S'au executat mai multe puţuri, aşezate în planul vertical al galeriilor şi mergênd de la suprafaţa terenului până la galerie.

Aceste puţuri cu ghisduri de lemn şi umplute cu piatră uscată, sunt destinate a absorbi apa din terenul ce le încongioară şi a o conduce în galerii.

S'au construit 11 puţuri, 6 pe galeria de la capul Vaslui în spre deal, depărtate de 10^m din ax, în ax iar la cele-l'alte galerii, cari sunt mai scurte, numai câte 2.

6. Ca mĕsură preventivă s'a executat un dren longitudinal şi în transea de la capul despre Iaşi al tunelului, iar drenurile transversali executate înainte s'au pus în comunicaţie cu acest dren.

7. Pentru a împedeca ca apele de la suprafaţă să filtreze prin rambleul executat peste zidăria de la cele 2 capete ale tunelului, s'a executat o serie de şanţuri transversali de zidărie de piatră, puse în comunicaţiune cu şanţurile colectoare, destinate a conduce apele în afară. Şanţurile sunt depărtate cu 10^m din ax în ax şi suprafaţei terenului coprinsă între ele i s'a dat o formă înclinată de o parte şi de alta, spre a înlesni pe cât se poate scurgerea apelor. Aceste suprafeţe s'au semănat în urmă cu iarbă.

(Va urma)

S. Carcalechi
Inginer-şef

STUDIU ASUPRA STATICEI GRAFICE DE CULMAN

(Urmare)

CAPITOLUL II. PUTERI IN PLAN.

Noţiuni generale

Cu noţiunile de geometrie de posiţiune, desvoltate, până aci, putem trece la expunerea unei părţi a Staticei grafice şi anume la acea care se ocupă cu puteri din acelaş plan. In genere nu vom usa de cât de principiile cele mai fundamentale şi de construcţiunile cele mai simple. Acolo unde necesitatea va cere ca să usăm de teoreme mai grele, sau de construcţiuni mai complicate din geometria de posiţiune, le vom expune din nou, căutând de a le explica mai bine de cât s'a făcut, corijênd ast-fel în acelaş timp greşeli strecurate.

Inainte de toate să reamintim urmĕtoarele noţiuni şi principii de mecanică, fără ca să intrăm în discuţiunea lor.

Ori-ce forţă este cunoscută prin efectul ei asupra unui punct material, care efect este *mişcare*.

Când o forţă lucrează ea singură şi continuu asupra punctului, avem *o mişcare dreaptă şi uniform accelerată*.

Direcţia mişcării este *direcţia forţii*, punctul material care se mişcă, este *punctul de aplicaţiune al* ei, iar acceleraţiunea mişcării este proporţională cu *intensitatea puterei*.

Când două forţe lucrează continuu asupra unui punct, mişcarea este tot uniform accelerată, avênd o direcţiune şi acceleraţiune diferite de direcţiunile şi acceleraţiunile mişcărilor cari s'ar produce, dacă ar lucra fie-care forţă în parte. Acea forţă, care ea însăşi ar produce aceeaşi mişcare ca cele două forţe împreună, se numesce *forţă resultantă*. Aceeaşi definiţiune avem şi pentru casul când, în loc d'a avea numai două forţe, avem mai multe. Forţele date se numesc, în raport cu forţa resultantă, *forţe componente*.

Când forţele, care lucrează asupra unui punct, produc o mişcare zero, ele se zic în *equilibru*.

Două forţe, cari lucrează asupra unui punct şi sunt egale în intensitate şi direcţiune, însă cari au sens contrar, sunt în equilibru.

Când mai multe forţe sunt în equilibru, fie-care poate fi considerată ca fiind egală şi de sens contrar cu resultanta celor-l'alte.

Paralelogramul forţelor

Cei mai mulţi autori consideră metoda pentru aflarea resultantei a două forţe cu ajutorul paralelogramului ca axiom, care nu mai trebue demonstrat.

Aceasta de sigur că nu este admisibil, fiind-că axiomul trebue să fie numai de cât înţeles de ori şi cine sau cel mult demonstrabil într'un mod nedubios de experienţă.

Cu ajutorul simplelor noţiuni de statică şi de geometria elementară, această regulă se găsesce demonstrată în multe tratate, aşa printre alţii la Poinsot. Faptul că în această demonstrare mişcările sunt substituite forţelor, nu trebue să formeze o obiecţiune serioasă, de oare-ce noţiunea de *forţă* este numai o abstracţiune a efectului, care este mişcarea.

Cu ajutorul geometriei proiective, paralelogramul este numai de cât demonstrabil precum arătăm îndată. Dacă însă demonstraţiunea va apare cam lungă, causa este că nu putem şi nu voim să presupunem că cetitorii sunt bine familiarisaţi cu geometria proectivă, aşa precum o face Culman în tratatul sĕu, şi mai revenim la multe din cele arĕtate în capitolul trecut şi altele cari s'au omis acolo le demonstrăm aci.

Demonstraţia paralelogramului de forţe prin geometria de posiţiune poate fi considerată ca primul exerciţiu de aplicaţiune a geometriei proective la statică, dar tot-d'odată ea îĭ dă un caracter mai ştiinţific şi mai general, fiind-că în acelaş timp ne procură şi regula pentru găsirea resultantei în casul când forţele sunt paralele.

Vom presupune regula paralelogramului ca necunoscută şi vom căuta să vedem cea-ce trebue să facem pentru a găsi resultanta a două forţe cari lucrează într'un punct.

Să mai spunem încă, că ori-ce forţă este representată cu o linie neterminată ca direcţiune, cu o lungime pe dênsa ca intensitate, precum şi cu o săgeată care arată sensul acţiunii.

Pentru compunere a două forţe, A şi B, enunţăm urmĕtoarele axiome:

I. Când cele două forţe sunt egale, mişcarea resultantă nu se poate apropia mai mult de a uneia, de cât de a celei-l'alte, prin urmare trebue să fie la mijlocul lor, adică în bisectriţă.

II. Când forţa A rĕmâne constantă în direcţiune şi mărime, iar forţa B rĕmâne constantă numai în direcţiune însă variabilă în mărime, atunci cu cât B cresce cu atât mai mult resultanta R se depărtează de A, şi anume pentru o crescere infinit de mică a lui B depărtarea lui R de A este şi ea infinit de mică.

III. Resultanta R nu se schimbă în direcţiune, atunci când B şi A îşi păstrează direcţiunile şi variază în mărime în acelaş raport.

Ca resumat al acestor axiome putem scrie:

1. Când B=A resultanta este în bisectriţa unghiului celor două puteri.

2. Când B=o resultanta este în direcţiunea forţii A.

3. Când B=∞ " " " " " B.

Inainte d'a merge înainte cu statica, să deviăm de la cestiune şi să căutăm d'a deduce un teorem din geometria de posiţiune care ne este necesar.

In figura 38, avem că seria A, B, B′, B″, e perspectivă cu fâşia a, b, b′, b″. Se vede d'acolo că $AB = \frac{a}{\sin (al)} \times \sin (a\,b)$. Considerând linia *l*, raza *a* şi punctul *o* ca fixe, putem să scriem equaţiunea de mai sus sub forma: $AB = const \times \sin (ab)$.

Tot ast-fel avem şi $AB' = const \times \sin (ab')$.

Prin scădere căpătăm: $AB - AB' = const \times [\sin (ab) - \sin (ab')]$.

Când admitem variaţiuni foarte mici d'ale lui A B, precum şi ale razii *b*, atunci putem înlocui diferinţa sinurilor prin diferinţa unghiurilor, adică, avem: $\Delta\, AB = \Delta\,(a\,r)$, unde AB însemnează distanţa luĭ B variabil de la A fix, iar (ab) însemnează unghiul lui *b* variabil cu *a* fix. Când în loc d'o seriă şi o fâşiă perspective, avem o seriă şi uă fâşiă proective, equaţiunea $\Delta\, AB = \Delta\,(a\,b)$ subsistă, şi prin urmare putem enunţa următoarele:

***Intr'o fâşiă* abb′.... *proectivă cu o seriă* ABB′..... *avem că unei creşteri infinit de mici a unghiului* (a b) *îi corespunde o creşcere infinit de mică a distanţei* AB**, şi vice-versa.

Când o fâşie **abb′**.... *şi o seriă* **ABB′**.... *sunt ast-fel în cât unei creşteri infinit de mici a unghiului* **(a b)** *să-ĭ corespunză o creştere infinit de mică a distanţei* **AB**, *fâşia şi seria sunt proective.*

Enunţăm maĭ scurt proprietăţile de maĭ sus, zicând că unghiul $(a\,b)$ şi distanţa AB sunt proective.

