THEORIA UNEI PIESE CE REPAUSEAȚĂ PE DOUĂ CAPETE [1]

Determinarea eforturilor tranșante și momentelor de flexiune.

1. Când o piesă repausează liber pe două capete, influența greutățeĭ pe culee se determinează după teoria levieruluĭ, așa că vom putea in tot-d'auna determina aceste presiuni pe capete, indată ce vom cunoaște legea după care incărcarea este repartisată.

2. Putem să luăm greutatea proprie a podului ca fiind uniform repartisată pe toată lungimea, și se insemnăm prin p greutatea pe metru liniar. Supra-incărcarea poate fi repartisată de diferite manieri pe pod, sau că este uniform repartisată, sau că este concentrată in unele punte, insă indată ce există mai multe punte incărcate, și mai cu seamă cum pentru podurile mari de drum de fer, încărcările sunt pe axe, și se urmăresc la distanțe determinate. influențele se combină ast-fel că putem considera podul ca supra-incărcat uniform pe o lungime mai mult sau mai puțin mare, fără a comite o eroare sensibelă.

In cele ce urmează vom considera atât greutatea proprie, cât și supra-încărcarea că sunt uniform repartisate.

3. Aceste fiind, presupunem variațiunea supra-incărcărei

---

[1]) Această teorie este după autorii: *Fr. Laissle* și *Ad. Schuebler*, cu mai multe desvoltări de calcul.

https://biblioteca-digitala.ro

care o insemnăm k pe unitate de lungime, că pleacă de la o extremitate a podului și vine a'l acoperi pe toată lungimea. Resultă de aici, că un element a podului supra-incărcat are $k+p$ greutatea pe unitate de lungime.

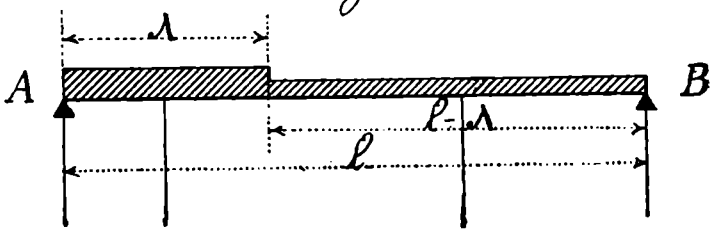
Această greutate, repartisată pe toată lungimea, represintă incărcarea maximă a podului.

Acest mod de incărcare va forma in general basa calculelor noastre.

4. Fie acuma l deschiderea A B a podului (Fig. 1) saŭ aceea a piesei ce se reazimă pe capetele A și B; λ o lungime oare-care ce este incărcată cu greutatea $p+k$, și restul incărcat numai de p, propria greutate a podului.

Lungimea λ fiind luată după voință, calculul următor se aplică la toate casurile.

Fig. 1



Vom determina mai intâi presiunele A și B pe capete.

Pentru determinarea lui A, luăm momentele către cel-alt punt B; avem:

$$A\,l=(p+k)\,\lambda\left(\frac{l-\lambda}{2}\right)+(l-\lambda)\,p\left(\frac{l-\lambda}{2}\right)$$

unde făcând calculul, deducem:

$$A=\frac{pl}{2}+\lambda\,k\left(\frac{2\,l-\lambda}{2l}\right)\quad (I)$$

De asemine pentru B:

$$B\,l=(p+k)\,\frac{\lambda^2}{2}+(l-\lambda)\,p\left(\lambda+\frac{l-\lambda}{2}\right)$$

https://biblioteca-digitala.ro

şi făcând calculul ; avem :

$$B = \frac{pl}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2l} \quad (II)$$

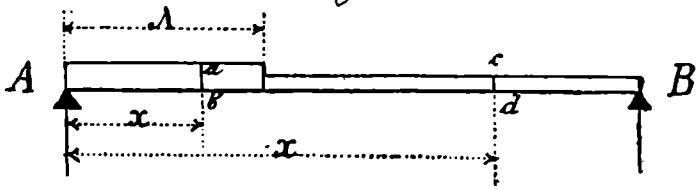
Se determinăm mai departe efortul tranşat şi momentul de flexiune.

