injectarea stâlpilor de telegraf de brad, a traverselor de poduri, precum și a întregei lemnării de brad de construcțiuni (poduri, apeduce, podeală etc.). Admițând că o asemenea usină s'ar înființa și in prevederea întrebuințărei unui procent oare-care de traverse de brad, s'ar putea face atunci experiențe și cu fagul din țara noastră; căci de și rezultatul mijlociu e defavorabil totuși credem că nu ar fi inutil de a face o asemenea experiență.

6. **Traversele de stejar în linie curentă se vor întrebuința neinjectate sau parțial injectate dacă s'ar admite propunerea de la punctul 5 până ce traversele metalice care pe fie-care an se perfecționează ca sistem și devin avantagioase ca preț, vor ajunge să devie mai rentabile în țara noastră de cât traversele de stejar ce din an în an devin mai rare și mai scumpe.**

INTEGRATORUL AMSLER

Integratorul Amsler este un aparat ingenios cu care se poate determina prin câte-va operațiuni aritmetice foarte simple aria, momentul static și momentul de inerție a unei suprafețe plane în raport cu un ax. De și acest aparat este construit mai de mult timp totuși credem că este util a da aci teoria și modul sĕu de întrebuințare pentru a atrage atențiunea camarazilor noștri asupra utilității întrebuințărei lui, în calculele de resistență de materiale și pentru cubaturile terasamentelor.

Teoria aparatului este foarte simplă. Ea consistă în insumarea mecanică a elementelor integralelor cari dă aria, momentul static și momentul de inerție, după ce aceste integrale au fost prealabil apropriate la acest scop.

Fie ABCD fig. 1, curba închisă care limitează suprafața plană considerată; *oy* și *ox* cele două axe coordonate. Se însemăm cu A, M și I aria, momentul static și momentul de inerție al acestei suprafețe în raport cu axul ox, cu x_1 și x_2 abscisele punctelor de tangența ale ordonatelor Aa și Bb cu curba închisă considerată; cu y_2 ordonatele curbei ADB superioara coardei de contact AB cu y_1 ordonatele curbei ACB inferioară aceleași coarde,—și cu *z* ordonata unui punct oare care al suprafeței considerate.

Să considerăm succesiv suprafețele aADBba și aACBba a căror diferență este suprafața ADBCA considerată,— și să însemnăm cu A_2, A_1; M_2, M_1; I_2, I_1 ariele, momentele statice și momentele de inerție respective ale acestor două suprafețe.

Un element de suprafața fiind represintat prin *dzdx*, vom avea pentru suprafața aADBba:

$$A_2 = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{z=0}^{z=y_2} dzdx = \int_{x_1}^{x_2} y_2\, dx$$

$$M_2 = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{z=0}^{z=y_2} zdzdx = 1/2 \int_{x_1}^{x_2} y_2^2\, dx$$

$$I_2 = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{z=0}^{z=y_2} z^2dzdx = 1/3 \int_{x_1}^{x_2} y_2^3\, dx$$

Pentru suprafața aACBba vom avea asemenea:

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx,\quad M_1 = 1/2 \int_{x_1}^{x_2} y_1^2 dx,\quad I_1 = 1/3 \int_{x_1}^{x_2} y_1^3 dx$$

De unde, observĕnd că:

$$A = A_2 - A_1$$
$$M = M_2 - M_1$$
$$I = I_2 - I_1$$

Avem:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y_2\, dx - \int_{x_1}^{x_2} y_1\, dx$$

$$M = 1/2 \int_{x_1}^{x_2} y_2^2 dx - 1/2 \int_{x_1}^{x_2} y_1^2 dx$$

$$I = 1/3 \int_{x_1}^{x_2} y_2^3 dx - 1/3 \int_{x_1}^{x_2} y_1^3 dx$$

Sau schimbând ordinea limitelor în termenul al doilea:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y_2 dx + \int_{x_2}^{x_1} y_1\, dx$$

$$M = 1/2 \int_{x_1}^{x_2} y_2^2 dx + 1/2 \int_{x_2}^{x_1} y_1^2 dx$$

$$I = 1/3 \int_{x_1}^{x_2} y_2^3 + 1/3 \int_{x_2}^{x_1} y_2^3 dx$$

Acestc formulei nsemnează ca pentru a obține pe A, M și I trebue să integrăm de la A la B și de la B înapoi la A și să adunăm cele două sume ast-fel aflate. Insemnĕnd cu y ordonata curbei întregi A C B D A, formulele de mai sus se pot dar scrie mai simplu.

