2\omega r^2}{n^2} = \frac{5\omega r^2}{2n^2}$ » $\frac{5\omega r^2}{2n^2} \cdot \left(\frac{5r}{2n}\right)^2 = \frac{\omega r^4}{3n^4} \cdot 5^3$.

» » $\frac{7\omega r^2}{2n^2}$ » $\frac{7\omega r^2}{2n^2} \left(\frac{7r}{2n}\right) = \frac{\omega r^4}{8n^4} 7^3$.

$\frac{(2n-1)\omega r^2}{2n^2}$ » $\frac{(2n-1)\omega r^2}{2n^2} \cdot \left[\frac{(2n-1)r}{2n}\right]^2 =$

$\frac{\omega r^4}{8n^4} \cdot (2n-1)^3$.

Făcând acum suma vom avea pentru momentul de inerţie al sectorului.

$$I_{\text{sect.}} = \frac{\omega r^4}{8n^4}\left[1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots (2n-3)^3 + (2n-1)^3\right]$$

şi fiind că se scie că $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + (2n-1) = n^2(2n^2-1)$ vom avea

$$I_{sect.} = \frac{\omega r^4}{8} \frac{n^2(2n^2-1)}{n^4} = \frac{\omega r^4}{8}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)$$

și făcând ca n să tindă către ∞, termenul $\frac{1}{n^2}$ tinde cătră o; deci la limită:

$$I_{sect.} = \frac{\omega r^4}{4}$$

Prin urmare pentru un sector circular vedem că momentul sĕŭ de inerție polar în raport cu centrul sĕŭ este

$$I_{sect.} = \frac{\omega r^4}{4} = \frac{s}{4}. r^2$$ s fiind lungimea arculuĭ ce mărginesce sectorul adecă $s = \omega$ r.

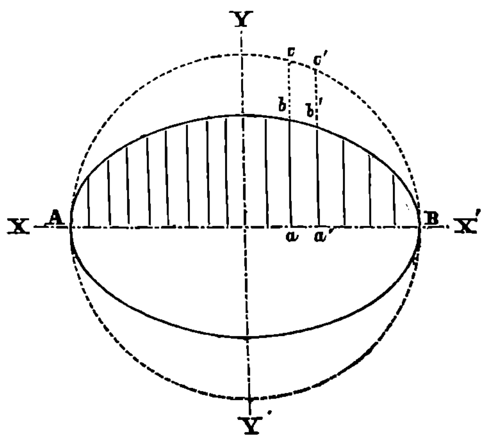
Pentru cerc n'avem decât în formula pentru sector să schimbăm pe ω în 2π și vom avea momentul de inerție al cerculuĭ în raport cu centrul sĕu ca pol adică

$$I_o = \frac{\Pi r^4}{2}$$

Și după cele dise maĭ sus, momentul de inerție al cerculuĭ în raport cu un diametru óre-care, ca axe va fi:

$$I = \frac{I_o}{2} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

2o) In raport cu o linie óre-care ca axe. Aplicând theorema IV, acest moment de inerție se găsesce fără cea maĭ mică dificultate.



Momentut de inerție al uneĭ elipse în raport cu unul din axele sele.

Dacă considerăm cercul descris pe axul cel mare ca diametru; pentru momentul de inerție al acestul cerc în raport cu axul $x\,x'$ avem, după definiția momentulul de inerție și după methódele întrebuințate pînă aci

$$\frac{I}{2}=\Sigma\ aa'\left(\frac{ac+a'c'}{2}\right)\left(\frac{ac+a'c'}{4}\right)^2=\Sigma\, a\,a'(a\,c+a'c')^3\,\frac{1}{32}$$

Să presupunem că $a\,a'$ ar fi egal cu $\frac{AB}{32.n}$, atunci putem scrie:

$$(1)\ \frac{I}{2}=\Sigma\,\frac{AB}{n}.\frac{(ac+a'c')^3}{32}=\frac{AB}{32.n}\ \Sigma\,(a\,c+a'c')^3.$$

Dacă acum însemnăm prin I' momentul de inerție al elipsel în raport cu axea xx', vom avea tot după aceleașl considerații:

$$\frac{I}{2}=\Sigma\,aa'\left(\frac{ab+a'b'}{2}\right)\left(\frac{ab+a'b'}{2}\right)^2=\Sigma\,(a\,b+a'\,b')^3.\ \frac{1}{32}$$

și dacă înlocuim pe $a\ a'$ prin $\frac{AB}{n}$ vom avea:

$$(2)\ \frac{I'}{2}=\Sigma\,\frac{AB}{n}.\frac{(ab+a'b')^3}{32}=\frac{AB}{32\,n}\ \Sigma\,(ab+a'b')^3.$$

Dacă acum împărțim egalitatea (1) cu (2) vom avea:

$$\frac{I}{I'}=\frac{\Sigma\,(ac+a'c')^3}{\Sigma\,(a\,b+a'b')^3}$$

După proprietățile elipsel avem; însemnând prin a jumětate din axul cel mare și prin $\bar{b}$ jumětate din axul cel mic:

$$\frac{a\,c}{a\,\bar{b}}=\frac{a}{\bar{b}}$$

$$\frac{a'c'}{a'\,\bar{b}'}=\frac{a}{\bar{b}}\quad \text{adică}$$

$$\frac{a\,c}{a\,\bar{b}}=\frac{a'c'}{a'b'}\ \text{saŭ}\ \frac{a\,c+a'\,c'}{a\,\bar{b}+a'\,\bar{b}'}=\frac{a}{\bar{b}}.\ \text{și prin urmare}$$

$$\frac{\Sigma\,(a\,c+a'c')^3}{\Sigma\,(ab+a'\bar{b}')^3}=\frac{a^3}{\bar{b}^3}.\quad \text{atuncl}\ \frac{I}{I'}\ \text{devine}$$

$$\frac{I}{I'}=\frac{a^3}{\bar{b}^3}.$$

Din cele precedente scim că $I = \frac{\pi a^4}{4}$. înlocuind vom avea :

$I' = \frac{\pi a^4}{4} \times \frac{\overline{b}^3}{a^3} = \frac{\pi b a^3}{4}$. iară în raport cu axul yy' am avea $I'' = \frac{\pi \overline{b} a^3}{4}$.

(Va urma). **Flor Pomponiu.**