IV

I

DARE DE SEAMA

DE

LUCRARILE SOCIETATEI

Ședința Comitetului Societăței de la 5 Mai 1893.

Membri presenți : d-nii Guran C.
» Ottolescu Sc.
» Carcalechi S.
» Papadopol Y. N.
» Steopoe D.
» Davidescu C.

Numĕrul membrilor fiind insuficient, se amână ședința pentru diua de 6 Mai seara, când se va ține cu ori-ce numĕr.

Sedința Comitetului Societăței de la 6 Mai 1893

Membri presenți : D-nii Gafencu Al.
» Guran C.
» Steopoe D.

D. *Guran*, dă citire unui memoriu, relativ la desideratele Societăței în privința reorganisărei corpului tecnic și se decide să se complectede și să se citească în viitoarea ședință.

Ședința Comitetului Societăței de la 15 Mai 1893

Membri presenți : D-nii Gafencu Al.
» Haret Sp.
» Papadopol Y. N.
» Carcalechi S.
» Steopoe D.
» Caracostea G.

Ne fiind numĕrul reglementar de membri să decide a se amâna ședința pentru altă dată

II

MEMORII SI COMUNICARI

STUDIU ASUPRA STATICEI GRAFICE DE CULMAN

Prima aparițiune a Staticei grafice a lui Culman, n'a fost primită cu încredere de inginerii practici, care nu admiteau ca linia și compasul să poată da resultate destul de exacte pentru găsirea dimensiunilor obiectelor de artă. Insă cu încetul această neîncredere a dispărut, și adi ea este întrebuințată tocmai de inginerii practici. — Metoadele lui Culman sunt basa tutulor construcțiunilor grafice ce se întrebuințează astă-di.

Dacă însă regulele practice au avut succesul cunoscut, nu s'a întâmplat tot ast-fel și cu metoadele lui de raționare și cercetare.

Geometria de posițiune. basa cercetărilor sale și cu ajutorul cărei el visa ca elevii lui să formeze *un nou fundament mai sciințific al întregei arte a ingineriei*, a fost mai cu totul părăsită și înlocuită cu vechea Geometrie a lui Euclide.

Geometria lui Euclide a înlocuit geometria de posiţiune, numai pentru motivul că geometria de posiţiuni fiind ştiinţa nouă nu era familiară inginerilor. Ea nu poate însă să aducă mari foloase staticei grafice, şi nu poate să o ridice la acelaş nivel cu cea analitică, precum nici această din urmă n'ar fi ajuns aşa departe, dacă în loc de a se servi de calculul infinitisimal s'ar mulţumi numai cu analisa inferioară.

Şi într'adevĕr, întâlnim ḑilnic în revistele tecnice noi probleme statice resolvite cu ajutorul metodelor analitice, şi prea rar se întâmplă ca să dăm de un cas tratat cu ajutorul metodelor grafice.

Numai când vom da geometriei de posiţiune, locu ce Culman îi a destinat, Statica grafică va ajunge la acelaşi nivel cu cea analitică. Cunoascerea staticei grafice, aşa cum a înţeles'o Culman se impune inginerilor, cărora tot-d'auna li se întâmplă d'a avea să resolve casuri neprevĕḑute până aci.

In ori ce cas pentru aceia cari au predilecţiune pentru partea teoretică a artei ingineresci, cunoascerea acestor metode le este de mare interes.

De aceea mi-am propus să fac un studiu sumar al supra Staticei grafice de Culman, precedându-l de un studiu sumar asupra geometriei de posiţiune.

Articolele ce urmează n'au valoare didactică şi nicĭ nu vrea să o aibă. Ele se adresează inginerilor şi nu elevilor.

In acelaşi timp ele vor să fie numai uă schiţă a ambelor şciinţe, şi nici de cum un tratat fie ori-cât de elementar al lor. Voesc ca acei ce le vor ceti cu atenţiune să capete uă idee desluşită asupra ceea ce vor aceste două ştiinţe, precum şi de metoadele ce le întrebuinţează pentru urmărirea scopului lor. Aceea-ce vor însă să le cunoască bine, vor trebui să recurgă la autorii originali, ca „Standt. Fiedler, Reye etc." pentru geometrie de posiţiune, şi „Culman şi Ritter" pentru statica grafică.

Cu tot caracterul schematic şi sumar al acestui studiu, mi-am dat totuşi toată silinţa d'a fi lămurit. Cine însă cunoasce stilul cel concis şi dificil al luĭ Culman, vastitatea materii precum şi spaţiul restrâns ce'l poate oferi buletinul, va judeca cu bună-voinţă părţile nereuşite ale acestui studiu.

§ *1. Definiţiuni*

Fie în fig. 1 l şi l′ două linii drepte, carĭ sunt tăiate de razele a, b, c d....., cari pornesc din **O** în punctele A, B, C, D.... şi A′. B′. C′. D′...

Seriile A. B. C. D.... de pe *l* şi A′ B′ C′ D′... de pe *l′* cari sunt ast-fel în cât liniile de unire AA′, BB′...., a două puncte corespunḑĕtoare trec prin un punct se numesc *serii perspective.*

Când două făşii de raze O şi O′ (fig. 2) sunt ast-fel în cât punctele A, B, C, D... a două raze corespunḑĕtoare aa′, bb′, cc′, dd′... sunt pe uă singură linie dreaptă *l*, ele se numesc *făşii de raze perspective.*

Când în fig 1, depărtăm linia l de l′, păstrând pe amândouĕ, seriile A, B, .. şi A′, B′..., căpătăm două serii proective.

Depărtând şi făşiile O şi O′, aşa în cât posiţiile relative ale razelor din aceeaşĭ făşie să nu se schimbe, căpătăm două făşii proective.

Insemnând cu *(ab)*, *(bc)*.... unghiurile formate de două linii a,b... avem în fig. **1** :

$$AC = OC \times \frac{\sin (a\,c)}{\sin (a\,l)}$$

$$BC = OC \times \frac{\sin (b\,c)}{\sin (b\,l)}$$

de unde

$$\frac{A\,C}{B\,C} = \frac{\sin (a\,c)}{\sin (b\,c)} \quad (1)$$

Prin analogie avem :

$$\frac{A\,D}{B\,D} = \frac{\sin (a\,d)}{\sin (b\,d)} \quad (2)$$

Impărţind (1) prin (2), avem :

$$\frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D} = \frac{\sin (a\,c)}{\sin (b\,c)} : \frac{\sin (a\,d)}{\sin (b\,d)} \quad (3)$$

tot ast-fel putem deduce :

$$\frac{A'\,C'}{B'\,C'} : \frac{A'\,D'}{B'\,D'} = \frac{\sin (a\,c)}{\sin (b\,c)} : \frac{\sin (a\,d)}{\sin (b\,d)} \quad (4)$$

Din (3) şi (4) reese :

$$\frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D} = \frac{A'\,C'}{B'\,C'} : \frac{A'\,D'}{B'\,D'} \quad (I)$$

Această egalitate subsistă şi atunci când posiţiunile relative ale liniilor *l* şi *l′* sunt schimbate.