Introducându-ne acum la axiomul III, vedem că de acolo resultă că unghiul α format de resultanta R cu puterea A este proectiv ca puterea B. Cu alte cuvinte, dacă, începênd din O (fig. 39) punctul de intersecţiune al luĭ A cu B, punem diferite valori d'ale lui B şi ducem din O resultantele corespunzĕtoare, căpătăm că fâşia resultantelor este proectivă cu seria extremităţilor lui B. Fiind-că din resultatul celor trei axiome avem pentru trei valori d'ale lui B resultantele corespunzătoare, resultă că proectivitatea este determinată, adică, că putem construi pentru ori-ce valoare a lui B pe corespunzătoarea *r*. Iată cum se face aceasta:

Punem (în fig. 39) $O\mathcal{B}_1 = O$ $O\mathcal{B}_2 = A$ şi $OB_3\infty = \infty$ Resultantele corespunzătoare vor fi: r_1 în direcţia lui A r_2 în direcţiunea bisectriţii celor două puteri şi r_3 în direcţia lui B.

Dacă din $\mathcal{B}$, extremitatea lui A ducem o paralelă la B, şi o tăiem cu $r_1\ r_2\ r_3\infty$ în $\mathcal{R}_1\ \mathcal{R}_2\ \mathcal{R}_3\infty$, aceste din urmă puncte sunt proective cu B_1 B_2 şi B_3, şi chiar perspective avênd $A\infty$ ca centru de perspectivă. Punênd pe B lungimea $O\mathcal{B} = B$ căpătăm pe corespunzătorul $\mathcal{R}$, ducând din B uă paralelă la $\mathcal{A}$, şi prin urm. $O\mathcal{R}$ va fi resultanta căutată *r*, ca direcţiune.

Recunoascem în asta, ştiutul teorem al paralelogramuluĭ a două forţe.

In cea ce privesce mărimea resultantei, o aflăm ast-fel. Dacă în fig 39-a, presupunem ca cunoscute, puterile A, B şi R, avem: $\frac{A}{\sin (RB)} = \frac{B}{\sin (RA)}$ (1). Insă fiind-că şi B poate fi considerat ca resultantă între A şi R, resultă prin analogie: $\frac{A}{\sin (RB)} = \frac{R}{\sin (AB)}$ (2). Din (1) şi (2) resultă: $\frac{A}{\sin (RB)} = \frac{R}{\sin (AR)} = \frac{B}{\sin (AB)}$, adică, că laturile sunt proporţionale cu sinurile unghiurilor opuse.

Prin aceasta s'a demonstrat că diagonala paralelogramului celor două forţe dă şi mărimea resultantei.

Când în loc ca cele două puteri să fie aplicate la un punct de la finit, ele sunt aplicate la un punct de la infinit, adică, când ele sunt paralele, atunci paralelogramul forţelor nu se mai poate aplica, însă proectivitatea între fâşia resultantelor şi mărimea lui B, atunci când A rĕmâne constant, subsistă şi prin ajutorul acestei proectivităţi, vom deduce o altă regulă. Spre acest scop punem pe direcţia lui B (fig. 40 începênd dintr'un punct O) cele 4 mărimi $O\mathcal{B}_1 = O$, $O\mathcal{B}_2 = A$, $O\mathcal{B}_{3\,\infty} = \infty$ şi $O\mathcal{B} = B$. Razele corespunzătoare vor fi r_1 în direcţia lui A, r_2 la mijloc între A şi B, r_3 în direcția lui B. Tăind fâșia cu linia r^* care trece prin $\mathcal{B}_1$, obținem seria $\mathcal{R}_1\ \mathcal{R}_2\ \mathcal{R}_3$.... proectivă cu seria $\mathcal{B}_1\ \mathcal{B}_2\ \mathcal{B}_3$. Fiind-că $\mathcal{B}_1$ și $\mathcal{R}_3$ cad împreună resultă că unirea, punctelor $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{B}_3$, care sunt corespunzătoare punctului comun $\mathcal{B}_1\ \mathcal{R}_3$, să fie axa de perspectivă a celor două seriĭ, adică ca axă de perspectivă avem linia puterii A. Corespunzătorul $\mathcal{R}$ al punctului $\mathcal{B}$ se află unind $\mathcal{B}$ cu R_2 și prelungind'o până întâlnesce axa de perspectivă în A, apoi unind $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{B}_2$ obținem pe r^* punctul $\mathcal{R}$ pe unde trece resultanta, care de alminterea este paralelă cu cele două puteri.

Observând figura 40, vedem că $\mathcal{R}_1\mathcal{A} = B$ și $\mathcal{R}_1\mathcal{B}_2 = A$. D'aci resultă următoarea regulă cunoscută pentru găsirea resultantei a două forțe paralele.

Schimbăm locul celor două forțe date și în același timp schimbăm și sensul uneia. Diagonalele trapezuluĭ format din extremitățile forțelor ast-fel puse, ne daŭ un punct al resultanteĭ.

In ceea-ce privesce mărimea resultanteĭ nu maĭ demonstrăm că ea este egală cu ***suma forțelor date.***

Când sunt maĭ multe forțe ajunegm, din cele dise pentru două forțe, la construcția unuĭ ***poligon de forțe*** și a unuĭ ***poligon funicular*** sau ***de presiune***, Demonstrația este cea cunoscută și nu o maĭ repetăm, nefiind scopul nostru d'a face un curs de statică, ci de a arĕta numai p'acele părți cari sunt demonstrabile cu ajutorul geometriei de posițiune.

Reciprocitatea între poligonul de forțe și poligonul funicular

Dacă demonstrațiunea paralelogramului celor două forțe cu ajutorul geometriei proective poate fi privită și ca simplu exercițiu de aplicațiune a geometriei proective la statică, nu este tot ast-fel îndată ce voim să studiăm proprietățile poligonuluĭ funicular și al poligonuluĭ de forțe. Dacă voim să ne putem pronunța dinainte asupra formei uneia sau alteia din cele două poligoane, numai din cunoascerea unor condițiuni impuse de la început, geometria elementară nu ne poate servi de loc. Maĭ mulți autori recurg acolo unde geometria elementară îĭ părăsește, la geometria analitică și la calculul infinitisimal. Fără ca să susținem că acest drum este maĭ inferior, trebue recunoscut însă că el reduce cu totul rolul staticei grafice. In loc d'a-i da caracterul unei științe independente, basată numai pe geometria pură, statica grafică este redusă numai la rolul unuĭ simplu instrument de executare. Este adevĕrat că calculul infinitisimal ne procură mijloace foarte prețioase pentru tratarea staticei și că sunt părți ale acesteia unde geometria pură sau că nu a putut încă de loc pătrunde, sau că ne procură metoade inferioare. Susținem însă că la rândul ei geometria pură își are domenii unde e mai mănoasă de cât calculul infinitisimal și că acolo unde până acuma n'a pătruns încă. cu timpul va pătrunde. O colaborare egală a ambelor doctrine (a staticei analitice și a celei geometrice) va contribui într'un mod mai simțitor la progresul staticei.

Paragraful de față ne dă un exemplu cum geometria de posițiune ne procură nisce metoade de construcțiuni mult mai lesnicioase de cât cele procurate de calculul infinitisimal.

Când ni se dă mai multe forțe 1, 2, 3.... cari trec printr'un punct M_1, atunci (fig. 41a) pentru a construi poligonul de forțe și cel funicular, necesarie pentru aflarea resultantei, admitem uă forță ajutătoare. Odată aceasta admisă începem de la un punct M_2 și ducem pe rênd una după alta în direcțiune, mărime și sens forțele 0, 1. 2, 13, 4..... (fig. 41b). Numim 01, 12, 23, 34 punctele respective de intersecțiune ale liniilor 0 cu 1, 1 cu 2, 2 cu 3, 3 cu 4, ducem acuma din punctul de intersecțiune al lui 0 cu 1 (fig. 41 a). o linie 12 paralelă cu raza din M_2 la punctul 12 (din fig. 41b), de acolo unde ea întâlnesce pe *2* o paralelă *23* la raza din M_2 spre *23* ș. a. m. d Ast-fel obținem poligonul funicular. Intersectând între dênsele liniile *0* cu *45*, căpătăm un punct R, pe unde trebue să treacă resultanta. Direcțiunea și mărimea eĭ este dată unind punctul *01* cu *45* din poligonul de forță.

Poligonul de forțe 1. 2. 3. 4.... și cel funicular 12. 23. 34.. se corespund ast-fel că unei drepte oare-care 1 din poligonul forțelor îĭ corespunde un punct 1 din cel funicular, iar unuĭ punct *12* din cel d'întêiu îĭ corespunde o dreaptă *12* din cel d'al duoilea.

Dreptele 0. 12. 23... din poligonul funicular sunt paralele cu razele duse din M_2 la punctele 01, 12, 23.... din cel al forțelor.

Dacă tăem pe cele d'întêiu cu dreapte de la infinit, obținem o serie de puncte prin care trec razele fâșii duse din M_2 la punctele 01, 12, 23... Această din urmă fâșie este deci perspectivă, prin urmare și proectivă cu seria formată de dreptele 0, 12, 23... din poligonul funicular, pe dreapta de la infinit. Tot ast-fel se demonstrează analog că fâșia din M_1 spre punctele 1, 2, 3, 4... din poligonul funicular, este proectivă cu seria provenită din intersecția liniei de la infinit cu dreptele 1, 2, 3, 4... din poligonul de forță.