Insemnăm prin N, efortul tranşat şi prin M momentul de flexiune.

După cum ştim pentru o secţiune oare-care x, N, represintă suma algebrică a forţelor exterioare asupra acestui fragment, şi M, momentul acestor forţe exterioare luate în raport cu această secţiune x.

Luând ca origină de abcise puntul A (fig. 2), pentru partea *supra-încărcată* vom avea :

Fig. 2



$$N = A - (p + K)\ x \quad (III).$$

$$M = A\ x - (p + K) \frac{x^2}{2} \quad (IV).$$

Iară pentru partea *neîncărcată*, avem :

$$N = A - \lambda K - p\ x \quad (V).$$

$$M = A\ x - \lambda K \left(x - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{p\ x^2}{2} \quad (VI).$$

5. Când supra-încărcarea este pe toată lungimea podului uniform repartisată, greutatea este maximă, şi equaţiunele de maĭ sus devin înlocuind $\lambda = l$, $p + K = q$:

$$A = \frac{pl}{2} + l\,K \left(\frac{2l - l}{2l}\right) = \frac{l}{2}(p + K) = \frac{lq}{2}$$

https://biblioteca-digitala.ro

tot ast-fel găsim și pentru B; făcând acelaș lucru în equațiunele luĭ N și M; vom avea:

$$A = B = \frac{l\,q}{2} \text{ (II-a).}$$

$$N = A - q\,x \text{ (III-a).}$$

$$M = A\,x - \frac{q\,x^2}{2} \text{ (V-a).}$$

Momentul maxim la mijloc, deci $x = \frac{l}{2}$ este:

$$M = \frac{ql}{2}\,\frac{l}{2} - \frac{q}{2}\,\frac{l^2}{4} = \frac{q\,l^2}{8}$$

6. Aceste fiind, calculând pentru un numĕr destul de mare a lui x, eforturile tranșante și momentele de flexiune după equațiunile (III—IV), și purtând pe N și M ast-fel calculate ca ordonate a abciselor x, eară în urmă unind prin o linie puntele extreme ast-fel căpătate, obținem douĕ curbe ce va da pentru fie-care valoare a luĭ x, valorile corespondente a luĭ N și M pe care le luăm după scară.

Curba N se compune din elemente rectilinii a căror inclinațiuni pe axa abciselor sunt proporționale greutăților p și q; eară curba M se compune din arcuri de parabole, a căror axe sunt verticale și a căror parametre sunt invers proporționale aceloraș greutăți p și q.

7. Equațiunele (III—VI) ne daŭ pe N și M numaĭ pentru o valoare determinată a lui λ; pentru a representa toate încărcările posibile, trebuie să determinăm ambele învelitoare a lui N și M, care le cuprinde pe toate celealte; trebuie dară pentru fie-care valoare a lui x, se determinăm pe λ ast-fel ca să deie cele mai mari valori pentru N și M.

Luăm efortul tranșant după equațiunea (V):

$$N = A - \lambda K - p\,x$$

https://biblioteca-digitala.ro

și înlocuim pe A prin valoarea sa din (I) :

$$N = \frac{lp}{2} + \lambda K \left(\frac{2l-\lambda}{2l}\right) - \lambda - px$$

unde făcând calculul, obținem

$$N = \frac{lp}{2} - \frac{K\lambda^2}{2l} - px.$$

Maximul lui N pe o secțiune de abcisă x, evident că va fi, când supra încărcarea va veni până în acest punt; deci $\lambda = x$: înlocuind avem :

$$\text{max. } N = \frac{lp}{2} - \frac{Kx^2}{2l} - px \text{ (VII).}$$

Această equațiune dă curba învălitoare pentru max. N în valoare absolută, când supra-încărcarea se mișcă din A către B.

O a doua curbă simetrică celei-alte este dată de equațiunea :

$$\text{max. } N = \frac{pl}{2} - \frac{K(l-x)^2}{2l} - (l-x) \quad . \quad . \quad . \text{ (VII-a)}$$

și este curba învălitoare valorilor maxime saŭ minime a lui N când supra-incărcarea se mișcă din B către A.

