H) *Reparațiunea taluselor în puntul unde s'au ivit elculemente.*

	m.c.		lei
1. Săpătura și transportul pământului provenit din ebulment. . . .	2153,04	a 1,20,=	2583,65,
2. Zidăria pe peatră uscată	1048,22	a 17,00,=	17819,74.
3. Umplutură cu pământ bătut în straturi de câte 0.20 c. m.	1104.82	a 1.50=	1657.23
Total			22060,62.

G) *Investirea taluselor*

Prețul unitar al acestei lucrări s'a determinat luându-se de bază estimația de mai jos a învestirei unei suprafețe de 298 m. p. de talus, suprafața coprindênd 2 arcade sau 20 m. de lungime pe axa.

	m.c.		lei
1. Zidărie cu mortar	37.87	a 34,00=	1237 58.
2. Zidărie uscată . .	106.06	a 17,00=	1803.02.
3 Săpătura	143.93	a 1.00=	143.93.
4. Brăzduire . . .	218.16	a 1.65=	359.96.
Total			3594 49

De unde resultă prețul pe m. p. $= \frac{3594.49}{298} = 12.00$

Costul lucrărilor de învestire este dar:

1. Talusa amont c/m	Vaslui	2337.78	m. p.
2. „ „ „	Iași	1161 63	
3 „ aval „	Vaslui	1934.53	
4. „ „ „	Iași	1064.00	
Total . .		6997.94×12,00=83975,28	

S. Carcalechi.
Inginer șef.

STUDIU ASUPRA STATICEI GRAFICE DE CULMANN

(Urmare și fine).

CAP. III

GEOMETRIA DE POSITIUNI IN SPATIU

Impărțirea geometriei de posițiune în *plană* și *spațiu* este cu totul arbitrarie. Am admis-o numai cu scopul de a întroduce mai lesne pe cetitorii în această știință. In realitate însă, geometria de poziție nu poate fi studiată de cât printr'o strânsă legătură între plan și spațiu.

Dar ce este geometria de posițiune?

Precum știm geometria se ocupă printre altele cu studiarea formelor figurelor. Insă una și aceași figură apare sub diferite forme, după cum variăm punctul de privire, sau păstrând punctul de privire după cum variăm posiția figurii.

Perspectiva ne învață metoadele ce trebue să întrebuințăm pentru a afla forma unei figuri dintr'o anumită posițiune, când cunóscem forma aceleiași figuri dintr'o altă posițiune.

Dacă însă știind d. e. că elipsoidul nu este alt-ceva de cât forma sub care apare sfera, căutăm să deducem proprietățile elipsoidului din ale sferei luând în ajutor relațiuni între cele două posițiuni ale corpului, facem *Geometria de posițiune.*

Perspectiva își aplică metoadele sale tăiând conul visual către figura din spațiu printr'un plan, zis plan de proecțiune.

Pe acelaș plan studiază și geometria de posițiune formele corpurilor.

Insă perspectiva mai figurează corpurile din spațiu printr'alte corpuri, zis *reliefe, modele* etc.

Și aci geometria de posițiune are câmpul sĕu de aplicațiune, pe care însă nu-l vom putea de cât atinge.

Despre figuri de diferite trepte

Am spus că geometria de posițiune caută să studieze proprietățile unei figuri dinale alteia cari amândouĕ representă același corp vĕzut însă din diferite puncte Ca basa acestor studii sunt relațiunile între punctele de privire și corpul. Pentru a simplifica însă și mai mult studiul figurilor, geometria de posițiune studiază mai întâi figurile cele mai simple, și trece succesiv din proprietățile acestora la ale celor mai complicate, arătând cum prin relațiuni de proecțiune, figurile de grad superior pot fi deduse din grad inferior.

Spre acest scop geometria de posițiune deosebesce trei spețe de figuri și patru trepte.

Cele trei spețe sunt după cum considerăm figura ca formată din *puncte*, *plane* sau *drepte.*

In orĭ ce figură deosebim: *colțuri*, *fețe* și *muchii*

Când considerăm o seriă de *n* puncte pe o liniă, avem *n* colțuri și o muchie. Fețele dispar. Seria de puncte pe o dreaptă este ***o figură de puncte de întâia treaptă.*** Când avem o fâșiă de raze într'un plan, ce are un singur colț și o singură față. Avem deci ***o figură de drepte de întâia treaptă.***

Când unim un punct din spațiu cu o fâșiă de raze dintr'un plan obținem ***o fâșiă de plane*** care este ***o figură de plane de întâia treaptă.***

Ori-ce figură de puncte dintr'un plan poate fi considerată ca provenită din intersecțiunea a două fâșii din plan, și este deci ***o figură de puncte de a doua treaptă.***

Ori-ce figură de drepte din plan, poate fi considerată ca provenită din unirea punctelor din două serii, este deci ***o figură de drepte de a doua treaptă.***

Unind un punct din spaţiu cu o figură de drepte din plan, obţinem *un mănuchiu de plane*, iar unind punctul din spaţiu cu o figură de puncte obţinem *un mănuchiu de drepte* Amêndouĕ sunt figuri de a doua treaptă.

Când ni se dă o figură oare care de plane o tăiăm printr'un plan oarecare şi obţinem ***o figură de a doua treaptă***, o străpungem cu o linie dreaptă şi obţinem ***o figură de linii de a doua treaptă.***

Figura de plane din spaţiu ori-cum ar fi ea poate deci fi considerată ca eşită din combinarea unei figuri de linii de a doua treaptă cu o figură de puncte de întăia treaptă, prin urmare ea *este o figură de a treia treaptă*.

Figurile de drepte în spaţiu pot proveni de două feluri.