Numind $\frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D}$ raportul dublu al punctelor A′ B′ C′ D′ putem enunţa următoarea definiţiune :

Două serii sunt proective când raportul dublu a patru elemente oare-cari dintr'uă serie e egal cu raportul dublu al celor 4 elemente corespunḑĕtoare din cea-l'altă serie.

In fig. *2* se găsesce lesne, urmând procedeul de mai sus :

$$\frac{\sin (a\,c)}{\sin (b\,c)} : \frac{\sin (a\,d)}{\sin (b\,d)} = \frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D} \quad (5) \text{ şi}$$

$$\frac{\sin (a'\,c')}{\sin (b'\,c')} : \frac{\sin (a'\,d')}{\sin (b'\,d')} = \frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D} \quad (6) \text{ de unde}$$

$$\frac{\sin (a\,c)}{\sin (b\,c)} : \frac{\sin (a\,d)}{\sin (b\,d)} = \frac{\sin (a'\,c')}{\sin (b'\,c')} : \frac{\sin (a'\,d')}{\sin (b'\,d')} \quad (II)$$

Relaţiunea II subsistă şi când posiţiile între *O* şi *O* s'aŭ schimbat, prin urmare şi aci avem definiţiunea :

Două făşii sunt proective când raportul dublu a patru elemente oare-care dintr'uă făşie este egal cu raportul dublu al celor patru elemente corĕspunḑĕtoare din cea-l'altă făşie.

In fig. (1) făşia *O* e perspectivă şi cu seria A. B. C. şi cu A′, B′, C′... precum în fig. (2) seria A. B. C... e perspectivă cu făşiile *O* şi *O′*.

Când schimbăm posiţiile relative între făşia şi serie, căpătăm uă făşie de raze proectivă cu uă serie de puncte. Enunţăm fără demonstraţie următoarea definiţiune :

Uă făşie e proectivă cu uă serie, când raportul dublu a patru elemente oare-care din făşie e egal cu *raportul dublu al celor 4 elemente corespundĕtoare din serie.*

§ 2. **Proprietățĭ fundamentale**

Douĕ serii proective cu a treia sunt proective între dênsele.

Douĕ fășii proective cu a treia sunt proective între ele. Uă fășie proectivă cu uă serie, e proectivă și cu ori-ce altă serie care e proectivă cu cea d'ĕntâiu.

Uă serie proectivă cu uă fășie e proectivă și cu ori-ce altă fășie proectivă cu cea d'ĕntâia.

Toate acestea, pentru motivul că două rapoarte duble egale cu al treilea, sunt egale între dênsele.

Din figura 3 se vede că: *Dacă uă fășie proectivă cu uă serie, este într'uă posiție ast-fel că 3 raze a b. c. trec prin cele 3 puncte corespundĕtoare A. B. C., și ori-ce altă rază d, trebue să treacă prin punctul corespunzător D., adică fășia și seria sunt într'uă posițiune perspectivă.*

Fiind că alt-fel nu s'ar putea ca cele două raporturi duble ale elementelor corespunzătoare să fie egale.

Când douĕ serii proective au un punct comun AA′, ele sunt într'uă posițiune de perspectivă, fiind că ducênd din *O* (fig. 4) intersecția lui BB′ cu CC′, razele OA, OB, OC, OD.. căpătăm uă fășie proectivă cu seria A B C D..., prin urmare și cu A′ B′ C′ D′..., de oare-ce această fășie este ast-fel în cât 3 raze trec prin 3 puncte corespundĕtoare A′ B′ C′ trebue și ori-care alta *d* să treacă prin *D′*, cu alte cuvinte DD′ trece prin *O′*, adică A B C D... e perspectiv cu A′ B′ C′ D′.....

Când douĕ fășiĭ aŭ uă rază comună aa′, ele sunt perspective.

Fiind că dacă unim punctele de intersecțiă ale razelor bb′ și cc′ cu uă linie dreaptă, (fig. 5) căpătăm două serii A B C D și A′ B′ C′ D′ cari sunt proective, și de oare-ce trei perechi de puncte corespundĕtoare AA′, BB′, CC′, cad împreună ori-ce altă păreche DD′ trebue să se confunde, în alt-fel raporturile duble n'ar putea fi egale.

Când pe linia de unire AA′ a două puncte (fig. 6) corespundĕtoare din două serii proective A B C D... și A′ B′ C′ D′..., luăm douĕ puncte P și P′ pe cari le unim cu A B C... căpătăm douĕ fășii de raze proective în posițiă perspectivă (fiind că raza PA și P′ A′ cad împreună), și pr. urm. razele corespunzătoare trebue să se taie pe uă singură linie dreaptă în A″ B″ C″ D″... Seriile A B C D.., și A′ B′ C′ D′... pot deci fi considerate ca provenite din proecția aceleiași serii A″ B″ C″ D″..., *de aceea și numele de serii proective.* Din fig. de mai sus se și vede că nu poți alege de cât trei perechi de puncte A B C și A′ B′ C′ ca corespundĕtoare din două serii proective și cum unui punct *D* îi găsești corespundĕtorul D′.

Cel mai practic lucru este d'a lua punctele *A A′* ca puncte de proecțiune atunci (fig. 7) A B′ cu B A′ dă un punct, A C′ cu C A′ dă cel alt punct *al axei de perspectivă* și când ducem raza A′ x și unim punctele ei de intersecțiă cu axa de perspectivă cu *A* căpătăm punctul corespundĕtor în x′.

Intersecția axei *p* cu l și l′ dă cele douĕ puncte L și I, corespundĕtoare intersecții I L′ a celor douĕ linii date. Aceste puncte trebuind a fi aceleași, resultă că și axa *p*, este aceeași pentru toate fășiile perspective cari și ar avea vîrfurile în două puncte corespuzĕtoare, adică în A și A′; în B și B′ și în C și C′. pr. urm. axa de perspectivă se obține prin trei puncte și, adică, prin intersecția lui

AB′ cu BA′
AC′ cu CA′
BC′ cu B′ C

iar punctul *X′* se obține prin 3 raze din A, B și C, corespunzătoare razelor A′ X, B′ X și C′ X.

Ducând din *A* uă paralelă la *l′* (fig. 7ª) și unind A′ cu intersecția acestei linii cu *p*, căpătăm pe *l* punctul *R* corespundĕtor lui R′∞ de pe l′. Tot ast-fel găsim printr'uă construcție inversă, punctul Q′ pe l′ corespundĕtor lui Q ∞ de pe *l*.

Raportul dublu

$$\frac{A\ C}{B\ C} : \frac{A\ R}{B\ R} = \frac{A'\ C'}{B'\ C'} : \frac{A'\ R'\infty}{B'\ R'\infty}$$

De oare-ce A′ R′∞=B′ R′∞= ∞; resultă

$$\frac{A\ C}{B\ C} : \frac{A\ R}{B\ R} = \frac{A'\ C'}{B'\ C'}\text{; Tot ast-fel } \frac{A'\ C'}{B'\ C'} : \frac{A'\ Q'}{B'\ Q'} = \frac{A\ C}{B\ C}$$

adică rapoartele duble ale punctelor *A B C Q* și *A′ B C′ Q′* sunt egale cu rapoarte simple.