In resumat avem deci :

(1) { Dreptele: 1,2,3,4.. și ∞ din poligonul de forțe } ca corespundĕtoare
 Punctele: 1,2,3,4.. și M_1 » » funicular }

(2) { Punctele: 01,12,23,34 și M_2 » de forțe } ca corespundĕtoare
 Dreptele: 0,12,23,34.. și ∞ » funicular }

(3) Fâșia din M_1 către toate cele-l'alte puncte din poligonul funicular, proectivă cu seria provenită din intersecția dreptei ∞ cu dreptele corespundĕtoare din poligonul de forțe.

(4) Fâșia din M_2 din poligonul de forțe către cele l'alte puncte e proectivă cu seria provenită din intersecția dreptei ∞ cu dreptele corespundĕtoare din poligonul fonicular.

Prin urmare ***poligonul funicular și cel de forțe pot fi considerate ca două figurĭ preoctive reci-***

proce, în casul când forțele se taiă într'un punct. Punctele M_1 și M_2 sunt cei doui poli ai dreptei de la infinit.

Când spre exemplu poligonul de forțe este înscris într'o conică, trebue ca poligonul funicular să fie înfășurabil la o altă conică.

Când M_2 este în interiorul conicei de forțe trebue ca dreapta de la infinit, care este corespundĕtoare lui M_2 să fie în afară de conica funiculară, adică funiculara trebue să fie o elipsă.

Când M_2 este în afară de conica de forțe, atunci conica funiculară este o iperbolă.

Când M_2 este pe conica de forțe, atunci conica funiculară este o parabolă.

In practică se întâmplă uneori casul când forțele se întâlnesc într'un punct, iar funiculara să fie obligatoriu o conică dată. Problemul consistă întru a se găsi intensitatea forțelor (cari sunt date numai în direcțiune) astfel ca poligonul funicular să fie cel cerut. Vom da trei exemple pentru casul special când puterile sunt paralele, adică când ele trec printr'un punct de la infinit. Aceasta se întâmplă foarte adesea în practică. Inainte însă trebue să ne abatem de la cestiune, și să demonstrăm uă propietate importantă la două conice reciproce.

Fie K_1 și K_2 douĕ conice reciproce date (fig. 42). Fie M_1 și M_2 cei doi poli ai dreptei de la infinit, iar C_1 și C_2 cele douĕ centre ale conicelor.

Celor douĕ puncte A_2 și B_2 de pe conica K_2 situate p'o rază prin M_2 le corespund cele douĕ tangente a_1 și b_1 la K_1 și paralelele la coarda $A_2 B_2$.

Linii A_2B_2 îi corespunde punctul a_1 b_1; care este la infinit.

Tangentelor a_2 și b_2 le corespunde punctele A_1 și B_1.

Punctului a_2b_2, care este intersecția tangentelor a_2 și b_2, îi corespunde A_1B_1, linia de unire a punctelor A_1,B_1 corespunzătoare liniilor a_2 și b_2.

Insă a_2b_2 este polul dreptei A_2B_2 în conica K_2 și A_1 B_1 este un diametru din conica K_1, care e conjugat direcțiunii A_2 B_2.

Așa dar avem : *Polul unei raze prin M_2 din sistemul 2 îi corespunde în sistemul 1 un diametrul conjugat direcțiunei acelei raze.*

Dacă ducem în C_1 toate diametre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ și conjugatele lor $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1' \ldots$, obținem două fășii proective reunite în involuțiune. Ducând prin M_2 raze $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$ succesiv paralele cu $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1' \ldots$, vom avea fășia α_1, β_1, $\gamma_1 \ldots$ să fie proectivă cu acea a razelor α_2, β_2, $\gamma_2 \ldots$

Dacă tăiăm fășia cea d'ěntêia (adică fășia tuturlor diametrelor în C_1) cu uă linie l_1, obținem $\mathfrak{A}_1 \infty$ $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1 \ldots$ Tăiând și fășia a doua cu l_2 conjugat la l_1, căpătăm, seria $\mathfrak{A}_2 \infty$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2 \ldots$ Cele două serii, provenite din tăierea razelor corespunzĕtoare a două fășii proective, sunt deci proective. Și fiind-că $\mathfrak{A}_1 \infty$ și $\mathfrak{A}_2 \infty$ se corespund. resultă, că ele sunt *asemenea*.

Să venim acuma la cele trei probleme de cari am pomenit.

Problema I. *Ni se dă uă boltă eliptică e și ni se cere ca să uă încărcăm, astfel ca poligonul de presiune să cadă în axă (vezi fig. 43).*

Dacă am cunoasce puterile de aplicat în fie-care punct și le am pune (admițĕnd uă scară) ca ordonate d'asupra axei, am obține cea ce se zice *linia de încărcare i*. Să presupunem că această curbă *i* e dată. Să ducem prin centrul *C* al elipsei date, diametrul *b* conjugat la direcțiunea forțelor care să formeze. Să împărțim acest diametru în părți egale și prin liniile de împărțire să ducem ordonate coprinse între *e* și *i*. Incărcarea pentru aceste porțiuni pot fi representate prin verticalele 1, 2, 3.... duse la mijloc. Ducând aceste lungimi 1, 2, 3.... p'o verticală ca puteri avem poligonul forțelor. Această verticală este uă conică degenerată. Să admitem că cunoascem și polul M_2, care trebue să fie ast-fel ales ca poligonul funicular corespunzĕtor să se confunde cu *e*. Latura 12 din poligonul funicular este, atunci când părțile sunt foarte mici, uă tangentă la elipsă prin urmare paralelă cu diametrul conjugat la diametrul C_1. Raza din M_2 la punctul 12 din poligonul de forțe este paralelă cu latura din 12. Prin urmare resultă că razele din M_2 la punctele 12,23... din poligonul de forțe, sunt paralele cu conjugatele diametrelor duse din C_1 la punctele 12, 23... din poligonul funicular. Aceste două fășii sunt deci proective, și tăindu-le cu două direcțiuni conjugate obținem două serii asemenea. Să tăiăm fășia cea d'întâia chiar cu verticala forțelor și vom obține înseși forțele 1, 2, 3.... P'a doua să uă tăiăm cu uă paralelă la tangenta de la vêrful elipsei, și obținem 1', 2', 3',.. proporționale cu forțele 1, 2, 3... Admițând una din forțe d. e., forța 1, putem deci deduce lesne pe cele-l'alte făcând ca raporturile $\frac{2}{2'}$, $\frac{3}{3'}$ ..... să fie egale cu $\frac{1}{1'}$.

In resumat iată resoluția problemeĭ :

Impărțim elipsa în părți egale mĕsurate pe diametrul conjugat verticalei. Unim centrul C cu extremitățile acestor părți și obținem o fășiă de diametre. Tăiăm această fășiă cu tangenta de la vêrf (sau cu ori ce altă paralelă la această tangentă) și obținem lungimi cari sunt proporționale cu puterile ce sunt de aplicat în mijlocul părților în cari s'a împărțit elipsa. Admitem mai întêi aceste părți chiar ca puteri și le punem pe o verticală (p' din fig. 43 b). Ducĕnd din extremitățile lor paralele la tangentele corespunzĕtoare de la elipsă, ele trebue să se taiă într'un punct M_2 care este polul poligonului de forțe. Dacă admitem d. e. forța *1* ca egală cu porțiunea 1 (din fig. 143 c), ducem din extremitățile acestei porțiuni paralele la razele M_2—11 și M_2—12 (poligonul de forțe fig. 43 b), cari paralele se taiă în punctul M_2'. Distanța *h* represintă distanța polară. Ducĕnd în fig. 43 b o verticală *p* care se află la distanța *h* de M_2, obținem linia forțelor și pe dênsa porțiunile 1, 2, 3,... cari sunt forțele căutate. Punênd aceste lungimi ca ordonate în mijlocul părților în care am împărțit elipsa, obținem linia de încărcare.

Ordonatele ce le am pus în figură ne arată exact greutățile ce trebuesc puse peste partea corespunzětoare a bolții. Dacă voim să obținem curba de îngreuiare, trebue împărțit bolta în părți mult mai mici de cât sunt în figură.

Precum vedem din figură, încărcarea cresce spre nascerea bolților până la infinit. Forma obținută corespunde exact cu bolțile eliptice ce se găsesc în architecturile vechi.

Profesorul Bauernfeind a resolvit cel d'întêi analitesce acest problem, iar lui Culman se datoresce această elegantă soluțiune grafică.

Problema II. *Se dă un cablu hiperbolic* **h** *și ni se cere modul cum trebue să'l încercăm pentru ca funiculara să cază în această hiperbolă.*

Resoluțiunea este absolut identică cu acea din problema I. Ea e representată în figurile 44 a. b. c.

