CALCULUL GRINDILOR SCHWEDLER*)

(Urmare)

GRINDI CU TABLIER INFERIOR

La grindile cu tablier inferior supraîncărcarea fiind, de ordinar, transmisă numai la noduri prin piesele transversale, este inutil a studia aceste grindi, în ipotesa unei supraîncărcări *uniform distribuită și transmisă direct grindilor.*

PARTEA II.

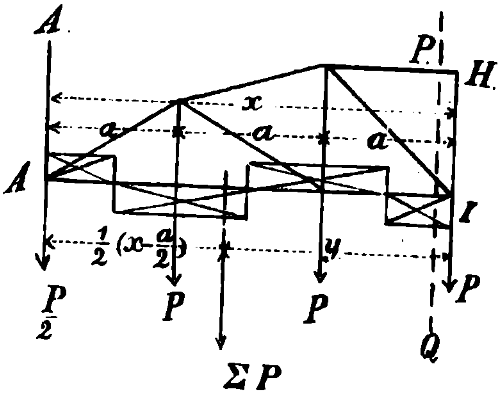
SUPRAINCĂRCAREA ESTE UNIFORM DISTRIBUITĂ ȘI TRANSMISĂ TĂLPILOR NUMAI LA NODURI

CAPITOLUL I.

DETERMINAREA FORMEI TALPEI POLIGONALE

Pentru determinarea formei talpei poligonale vom considera grinda $A\ I$, în care vom face secțiunea verticală $P\ Q$.

Fig. 11.



*) A se vedea Numerul din Marte-Aprilie,

Forțele P, remase la stânga planului secant, vor determina, împreună cu reacțiunea A, forța taietóre și momen - de flexiune în secțiunea PQ, și prin urmare forma grindei

Pentru greutatea permanentă, vom avea $P = ag$, și suma greutăților aflate la stinga planului secant, va fi

$$\Sigma P = \frac{ag}{2} + (n-1)\, ag$$

n fiind numĕrul de ordine al panoului considerat. Punând $x = an$, egalitatea de mai sus devine

$$\Sigma P = g\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Vom avea dară

$$Tg = g\,\frac{l}{2} - g\left(x - \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{ag}{2} \quad (64)$$

$$Mg = g\frac{l}{2}x - g\left(x - \frac{a}{2}\right).\ y$$

După figură se vede că

$$y = x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

Prin urmare

$$Mg = g\frac{l}{2}x - \frac{g}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \quad (65)$$

Pentru supraîncărcare vom avea asemenea

$$\Sigma P = p\,\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Valorile lui Tp și Mp se deduc, dară, din formulele (b) și (b_1) pag. 100 înlocuind u cu $x - \frac{a}{2}$; vom obține ast-fel

$$Tp = -\frac{p}{2l}\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (66)$$

$$Mp = \frac{p}{2l}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \left(x - \frac{a}{2}\right)(l - x) \quad (67)$$

Adunând formulele (64) cu (66) și (65) cu (67) avem

$$T=g\left(\frac{l}{2}-x\right)-\frac{p}{2l}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{ag}{2} \quad (68)$$

$$M=g\,\frac{l}{2}x+\frac{p}{2l}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2(l-x)-\frac{g}{2}\left(x^2-\frac{a^2}{4}\right) \quad (69)$$

Punând în aceste formule $x=an$ și $l=aN$ obținem

$$T=\frac{a}{2}\left[(N-2n+1)\,g-\frac{p}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right] \quad (70)$$

$$M=\frac{a^2}{2}\left[\left(Nn-n^2+\frac{1}{2}\right)g+\frac{p}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)(N-n)\right] \quad (71)$$

Dacă am înlocui aceste valori ale lui T și M în formula

$$D=\frac{1}{cos\alpha}\left(T-M\frac{dh}{dx}\right) \quad (1)$$

am putea obține, urmând aceiași cale ca la pag. 101, equațiunea talpei curbe. Este însă mai simplu a procede în modul următor:

Se va calcula o valóre aproximativă pentru $\frac{dh}{dx}$ cu formulele (7) și (8) séu (11) și (12) pag. 206, și valorile lui T și M cu formulele (70) și (71); Se vor întroduce aceste valori în formula (1) și se va obține pentru h o valóre aproximativă.