Făcênd în equațiunea (VII) pe rând x=o, x=l, obținem :

$$\text{max. } N = \frac{pl}{2}, \quad \text{max. } N = -\frac{l}{2}\left(p+k\right);$$

de asemenea în equațiunea (VIII-a) pentru x=o :

$$\text{max. } N = -\frac{l}{2}\left(p+k\right)$$

și pentru x=l ; max. $N = \frac{pl}{2}$.

Valorile maxime a lui A și B pe suporturi sunt dară :

$$A = B = \left(p+k\right)\frac{l}{2};$$

https://biblioteca-digitala.ro

iar valoarea la mijloc, se determinează făcênd în equaţiunile (VII), (VIIa), $x = \frac{l}{2}$, obţinem:

$$\max.\ N = \frac{kl}{8}.$$

Aceste valori sunt suficiente pentru determinarea curbelor representate de equaţiunile de mai sus, fiind aceste curbe aproape linii drepte.

8. Pentru momentele de flexiune, curba învălitoare cuprindênd toate curbele M. este parabola ce corespunde la greutatea maximă q uniform repartisată.

Pentru aceasta $\lambda = l$, după equaţiunile (I) şi (II), A şi B sunt maxime; parabola ce corespunde greutăţei maxime, posedă pe capetele A, B, cea mai mare tangentă trigonometrică; o altă curbă nu va putea prin urmare se iasă din curba învălitoare.

In adevĕr luăm equaţiunea (V-a):

$$M = A\,x - \frac{q\,x^2}{2}$$

corespunzătoarea greutăţei maxime uniform repartisată pe toată întinderea.

Această equaţiune se pune şi ast-fel:

$$y = A\,x - \frac{q\,x^2}{2},$$

pentru calculul coeficientului ungular al tangentei la origină, deducem:

$$\frac{y}{x} = A - \frac{q\,x}{2}$$

care pentru $x = o$, acest raport $\frac{y}{x} = A$; A fiind cea mai mare valoare pentru ori-ce altă curbă, avem dar cea mai mare tangentă trigonometrică.

Pentru cel alt capăt, luăm raportul dirivatelor $-\frac{F'x}{F'y}$,

https://biblioteca-digitala.ro

din equaţiunea: $y - A x + \frac{qx^2}{2} = o$; avem:

$-F'x = A - q x$, $F'y = 1$; prin urmare:

$-\frac{F'x}{F'y} = A - q x$, şi pentru $x = l$.

$$-\frac{F'x}{F'y} = A - ql = A - 2 A = - A$$

cea ce arată că tangenta la curbă în puntul B, şi cu cea în A sunt egal înclinate în interior pe axa abciselor; ele se întâlnesc dar în acelaş punt pe axa parabolei.

9. Valorile maxime a lui N şi M, ce obţinem pentru o secţiune oare-care x, prin ajutorul curbelor învălitoare, nu sunt suficiente pentru determinarea dimensiunelor unui pod, de cât când aceste dimensiuni depind de M sau de N; dacă din contra o piesă de construcţie depinde de o dată şi de N şi M, este evident că trebue se întrebuinţăm valorile simultanee a lui N şi M.

Valoarea maximă a efortului tranşant N pentru o secţiune oare-care x, se găseşte după cum am vĕdut (art. 7), când supra-încărcarea a avansat până în acest punt; şi aceste valori sunt date de equaţiunile (VII), (VII-a), după cum supra-încărcarea avansează din A către B sau vice-versa. Există de asemene douĕ curbe M corespondente la N, şi care daŭ pentru fie-care N, momentul maxim de flexiune corespondent M.