De observat este numai că pe cât timp la problema 1-a numěrul părților în care s'a împărțit elipsa este finit, iar suma puterilor de aplicat este infinită, aci din contră, numěrul puterilor este infinit iar suma lor este finită. Această sumă se obține ducênd din M_2 paralele la asimptotele iperbolei până ce întâlnesc linia forțelor în a și a_1. Linia aa_1 este acea sumă.

Problema III. *Ni se cere modul cum trebue să încărcăm uă bară pentru ca funiculara să fie uă parabolă dată.*

Resoluțiunea este și aci aceiași în principiu.

Centrul parabolei fiind la infinit, resultă că toate diametrele sunt paralele. A împărți parabola în părți egale, când sunt měsurate în direcțiunea conjugată, însemnează a duce diametre equidistante. Ele vor tăia pe direcțiunile conjugate, părți egale. Prin urmare și forțele sunt egale. Așa dar noi trebue să încărcăm grinda uniform în sens orizontal, atunci când axa este verticală.

Asupra acestui cas vom reveni încă

Aceste sunt aplicațiunile importante resultate din reciprocitate între poligonul de forțe și cel funicular. Ne mulțumim cu ele și părăsim acest subiect pentru a trece la alte noțiuni de statică.

Despre momente.

In genere ori-ce putere este cunoscută când ne sunt date intensitatea, direcțiunea și punctul de aplicațiune saŭ când douě sau mai multe puteri componente sunt cunoscute. In casul când avem douě puteri paralele, egale și de sens contrar, fără ca una să fie în prelungirea celei-l'alte, resultanta lor este matematicesce cunoscută, fiind-că are o intensitate zero, cade în direcțiunea componentelor, și are punctul de aplicare la infinit; în practică însă nu căpătăm din aceste date nici o ideie deslușită despre efectele unei ast-fel de perechi, și știut este că în realitate ceia-ce ne interesează sunt efectele lor. Când pe lângă perechea AA' mai avem o altă forță P, (fig. 45), resultanta celor 3 forțe A, A', P se va afla în modul știut printr'un poligon de forțe și un poligon funicular. Făcênd aceste construcțiuni găsim că resultanta celor 3 forțe A, A' și P este tot P însă mutată la o distanță p. Această distanță p este deci efectul cel mai vědit al părechii AA' asupra forții P. In fig. 45 b, vedem că triunghiul OBC e asemenea cu obc din fig. 45 a. De aci $\frac{OB}{BC} = \frac{ob}{bc}$. Fiind-că o b și b c sunt proporționale cu a și p. iar OB = P și BC = A, avem $\frac{P}{a} = \frac{A}{p}$ sau $Ap = Aa$.

Prin urmare:

Când uă pereche **AA'** *cari au între dênsele uă distanță* a *lucrează asupra unei forțe* **P**, *resultatul este că* **P** *se mută la uă distanță* **p** *ast-fel ca* **Pp = Aa.**

Vice-versa resultă:

Când ni se dă uă putere **P** *putem s'o descompunem într'o putere egală* **P** *mutată la uă distanță* **p** *și uă pereche oare-care* **AA'** *cu distanța* **a**, *ast-fel ca* **Pp = Aa**.

Productul $A \times a$ se numesce momentul părechii AA'.

Generalisând această ideie de moment putem considera că la uă pereche ne este dată uă singură putere A și un punct O la distanța a și să zicem:

Aa *este momentul puterii* **A** *în raport cu punctul* **O**. De sigur că această valoare nu se schimbă când O se mișcă p'o paralelă la A.

Tot ast-fel putem considera forța A concentrată în punctul O și atunci avem că: *Momentul static al unei puteri A concentrată în raport cu uă linie* **o** *este productul puterii A cu distanța* **a** *a punctului* **O** *de la dreapta* **o**.

Grafic definițiunea de mai sus poate fi înlocuită prin următoarea:

Momentul unei puteri în raport cu un punct este de douě ori suprafața triunghiului format din unirea punctului dat cu extremitățile puterii.

Punctul dat se numesce *pol*. Când avem mai multe puteri A_1 B_1 C.... cari trec print'un punct O și când avem un pol P avem teoremul:

Suma momentelor mai multor puteri cari trec printr'un punct în raport cu un pol este egală cu momentul resultantei al acestor puteri în raport cu acelaș pol.

In formulă acest teorem se enunță prin

$$Aa + Bb + Cc + \ldots = Rr$$

Acest teorem este de interpretat ast-fel:

Fiind date mai multe perechi cari trec printr'o pereche de puncte, resultanta acestor perechi este perechea resultantelor.

Numai demonstrăm nici acest teorem socotind aceasta de prisos.

Când forțele date sunt paralele, acelaș teorem este valabil de oare-ce forțe paralele însemnează forțe cari trec printr'un punct de la infinit.

Nu vom intra în detalii constructive relative la acest punct, scopul nostru fiind, precum am mai spus, să ne oprim numai la acele părțĭ cari se demonstrează cu ajutorul geometriei de posițiune. Numaĭ pentru a avea o legătură între diferite părți și a avea un întreg, am atins această cestiune, și vom atinge și cestiunea centrelor de gravitate.

Se maĭ notăm însă următoarele (presupuse ca știute).

Când ni se dă puterile 1, 2, 3, 4 și voim să aflăm momentul uneia sau a resultantei unora sau resultantei tutulor în raport cu un punct dat facem următoarele: Punem toate puterile pe uă verticală, alegem un pol *O* la uă distanță h construim poligonul funicular, și ducem uă verticală p prin P. Pentru a avea momentul forțiĭ *3* d. e., tăiăm p cu latura 23 în punctul *a* și cu latura 34 în b, și atunci momentul $M_3 = ab \times h$ Voind momentul resultantei tăiăm *p* cu laturile extreme ale poligonului funicular în A și B și avem că $M_r = AB \times h$.

Despre centru de gravitate.

Ne vom ocupa mai târdiu cu forțele în spațiu. Admitem acuma ca știut urmĕtoarele:

Când tăiăm mai multe forțe paralele din spațiu cu un plan și învêrtim forțele împrejurul punctelor lor de intersecțiune cu acel plan, resultanta să învêrtesce și ea împrejurul punctului ei de intersecțiune cu acelaș plan.

Dacă luăm în planul zis uă dreaptă și înmulțim forțele cu distanțele respective ale punctelor lor de intersecțiune cu plan până la linie, căpătăm ***momentul forțelor în raport cu linia sau momentul static al forțelor în raport cu acea linie.***

Este vĕdit că momentul static al unei forțe în raport cu uă linie poate fi înlocuit cu uă pereche de forțe din care una trece prin linia iar cea-l'alta trece prin punctul în cestiune și e paralelă cu linia dată. De acea suntem în drept d'a spune: ***Momentul static al resultantei mai multor forțe paralele din spațiu în raport cu uă linie dată este egal cu suma momentelor statice ale forțelor date în raport cu aceiași linie.***

De aci resultă că fiind date mai multe forțe paralele din spațiu și vrem să le aflăm resultanta n'avem de cât să le învêrtim împrejurul punctelor de intersecțiune cu un plan până sunt culcate în acel plan, și să le aflăm în aceasta posiţie resultanta, tratându-le ca forțe plane.

Invêrtind a doua oară aceste forțe împrejurul acelor puncte, însă ast-fel ca să rămâie în plan și aflându-le din nou resultanta, găsim la intersecţia lor punctul pe unde trece resultanta din spațiu și care e paralelă cu prima posiţie din spațiu a forțelor.

Punctul de intersecţiune al resultantei cu plan se numesce ***centrul forțelor paralele din spațiu în acel plan.***

Când ni se dă uă figură plană știm că asupra ei gravitatea lucrează în fie-care punct în direcțiuni paralele. Acela unde resultanta acestui numĕr infinit de forțe întâlnesce planul figurii avem: ***Centrul de gravitate al figurii.***

Pentru a afla acest centru de gravitate facem urmĕtoarele:

Impărțim figura în mai multe fâșii egale și paralele.

Medianele acestor trapeze pot fi considerate în intensitate ca fiind egale cu sumele forțelor gravității din fâșiile respective.

Admițênd ca cunoscute centrele de gravitate ale celor fâșii, aplicăm forțele găsite în acele centre, punêndu-le în plan uă dată paralele cu acele fâșii și a doua oară normale pe ele, și aflăm pentru fie-care dată, posiția resultantelor (cu ajutorul a două poligoane de forțe și funiculare) cari la intersecția lor dau ***centrul de gravitate al întregii figuri.***

Când voim să găsim momentul static al forțelor de gravitate ale figurii, sau scurt ***momentul static al figurii*** în raport cu uă linie, descompunem figura în fâșii paralele cu acea linie, și cu ajutorul unui poligon de forțe și unui poligon funicular, aflăm cum am vĕzut, linia de gravitate paralelă cu linia dată, iar momentul static este momentul forțelor ce am desemnat.

Analitic e de remarcat urmĕtoarea formulă:

Când însemnăm cu d S suprafața unui element y distanța aceluiași element de la uă linie dată, S suprafața întreagă, y_G distanța centrului de gravitate de la aceași linie avem:

$$Sy_G = \frac{E (d\,S\,y)}{E (d\,S)}$$

A arăta cum se găsesc centrele de gravitate ale diferitelor suprafețe ese din cadrul ce ni l'am propus.