Repețind operațiunea, cu aceste nouĕ valori ale lui h și $\frac{dh}{dx}$, vom obține pentru h o valóre mai apropiată. Cu una sau două operațiuni de acest fel se ajunge la o aproximațiune suficientă.

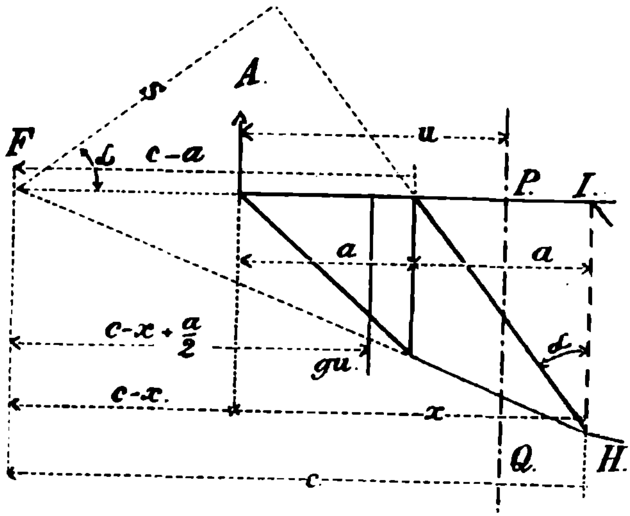
CAPITOLUL II.

STUDIUL TENSIUNILOR SAU FORȚELOR ELASTICE

Tensiunile diagonalelor aferente părților poligonale ale tălpilor

a) Calculul tensiunilor produse de greutatea permanentă, Dp. Sĕ considerăm fig. (4) diagonala al cărui picior H, este definit prin abscisa $x = an$; n fiind numĕrul de ordine al panoului in care se găsesce diagonala considerată.

Fig. 4.



Se facem o secţiune cu un plan PQ a cărui positiune póte fi *ori-care*, greutăţile fiind aplicate numai la noduri.

După cele ce am ḑis, suma greutăţilor aflate la stînga planului secant fiind:

$$\Sigma P = g\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Se va produce în diagonala considerată aceiaşi tensiune ca şi când lungimea grindei la stînga planului secant ar fi $x - \frac{a}{2}$

Vom avea dară, acéstă tensiune punênd, în equaţiunea (14) bis. pag. 207.

$$u = x - \frac{a}{2}$$

Prin urmare :

$$\mathrm{D}g\ s = \frac{g\,l}{2}\,(c-x) - g\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(c-\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\right)\ (72)$$

séu : $$\mathrm{D}g = \frac{a\,g}{z\,z}\left[(k-n)\,\mathrm{N}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\right](73)$$

In aceste formule, precum și în cele următóre

$z = k$ Cos α (13) grindi cu tablíer inferior.

$z = (k-1)$ Cos α (14) grindi cu tablier superior.

$$k = \frac{c}{a} = \frac{h}{\frac{d\,h}{d\,x}}$$

Pentru h și $\frac{d\,h}{d\,x}$ vom lua valorile determinate în capitolul precedent.

b) Calculul tensiunei produsă de supraîncărcare, Dp.

După cum am vědut în Partea I, maximum compresiunei Dp, se va produce când grinda va fi complet încărcată la stînga piciorului diagonalei considerate.

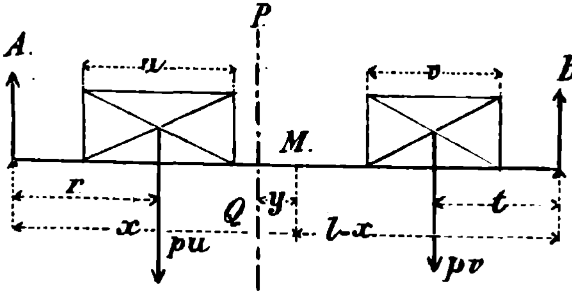
In acest cas, însă, $\Sigma\,\mathrm{P} = p\left(x-\frac{a}{2}\right)$; vom avea dară min Dp punênd în equatiunea (19) pag. 209.

$$u = x - \frac{a}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

$$v = 0$$

Fig. 5.



$$Min\ \mathrm{D}p.\ s = -p\left(x-\frac{a}{2}\right)\left[\frac{(c-x)}{l}\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\right)+\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\right]$$

séu :

$$\text{min. } \mathrm{D}p.\ s = -\frac{p}{2l}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\left(c-x+l\right) \quad (74) \text{ sèu}$$

$$\text{min. } \mathrm{D}p. = -\frac{ap}{2\mathrm{N}z}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\left(k+\mathrm{N}-n\right) \quad (75)$$