Când punctului de la infinit de pe *l* îi corespunde punctul de la infinit al lui *l′*, adică, când R cade în Q∞ și Q′ în R′∞ avem $\frac{A\ C}{B\ C} = \frac{A'\ C'}{B'\ C'}$, adică, cele 2 serii sunt simetrice.

Fie P′ și P″ douĕ fășii (fig. 8) proective date. Dacă tăiem fășia *P′* cu raza *a″* iar fășia P″ cu raza *a′* obținem douĕ serii perspective A′, B′, C′ și A″, B″, C″. De aci resultă că liniile A′A″, B′B″, C′C″, D′D″, trec printr'un punct *P* ḑis centru de perspective.

Raḑei *u′* a lui P′ către P″ îi corespunde raza u″ între *P″* și *P*; iar razei *v″* a lui P″ către P′ îi corespunde *v′* între P și P′. — u′ și v′ trebuind să fie aceleași ori-cari ar fi liniile cu cari tăiem cele douĕ fășii date, resultă că și *P* rĕmâne același când alegem *b* și *b′*, sau *c* și *c′* în loc de ***a*** și ***a′***.

B″ e intersecția lui a′ cu b″ să 'l însemnăm cu a′ b″
C″ „ „ a′ cu c″ „ „ a′ c″

. . . .

Vedem deci că fiind date 3 perechi de raze corespunḑĕtoare din douĕ fășii proective, cele 3 linii provenite din unire lui *a′b″* cu *b′a″*, *a′c″* cu *c′a″*, *b′c″* cu *c′b″* trec prin punctul de perspectivă *P*.

Unind *P* cu a′d″ intersecția lui a′ cu d″ căpătăm pe a″ punctul pe unde trece raza corespundĕtoare d″.

Tot ast-fel linia P la b′d″ dă pe b″ și linia P la c′d″ dă pe c″ puncte pe unde trece raza d′.

Razii PP′ ca *o* îi corespunde P′P″ ca *o′* și aceleași raze P′P considerată ca *p′* din fășia P′, îi corespunde *PP″* ca *P*.

Invêrtind toată fășia *P′* până ce *o′* vine în *o*, cele douĕ fășii devin perspective (fig. 8 a).

Descriind uă semi-circonferință prin P și P', care să-și aibă centrul în axa de perspectivă, obținem perechea dreptunghiulară qr, ast-fel ca și corespundětoarele lor q^1r^1 să fie normale între dênsele.

Când sunt date mai multe puncte ele formează *uă figură de puncte*, avênd liniele de unire a câte două puncte drept *laturi*. — Când avem mai multe linii, ele formează uă *figură de laturi*, avênd intersecțiunile a câte două, două laturi, drept *colțuri*.

Când toate punctele sunt situate pe uă linie dreaptă, atunci toate laturile se confund într'una singură, care este linia dată, iar când toate liniele date trec printr'un punct, atunci toate colțurile se confund într'unu care e punctul dat. Numim ast-fel de figuri, *figuri de întêia treaptă*.

Uă serie de pe uă linie sau uă fășiă dintr'un punct sunt figuri de întêia treaptă.

Două serii sunt figuri de aceiași spețe, tot ast-fel două fășii, iar uă fășie și uă serie sunt figuri de spețe diferite.

Punctul și *linia* se numesc *figuri fundamentale de întêia treaptă*.

Planul fiind format din punct și linie, cele două figuri fundamentale de întêia treaptă, e *uă figură fundamentală de a doua treaptă*.

Ori-ce figură plană poate fi considerată ca formată ori din intersecția razelor a două fășii (fig. 9) care pleacă din două puncte fixe ale planului, ori din unirea a două serii situate pe două linii fixe ale planului, și prin urmare se numesce *figură de a doua treaptă*.

Cu aceste noțiuni, putem înlocui teoremele relative la două serii proective și la uă fășie și uă serie proective prin:

Două figuri de întêia treaptă cari sunt proective, cu uă a treia figură de întêia treaptă sunt proective între ele.

Despre colliniațiune

Când două figuri d'a doua treaptă din același plan, corespund ast-fel între dênsele, în cât liniile de unire a două puncte corespundětoare trec printr'un singur punct, iar punctele de unire a 2 linii corespundětoare se află pe uă linie, ele se numesc colliniare centrale saŭ perspective.

Când două triunghiuri ABC și A'B'C' stau ast-fel între dênsele încât liniile de unire a 2 puncte corespundětoare AA', BB', CC', trec printr'un punct L, atunci intersecțiunile S_1, S_2, S_3, ale liniilor corespundětoare A B cu A' B', B C cu B' C', C A cu C' A' sunt situate pe uă singură linie dreaptă S. (Fig. 10).

Să numim X și X' intersecțiile razelor C BB' cu A C S_2 și A' C' S_2.

Seriile A X C S_2 și A' X' C' S_2 fiind perspective, resultă că fășiile formate din razele trimise din B și B' către ele și anume:

Fășiile B. A X C S_2 și B'. A' X' C' S_2 să fie proective, și fiind-că razele BX și B' X' cad împreună, ele sunt perspective și prin urmare razele corespundětoare B A cu B' A', B C cu B' C' și B S_2 cu B' S_2 să taie într'uă linie, S_1 S_2 S_3, ceea-ce am vrut să demonstrăm.

Punctul C *se numesce centrul de collineațiune și linia S axa de colineațiune a celor două triunghiuri.*

Teoremul invers și-l poate ori cine demonstra.

Din raționamentul de mai sus resultă următoarea regulă.

Pentru a afla unui punct D pe corespundětorul sěu, unim pe D cu B, căutăm pe S_4 unde DB taie pe s. unim S_4 cu B^1 și intersecția lui CD cu $B'S_4$ ne dă pe D'.

Asemenea mai resultă și următorul teorem.

In două figuri colliniare centrale, fășiile din două puncte corespundětoare duse către cele-l'alte puncte corespundětoare sunt perspective;

și teoremul.

In două figuri collineare centrale, seriile tăiate de două linii corespundětoare de către cele l'alte linii sunt perspective.

Numind A' B' C' D'.... imaginea lui A B C D....

In figură vedem că fășia B. A X C S_2 e perspectivă cu seria A X C S_2, tot ast-fel rěmân și proecțiile lor B'. A' X' C' S_2....; Aceeași observațiune relativ la cele două fășii perspective B. A C X S_2....; D. A C X S_2... și proecțiunile lor. Tot ast-fel vom găsi că proecțiunile a două serii perspective, rěmân perspective și în genere putem enunța fără să mai demonstrăm:

Proecțiunile a două figuri d'ântêia treaptă ce sunt proective rěmân proective.

Când ducem din L uă paralelă la A B până întâlnesce A' B' în Q_1', obținem ast-fel un punt Q_1' corespundětor lui $Q\infty$, de pe A B. Tot ast-fel obținem Q_2', Q_3' imaginele punctelor de la infinit de pe B C și C A. Să demonstrăm că toate aceste puncte se află pe uă singură dreaptă (fig. 11).

Unind B' cu Q_3' și B cu $Q_3\infty$ avem în B și B' două fășii a' b' c' d' și a b c d ce sunt perspective.