Puteri proporționale cu distanța de la uă dreaptă, momente centrifugale, momente de inerție, elipsă de inerție.

In teoria elasticității se admite ipotesa că asupra diferitelor elemente ale unei secțiuni, forțele interne normale pe acea secțiune sunt proporționale cu distanțele lor de la uă linie din plan, care are tensiunea zero și care se numesce axa neutră.

Când ni se dă uă figură cu linia *a* ca linią neutră, atunci într'un element oare-care situat pe uă paralelă la *a*, forța internă va fi aceași și egală cu $dF \times x$. Impărțind figura în fâșii paralele cu linia și construind cu ajutorul poligonului de forțe și celui funicular, linia care trece prin centrul de gravitate, obținem în modul știut pe *a* lungimile s_1, s_2, s_3.... cari sunt proporționale cu momentele fâșiilor sau (în vederea ipotesei) cu forțele interne normale cari lucrează pe acele fâșii, și prin urmare ele pot înlocui acele puteri până ce găsim centrul lor. Dacă admitem ca cunoscute punctele de aplicațiune ale acestor puteri (cari însă nu sunt centrele de gravitate ale fâşiilor) şi anume P_1, P_2, P_3...., atunci aplicând în ele forţele s_1, s_2...., uă dată paralele cu linia şi a doua oară normale pe dînsa, obţinem cu ajutorul a douĕ poligoane de forţe şi a douĕ poligoane funiculare, douĕ resultante, cari la intersecţia lor ne dau punctul A, centrul de aplicaţiune al forţelor în cestiune şi pe care să-l numim scurt *centrul axei a* o figură corespundĕtoare şi am desenat.

In figura 46 sunt date: o suprafaţă S cu centrul ei de gravitate G, o linie *a* cu centrul ei A.

Suma forţelor elastice va fi proporţional cu S x G, iar punctul de aplicaţiune în A. Admitem în cercetările noastre că Sx_G este chiar resultanta forţelor elastice.

Momentul static al forţei elastice $d\,S\,x$ în raport cu uă axă *b* va fi $d\,S\,x\,y$. Această expresiune se numeşte *moment centrifugal* al elementului *d S* în raport cu axele *a* şi *b*; ear $\Sigma\,(d\,S\,x\,y)$ se numeşte momentul centrifugal al întregei suprafeţe în raport cu *a* şi *b*.

Expresiunea $\Sigma\,(d\,S\,x\,y)$ este momentul static al resultantei forţelor $d\,S\,y$ în raport cu axa *b*, prin urmare acest moment static va fi egal cu suma forţelor $d\,S\,x$ înmulţit cu distanţa punctului de aplicaţiune a resultantei lor, adică, cu Y_a, adică, avem:

$$\Sigma\,(d\,S\,x\,y) = [\Sigma\,(d\,S\,x)]\,y_a$$

Ştim însă că $\quad \Sigma\,(d\,S\,x) = Sx_G$

Prin urmare $\quad \Sigma\,(d\,S\,x\,y) = Sx_G\,Y_a$.

Prin analogie avem: $\Sigma\,(d\,S\,\acute{y}\,x) = Sy_G\,X_b$

Şi fiind-că: $\quad \Sigma\,(d\,S\,x\,y) = \Sigma\,(d\,S\,y\,x)$

Resultă : $\quad Sx_G\,Y_a = Y_G\,X_b$

Când *b* trece prin *A* avem $y_a = 0$ şi prin urmare şi $X_b = 0$, adică *B* este pe *a*.

Invêrtind *a* îuprejurul lui *B* resultă că puntul *A* se mişcă pe *b*.

Avem deci teorema: ***Când axa neutrală a se învêrtesce împrejurul unui punct B, atunci centrul A se mişcă pe uă linie b care este axa neutră a a punctului B.***

Când axa *a* cade la ∞ resultă că toate forţele elastice sunt proporţionale cu elementele însăşi, de oare-ce toate aceste elemente sunt la aceaşi distanţă de la dreapta de la infinit; prin urmare punctul central al al acestor forţe va fi centrul de gravitate G.

Aşa dar: ***Centrul dreptei de la infinit este centrul de gravitate.***

Vice-versa; ***Când o axă trece prin centrul de gratate al unei snprafeţe, centrul ei este pe dreapta de la infinit.***

Fie G (fig. 47), centrul de gravitate al unei suprafeţe S, *b* uă axă neutră care trece prin G, A un centru pe *b* şi *a* axa neutră corĕspundĕtoare lui A. Fiind-că A este pe *b* resultă că B trebue să fie pe *a* şi în acelaşi timp la ∞, fiind-că *b* trece prin G. Invêrtind *a* împrejurul lui B_∞ punctul A se va mişca pe *b*. Când *a* va trece prin G, A va fi pe *b* la infinit. Depărtênd *a* treptat de G, A se va apropia treptat de G. Când *a* va fi la ∞, A va fi în G.

Să ne abatem de la chestiune şi să căutăm a deduce uă teoremă din geometria de posiţiune, care ne e necesară.

Când pe douĕ drepte *l* şi *l'* (Fig. 48) sunt date 3 perechi de puncte A A', B B', C C', atunci considerându-le ca proective, unui punct oare-care M. de pe *l* i va corespunde un singur punct M' pe *l'*, care este nedubios.

Când un punct mobil M parcurge o dreapta *l* şi în acelaşi timp un alt punct M' parcurge linia *l'* ast-fel că unei anumite posiţiuni a lui M să-i corespunde uă singură posiţiune a lui M' şi cu condiţiunea ca atunci când M va fi în A, M' să fie în A', când M va fi în B, M' să fie în B', şi când M va fi în C, M' să fie în C', atunci punctul M şi M' dau naştere la douĕ serii proective.

Când însă pe *l* şi *l'* sunt date numai douĕ perechi de puncte A A' şi B B' şi douĕ mobile M. şi M' parcurg cele douĕ linii date ast-fel că posiţiunei A a lui M să îi corespundă A' a lui M' şi posiţiunei B lui M să îi corespundă posiţiunea B' a lui M' şi unei posiţiuni oare-cari X să avem uă posiţiune nedubioasă X', atunci M şi M' dau naştere la un numĕr infinit de perechi de serii proective din cari perechile date A A' şi B B' fac parte; pentru fie-care pereche X X' arbitrară sau impusă de anumite împrejurări obţinem câte uă pereche de serii proective.

Intorcându-ne la chestiunea lasată, vedem că punctele A şi A_1 din fig. 47 formează douĕ serii proective din cari S şi ∞ fac parte. Ele sunt involutorice fiind-că punctele pot fi schimbate între dênsele, căci atunci când uă axă trece prin A centrul ei este A_1 şi vice-versa când axa trece prin A_1 centrul este A.

După cele zise până acuma, credem că putem face de a dreptul următoarea conclusiune:

Liniile neutrale şi centrele lor în raport cu una şi aceiaşi suprafaţă formează douĕ sisteme reciproce în involuţiune.

Observăm că *a* şi A nu pot fi de aceiaşi parte a lui G căci atunci ar resulta ca *a* şi A să se întâlnească; cea ce din natura chestiunei nu se poate. Resultă deci că involuţiunea A, A_1, S, ∞ este eliptică or-care ar fi linia *a* care ar trece prin G. De aceia directricea acestei reciprocităţi este uă *elipsă imaginară*. Representanta ei va fi elipsa directrice punctelor A, A_1, S, ∞. Aceste puncte A' sunt simetrice cu A în raport cu G. Această representantă a direcţiunei imaginare se numesce în statică *elipsă de inerţiei*.

Avênd elipsa de inerţie a unei suprafeţe, atunci pentru a găsi centrul unei axe *a*, că utăm polulA' al acestei axe în raport cu elipsa dată ear simetricul A în raport cu G este punctul A căutat.

Precum vedem centrul unei linii este antipolul ei în raport cu elipsa de inerţie. Axa neutrală a unui punct este antipolara punctului în raport cu elipsa de inerţie. (fig. 47). Această demonstraţiune a elipseĭ de inerţie pe basa geometrieĭ pure se datoresce profesoruluĭ Rilter succesorul luĭ Culman la catedra din Zurich.

Aci este locul d'a reveni la modul cum se nasce cele 4 feluri de reciprocitățĭ, de ore-ce data trecută s'au strecurat greşelĭ, atât in text cât şi in planşă.

Când ni se dă o dreaptă a_1 a_2 cu cei doui poli ai ei, A_1 şi A_2 (fig. 49) şi alegem pe dreapta a_1 a_2 punctele B_1 C_1 D_1......, vom avea ca corespunzătoare dreptele β_2 γ_2, δ_2... trecând prin A_2 polulul dreptei a_1. Dreptele β_2 γ_2 δ_2... formează o făşie proectivă cu seria $B_1C_1D_1$ conform difiniţiunei. D'aci resultă cu B_2 C_2 D_2..... intersecţiunile razelor acestei făşiĭ cu a_2 să fie şi ea proectivă cu B_1 C_1 D_1.... Unind A_1 cu B_1, C_1, D_1 vom căpăta făşia β_1, γ_1, δ_1... proectivă deci şi ea cu B_2 C_2 D_2..... şi prin urmare dreptele β_1, γ_1, δ_1...... sunt polarele lui B_2, C_2, D_2....