$$A = \int y\, dx,\quad M = 1/2 \int y^2 dx \text{ și } I = 1/3 \int y^3 dx.$$

In care integralele se vor face pentru toate valorile produselor y dx, y^2 dx și y^3 dx, când x cresce de la x_1 până la x_2 și apoi descresce de la x_2 până la x_1.

Considerând un pol O oare-care pe dreapte ox, și însemnând cu c distanța polară de la polul O la un punct oare-care D al curbei A D B C A, vom avea $y = c \sin \alpha$ și prin urmare.

$$A = c \int \sin \alpha\, dx$$

$$M = \frac{c^2}{2} \int \sin^2\alpha\, dx$$

$$I = \frac{c^3}{3} \int \sin^3\alpha\, dx$$

Insă din trigonometrie avem:

$$\sin^2\alpha = 1/2 - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha}{4} - \frac{\sin 3\alpha}{4}$$

Deci:

$$A = c \int \sin\alpha \, dx$$

$$M = \frac{c^2}{4} \int dx - \frac{c^2}{4} \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx$$

$$I = \frac{c^3}{4} \int \sin\alpha \, dx - \int \frac{c^3}{12} \sin 3\alpha \, dx$$

Observând cum că $\int dx$ în ciclul complet considerat este zero, vom avea în definitiv

$$(1). \begin{cases} A = c \int \sin\alpha \, dx \\ M = -\frac{c^2}{4} \int \sin\alpha \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx \\ I = \frac{c^3}{4} \int \sin\alpha \, dx - \frac{c^3}{12} \int \sin 3\alpha \, dx. \end{cases}$$

Formulele puse sub aceste forme sunt susceptibile de a fi integrate mecanic prin integratorul lui Amsler, care este dispus astfel ca prin trei citiri diferite să dea $\sin\alpha \, dx$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx$ și $\sin 3\alpha \, dx$.

Aparatul se reazimă pe planul desenului prin roțile verticale A, M și I și cele două roate de guidajiu CC (fig. 2).

Aparatul se compune din un braț OF terminat cu un ac vertical F și mobil, împreună cu discul ABD, la care este fixat în jurul axului vertical proiectat în O.

Axul OO se reazimă cu extremitățile sale pe brațul vertical E. R. al drugului G. H.

La extremitățile G și H ale acestui drug sunt fixate două axe verticale în prejurul cărora se mișc roțile K și L cari se angrenează cu discul A B D.

In brațul vertical E R este fixat un ax orizontal NP ale cărui extremități se reazimă pe quadrul N P C C, care la rândul său se reazimă prin roțile C C pe rigla VU în o scobitură longitudinală; permițênd astfel instrumentului o mișcare de translațiune în lungul riglei *VU* sau a axului momentelor cu care această riglă este paralelă.

In fine, la brațul OF și paralel cu dênsul și în planul roților KL. sunt fixate câte un ax orizontal în prejurul cărora se mișcă roțile A. M. și I.

Aceste roți ating chartia desemnului.

Un joc de roate divisate și de verniere servă pentru citirea numerilor și fracțiunelor de rotațiuni ale roților A. M. și I.

Intrebuințarea instrumentului se face în modul următor: După ce s'a așezat rigla *VU* paralel cu axul momentelor XX cu ajutorul equerelor Z, și vîrful acului F pe curba care limitează suprafața considerată se citește pe vernierele conrespunzătoare roților A. M și I. posițiunea lui zero al fi cărui vernier. Fie a_0, m_0, i_0 resultatul citirilor.