Se luăm supra-încărcarea mergênd din A către B, şi că a ajuns până în puntul x; avem după equaţiunea (IV art. 4):

$$M = A x - \left(p + k\right)\frac{x^3}{2}$$

şi înlocuind A prin valoarea sa şi equaţiunea (I) unde $\lambda = x$, avem:

$$M = \left[\frac{pl}{2} + k x \frac{2l - x}{2l}\right] x - (p + k)\frac{x^2}{2}$$

https://biblioteca-digitala.ro

Făcênd calculul, obţinem :

$$M=\frac{pl}{2}x+\frac{k-p}{2}x^2-\frac{k}{2l}x^3 \text{ (VIII).}$$

Valorile maxime ale lui *M*, se obţin luând derivata membrului al doilea cătră x, şi egalându-o cu zero, avem luând această derivată :

$$\frac{pl}{2}+(k-p)x-\frac{3k}{2l}x^2=0,$$

equaţiune de al doilea grad, care resolvită va da pentru x :

$$x=\frac{2l(k-p)\pm\sqrt{4l^2(k-p)^2+12kpl^2}}{6k}$$

unde făcênd calculul :

$$x=l\left(\frac{k-p}{3k}\pm\sqrt{\frac{p}{3k}+\left(\frac{k-p}{3k}\right)^2}\right) \ldots \text{ (IX),}$$

aceste sunt valorile lui x, care dau maximul lui M. De asemenea când supra-încărcarea se mişcă din B cătră A, avem equaţiunea :

$$M=\frac{pl}{2}(l-x)+\frac{k-p}{2}(l-x)^2-\frac{k}{2l}(l-x)^3 \ldots \text{ (VIIIa).}$$

obţinută înlocuind în (VIII) x prin l—x.

Pentru $x=\frac{l}{2}$ la mijloc, avem înlocuind în equaţiunele (VIII) şi (VIII a):

$$M=\left(\frac{p}{8}+\frac{k}{16}\right)l^2.$$

10. Este necesar în mai multe casuri, a cunoaşte puntul x pentru care N este nul, când podul nu este de loc încărcat, sau dacă este în întregimea lui, punctul pentru care N este nul se găseşte la mijlocul podului.

Nu este tot ast-fel când încărcarea se găseşte numai de o singură parte ; în acest cas, puntul se apropie de culea vecină, şi N=o se determinează prin intersecţia curbei,

https://biblioteca-digitala.ro

representată prin equaţiunea (VII. art. 7) cu axa abciselor.

Egalând această equaţiune cu zero, avem:

$$\frac{pl}{2} - \frac{kx^2}{2l} - px = o$$

care resolvită, abcisa pentru care N=o, este:

$$x = l\left(-\frac{p}{k} \pm \sqrt{\frac{p}{k} + \left(\frac{p}{k}\right)^2}\right) \quad \ldots \quad (X).$$

11. Formele stabilite de la I—X avêndu-le, ne propunem să calculăm resultatele pentru şease raporturi diferite a lui $\frac{p}{k} = \frac{\text{greut. proprie}}{\text{supra-încărcare}}$, şi să le representăm toate aceste grafic în figurele de la finele acestui calcul.

Aceste representaţii grafice conţine curbele învalitoare max. M şi max. N, cât şi valorile corespondente a lui M. şi N.

Curba invalitoare max. M şi valorile corespondente N, se găsesc dupe equaţiunile (III a), (V a), şi sunt acelaşi pentru toate raporturile lui $\frac{p}{k}$, căci equaţiunild ce le determinează sunt independente de acest raport.

Curba max. M dată prin:

$$M = Ax - \frac{qx^2}{2}$$

este o parabolă, a cărei ordonată la vârf este 0.125 ql^2; în adevĕr, înlocuind $x = \frac{l}{2}$ şi $A = \frac{ql}{2}$ după equaţiunea (II-a); avem:

$$M = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8} = 0.125\ ql^2.$$

De aseminea curba corespondentă N, se compune din douĕ linii drepte după rabatere şi se întâlnesc în mijlocul axei abciselor.

https://biblioteca-digitala.ro

Ordonatele pe culee sunt date de equaţiunea (III-a): . .

$$N = A - qx$$

unde facem $x=o$, şi $x=l$; vom avea pentru aceste:

$$A=B=\frac{ql}{2}=0.5\ ql.\ \text{în valoare absolută.}$$

Liniele invalitoare max. N, se determinează după equaţiunele (VII), VII-a; şi valorile corespondente M după equaţiunele (VIII, VIII-a, eară puntul unde aceste curbe ating maximul lor, după equaţiunea (IX).