Razele a_1 b_1 c_1 d_1 fiind paralele cu a b c d, resultă că fășia a_1 b_1 c_1 d_1 e proectivă cu fășia a' b' c' d', și fiind-că b și b' cad într'uă linie, ele sunt perspective, prin urmare Q_1', Q_2' și Q_3' sunt p'uă linie. *Prin urmare imaginele tuturor punctelor de la infinit sunt p'uă linie dreaptă q'.*

Linia s fiind în același timp și original și imagine, resultă că imaginea punctului de la infinit cade în infinit pe s.—prin urmare *dreapta q' e paralelă cu s.* Tot ast-fel să poate demostra că:

Toate punctele R cari au imaginele lor la infinit, sunt p'uă linie dreaptă r paralelă cu s.

Dacă ne închipuim planul figurii originale A B C, învêrtit împrejurul lui s până face un unghiu oarecare α cu planul de desen, iar în același timp învêrtim și planul format de q' și L, până formează același unghiu α cu planul de desen, atunci fiind-că a_1 II a, resultă că Q_1 rěmâne pe loc ca și S_1, prin urmare și *a'* rĕmâne pe loc, adică, a' b' c' este proecția lui *a b c* din spațiu în raport cu punctul L din spațiu.

Așa dar *a b c* din planul de desen poate fi considerat ca rabaterea figurii plane *a b c* din spațiu împrejurul urmii *s* a acestui plan; iar L rabaterea centrului de proecțiune împrejurul urmei *q'* a unui plan paralel cu *a b c* și dus prin centrul de proecțiune. D'uă dată cu prima rabatere obținem pe *r* care este intersecțiunea planului original, cu un plan paralel cu cel de desen și care trece prin L din spațiu.

Când în spațiu uă figură este ast-fel în cât tae pe *r*, proecția sa va avea 2 puncte la infinit. Proecția unui cerc se numesce *secția conică*, fiind-că e intersecția conului de proecțiune cu planul de proecțiune. Când cercul tae *r*. conica va tăia dreapta de la infinit și va avea 2 ramuri. Tangentele în punctele unde cercul tae *r* se vor proecta în tangentele punctelor de la infinit și se numesc asimptote, iar conica *hiperbolă*. Când cercul tangează *r*, conica se numesce *parabolă* și are pe dreapta de la infinit ca tangentă. Când cercul nu tae și nici atinge pe *r*, curba se închide în limitele finitului și se numesce *elipsă*.

In fig. 12 tăind fășia formată în S_1 de razele c l' s l prin liniile L B' B și L A' A, obținem seriele L S_3 A A' L S_4 B B', care fiind perspective, resultă că

$$\frac{LA}{S_3A} : \frac{LA'}{SA'} = \frac{LB}{SB} : \frac{LB'}{SB'} = \text{const.} = \triangle$$

adică *raportul dublu format de douĕ puncte corespundĕtoare de pe uă rază, cu centrul de perspectivă și cu punctul de intersecție al razii cu axa de collineațiune e constant.*

Când considerăm pe aceași rază, mai multe puncte corespundĕtoare A și A', B și B' etc., vom avea și în acest cas (fig. 13)

$$\frac{LA}{SA} : \frac{LA'}{SA'} = \frac{LB}{SB} : \frac{LB'}{SB'} \text{ saŭ } \frac{LA}{SA} : \frac{LB}{SB} = \frac{LA'}{SA'} : \frac{LB'}{SB'} = \ldots$$

adică seriele punctelor A. B, C.... și A', B', C'... de pe aceași rază sunt proective, punctele *S* și *L* își corespund lor înși-le și se numesc puncte duble.

Prin analogie conchidem: Fășiile a, b și a', b' ale liniilor originale și imagine în același punct S sunt proective.

Razele *s* și *c* adică, axa de colliniațiune și raza la L corespund lor înșile și se zic raze duble. (fig. 14).

In genere când *A'* e imaginea lui *A*, și când un original A_1 cade în A', imaginea sa A_1' nu cade în A'.

In casul special când $\triangle = -1$ avem:

$$\frac{LA}{SA} = -\frac{LA'}{SA'} \text{ și } \frac{LA_1}{SA_1} = -\frac{LA_1'}{SA_1'}$$

Când A_1 cade în A', avem

$$\frac{LA}{SA} = -\frac{LA_1}{SA_1} \text{ sau } \frac{LA_1}{SA_1} = \frac{LA''}{SA_1'} \text{ sau } \frac{LA}{SA} = \frac{LA_1'}{SA_1'} \text{ sau}$$

$$\frac{LA}{LA - SA} = \frac{LA_1'}{LA - SA_1'} \text{ sau } \frac{LA}{LS} = \frac{LA_1'}{LS}$$ adică A_1' cade în A_1. In casul ce l'am tratat cele patru puncte L S A A_1 formează uă *grupă armonică*, iar seriele A, B, C... și A_1, B_1, C_1.... sunt *proective involutorice*. Același lucru putem zice relativ la *grupa armonică* de 4 raze *s, c, a,* a_1 și la *fășiele proective în involuțiune* ale razelor corespundĕtoare a, b,... și a_1, b_1,...

Pentru figuri d'a 2-a treaptă avem definițiunea:

Două figuri perspective d'a doua treaptă sunt involutorice când originalul și imaginea pot fi schimbate între dênsele.

In Fig. 15 am desemnat douĕ triunghiuri A B C și A_1 B_1 C_1 ce sunt involutorice.

Exagonul A B C C_1 B_1 A_1 e uă figură involutorică cu ea însăși adică partea S_1 A' B' C' S_2 e imaginea lui S_1 A B C S_2 și viceversa.

In exagonul involutoric ABC A'B'C', avem că AB cu A'B; AC cu A'C', BC cu B'C', AB' cu BA', AC' cu CA' și BC' cu CB' se intretaiă pe axă.

Când din *B* și *B'* ducem câte 3 raze la A,A',C' și le considerăm ca proective, și voim să obținem razei BC pe corespunzătoarea din B', facem următorul raționament:

Tăind razele BA, BA', BC' și BC cu axa *s*, obținem punctele 1, 2, 3, 4 (fig. 16).

Tăind razele B'A, B'A' și B'C tot cu *s* obținem: 1' în 2, 2' în 1 și 3' în 4, — corespunzătorul 4' lui 4 e necunoscut. Insă 1.2.3.4 trebuind a fi proectiv cu 1', 2', 3', 4', resultă $\frac{13}{23} : \frac{14}{24} = \frac{1'3'}{2'3'} : \frac{1'4'}{2'4'}$ saŭ $\frac{13}{23} \times \frac{24}{14} = \frac{24}{14} \times \frac{14'}{24'}$ saŭ $\frac{13}{23} = \frac{24'}{14'}$ aceste douĕ raporturi nu pot fi egale de cât dacă *4'* cade în *3*, și prin urmare corespunzĕtoare razei BC, este B'_3 care din causa involuțiunii trece prin *C*, adică B'C.

Intr'un exagon involutoric, fășia razelor duse din B la punctele A,A',C',C este proiectivă cu fășia razelor duse din corespunzĕtorul B' la aceleași puncte A,A',C',C.

Vom demonstra mai pe urmă că douĕ fășii proective, dau nascere, prin intersecția razelor corespunzătoare, unei secțiuni conice.