Se mișcă după acea vêrful acului F pe curba în sensul mișcări unui ceasornic pênă ce el revine la posițiunea sa inițială, când se face din nou citirile a_1, m_1 și i_1 pe fie-care vernier.

Vom demonstra că cantitățile A, M și I sunt date prin

$$A = a_1 - a_0$$
$$M = 0.6\,(m_1 - m_0)$$
$$I = (a_1 - a_0) - 0{,}4\,(i_1 - i_0)$$

Unitatea de mêsură pentru care instrumentul este de obicinuit construit fiind decimetrul.

Pentru a face această demonstrațiune, vom observa că instrumentul este construit ast-fel că pentru o deviațiune unghiulară α a razei vectore OF, de la direcțiunea axei momentelor xx și a axului roței A care este paralelă cu dênsul, corespunde o deviațiune unghiulară 3α de la aceași direcțiune xx a roței L și prin urmare a axului roței I fixat la dênsa și de $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ a roței K și a axului roței M. In acest scop rada arcului AB este luată de 3 ani mai mare de cât raza roței L și raza arcului ADB este de două ori mai mare de cât a roței M. Când brațul OF coincide sau este paralel cu ox, adică când deviația unghiulară $\alpha = o$ axele roților I și M ocupa posițiunea indicată în figura 3, adică axul roței I este paralel cu axa momentelor și axul roței M este perpendicular pe dênsa. Când brațul OF (fig. 4) deviază cu unghiul α de la posițiunea sa primitivă, din causa solidarității ce esistă între dênsul și discul ABD, acesta ea o mișcare unghiulară α care prin ajutorul angrenajelor se transmite roților L și K în raportul care există între razile arcelor de cerc în contact. Ast-fel axul roței I va devia de la posiția sa primitivă cu 3α și axul roței M cu 2α făcênd ast-fel unghiul $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ cu axul momentelor xx.

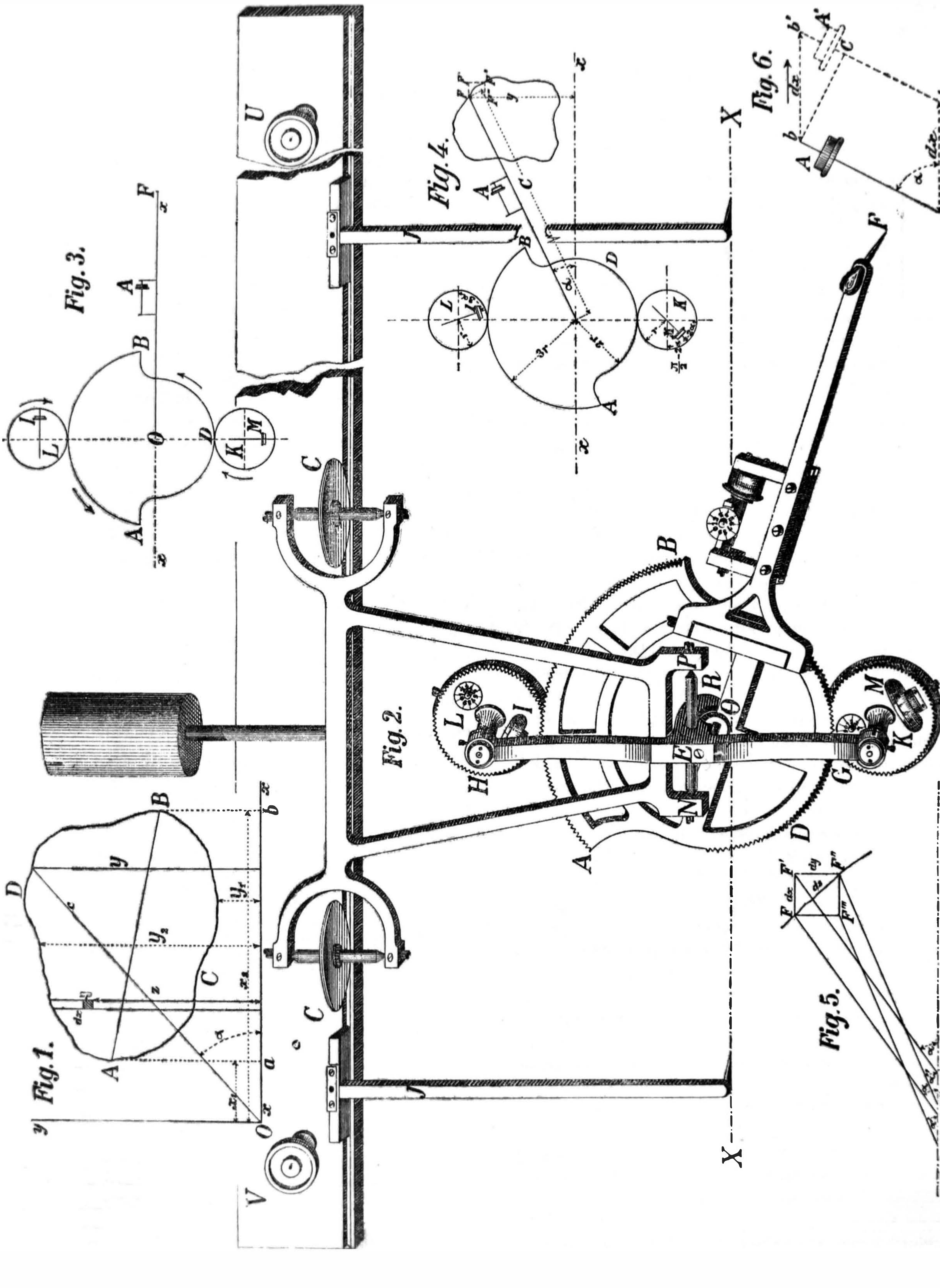
Remâne a vedea acum ce mișcări înregistrează roțile A, M și I, când brațul OF, și roțile K și L deviază cu α, $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$, și 3α de la direcțiunea axei momentelor.