Curba max. M, şi acea a luĭ N corespondentă pot fi desemnate de-o-dată după proprietăţile cunoscute a parabolei şi a liniei drepte; însă curba max. N şi acele ale lui M corespondente necesitează o întrebuinţare repetată a formulelor (VII)—(X), după diversele valori a raportului $\frac{p}{k}$.

12. *Calculul pentru casul când*: $\frac{p}{k}=3$, $\frac{p}{q}=\frac{3}{4}$.

a) M după equaţiunea (VIII) pentru $x=\frac{l}{4}$; avem înlocuind:

$$M=\frac{pl^2}{8}+\frac{k-p}{32}l^2-\frac{kl^2}{128}$$

unde făcând calculul:

$$M=\frac{12\ pl^2+3\ kl^2}{128}$$

şi înlocuind pe p şi k, în funcţiune de q, deduse din relaţiunele luate prin ipotesă: $\frac{p}{k}=3$, $\frac{p}{q}=\frac{3}{4}$, adică

$$p=\frac{3q}{4},\ k=\frac{3q}{12},\ \text{avem:}$$

$$M=\frac{12l^2\frac{3q}{4}+3\ l^2\frac{3q}{12}}{128}=\frac{117\ ql^3}{1536}=0.0761\ ql^2$$

https://biblioteca-digitala.ro

b) M după equaţiune:

$$M = \left(\frac{p}{8} + \frac{k}{16}\right) l^2 \text{ la mijloc,}$$

avem, înlocuind $p = \frac{3q}{4}$, $k = \frac{3q}{12}$, şi făcând calculul:

$$M = \frac{672}{6144} ql^2 = 0.1094\ ql^2.$$

c) M după equaţiunea (VIII) pentru $x = \frac{3l}{4}$; înlocuind n equaţiunea aceasta, avem:

$$M = \frac{3pl^2}{8} + \frac{9l^2(k-p)}{32} - \frac{27kl^2}{128} = \frac{3pl^2}{32} + \frac{9kl^2}{128}$$

şi înlocuind: $p = \frac{3q}{4}$, $k = \frac{3q}{12}$:

$$M = \frac{9ql^2}{128} + \frac{27ql^2}{12 \times 128}$$

unde făcând calculul:

$$M = 0.0879\ ql^2.$$

d) Maximul lui M; abcisa *x* după equaţinnea (IX):

$$x = l\left(\frac{k-p}{3k} + \sqrt{\frac{p}{3k} + \left(\frac{k-p}{3k}\right)^2}\right):$$

înlocuind $p = \frac{3q}{3}$, $k = \frac{3q}{12}$, avem calculele făcute;

$$x = l\left(\frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}\right)$$

de unde: $x = 0.535\ l$.

Ordonată acuma după equaţiunea (VIII) pentru $x = 0.535\ l$; inlocuind aceasta, calculele făcute avem:

$M\ max. = \frac{0{,}249pl^2 + 0.133kl^2}{2}$, şi înlocuind: $p = \frac{3q}{4} k = \frac{3q}{12}$, găsim:

https://biblioteca-digitala.ro

$$M \max. = \frac{21.120}{192} ql^2 = 0.11 ql^2.$$

e) N=0 ; calculul abcisei x după equaţiunea (X):

$$x = l\left(-\frac{p}{k} \pm \sqrt{\frac{p}{k} + \left(\frac{p}{k}\right)^2}\right),$$

unde înlocuind : $\frac{p}{k} = 3$, avem :

$$x = l\,(-3 \pm \sqrt{3+9}) = l\,(-3 \pm 3.464)$$

deci : $x = 0.464l$.

f) N la mijloc după equaţiunele (VII) (VII-a):

$$N = \frac{kl}{8}$$

însă : $k = \frac{3q}{12}$, deci: $N = \frac{3ql}{96} = 0.0312\ ql$.

g) N pe capete după equaţiunile (VII) (VII-a) făcând x=0 şi x=l în cea din urmă; avem în ambele casuri :

$$N = \frac{pl}{2}$$

însă $p = \frac{3q}{4}$, prin urmare : $N = \frac{l}{2} \cdot \frac{3q}{4} = \frac{3ql}{8} = 0.375\ ql$.