In acelaș mod se poate demonstra:

Tăiând douĕ laturi corespunzătoare AB și A'B' al unui exagon involutoric cu cele-l-alte 4 laturi, obținem 2 serii proective, și prin urmare, precum vom vedea îndată, liniile de unire ale punctelor corespunzĕtoare din aceste douĕ serii sunt tangente la uă secție conică.

Tot aci s'a demonstrat că: seriile 1 2 3 4... și 1'2'3'4'... sunt douĕ serii proective reunite, ast-fel în cât, când un original oare-care 1 cade într'uă imagine 2', atunci imaginea 1' corespunzătoare lui 1 cade în originalul *2* corespunzĕtor lui 2', prin urmare formează douĕ serii proective reunite în involuțiune.

Să mai dăm următoarea definițiune:

Când sunt date 4 puncte, dintre cari nu sunt 3 într'uă dreaptă ele formează un patrulater de 4 colțuri cu *șease laturi*, cari prin intretăierea lor mai dă alte 3 puncte zise *puncte diagonale*, cari unite între dênsele dă nascere la *3 diagonale*.

Când sunt date 4 drepte, din cari nu sunt trei cari să treacă printr'un punct, ele formează un patrulater de *4* *laturi*, cari prin intretăierea lor dă nascere la *6 colțuri*, cari prin liniile lor de unire mai dă nascere la *3 diagonale*, cari la rêndul lor dă nascere la *3 puncte diagonale*.

In seriile 1, 2,; 3, 4;..., punctele *1* și *2* sunt două puncte diagonale ale patrulaterului de puncte AA′ BB′ pentru care centrul e al 3-lea punct diagonal.

Prin urmare: *Punctele diagonale ale patrulaterului format de două perechi de puncte ce sunt situate pe 2 raze ale unei coelineațiuni involutorice, formează pe axă puncte corespunzĕtoare ale unei involuțiuni.*

Tot ast-fel *diagonalele patrulaterilor formate din câte două perechi de linii corespunzĕtoare, cari pleacă din câte două puncte diferite ale axei, trec prin Centru, și formează acolo razele corespunzĕtoare a două fășii involutorice.*

Proectivitatea în cerc și în secțiunile conice

Dacă din T_1, situat pe cerc, ducem raze la A, B, C tot pe cerc (fig. 17) și din T_2 situat pe același cerc, ducem raze la aceleași puncte *ABC*..., resultă că sin AT_1B=sin AT_2B ; sin BT_1C=sin BT_2C și sin CT_1A=sin CT_2A, prin urmare toate sinurile unghiurilor corespunzĕtoare fiind egale și raporturile duble a 4 raze corespunzĕtoare vor fi egale și prin urmare fășia T_1 e proectivă cu fășia T_2.— Proectând cercu, obținem uă secțiune conică, în care fășiele T_1' și T_2' vor rĕmânea proective prin urmare următorul teorem :

Ducênd din două puncte fixe T_1 și T_2 de pe uă secțiune conică raze la toate cele-l-alte puncte ale secțiunii, obținem două fășii proective.

Vice-versa : *Punctele de intersecțiune ale razelor corespunzĕtoare din două fășii proective sunt situate pe uă secțiune conică, care trece prin vêrfurile celor două fășii.* Când cele două fășii proective sunt în posiție perspectivă, conica va degenera în *axa de perspectivă* și în *linia de unire a celor 2 vêrfuri.*

Prin urmare acest teorem ne învață cum să construim uă secție conică din 5 puncte date.

In fig. 18 t și t_1 sunt două tangente fixe, iar *a* uă tang. mobilă, care tae cea d'întêia în *A* iar a doua în A_1 ; *a* e punctul de contact cu cercul.

$$\text{Se vede că } \angle a\,M\,A_1 = 90^0 - \frac{1}{2}\,a\,A_1O$$

$$\text{și } \angle a\,M\,A = 90^0 - \frac{1}{2}\,a\,A\,O$$

$$\text{prin adunare : } A\,M\,A_1 = 180^0 - \frac{1}{2}\,(A_1 + A)$$

$$\text{Insă } A_1 + A = 180^0\text{-}O \text{ resultă } A\,M\,A_1 = 90 + \frac{1}{2}O$$

adică, *Punctele de intersecție ale unei tangente mobile cu două tangente fixe la un cerc, sunt vĕzute din centrul cercului sub un unghiu constant.*

Când tăiăm două tangente *t* și t_1 ; cu mai multe tangente *a, b, c*.... în A, B, C... (fig. 19) și A_1, B_1, C_1..., și unim M cu A, B, C. . și cu A_1, B_1, C_1, obținem două fășii ast-fel că d. e. $\angle B_1$, $MC_1 = \angle BMC$, adică două fășii unite proectiv, reunite în M și prin urmare seriele A, B, C... și A_1, B_1, C_1 sunt proective.

In proecțiune cercul trece într'uă secție conică, tangentele la cerc rĕmân tangente la secție și proectivitatea seriilor A B C ... și A′ B′ C′... nu se strică.

Prin urmare: *Tăiând două tangente ale unei secțiuni conice cu toate cele-l'alte tangente ale aceleași curbe, obținem două serii proective.*

Vice-versa : *Unind punctele corespundĕtoare a două serii proective, obținem tangentele uneĭ aceleiași secțiunĭ conice, care atinge și cele două liniĭ pe cari sunt situate seriile date.* Când cele două serii sunt perspective, conica va degenera în două puncte, adică, *centrul de perspectivă* și *intersecția celor două liniĭ cari poartă seriile.*

Acest teorem ne dă mijlocul cum să construim tangente la uă secție conică, când sunt date 5 tangente.

Aceste proprietăți proective ne duc la cunoscutele teoreme ale lui Pascal și Brianchon, ce ne înlesnește construirea unei conice din 5 puncte sau 5 tangente.

Teoremul lui Pascal sună : *Intr'un exagon de puncte 1 2 3 4 5 6 înscris într'uă conică, 3 perechi de drepte opuse 1 2 cu 4 5, 2 3 cu 5 6, 3 4 cu 6 1 se intretae pe uă singură linie dișă linia lui Pascal.*

Iar teoremul lui Brianchon: *Intr'un exagon de laturi 1 2 3 4 5 6 tangente la conică, liniile de unire a 3 perechi de colțuri opuse 1 2 cu 4 5, 2 3 cu 5 6, 3 4 cu 6 1 trec printr'un punct dis punctul lui Brianchon.*

Când avem uă conică dată prin 5 puncte A, A′, B, C, D și uă linie dreaptă *l* (fig. 19-a), putem obține intersecția ei cu conica în următorul mod :

Ducem din *A* radele b, c, d, la B, C, D... și din A corespundĕtoarele b′ c′ d′ la B, C, D.

Aceste rade dă în *l* punctele β, γ, δ și β', γ', δ' ce determină două serii proective reunite, ale căror puncte duble ne dă cele două puncte căutate.

Tot ast-fel se resolvă analog ducerea tangentelor dintr'un punct exterior la uă conică dată prin 5 tangente sau prin 3 tangente și punctele de contact de la două.

Am depăși prea mult limitele ce ne-am propus, dacă am intra în detaliile constructive basate pe proprietățile proective la conică. Cei ce se interesează vor trebui să recurgă la Fiedler, op. cit. P. I sau la *Wiener : „Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I Band“*. (Tratat de Geometrie descriptivă).