Tot-d'o-dată vedem că β_1, γ_1, δ_1...,. şi β_2, γ_2, δ_2.... formează două făşiĭ proective zise făşiĭ de raze conjugate care la intersecţia lor dă nascere coniceĭ B, C, D..... care taie dreapta a_1 a_2 in F şi G cari pot fi considerate ca F_1, F_2 şi G_1 G_2 Considerate ca F_1 şi G_1 le corespunde f_2 şi g_2 trecând prin A_2 şi prin ele însăşi, considerate însă ca F_2 şi G_2 le corespunde f_1 şi g_1 trecând prin A_1 şi prin ele însăşi.

Vedem deci că pe dreapta a_1 a_2 sunt două puncte F şi G ast-fel ca polarele lor, f_1 f_2 şi g_1 g_2 trece prin ele ; precum şi prin A_1 şi A_2 trece câte uă pereche de polare f_1 g_1 şi f_2 g_2 ast-fel ca poliĭ lor F şi G să fie situate pe ele.

Pe fie-care dreaptă se va găsi două puncte (reale sau un punct dublu real sau două imaginare) F şi G şi prin fie-care punct va trece două drepte (reale separate sau căzând împreună sau imaginare) care să împlinească aceste condiţiuni. Totalitatea punctelor FG formează o conică K_1 şi totalitatea dreptelor fg enveopează o conică K_2. Aceste două conice sunt K_1 K_2 din fig. 33 planşa trecută şi ne procură mijlocul de a construi unui element oare-care dintr'un sistem corespundătorul ei din cel-l-alt. Nu e nevoe să revenim la acésta.

Dacă ni se dă, orĭ obţinem pentru dreapta m_1 m_2 ∞ pe cei doi poli M_1 şi M_2, le construim cele două perechi dreptunghiulare şi aceasta ne dă mijlocul d'a reuni cele două sisteme intr'una in dată ce pe lângă aceste perechi ni se mai dă două elemente corespunzătoare.

Fie (în figura 50) x_1 y_1 şi x_2 y_2 cele două perechi dreptunghiulare spuse mai sus, M_1 şi M_2 cei doui poli ai drepteĭ de la infinit, P_1 şi P_2 două elemente corespundĕtoare Punctelor $X_1\infty$ şi $Y_1\infty$ le corespunde x_2 y_2 punctelor $X_2\infty$ şi $Y_2\infty$ le corespunde x_1 şi y_1. Dreptei m_1 m_2 ∞ ii corespunde M_1 şi M_2 iar dreptei p_2 ii corĕspunde P_1.

Nu mai putem alege alte elemente fiind-că avem deja m_2 ∞ x_2, y_2 şi p_2 pe uă parte şi M_2, X_1 Y_1 şi P_1 pe d'altă parte.

Punem M_2 peste M_1 (vedi fig. 50-a ast-fel ca $+x_2$ să vie peste $+x_1$ şi $+y_2$ peste $+y_1$.

In această posiţie, linii de la infinit reunite ii corespunde M_1 şi M_2 reuniţi in M, liniilor x_1 şi x_2 reunite in x ii corespunde X_1 şi X_2 reuniţi in X, liniilor y_1 şi y_2 reunite in y le corespunde Y_2 şi Y_1 reuniţi la un loc câte două două şi resultă că avem o involuţiune şi trebue deci ca lui p posiţia lui p_2 să-i corespundă P posiţia lui P_1.

Am căpătat deci o reciprocitate involutorică cu cele două axe cunoscute, şi ştim că ele au drept *directrice* o conică. Directrice am numit pe acea conică cu ajutorul căreia putem construi pentru o dreaptă oare-care dintr'un sistem pe corespundĕtorul ei. din cel-alt sistem construiudu-i polul in raport cu acea conică

Suprapunerea se poate face in 4 feluri şi anume:

a) Punĕnd $+x_2$ peste $+x_1$ şi $+y_2$ peste $+y_1$ (compară fig 50 şi 50-a). In acest cas punctele involuţiunea M, P_1 Px şi Y ∞ precum şi M, P_2 Px şi X ∞ sunt amândouă iperbolice, decĭ au amândouă au puncte duble, adică, atât axa x cât şi y taie directricea in puncte reale şi prin urmare ea este o elipsă.

b) Punĕnd $+x_2$ peste $+x$ şi $+y_2$ peste $+y_1$ (fig. 50b). In acest cas involuţiunea M. Y∞, Px şi P_1 este iperbolică iar involuţiunea M, Y, ∞ Py şi P_2 e eliptică. Pe axa x avem decĭ puncte reale ale directricei şi pe y puncte imaginare. Ea este decĭ o *iperbolă.*

c) Punĕnd $+x_1$ peste $+x_2$ şi $+y_2$ peste $+y_1$. (fig. 50 c) In acest cas avem puncte reale pe y şi imaginare pe x. Directricea este decĭ o *iperbolă* conjugată celei precedente.

d) $+x_2$ peste $-x_1$ şi $+y_2$ peste $+y_1$ (fig. 50 d. In acest cas pe x cât şi pe y sunt puncte imaginare. Directricea o *elipsă imaginară* conjugată celia din casul a.

In casurile a şi d precum şi in b şi c pentru acelaşi punct P polarele sunt respective simetrice în raport cu M. D'aci resultă că dacă pentru casul d am desena directricea din casul a şi vom construi polara p' a punctului P in raport cu aceasta directrice, vom obţine polara căutată ducĕnd din p' simetrica p in raport cu M. Directrica din a poate decĭ inlocui funcţiunile elipsei imaginare şi se numesce répresentanta eĭ.

Când ni se dă elipsa de inerţie şi aflăm pentru o axă a pe antipolul ei A (fig. 47), acesta din urmă se află pe diametru D D_1 conjugat direcţiunei a. Punctele A A_1, D D_1 şi G $G_1\infty$ formează perechea uneia şi aceleiaşi involuţiuni.

Prin urmare raportul dublu A D G $G_1\infty$ = raportul dublu A_1 D_1 $G_1\infty$ G

$$\text{sau} \quad \frac{AG}{DG} : \frac{AG_1\infty}{DG_1\infty} = \frac{A_1\ G_1\infty}{D_1\ G_1\infty} : \frac{A_1G}{D_1G}$$

$$\text{sau} \quad \frac{AG}{DG} = \frac{D_1G}{A_1G} \text{ sau } AG \times A_1G = DG \times D_1G$$

Introducênd notaţiunile din figură avem $a\ y_G = i\ k$ (1.

Introducênd $X_a = X_G + K$ în formula momentului centrifugal căpătăm din:

$C = S\ y_G\ x_a$ formula $C = S\ (y_G' x_G + a\ y_G)$ şi invocând formula (1) avem: $C = S\ (y_G\ x_G + i\ k)$ (2)

Din $x_D = x_G + k$; $y_D = y_G + i$; $y_{D_1} = y_G - i$; $x_{D_1} = x_G - i$ resultă $y_D\ x_D + y_{D_1}\ x_{D_1} = 2\ (y_G\ x_G + i\ k)$.

Cu ajutorul acestei relaţiuni formula (2) trece în $C = {}^1\!/_2 S\ (x_D\ y_D + x_{D_1}\ y_D)$ (3)

Formula (3) exprimă că pentru a găsi momentul centrifugal al uneĭ suprafeţe în raport cu două axe este tot una ca să concentrăm câte o jumĕtate din suprafaţă la extremităţile diamemetruluĭ conjugat uneia din linii şi să aflăm momentul centrifugal al acestor suprafeţe concentrate.

Când cele două axe cad împreună, atuncĭ momentul centrifugal trece în moment de inerţie, iar formula (3) devine: $Ia = {}^1\!/_2 S\ (y_D^2 + y_{D_1}^2)$

sau punênd $x_D = i + h$ şi $x_{D_1} = i + h$

avem $Ia = S\ (h^2 + i^2)$ (4)

Când axa a trece prin G atunci $a = o$ şi avem $I_G = Si^2$ (5)

Introducênd (5) în (4) căpătăm $Ia = I_G + Sh^2$ (6) uă formulă bine cunoscută şi care ne confirmă că elipsa noastră este într'adevĕr elipsă de inerţie. Nicĭ aci nu vom arăta cum se găsesc elipsele de inerţiĭ ale diferitelor suprafeţe.

Cine a urmărit cu atenţiune această deducţiune a elipsei de inerție, se va convinge de sigur că ea este mult mai simplă de cât deducțiunea prin calculul infinitisimal. Bine înțeles că ea cere cunoscințí ceva mai întinse din geometrie de posițiune, însă aceste cunoscințí nu sunt de loc mai grele de cât corespundĕtoare din calculul infinitisimal.