Maximum extensiunei Dp. se va obține când grinda va fi complet încărcată la drépta piciorului diagonalei. Vom avea valórea sa punênd în formula (19)

$$v = l - x$$

$$u = 0$$

$$t = \frac{v}{2} = \frac{l-x}{2}$$

Prin urmare

$$\text{max. } \mathrm{D}p.\ s = p\,\frac{(l-x)^2}{2l}\,(c-x) \text{ séu}$$

$$\text{max. } \mathrm{D}p. = \frac{ap}{2\mathrm{N}z}\,(k-n)\,(\mathrm{N}-n)^2 \quad (76)$$

c) Calculul tensiunei totale D. Maximum D se va obține adunând valorile date de formulele (73) și (76) éră minim $\mathrm{D} = 0$

Tensiunile aferente părților paralele ale tălpilor.

Aceste tensiuni se obțin prin formulele stâbilite pentru grindi paralele cari sunt :

a) *Tensiunea produsă de greutatea permanentă* Dg

$$\mathrm{D}g = \frac{g}{2\cos\alpha}(l + a - x) \quad (77) \text{ séŭ}$$

$$\mathrm{D}g = \frac{ag}{2\cos\alpha}\,(\mathrm{N} - 2n + 1) \quad (78)$$

b) *Tensiunea produsă de supra încărcare*, Dp.

$$\text{min. } \mathrm{D}p = -\frac{p}{2l\cos\alpha}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 \quad (79) \text{ séŭ}$$

$$\text{min. } \mathrm{D}p = -\frac{ap}{2N\cos\alpha}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \quad (80)$$

$$\text{max. D}p = \frac{p\,(l - x)^2}{2\,l\,\cos\alpha}\ (81) \text{ séu}$$

$$\text{max. D}p = \frac{a\,p\,(N - n)^2}{2\,N\,\cos\alpha}\ (82)$$

c) *Tensiunea totale,* D

Maximum D se va obține adunând valorile date de equațiunile (78) și (82), éră minimum D adnnând valorile date de equațiunile (78) și (80).

Formulele (72) până la (82) sunt aplicabile atât pentru grinḑi cu tablier superior cât și pentru grinḑi cu tablier inferior.

Tensiunile verticalelor aferente părților poligonale ale tălpei

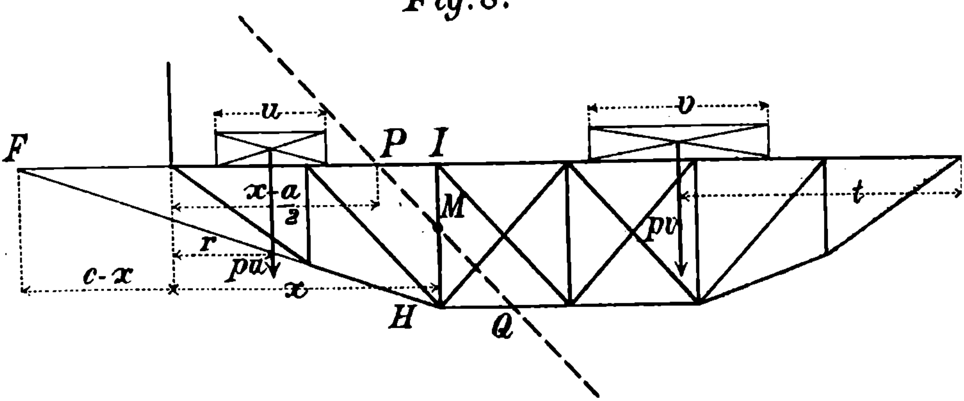
Grinzi cu tablier superior

a) *Tensiunea produsă de greutatea permanentă.* Vg.