Noi vom trata ceva mai în detaliu *involuțiunea* la conice.

Despre involuțiune.

Am vĕdut că în casul unei collineațiuni cu $\Delta = -1$ obținem p'aceeași radă două serii proective în involuțiune, cu L și S ca puncte duble, iar în același punct *S* al axei *s* obținem două fășii de rade proective reunite, cu *s* și *c* ca rade duble. Seriile în involuțiune pot fi obținute și prin unirea liniilor cari poartă două serii proective în următorul mod : In două serii proective avem 2 puncte Q' și R corespundĕtoare lui $Q\infty$ și $R'\infty$ Punênd l' peste l ast-fel ca Q' să vie peste R.

Dacă considerăm pe A ca original (fig. 20) îi corespunde A' ca imagine. Considerând A_1 în A' ca original îi va corespunde un punct A_1' ca imagine. Raportul dublu între cele 4 puncte duble $A, R, A_1, Q\infty$ trebue să fie egal cu cela al imaginelor lor $A', R'\infty, A_1', Q'$ prin urmare:

$$\frac{A\ A_1}{R\ A_1} \cdot \frac{A\ Q\infty}{R\ Q\infty} = \frac{A'\ \ A_1'}{R'\infty A_1'} : \frac{A'\ \ Q}{R'\infty\ Q} \text{ sau } \frac{A\ A'}{R\ A_1} = \frac{A'\ A_1'}{A'\ Q'}; \text{ sau } \frac{A\ A_1}{A'A_1'} = \frac{R\ A_1}{A'Q'}$$

Din figura reese că $R\ A_1 = -A'\ Q'$ prin urmare și $A\ A_1 = A'\ A_1'$, adică A_1' cade în A.

Punênd l' peste l putem face ca A și A_1 să fie într'uă parte și alta a lui $R\ Q'$ cum e sus, sau ambele de aceași parte cum e în figura 21.

In casul d'întêi perechile de puncte $A\ A_1$, $B\ B_1$ nu se vor întâlni. Iar în casul al douilea, se va găsi în genere 2 perechi de puncte, cari să se întâlnească, adică 2 puncte duble. Intêiul cas se dice *involuțiune eliptică*, iar al 2-lea *involuțiune hiperbolică*. Unind un punct oare-care cu seriile involutorice de mai sus, obținem *fășii involutorice reunite*, cu sau fără rade duble. Intr'uă conică oare-care ducênd $A\ A_1$ și $B\ B_1$, obținem P și prin punctele de intersecție ale liniilor $A\ B_1$ cu $B\ A_1$ și $A\ B$ cu $A_1\ B_1$ trece linia p cari pot fi considerate ca *centru* și *axa de collincațiune involutorică* a conicei numite *pol* și *polară*, (fig. 22).

Unind un punct T cu $A, B, C, \ldots$ iar T_1 cu $A_1, B_1, C_1, \ldots$ obținem 2 fășii perspective $a, b, c, \ldots$ și $a', b', c', \ldots$ Fășia din T la $A_1, B_1, C_1 \ldots$ este proectivă cu fășia $a', b', c' \ldots$ din natura conicei, prin urmare $a_1, b_1, c_1 \ldots$ și $a, b, c \ldots$ sunt proective reunite. Involuțiunea lor reese iar din caracterul involutoric al punctelor A, A_1; $B, B_1 \ldots$

Aceasta ne dă mijlocul cel mai simplu d'a construi fășiile involutorice.

Când ne este dat $a\ a_1$ și $b\ b_1$ trecem prin vêrful T un cerc, care tae radele date în punctele A, A_1, B și B_1. (fig. 23). Liniile $A\ A_1$ și $B\ B_1$ ne dau polul P—Uă radă c ne dă pe cerc punctul C, care unit cu P ne dă pe cerc pe C_1 prin care trece c_1.— Cele două rade r și r_1 duse la extremitățile diametrului care trece prin P sunt normale și se numesce *perechea normală*. Ducênd din P două tangente, căpătăm pe cerc punctele F și G, radele f și g ce trec prin aceste puncte sunt *duble*.

Când P cade înăuntrul cercului, n'avem *rade duble*, însă *perechea normală* există tot-d'a-una.— Prin analogie deducem următoarea construcție pentru seriile involutorice.

Ducem în B un cerc tangent la $l\ l_1$ și ducem din A, A_1 și B, B_1 tangente la cercu, cari îl ating în A, A_1 și B, B_1 (fig. 24). Intersecțiile liniilor $A\ A_1$ cu $B\ B_1$ și $A\ B$ cu $B\ A_1$ ne dau linia p —;

Pentru un punct C îi găsim pe corespundĕtorul C, astfel: Ducem din C uă tangentă la cerc până în c, p'acest punct îl unim cu B până întâlnesce p în x, unim x cu B_1 până întâlnesce cercul în C_1, aci ducem uă tangentă care ne dă pe $l\ l_1$, punctul C căutat.

Tangentele în F și G ne dau pe $l\ l_1$ punctele duble F și G, cari nu există atunci când polara nu tae cercul. Ducând tangenta paralelă cu $l\ l'$ căpătăm pe M unde sunt reunite Q' și R corespundĕtoarele punctului de la infinit de pe $l\ l_1$.

Când avem două perechi AA_1 și BB_1 precum și M, corespundĕtor punctului M_1 de la infinit avem (fig. 25).

$$(A\ B\ M\ M_1\infty) = (A_1\ B_1\ M_1\infty\ M), \text{ adică:}$$

$$\frac{A\ M}{B\ M} : \frac{A\ M_1\infty}{B\ M_1\infty} = \frac{A_1\ M_1\infty}{B_1\ M_1\infty} : \frac{A_1\ M}{B_1\ M} \text{ sau } \frac{A\ M}{B\ M} = \frac{B_1\ M}{A_1\ M} \text{ sau}$$

$$A\ M \times A_1\ M = B\ M \times B_1\ M = K^2 = FM \times F\ M = G\ M \times G\ M$$

când F și G sunt puncte duble. D'aci următoarea construcție ușoară pentru aflarea lui F și G când avem A, A_1 și M.

Ducem un semi-cerc peste $A\ M$, ridicăm ordonata $A_1\ X$, atunci în triunghiul $M\ X\ A$ avem $M\ X^2 = M\ A \times M\ A_1 = K^2$ (fig. 26).

Descriind din M un cerc cu raza $M\ X$, căpătăm la intersecția lui $l\ l_1$ punctele duble F și G zise *conjugate*.

Când M cade între A și A_1 nu sunt puncte duble.

Când avem *puncte duble*, ele pot representa involuțiunea, fiind-că sunt 2 părechi cu ajutorul cărora putem construi ori-care altă păreche.

Cu scopul de generalisare putem într'un mod abstract să admitem că și involuțiunea *eliptică* are 2 puncte duble conjugate, însă cari sunt imaginare.

Așa dar: *Ori-ce involuțiune de pe uă dreaptă ne representă* **2 puncte conjugate**. *Ele sunt* **reale** *la uă involuțiune iperbolică și* **imaginare** *la uă involuțiune eliptică.*

Ori-ce involuțiune de raze într'un punct representă 2 raze conjugate, reale când involuțiunea e iperbolică și imaginare când involuțiunea e eliptică.