In acest scop vom observa că o mișcare infinit mică ds a vêrfului acului pe curbă se poate descompune în două mișcări elementari dy și dx; — pentru a insuma dară toate mișcările elementare ds ale vêrfului acului F, când el parcurge curba închisă întreagă, este suficient a însemna în parte mișcările elementare dx și dy, și a face suma resultatelor obținute. Să considerăm dară ântêi mișcările orizontale dx.

Pentru că vêrful acului să vină din posiția F în posiția F′, fig. 4 și fig. 5 pe aceiași paralelă cu axul momentelor, instrumentul întreg va avea o mișcare numai de translațiunea în direcțiunea axului momentelor, cu alte cuvinte brațul OF se va mișca paralel cu sine până ce va lua posiția O′F′. Să considerăm dar două posițiuni infinit vecine și paralele ale axului roatei A, care interceptă pe o paralelă la axul momentelor lungimea dx (fig. 6) și să evaluăm mișcarea unghiulară a roatei A. când ajunge din posiția A în posiția A′.

Arcul parcurs de punctul de contactal roței cu hârtia în această mișcare este mêsurat cu perpendiculara b c cuprinsă între cele două posițiuni paralele ale axelor.

Dacă însemnăm cu $d\varphi_1$ mișcarea unghiulară a roței



Integratorul Amsler.

A când vine din posiția A în posiția A′ și cu s radia sea avem $bc = s d\varphi_1$. Insă din triunghiul dreptunghiu bcb avem $bc = dx \sin \alpha$ deci

$$d\varphi_1 = \frac{1}{s} \, dx \sin \alpha$$

și însemnând cu k_1 coeficientul $\frac{1}{s}$

$$d\varphi_1 = k_1 \, dx \sin \alpha.$$

Vom avea în acelaș mod pentru roțile M și A

$$d\varphi_2 = k \, dx \sin \left(\frac{\Pi}{2} - 2\alpha\right)$$

$$d\varphi_3 = k_3 \, dx \sin 3 \alpha.$$

Să considerăm acum mișcarea elementară dy (fig. 5). Pentru ca vêrful acului să vină din F′ în F″, brațul O′ F′ va trebui să facă o rotațiune împrejurul unui centru instantaneu de rotațiune și o translațiune a instrumentului întreg pentru ca O′ să vină în O″, ast-fel ca O″ F″ să fie egală cu O′ F′.