Făcênd o secțiune înclinată cu planul P Q fig. 8 în panoul pentru care $x = na$, și însemnând cu g_s și g_i greutatea pe m. liniar aferentă talpei superióre și talpei inferióre, este lesne de vêḑut că forțele exterióre aflate la stînga planului secant vor fi

$$\text{A}g = g\frac{l}{2}$$

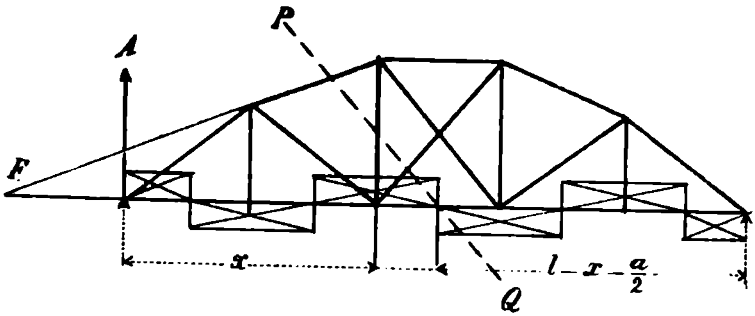
Fig. 8.



$$\Sigma\ P_s = g_s\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

$$\Sigma\ P_i = g_i\ x$$

Fig. 12.



Luând momentele forțelor interióre și exterióre aflate la stînga planului secant în raport cu punctul F vom avea :

$$V_g\, c = -g\frac{l}{2}(c-x) + g_s\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(c-x+\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\right) + g_i\ x\left(c-x+\frac{x}{2}\right)$$

sau $$V_g\, c = -g\frac{l}{2}(c-x) + g_s\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(c-\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\right) + g_i\ x\left(c-\frac{x}{2}\right) \quad (83)$$

sau $$V_g = \frac{a}{2}\frac{g}{}\frac{n}{k}(k-n) + \frac{ag_s}{2\ k}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(2\ K - n - \frac{1}{2}\right) + \frac{ag_i\ n}{k}\left(k-\frac{n}{2}\right), \quad (84)$$

b) *Tensiunile produse de supraincarcare,* V_p.

După cum am vĕzut în Partea I maximum entensiunei se va produce când grinda este complet încărcată până la stînga verticaleĭ considerate. In acest cas

$$\Sigma\ P = p\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

și vom obține maximum Vp făcênd în formula(37) pag. 215

$$u = x - \frac{a}{2}$$

$$r = \frac{u}{2} = \frac{x}{2} - \frac{a}{4}$$

$$v = o$$

Prin nrmarc

$$\text{max. } \bar{V}p = \frac{p}{2\,l\,c}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 (c + l - x) \;(85) \quad \text{seu}$$

$$\text{max. V}p = \frac{a\;p}{2\,N\,k}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 (k + N - n) \;(86)$$

Maximum compesiunei se va afla punênd în equațiunea (37)

$$u = o$$

$$v = l - x$$

$$t = \frac{l-x}{2}$$

Prin urmare

$$\text{Min. V}p = -\frac{p}{2\,l\,c}(l-x)^2 (c - x) \;(87) \quad \text{saŭ}$$

$$\text{Min. V}p = -\frac{a\,p}{2\,N\,k}(N - n)^2 (k - n) \;(88)$$

c) *Tensiunea totale* D. — Maximum se va obține adunând valorile date de equțiunile (84) și (86), èră minimum adunând valorile date, de equațiunile (84) și (88.)

Crindi cu tabiier inferior

a) *Tensiunea produsă de greutatea permanentă, Dg.* Formulele (83) și (84) sunt aplicabile și în acest cas.

b) *Tensiunea produsă de supraîncărcare, Dp.* In acest cas fig. (12) vom avea maximum extensiunei pentru

$$u = x$$

$$r = \frac{x}{2}$$

$$v = o$$

Prin urmare Max. $V_p = \frac{p x^2}{2 l c} (c + l - x)$ (89) séu

Max. $V_p = \frac{a p n^2}{2 N k} (k + N - n)$ (90)

Maximum compresiunei va fi pentru

$$v = l - x - \frac{a}{2}$$

$$t = \frac{v}{2} = \frac{1}{2}\left(l - x - \frac{a}{2}\right)$$

$$u = o$$

Prin urmare Min. $V_p = -\frac{p}{2 l c}\left(l - x - \frac{a}{2}\right)^2 (c - x)$ (91)

Min. $V_p = -\frac{a p}{2 N K}\left(N - n - \frac{1}{2}\right)^2 (k - n)$ (92)

c) *Tensiunea totale D.* Maximum se va obține adunând equațiunile (84) și (90), era minimum adunând equațiunile (84) și (92).