Și dacă geometria de posițiune ar fi cultivată atâta pe cât se cultivă calculul infinitisimal, s'ar recunoasce de ori și cine că pe cât e de simplă pe atât e de frumoasă și aptă de a desvolta imaginațiunea inginerului, pe cât timp calculul are tocmai efectu contrariu.

Aplicațiunile staticei la resistența materialelor.

Când căutăm să aplicăm Statica grafică la resistența materialelor, adesea dăm de dificultăți neînvinse până acuma de geometria pură, încât nu ne este posibil să ne dispensăm cu totul de ajutorul analisei, însă în tot-d'a-una geometria pură poate da ajutor real analisei, și face ca statica grafică să nu fie redusă la rol secundar. Sunt părți ale resistenței unde geometria pură este cu totul independentă de analisă, și ca în tot-d'a-una, acolo unde ea a putut să ajungă stăpână ea ne duce la resultate mai bune, mai practice de cât analisa. Dăm în acest paragraf un ast-fel de exemplu unde avantagiile metoadei de care ne ocupăm reese imediat pentru aceia cari cunosc drumul cel greoi ce-l urmează analisa pentru resolvirea lui.

Când asupra unui corp lucrează niște forțe exterioare, atunci se admite că în interiorul corpului se nasc forțe interioare cari se opun tendinței la ruptură fărâmare, forfecare, îndoire, resucire, etc., provocate în corp de forțele date. Aceste forțe interioare se dic *tensiuni*. Modul cum putem deduce aceste tensiuni din forțele date 'l vom indica atunci când vom trata chestiunea forțelor din spațiu. Acum vom căuta să determinăm relațiunile cari există între tensiunile cari lucrează asupra diferitelor secțiuni plane ale unui corp de o înălțime infinit de mică; secțiunile devin nisce linii cari se învîrtesc împrejurul unui punct. Vom căuta să stabilim regule pentru deducerea acestor tensiuni atunci când cunoascem numai unele din ele.

Să considerăm o prismă triunghiulară foarte mică din acel corp cu laturile a, b, c. (fig. 51). Să presupunem ca cunoscute tensiunile A și B. Să descompunem pe A în A_1 paralel cu a și în A_2 paralel cu b. Tot ast-fel descompunem pe B în B_1 paralel cu b și în B_2 paralel cu a.

Cele cinci forțe A_1, A_2, B_1, B_2, și C sunt în echilibru prin urmare resultantele între A_1 și B_1, între A_2 și B_2 și puterea C trebue să treacă printr'un punct. Insă fiind-că A_1, B_1 și C_1 se tae prin mijlocul c, resultă că și resultantele A_2 și B_2 să treacă prin mijlocul c, adică $O\,O'$ să fie acea resultantă.

Construind paralelogramul forțelor A_2 și B_2 căpătăm resultanta PP_1 $IIOO_1$ (vedi fig. 51ª și 51ᵇ) și din compărarea celor două figuri (51ª și 51ᵇ) resultă $\frac{A_1}{a}=\frac{B_1}{b}$ (1).

Dânduni-se o secție a și puterea interioară corespundĕtoare A (vedi fig. 52ª) și alegem pe b paralel cu A va rasulta că $A_2=0$ și conform cu (1) avem și $B_2=0$ și prin urmare resultă că $A_1=A$ și $B_1=B$.

Cele 3 puteri A, B și C fiind în echilibru resultă că din cunoașterea lui A și B aflăm în modul știut pe C. Figura 52ᵇ arată construcțiunea.

Când în figura 52ª păstrăm pe a ca direcțiune și mărime, ear pe b o variăm în mărime prefăcênd'o în b_1 atunci și B_1 va varia în proporțiunea $\frac{B}{b}=\frac{B_1}{b_1}$, fiincă se admite că tensiunile în aceeași secțiune variază în acelaș raport cu lungimile. Din această proporțiune resultă că seria extremităților lui b sunt proporționale cu ale lui B și prin urmare și proective Fâșiile c și C care proectează aceste serii sunt și ele proective. Dacă considerăm c ca secțiune, C va fi putere, iar când C este direcțiunea secțiunei resultă că c să fie direcțiunea puterei.

Reunind deci (fig. 52_c) fâșia c cu fâșia C în punctul O vom obține o involuțiune de rade.

Prin urmare: *Invêrtind o secțiune c împrejurul unui punct O, iar tensiunile C corespundĕtoare împrejurul aceluiași punct, obținem o involuțiune de rade ast-fel că atunci când una e considerată ca secțiune, corespundĕtoarea ei din involuțiune e puterea interioară și vice-versa.*

Această involuțiune se numesce involuțiune de *direcțiuni conjugate.*

Când tensiunile secțiunilor nu sunt tot-d'a-una de acelaș sens, căpătăm o involuțiune iperbolică. In acest cas avem rade duble, adică, avem secțiuni cari se confund în direcțiune cu tensiunile lor. Acésta însemnează să în acele secțiuni n'avem tensiuni normale.

Când tensiunile sunt tot d'a-una în acelaș sens resultă că evoluțiunea eliptică, raze duble nu există prin urmare n'avem secțiuni supuse numai la forfecare.

In ori-ce cas sunt perechi rectangulare, adică avem două secțiuni normale între dênsele pentru cari tensiunile sunt numai normale.

Ne-am ocupat până aci numai de direcțiuni, să vedem acuma și modul cum variază mărimile tensiunilor pe unitate de suprafață dise *tensiuni specifice*.

In figura 53 avem triunghiul elementar $a\ b\ c$ și presupunem ρ_a și ρ_b tensiunile specifice pentru a și b ca cunoscute, iar pe ρ_c tensiunea lui c trebue să o căutăm. Spre acest scop facem urmĕtoarele: Prelungim laturile a și b și ducem linia KLMIIc ast-fel ca $KL=\rho_a$ și $LM=\rho_b$. Punênd apoi $OK'=OM$ și $OM'=OK$, vom avea $K'L'M'=KLM$. Să demonstrăm că OL represintă în mărime și direcțiune pe ρ_c.

Din asemănarea triunghiurilor MOK și abc avem:

$$\frac{a}{c}=\frac{OK}{KM}=\frac{O'M'}{K'M'}.$$

Insă fiind-că ducând paralela L'N la b avem:

$$\frac{OM'}{K'M'}=\frac{ON}{K'L'}=\frac{ON}{\sigma^a} \text{ resultă :}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{ON}{\sigma^a} \text{ de unde}$$

$$ON=\sigma_a\,\frac{a}{c}=\frac{A}{a}\times\frac{a}{c}=\frac{A}{c}.$$ Prin analogie deducem:

$$NL'=\frac{B}{c}.$$

Linia ON fiind paralelă cu A și L'N paralelă cu B și pe de altă parte amêndouă fiind în acelaș raport cu A și B, resultă ca OL' să fie paralelă cu C și în acelaș raport cu C, precum sunt ON și NL' cu A și B, adică avem:

$$OL'=\frac{C}{c}=\rho c$$

Variând pe c linia K'M' variază ca poziție însă ca lungime rĕmâne egală cu $\rho a+\rho b$ și poziția relativă a lui L' pe K' M' nu se schimbă. Precum știm punctul L' descrie în aceste condițiuni o elipsă.

Dacă în loc de a admite două direcțiuni conjugate oare cari a și b admitem normale între dênsele, vedem că atunci când K M vine în direcțiunea a avem $OL'=\rho b=$ minimum și când vine în direcțiunea b avem $OL'=\rho a=$ maximum. Direcțiunile a și b sunt atunci axele elipsei.

Prin urmare: *variând o secțiune C împrejurul unui punct O și punênd pe direcțiunile tensiunilor respective, valorile tensiunilor specifice, căpătăm o elipsă, ḑisă* **elipsă de tensiune**. Direcțiunile axelor acestei elipse coincidă cu perechia rectangulară a involuțiunei direcțiunei conjugate, adică *maximul* și *minimul tensiunilor sunt în acele secțiuni pentru cari nu avem de cât tensiuni normale.*

In casul când involuțiunea este iperbolică avem două raze duble cari sunt simetrice cu perechia rectangulară cari deci dau pe elipsă două diametre egale. Aceasta însemnează că *tensiunile acelor două secțiuni cari sunt supuse numai la forfecare sunt egale.*

Daca în loc să presupunem că cunoascem două direcțiuni conjugate ca până acuma, presupunem ca cunoscute două direcțiuni oare-cari a și b cu tensiunilelor A și B, să vedem cum găsim prin ele tensiunea direcțiunei c precum și modul ei de variațiune când variază c (fig.54). Descompunem A în A_1 paralel cu a și A_2 paralel cu b. Tot ast-fel pe B în B_1 paralel cu b și B_2 paralel cu a.