Făcând acelaş calcul pentru cele-alte cinci valori a raportului $\frac{p}{k}$, $\frac{p}{q}$, resultatele de la articolul precedent, şi a acestora le resumăm în tabloul următor :

https://biblioteca-digitala.ro

Raport $\frac{p}{k}$	Raport $\frac{p}{q}$	M după equat. (VIII), pentru $x = \frac{l}{4}$	M după equat. $\left(\frac{p}{8} + \frac{k}{16}\right) l^2$ pentru $x = \frac{l}{2}$	M după equat. (VIII) pentru $x = \frac{3l}{4}$	maximul M: abisa x după equat. (VIII) (IX)	maximul M: ordonata corespondentă equat. (VIII)	N = o abisia x după equaţiunea (X)	$N = \frac{kl}{8}$ după equat. (VII), (VII-a), la mijloc	N pe capete după aceleaşi equaţiuni
3	$^3/_4$	0,0761 q l^2	0,1094 q l^2	0,0879 q l^2	0,535 l	0,110 q l^2	0,464 l	0,0312 q l	0,375 q l
2	$^2/_3$	0,0703 „	1,1041 „	0,0859 „	0,550 „	0,1052 „	0,450 „	0,0416 „	0,333 „
1	$^1/_2$	0,0586 „	0,0937 „	0,0820 „	0,572 „	0,0962 „	0,414 „	0,0625 „	0,250 „
$^1/_2$	$^1/_3$	0,0469 „	0,0833 „	0,0780 „	0,608 „	0,0870 „	0,365 „	0,0830 „	0,167 „
$^1/_4$	$^1/_5$	0,0375 „	0,0750 „	0,0750 „	0,632 „	0,0820 „	0,302 „	0,1000 „	0,100 „
$^1/_8$	$^1/_9$	0,0312 „	0,0694 „	0,0729 „	0,647 „	0,0784 „	0,250 „	0,1110 „	0,056 „

https://biblioteca-digitala.ro

Cu aceste valori facem representaţiunele grafice pentru aceste şease casuri.

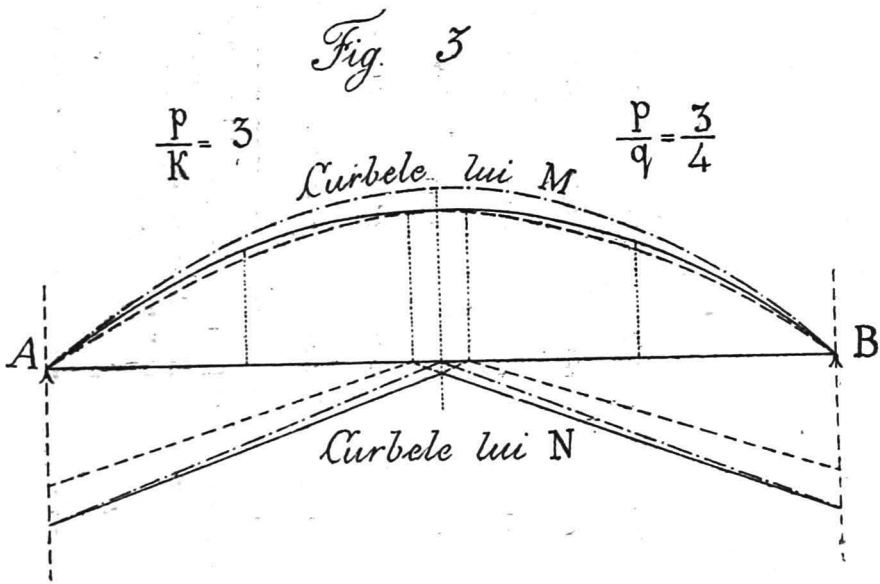
In acest desemn s'a purtat valorile absolute max. M şi N. cât şi valorile corespondente simultanee a lui N. şi M.