Tensiunile verticalelor aferente tălpilor paralele

Vom obține aceste tensiuni făcênd în equațiunile de mai sus $k = \infty$; vom avea déră:

a) *Tensiunea produsă de greutatea permanentă, Vg.*

$$Vg = a\left[g N + g_i\ n + g_s'\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (93)$$

b) ***Tensiunea produsă de suprîncărcare, Vp***

Pentru grinḑi cu tablier snperior

Max. $Vp = \frac{a p}{2 N}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ (94)

Min. $Vp = -\frac{a p}{2 N} (N - n)^2$ (95)

Pentr grinḑi cu tablier inferior

Max. $Vp = \frac{a p n^2}{2 N}$ (96)

Min. $Vp = -\frac{a p}{2 N}\left(N - n - \frac{1}{2}\right)^2$ (97)

Tensiunea totală V

Pentru grindi cu tablier superior, Maximum se va obține adunând (93) cu (94); Minimum adunând (93) cu (95).

Pentru grindi cu tablier inferior Maximum se va obține adunând (93) cu (96) și Minimum adunând (93) cu (97).

Tensiunile tălpilor aferente grindei poligonale

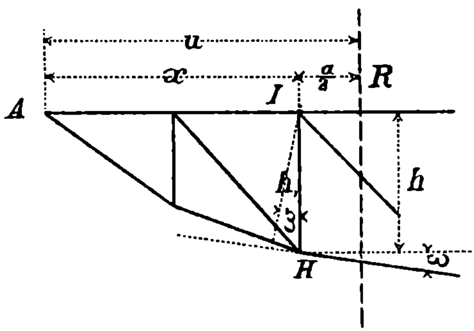
Talpa dréptă

a) Tensiunea produsă de greutatea permanentă, Sp. Conservând aceleași notațiuni ca în Partea I, pagina 218 și însemnând cu S fig. 10. tensiunea talpei drepte vom avea, valórea sa, după cele dise mai sus, punênd în formulele stabilite la pag. 218.

$$u = x + \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{a}{2}$$

Fig. 10.



Prin urmare

$$Sg = -\frac{g}{2h}\left[x(l-x) + \frac{a^2}{4}\right] \quad (98) \text{ séu}$$

$$Sg = -\frac{a^2 g}{2h}\left[n(N-n) + \frac{1}{4}\right] \quad (99)$$

b) Tensiunea produsă de supraîncărcarea Sp,—

Inlocuind în acéstă equaţiune (99) pe g cu p vom avea

$$Sp = -\frac{p}{2h}\left[x(l-x) + \frac{a^2}{4}\right] \quad (100) \text{ séu}$$

$$Sp = -\frac{a^2p}{2h}\left[n(N-n) + \frac{1}{4}\right] \quad (101)$$

c) *Tensiunea totale, produsă de greutatea permanentă şi de supraîncărcare.* Maximum se va obţine adunând valorile date de formulele (99) şi (101); Minimum este dat de formula (99).

Talpa poligonală

a) *Tensiunea produsă de greutatea permanentă, Ig.* Insemnând cu I tensiunea tălpei poligonale fig. (10) vom avea, înlocuind în valórea lui Ig, pag. 220 pe y cu $\frac{a}{2}$.

$$Ig = \frac{g}{2h\ Cos\omega}\left[x(l-x) + \frac{a^2}{4}\right] \quad (102) \text{ seu}$$

$$Ig = \frac{a^2g}{2h\ Cos\omega}\left[n(N-n) + \frac{1}{4}\right] \quad (103)$$

b) *Tensiunea produsă de supraîncărcare, Ip.* Vom avea ca mai sus

$$Ip = \frac{a^2p}{2h\ Cos\omega}\left[n(N-n) + \frac{1}{4}\right] \quad (104)$$

c) *Tensiunea totale, produsă de greutatea permanentă şi de supraîncărcare, I.* Maximum se va obţine adunând valorile date de formulele (103) şi (104) Minimum este dat de formula (103).

Formulele (98) până la (104) sunt aplicabile atât pentru grindi cu tablier superior cât şi pentru grindi cu tablier inferior.

Ne oprim aci cu studiul grindilor Schwedler. Este inutil de a le mai studia din punctul de vedere al unei supraîncărcări compusă de forţe isolate, acest studiu, fiind făcut complet, în cursul de poduri al d-lui Winkler.

Michael M. Romnicianu.