Două puncte imaginare conjugate, sau două raze imaginare conjugate nu sunt de cât vorbe cari înlocuesc vorbele: involuțiunea eliptică de serie și involuțiune eliptică de raze.

Deci: Linia de unire a 2 *puncte imaginare conjugate* este linia reală pe care se află involuțiunea eliptică a punctelor.

Punctul de intersecția a 2 *raze imaginare conjugate* este vêrful involuțiunii eliptice de raze.

Intersecțiile unei linii reale cu 2 *linii conjugate imaginare* este involuția de puncte obținută pe acea linie prin tăerea razelor fășii involutorice ce representă pe cele 2 linii conjugale imaginate ș. a. m. d.

Când ni se dă uă conică și un punct P_1 ca pol, îi găsim polara p_1 ast-fel: (fig. 27).

Ducem din P două raze a și b, cari tae conica în $A\ A_1$ și $B\ B_1$. Liniile $A\ B$ cu $A_1\ B_1$ și $A\ B_1$ cu $B\ A_1$ dau punctele P_2 și P_3 prin care trec polara p_1.

Din figură resultă că luând P_2 ca pol îi corespunde $P_1\ P_3$ ca polară și lui P_3 îi corespunde $P_1\ P_2$ ca polară.

Punctele P_2 și P_3 fiind punctele diagonale, ele formează punctele corespunzĕtoare ale unei *involuțiuni de poli* pe polara p_1; iar razele p_2 și p_3 din P_1 la P_3 și P_2, formează rază corespunzĕtoare a *unei involuțiuni de polare* în P_1. Avênd în P_1 douĕ perechi de polare le putem construi *razele duble* cari vor fi tangente din P_1 la conică, iar intersecția lor cu conica vor da punctele de contact. Se vede, că, în P_1 și P_2 sunt *polare duble reale* iar în P_3 ele sunt imaginare. Prin urmare din P_1 și P_2 se pot duce câte *2 tangente reale* și din P_3 *2 tangente imaginare*. Acest cas se va întêmpla ori de câte ori P va fi în interiorul conicei.

In casul special când P e pe conică, polara sa p va fi tangenta la conică în acel punct.

Toate razele involuțiunii de polare se vor confunda cu p, iar toți *polii* involuțiunii de poli se vor confunda cu P. — Acest cas particular de involuțiune se numesce *involuțiune parabolică*. — Să mai reamintim că $P_1 BSB_1$ formează un grup armonic și tot ast-fel $p_3 p_2 b a$

Când P_1 e la infinit, construcția lui p_1 e aceiași, cele 2 puncte A și A_1 sunt simetrice cu polara p_1. Admițênd $P_2\infty$ pe p_1, polara sa p_2 trebue să fie paralelă cu direcția $P_1\infty$ fiind-că trebue să treacă prin P_1 (fig. 28).

Intersecția M între p_1 și p_2 e polul dreptei $P_1\infty$ $P_2\infty$ adică polul dreptei de la infinit, dreptele p_1 și p_2 vor fi raze corespunzĕtoare ale polarelor în M. Fiind-că acest punct M are proprietatea ca ori-ce dreaptă prin el să dea pe conică douĕ puncte simetrice cu dênsul (M el se numesce *centrul conicei*.

Cele 2 polare p_1 și p_2 îndeplinesc definițiunii ce se dă pentru *douĕ diametre conjugate*.

Așa dar: *Polul dreptei de la infinit în raport cu uă conică este centrul conicei. Razele corespunzĕtoare ale involuțiunii de polare în centru ne dau diametrè conjugate ale conicei.*

Avênd centru M cu involuțiune de raze conjugate, putem construi perechea dublă care vor fi *cele 2 axe* ale conicei.

In casul unei iperbole, involuțiunea ne va da și *2 raze duble reale*, cari sunt *asimptote reale*; iar în cas de elipsă avem *asimptote imaginare*, representate prin involuțiunea eliptică a *diametrelor conjugate*.

In casul unei parabole, toate diametrele sunt paralele, fiind-că M e la infinit. Fie-care diametru e conjugat cu dreapta de la infinit.

Când în fig. . . . ., alegem pe p_2 un punct X ca pol, polara sa x va trebui să treacă prin P_2. Cu alte cuvinte: *Raza din P_1 către un punct X ca pol și raza către intersecțiunea lui x cu p_1, sunt raze corespunzĕtoare ale involuțiunii de polare.*

Dându-ni-se, cele douĕ axe ale unei conice, un punct P cu polara sa p, aflăm punctul de pe axa a, ast-fel: (fig. 29). Unim $B\infty$ cu P și cu y intersecția lui a cu p, ele sunt douĕ polare corespunzĕtoare ale involuțiunii din $A\infty$ și ne dau în a, punctele x și y corespunzĕtoare involuțiuni de poli în a. Punctele duble A și A′ vor fi cele 2 puncte căutate. Tot ast-fel se află și punctele duble B și B' pe b. Unind M cu mijlocul lui AB și ducênd din M uă paralelă la AB, obținem 2 diametre conjugate.

In casul a involuținnea polilor pe a și pe b sunt iperbolice pr. urm. sunt puncte d'ale conicei și pe a și pe b, iar involuțiunea diametrelor este eliptică, deci asimptotele sunt imaginare, avem a face cu uă elipsă.

In casul b involuțiunea polilor e iperbolică pe a, eliptică pe b, involuțiunea diametrelor e iperbolică, prin urmare conica e uă *iperbolă* cu vêrfuri în a, cu polare duble drept asimptote.

In casul c avem uă iperbolă cu vêrfuri reale în b și imaginare în a.

Despre reciprocitate.

Când ni se dă uă conică K putem ori-cării drepte a ca polară să'i aflăm A ca pol, (fig. 30). Unei drepte b îi corespunde alt punct B ca pol. Punctului de intersecție $a\,b$ ca pol, îi corespunde $A\,B$ ca polară. Unei figuri oare-cari de polare a b c d e îi corespunde uă figură de poli A B C D E.

Punctelor a b, a c, a d, ae de pe a considerate ca poli, le corespunde AB, AC, AD, AE ca polare, această fășiă de polare este proectivă cu seria polilor corespunzĕtori.

Figurile a b c d e și A B C D E se zic *reciproce proective în involuțiune*, fiind-că considerând toate *polarele din plan cu punctele lor de intersecțiune* ca aparținênd unui sistem, iar *toți polii cu liniile lor de unire* ca aparținênd altui sistem, vedem că unui punct considerat ca aparținênd unui sistem, îi corespunde uă dreaptă din cel-alt sistem, iar același punct considerat ca aparținênd celui d'al doilea sistem îi corespunde aceiași dreaptă, numai ca aparținênd celui d'întêi sistem. Conica dată K, se ḑice *directoare*.