Fie-care parte a construcţieĭ va suporta în general maximul efortului pentru max. N ; se poate cu toate aceste să avem două valori a lui M şi O, lucrând in acelaş timp, se incarce această parte de o manieră maĭ defavorabilă; dară în cele mai de multe ori, încărcarea uniform repartisată (curba max. M), şi incărcarea parţială ajunsă până în puntul considerat (max N). sunt suficiente pentru determinarea dimensiunelor de adoptat.

Utilitatea representaţiunei grafice, consistă a lua după scară valorile lui M şi N ; pentru o esactitate mai mare n'avem decât să construim aceste curbe prin mijlocul tabloului de mai sus după o scară mai mare.

REPRESENTAŢIUNI GRAFICE

Grinzi ce repausează liber pe douĕ capete



https://biblioteca-digitala.ro

Fig. 4

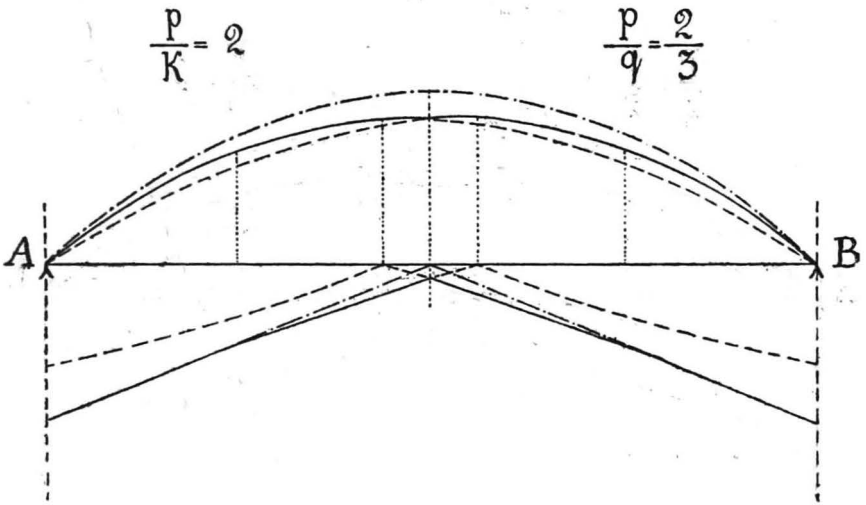
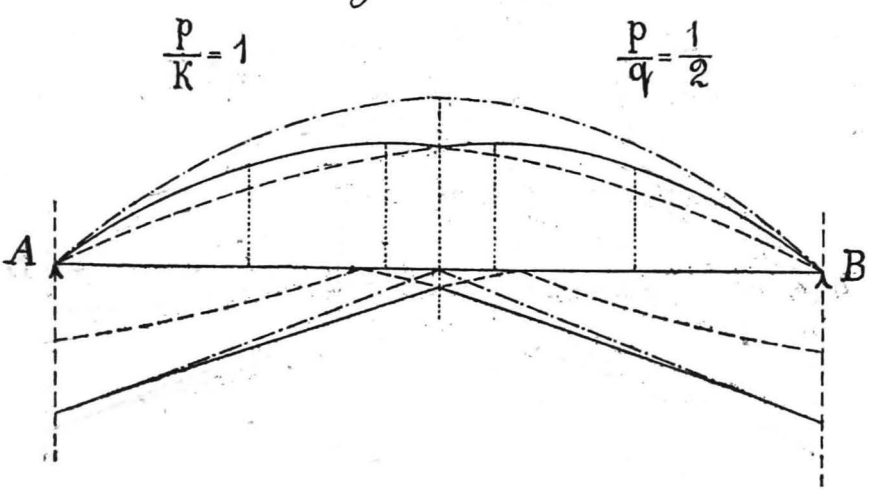