Cele două posițiuni infinit vecine ale axelor nu vor mai fi paralele după cum se vede în figura 5, să însemnăm cu $d\varphi'_1$, $d\varphi'_2$ și $d\varphi'_3$ mișcările unghiulare ale roților A, M și I când vêrful acului ajunge din posiția F′ în posiția F″, mișcare în care unghiul radiei vectoare cu axa momentelor a variat de la α la α' și această radiă vectoare s'a translatat îndărăt cu cantitatea O″ O,.

Curba considerată fiind închisă, pentru fie-care mișcare dx și dy făcută într'un sens va corespunde la întoarcere câte o mișcare egală și de sens, contrariu.

Ast-fel să considerăm pentru simplificare că curba totală închisă s'ar reduce la FF″ (fig. 6), adică că mișcarea acului s'ar face de la F la F″ și de la F″ înapoi la F pe acelaș arc de cerc. Am vĕzut că mișcarea FF″ e descompune în mișcările elementare FF′=dx și F′ F″=$d\varphi$; asemenea mișcarea înapoi F″ F se descompune în F″ F‴= —dx și F‴ F= —dy.

Dacă însemnăm cu $d\varphi_1''$, $d\varphi_2''$, $d\varphi_3''$ și cu $d\varphi_1'''$, $d\varphi_2'''$, $d\varphi_3'''$ mișcările unghiulare ale roților A, M și I corespunzătoare la mișcările elementare îndărăt F″ F‴ și F‴ F vom avea ca mai sus

$$d\varphi_1'' = -k_1 \, dx \sin\alpha'$$

$$d\varphi_2'' = -k_2 \, dx \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha'\right)$$

$$d'\varphi_3'' = -k_3 \, dx \sin 3\alpha'$$

și

$$d\varphi_1''' = -d\varphi_1'$$

$$d\varphi_2''' = -d\varphi_2'$$

$$d\varphi_3''' = -d\varphi_3'$$

In adevĕr în mișcarea vêrfului acului pe elementul F‴F rada valoarei va veni din posiția O″F‴ în posiția O F. Pentru aceasta va executa o mișcare de rotațiă care să aducă unghiul α' la valoarea α și o mișcare de translație O‴O.

Aceste două mișcări elementare sunt egale cu mișcările elementare ale razei vectoare când vêrful acului parcurge elementul F′F″. Astfel mișcarea de rotație care aduce unghiul α' la valoarea α din mișcarea F‴F este egală cu mișcarea de rotație care aduce unghiul α la valoarea α' din mișcarea F′F‴, și mișcarea de translație O‴O din primul cas este egală cu mișcarea O′O″ căci avem O‴O=O′O″=dx—OO″. Dacă cele două mișcări elementare ale razei vectoare sunt egale cu cele două parcurse ale vêrfului acului pe elementu F‴F și F′F‴, urmează evident că roțile A, M și I vor avea mișcări unghiulare egale in ambele casuri și prin urmare.

$$d\varphi_1''' = -d\varphi_1'$$

$$d\varphi_2''' = -d\varphi_2'$$

$$d\varphi_3''' = -d\varphi_3'$$

Cea ce este demonstrat pentru elementul închis FF‴F se aplică și pentru ori ce curbă închisă. Deci dară, când vêrful acului descrie o curbă închisă, suma algebrică totală a mișcărilor unghiulare ale roților A, M și I provenite din mișcările elementare dy ale vêrfului acului este zero. Vom avea dară a ține compt numai de mișcările unghiulare ale acestor roți, provenite din mișcările elementare dx ale vêrfului acului.