Să reunim forțele: B_2, A_2, A_1, și B_1 (veḑi fig. 54) în poligonul de forțe A B C D E. Să ducem din E linia E F I I c și din A linia A F ast-fel ca AF să facă cu F E unghiul α din figura 54ª. Lungimile *E F și A F* represintă componentele forței C după direcțiunea c și c' din figura 54_a. Prelungind FE până ce întâlnesce linia CD în punctul O avem că triunghiul E D O este asemenea cu triunghiul elementar dat și prin urmare: $\frac{DE}{b}=\frac{DO}{a}$ sau $\frac{B_1}{a}=\frac{DO}{a}$; însă fiind-că de la începutul acestui paragraf am vĕḑut că $\frac{B_1}{b}=\frac{A_1}{a}$, resultă că linia $DO=A_1$.

Să ducem în aceeași figură din B linia BG ast-fel ca să se formeze unghiul α cu linia BA; atunci triunghiul ABG este asemenea cu triunghiul elementar dat și avem: $\frac{AB}{b}=\frac{BG}{a}$ sau $\frac{B_2}{b}=\frac{BG}{a}$ sau $BG=\frac{B_2}{b}\,a$.

Ducând din F linia F S' II B G avem către unghiul FAS' asemenea cu triunghiul elementar a b c, prin urmare: $\frac{FS'}{FA}=\frac{a}{c}$ sau $\frac{FS'}{C_2}=\frac{a}{c}$ de unde $FS'=\frac{C_2}{c}\times a$.

Ducâud și orisontala FT' până ce întâlnesce linia DE, avem ca și FT'E asemenea cu abc și prin urmare $FT'=FE\times\frac{a}{c}$ sau $FT'=\frac{C_1}{c}$ a.

Liniile FT' și FS' fiind în același raport ca componentele C_1 și C_2 și făcând între ele unghiul α resultă că linia S'T' să represinte puterea C înmulțită același factor adică $S'T'=\frac{C}{c}\,a$.

Presupunênd că $a=1$ (și aceasta o putem în tot-d'a una face) putem spune că linia S'T' represintă pe $\frac{C}{c}$ adică tensiunea specifică căutată a lui c.

Ducând prin U și F verticalele UT și FS avem, fiind-că triunghiurile UTT' și FSS' sunt egale, că TT'=SS' și prin urmare ST=S'T', dar și FU=ST ca două diagonale.

ST fiind tensiunea specifică pentru secțiunea c, resultă că FT este componentă paralelă cu secțiunea și FS componentă normală pe secțiune a ḑisei tensiuni specifice.

Daca presupunem că secțiunea c se învârtesce împrejurul estremității dreptei a lui a, atunci a rĕmâne constant iar b variază; tot ast-fel rĕmân constante componentele A_2 și A_1 iar componentele B_1 și B_2 variază în mărime în acelaşi raport ca b mic. In aceste variațiuni ale lui c mic putem considera punctele B C D din fig. 54 ca nevariabile, iar A și E ca variabile. In acelaşi timp însă și O este nevariabil precum și G (din causă $BG=\frac{B_2}{b}$ a, și aci raportul $\frac{B_2}{b}$ rĕmâne constant conform cu ipotesa noastră că în aceeași secțiune, tensiunile sunt proporționale cu lungimile). Dacă din punctul fix O vom duce o paralelă la noua direcțiune a lui c și din G o linie G A care să facă cu noua direcțiune c unghiul α, vom căpăta mărimile E' F' și F' A' cari sunt componentele tensiunei C'. Fiind-că G F O=G F' O=α resultă că punctele G, F, F', O sunt pe acelaşi cerc, care trece prin punctele G, O precum și prin H intersecție lui *BG* cu CO, de oare-ce și unghiul $H=\alpha$.

Ducênd prin B verticala BR' avem că:

R'C=RD=½ HC. Tot ast-fel avem și:

DO=½CO. Prin urmare căpătăm:

$\overline{RO}=HO$ ½ . și fiind-că UR⊥ HO, resultă că UT trece prin centru.

Din figură se mai vede că BU=CD= și UD=BC.

In resumat avem:

Când ni se dă secțiunea a cu tensiunea ei specifică $\rho\alpha$ descompusă după componentele T,a paralelă cu secțiunea și $\sigma\alpha^1$ făcênd un unghiu oare-care α cu secțiunea, (fig. 55) și ni se cere să găsim tensiunea σc

a unei secțiuni c care se învârtesce prin O pe a, facem următoarele :

Ducem în direcțiune și mărime $BO = \| T'$, $UD = \| \sigma'_a$, $DO = \| T'_a$.

Lăsăm $UD \perp DO$ *și facem* $RO = RH$.

Ducem prin O și H un cerc cu centrul pe verticala UT.

Ducem prin O o paralelă la secțiunea **c** *până întâlnesce cercul în F.*

Coordonatele ortogonale FT și FS în raport cu axele BU și UT sunt componentele τ_c *și* σ_c *ale tensiunii specifice căutate, din care cea d'întêia lucrează în sensul secțiunii, iar a doua lucrează normal; și FU represintă însăși tensiunea* ρ_c *ca mărime; direcțiunea ei o obținem învîrtind triunghiul FTS împrejurul lui F, până ce FT vine peste FO și ducênd din O o paralelă la noua posițiune a liniei TS.*

Când F vine în F_1 pe verticale UT, atunci tensiunea transversală este zero, iar cea normală$=F_1U$ $F_1U=$ maximum și lucrează în direcțiunea OF_2.

Când F vine în F_2, n'avem nici atunci tensiune transversală și cea normală este $F_2U=$ minimum, și lucrează în direcțiunea OF_1.

Punênd pe OF_1 lungimea $ON=F_2U$ într'o parte și cea-l'altă a punctului O, și tot ast-fel pe OF_2 lungimea $OM=F_1U$, căpătăm cele două axe ale elipsei de tensiune, cea-ce ne înlesnesce construcțiunea *elipsei de tensiune* [1].

Axele elipsei formează, cum știm, perechea rectangulară a involuțiunii de secțiuni conjugate.

Ducênd din U cele două tangente la cerc, căpătăm cele două puncte P și Q.

Pentru direcțiunea OP avem PJ și PP' ca componente ale tensiunii. Tensiunea însăși se obține învêrtind JP' la stânga cu unghiul $OPQ=OQU'$. Find-că $QO \| JP$ resultă că OQ va fi paralelă la noua posițiune a lui JP'; scurt, *secțiunii OP îi corespunde direcțiunea OQ ca tensiune*, și pe basa involuțiunii resultă și vice-versa.

Așa dar am căpătat două perechi de raze din involuțiunea secțiunilor conjugate și anume: axele OF_1 și OF_2 și perechea OP și OQ. Punctul J este polul acestei învoluțiuni în raport cu cercul desenat.

De aci înainte pentru a găsi direcțiunii x pe conjugata ei x_1 unim X de pe cerc cu J până taie cercul în X_1 și unim O cu X_1. Lungimea OY este tensiunea direcțiuni x, iar OY_1 este tensiunea direcțiunii x_1. (vezi figura 55).

Așa dar vedem că din cunoascerea unei singure tensiuni corespundĕtoare unei secțiuni printr'un punct, putem să construim pe toate cele-l'alte tensiuni ale secțiunilor cari trec prin acel punct.

Când se întâmplă ca la fig. 56, ca U să cază înăuntrul cercului, atunci ducênd orizontala PQ prin U, avem ca direcțiunile OP și OQ n'au tensiuni normale și sunt deci raze duble ale involuțiunii. Pentru ambele aceste direcțiuni vedem iarăși că tensiunile sunt egale fiind-că $PU=UQ$.

Dacă ni se dă o grindă în secțiune longitudinală și determinând pentru diferite puncte ale acestei secțiuni tensiunile normale *maxime* și *minime* și punem în fie-care punct direcțiunile secțiunilor respective, că pătăm două curbe, una ca envelopă a tutulor secțiunilor cari au tensiuni normale maxime și alta ca envelopă a celor cari au tensiuni normale minime. Cea dintêia se numesce *trajectorie maximă* și a doua *trajectorie minimă* sau *curba de extensiune* și *curba de presiune*. Ele se taiă normal între dînsele.

Ducênd prin centrul cercului orizontala *KL*, avem că pentru direcțiunea *OK* sau *OL* tensiunile transversale sunt maxime respectiv minime, dar egale în valoare absolută (fig. 55).

Punênd și aceste direcțiuni în diferitele puncte ale grinzii căpătăm ca envelope ale lor *curbele de forfecare* cari și ele se taie normal între dînsele și taie sub un unghiu de 45^0 pe trajectoriile.

In casul când avem raze duble și punem și direcțiunile lor în secțiunea verticală a grinzii, căpătăm ce envelope lor *curba secțiunilor în cari tensiunile normale sunt zero.* Când involuțiunea devine eliptică aceste curbe devin imaginare.

Ne oprim de o cam dată aci cu statică.

In articolul viitor vom trata forțele în spațiu desvoltând mai întâi părțile necesare din geometria de posițiune.

(Va urma).

I. Solomon
Inginer.

[1]) In fig. 55 s'a desenat elipsa de tensiune în jumĕtate scară