Fig. 5



https://biblioteca-digitala.ro

Fig. 6

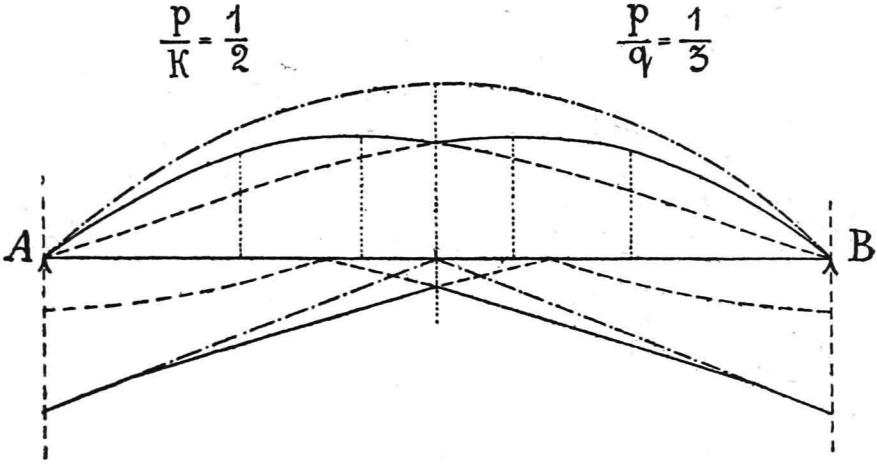
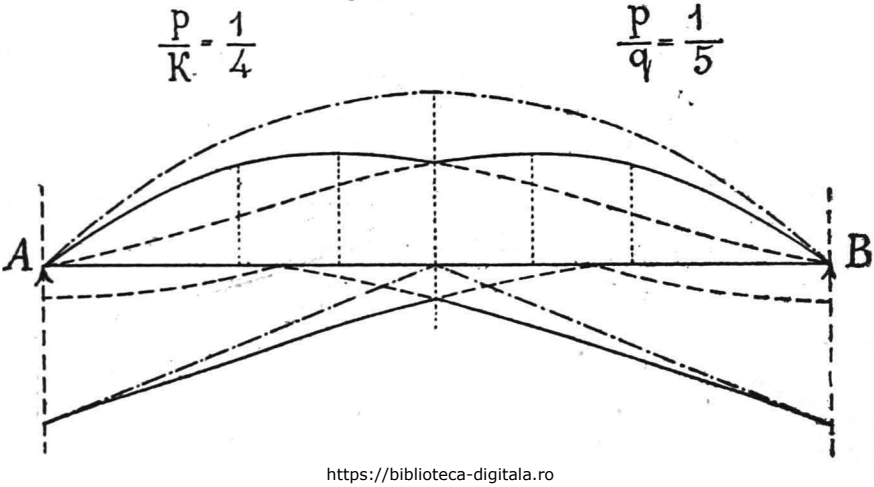
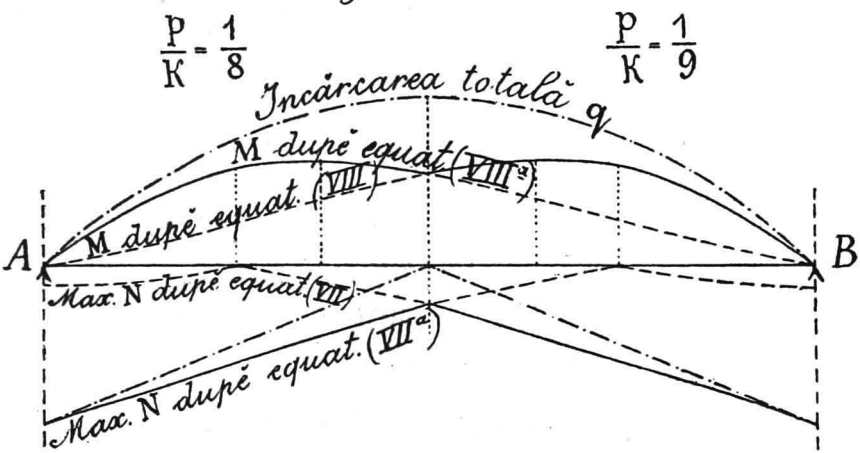


Fig. 7



https://biblioteca-digitala.ro

Fig. 8



Scările pentru figurile de mai sus sunt:

Pentru lungimi	. . .	1,0 l = 95	mm.
„ M	. . .	0,59 l² = 85	„
„ N	. . .	1,09 l = 37	„

D. Berea.
inginer.

https://biblioteca-digitala.ro