Când vîrful acului descrie o curbă închisă suma mișcărilor unghiulare ale roților A, M și I va fi dar dată prin formulele :

$$\varphi_1' + \varphi_1'' = k_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \sin \alpha - k_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \sin \alpha'$$

$$\varphi'_2 + \varphi''_2 = k_2 \int dx \sin\left(\frac{\pi}{2} - {}_2\alpha\right) - k_2 \int dx \sin\left(\frac{\pi}{2} - {}_2\alpha'\right)$$

$$\varphi'_3 + \varphi''_3 = k_3 \int dx \sin 3\alpha - k_3 \int dx \sin 3\alpha'.$$

In primul membru avem mișcările unghiulare totale ale roților A, M și I, după mișcări complecte a vîrfului acului, adică diferența celor două citiri făcute pe verniere la începutul și finitul operațiuni, adică ceea ce am însemnat cu $a_1 - a_0$, $m_1 - m_0$ și $i_1 - i_0$.

In membrul al doilea α_1 este unghiul ce posiția inițială a razei vectoare face cu axa x x și α_2 este unghiul ce această rază face cu x x în posițiunea în care mișcarea vîrfului acului începe a deveni retrogradă.

Aceste formule devin schimbând ordinea limitelor în termenul al doilea :

$$a_1 - a_0 = k_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \sin \alpha + k_1 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \sin \alpha'.$$

$$m_1 - m_0 = k_2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + k_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha'\right)$$

$$i_1 - i_0 = k_3 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \sin 3\alpha + k_3 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \sin 3\alpha'$$

sau în general :

$$a_1 - a_0 = k_1 \int dx \sin \alpha$$

$$m_1 - m_0 = k_2 \int dx \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

$$i_1 - i_0 = k_3 \int dx \sin 3\alpha$$

Inlocuind valoarea integralelor din equațiunea (1) cu valorile deduse din aceste equațiuni avem :

$$A = \frac{c}{k_1}(a_1 - a_0)$$

$$M = -\frac{c_2}{4k_2}(m_1 - m_0)$$

$$I = \frac{c_3}{4k_1}(a_1 - a_0) - \frac{c_3}{12k_3}(i_1 - i_0)$$

Diametrul roților k_1, k_2 și k_3 sunt alese ast-fel ca coeficienți din aceste formule să fie numere simple și ast-fel aceste formule devin.

$$A = a_1 - a_0$$
$$M = -0.6\,(m_1 - m_0)$$
$$I = (a_1 - a_0) - 0.4\,(i_1 - i_0).$$

Pe lângă cantitățile A, M și I se mai poate determina cu ajutorul integrometrului distanța (g) de la axul momentelor la centrul de gravitate și momentul de inerție In în raport cu un ax care trece prin centrul de gravitate prin formulele cunoscute:

$$G = \frac{M}{A}$$

$$Iu = I - \frac{M^2}{A}$$

Instrumentele obicinuite sunt construite pentru scara desenurilor de $^1/_1$ și pentru unitatea de mĕsură în decimetre.

Când scara desenului este $\frac{1}{n}$, adecă când un metru pe desen represintă *n* metri din adevĕrata mĕsură, formulele devin:

$$2\begin{cases} A = \dfrac{n^2}{100}\,(a_1 - a_0) \\ M = -\dfrac{0.6\,n^3}{1000}\,(m_1 - m_0) \\ I = \dfrac{n^4}{10000}\left\{(a_1 - a_0) - 0.4\,(i_1 - i_0)\right\} \end{cases}$$

Pentru scara transversală $\frac{1}{n}$ și scara longitudinală $\frac{1}{r}$ formulele devin:

$$A = \frac{n\,r}{100}\,(a_1 - a_0)$$

$$M = \frac{0.6\,n^2\,r}{1000}\,(m_1 - m_0)$$

$$I = \frac{n^3\,r}{10000}\,(a_1 - a_0) - 0.4\,(i_1 - i_0).$$

M. M. Rômniceanu
Inginer șef