Generalisând ideia de reciprocitate proectivă, ḑicem: *Douĕ sisteme sunt reciproce proective când unei linii dintr'un sistem îi corespunde un punct din cel-alt, iar seria punctelor de intersecție ale unei linii a_1 cu toate cele-l'alte b_1 c_1.... din acelaș sistem, și fășia razelor din A_2 către toate cele-l'alte B_2 C_2... sunt proective.*

Dreapta a_1 din sistemul *1* cu corespunzĕtorul sĕu A_2 din sistemul 2 se numesc *polara* și *pol*.

Dacă pe aceiași dreaptă uă considerăm ca a_2 din sistemul 2, îi va corespunde un pol A' din sistemul *1*.

Când ni se dă uă dreaptă a_1 a_2 cu cei doi poli A_1 și A_2 (fig. 31), atunci unui punct oare-care A_1 pe a_1, îi corespunde uă linie a_2 prin A_2 și linia A_1 a_1 îi corespunde A_2 ca intersecția lui a_2 cu α_2. Serii A_1 B_1 C_1, îi corespunde fășia proectivă α_2 β_2 γ_2. iar serii A_2 B_2 C_2 îi corespunde fășia proectivă α_2 β_2 γ_2. Cele 2 fășii sunt și ele proective și dau nascere unei conice cari trec prin cei 2 poli A_1 A_2. Conica se numesce conica punctelor dublu conjugate.

Când această conică (fig. 32), tae dreapta a_1 a_2, atunci punctele F și G pot fi considerate ca F_1 F_2 și G_1 G_2. Punctului F_1 îi corespunde φ_2 prin el și lui F_2 îi corespunde φ_1 prin el. Tot ast-fel cu G, G_2 cu corespunzětoarele lor φ_1 și φ_2.

Avem deci teorema: ***Când pentru un punct din sistemul 1, polara sa din sistemul 2 trece prin el, atunci pentru același punct considerat ca pol din sistemul 2, polara din sistemul 1, va trece tot prin el:***

Tot ast-fel. avem: ***Când polul din sistemul 2 este așezat pe polara sa din sistemul 1, atunci și polul din sistemul 1 este așezat pe aceiași dreaptă, când ea e considerată ca polară din sistemul 2.***

In genere ori-ce dreaptă are douě puncte F și G, cari îndeplinesc condițiunile de mai sus. Dacă considerăm totalitatea, acestor puncte F și G, ea e representată printr'uă conică care nu poate fi tăiată de ori-ce dreaptă, de cât în 2 puncte. Deci această curbă va fi uă conică, o numim *conica de poli* și o însemnăm cu K_1. — In genere din natura proectivității figurilor reciproce reese că unei conice de puncte să-i corespundă uă conică ca envelopă de drepte, adică când toate punctele dintr'uă figură sunt așeḑate pe uă conică, dreptele corespunzětoare din figura reciprocă învělue uă conică.

Prin urmare toate dreptele f și g cari trec prin polii or învălue uă conică, zisă ***conică de polare*** și o însemnăm cu K_2.

Din ori-ce punct al conicei K_1 trebue să putem duce tangente la K_2, cari sunt cele 2 polare ale sale. Tot ast-fel ori-ce tangentă la conica K_2 trebue să taie conica K_1 în 2 puncte cari sunt cei 2 poli ai ei. Pentru aceste motive conica K_2 trebue să fie interioară conicei K_1 și cel mult să se atingă în douě puncte (fig. 33).

Când ni se dă cele 2 conice K_1 și K_2, atunci unui punct P_1P_2 îi aflăm polarele p_1 și p_2, ast-fel: Ducem din P_1 2 tangente la K_2. Ele taie K_1 în A_1A_2 și B_1B_2 (fig. 34). Liniele A_1B_1 și A_2B_2 ne dau liniele căutate p_1 și p_2.

Prin analogie își poate deduce ori-cine cum se găsesce cei doi poli ai unei drepte.

Când punctul P_1P_2 e la infinit, cele 2 tangente *a* și *b* sunt paralele, iar construcția rěmâne aceiași. Găsindu-se 2 perechi de polare pentru 2 puncte de la infinit, obținem la intersecția lor punctele M_1 și M_2 cari sunt polii dreptei de la infinit.

Unind M_1 cu punctele $A_1\infty$, $B_1\infty$, $C_1\infty$ (fig. 35 și 35-a) și ducând prin M_2 polarele respective α_2, β_2, γ_2, obținem iarăși douě fășii proective, cari precum știm au ***douě perechi de raze dreptunghiulare.***

In genere 2 sisteme sunt definite prin 4 puncte dintr'un sistem și 4 drepte corespunḑětoare din cel-l'alt sistem.

Să admitem că ni s'a dat $X_1\infty$, $Y_1\infty$, M_1 și P_1 cu corespunḑětoarele lor x_2, y_2, $m_2\infty$ și p_2. Dacă mutăm M_2 în M_1, și facem ca x_2 să caḑă în x_1, atunci și y_2 va cădea în y_1 (fig. 36, 36 a) și X_2 în X_1 și Y_2 în Y_1. Impreună cu mutarea lui M_2 se va muta și p_2, în cât ambele figuri de mai sus se vor confunda în figura de mai jos.

Considerând în cele 2 sisteme (fig. 37) ast-fel împreunate dreapta *p* ca aparținênd sistemului 1, vom găsi că și atunci polul ei cade în P. Tot ast-fel se va întâmpla cu ori-care altă polară cu polul ei.

Așa dar prin această mutare, am obținut *reciprocitate involutorică*. Cele douě conice K_1 și K_2 se vor confunda într'una *K* care este directorul involuțiunii. Punctul *M* fiind polul dreptei de la infinit este și centrul lui *K*, iar *x* și *y* sunt axele.

Insemnând cu $+$ părțile axelor x_1 și y_1, cari sunt către P_1, și ale axelor x_2 y_2 cari tae p_2, involuțiunea se poate obține în 4 feluri și anume:

a) Punênd $+x_2$ peste $+x_1$ și y_2 pese $+y_1$. In acest cas directoare e o elipsă (fig. a).

b) Punênd $+x_2$ peste $+x_1$, iar $+y_2$ peste $-y_1$. In acest cas avem uă iperbolă cu puncte reale pe x și imaginare pe y.

c) Punênd $+x_2$ peste $-x_1$, iar $+y_2$ peste $+y_1$. In acest cas avem o iperbolă cu puncte reale pe *y* și imaginare pe *x*. Asimptotele sunt aceleași ca în casul b). Iperbola din *a* se ḑice conjugată iperbolei din b).

d) Punênd $+x_2$ peste $-x_1$ și $+y_2$ peste $-y_1$. In acest cas nici pe *x* nici pe *y* nu sunt puncte reale. Involuțiunea polarelor fiind eliptică, ḑicem că ***directoarea e uă elipsă imaginară conjugată elipsei din casul a).***

In toate figurile (a, b, c, d), punctul P are aceeași poziție relativ cu axele x, y, ca și punctul M; însă polarele *p* sunt simetrice în raport cu *M* în casurile a, și d și b, și c. Tot ast-fel se va întâmpla și cu polii aceleiași drepte, cari vor fi simetrici în casurile a și d și b și c.

Polara punctului P din casul *d* se numesce *antipolara* punctului P din casul a, și vice-versa. Tot ast-fel polara punctului P din casul *c* e *antipolara* punctului P din casul b_1 și vice-versa.

(Va urma)

I. Solomon, inginer.