1. Pe de o parte o seriă de puncte pe o draptă şi pe de alta o figură de puncte într'un plan. Liniile de unire între seria de puncte de pe linia şi figura de puncte din plan e *o figură de linii de a treia treaptă.* Tot ast-fel când avem o fâşie de plane împrejurul unei muchi, care e o figură de întêia tréptă şi o intersectăm cu un mănuchi de plane împrejurul unui punct, care e o figură de a doua treaptă, obţinem *o figură de drepte de a treia treaptă.*

2. Când avem douĕ figuri de puncte de a doua tréptă din douĕ plane diferite, şi unim punctele între dênsele prin drepte în ori-ce sens voim, sau dacă intersectăm între dênsele douĕ mănuchi de plane care sunt douĕ figuri de a doua treaptă, obţinem *o figură de drepte de a patra treaptă.*

Punctul ca vêrful unei făşii de raze, *planul* ca faţa acestei făşii şi *dreapta* ca purtătoarea unei serii sunt *figuri fundamentale de întâia treaptă.*

Punctul ca vêrful unui mănuchiu de plane sau raze şi *planul* ca faţa unei figuri de drepte sau puncte de a doua treaptă sunt *figuri fundamentale de a doua treaptă*

Spaţiul ca totalitatea punctelor sau planelor este *figura fundamentală de a treia treaptă*

Spaţiul ca totalitatea dreptelor este *figura fundamentală de a patra treaptă.*

Despre figuri perspective şi proective

Când ni se dă o serie $A_1\ A_2\ A_3$ fig. 57 pe o dreaptă şi o proectăm din $\mathfrak{C}$ pe un plan, obţinem $A'_1\ A'_2\ A'_3$ perspectivă cu $A_1 A_2 A_3$ şi cu făşia din $\mathfrak{C}$ la aceste puncte.

Proectând din $\mathfrak{C}$ o făşie $l_1 l_2 l_3$ obţinem o făşie $l'_1 l'_2 l'_3$ perspectivă cu cea d'ântâia şi cu făşia de plane din $\mathfrak{C}$ la $l_1\ l_2\ l_3$.

Proectând din $\mathfrak{C}$ figura plană *A, B, C* obţinem figura *A'B'C* perspectivă cu cea d'ântêia şi cu mănuchiul de raze (sau de plane) la *A, B, C.*

Proectând toate figurile de mai sus din al douilea centru $\mathfrak{C}'$, obţinem :

seria de puncte $A''_1\ A''_2\ A''_3$ proectivă cu seria de puncte $A_1'A_2'A_3'$

făşia de raze $l_1''\ l_2''\ l''_3$ « « « « raze $l'_1\ l'_2\ l'_3$

figura plană $A''\ B''\ C''$ « « « figura plană $A'B'C'$

mănuchiul $\mathfrak{C}\ A''B''C''$ perspectiv « « mănuchiu $\mathfrak{C}\ A'B'C'$

Dacă unim un punct $\mathfrak{C}''$ cu ultimele figuri avem :

făşia de raze $\mathfrak{C}''A''_1\ A''_2\ A''_3$ proectivă cu făşia de raze $\mathfrak{C}.\ A_1\ A_2\ A$

« « plane $\mathfrak{C}\ l_1''\ l_2''\ l_3''$ « « « plane $\mathfrak{C}.\ l_1\ l_2\ l_3$

mănuchiul de raze $\mathfrak{C}''$ A"B'C" « « mănuchiul de raze $\mathfrak{C}$.ABC (sau plane) (sau plane)

Despre colineaţiunea centrală

Când ni se dă o linia *l* (fig 58) şi ni se cere să o proectăm din $\mathfrak{C}$ pe un plan P', îi căutăm mai ântâi intersecţia S cu planul P¹, şi pe urmă din $\mathfrak{C}$ ducem o paralelă la *l* până întâlnesce planul P¹ în punctul *Q'*. Linia SQ¹ va fi proecţia *l'* căutată a lui *l*. Punctul *S* se numesce urma linii *l* iar *Q¹* se numesce *punctul de direcţiune* sau *punctul de convergenţă* a linii *l¹* de oare-ce toate liniile din spaţiu cari sunt paralele cu *l* vor avea drept proecţiuni linii cari trec prin *Q¹*.

Tot astfel pentru uă figură plană A B C avem linia ***s*** ca urma planului figurei date şi linia *q¹* ca urma planului dus prin $\mathfrak{C}$ şi paralel cu planul dat. Linia *q¹* se numesce *linia de posiţiune* sau *linia de convergenţă* a planului dat.

Dacă ducem prin $\mathfrak{C}$ un plan paralel cu P¹, el taie linia *l* într'un punct *R* care în proecţiune vine în R'_∞ iar planul dat îl taiă într'o linie *r*, a cărei proecţiune este r'_∞. Linia *r* se numesce *linia de disparițiune* şi punctul *R* se numesce *punctul de disparițiune.*

Dacă învêrtim planul figurii împrejurul lui *s* şi în acelaş timp planul $\mathfrak{C}$q¹ împrejurul lui *q¹*, proecţiunea figurii ABC nu se schimbă cât timp planul dat şi planul $\mathfrak{C}$q¹ rĕmân paralele.

Când culcăm planul figurii ABC precum şi planul $\mathfrak{C}$q¹ în planul P¹, atunci figurile ABC şi A'B'C' rĕmân perspective în raport cu $\mathfrak{C}$ rabatut, însă ele se numesc în *colineaţiune centrală.*

Când avem douĕ figuri colinare centrale ABC şi A'B'C' atunci punctul $\mathfrak{C}$ se numesce *centru colineaţiunii*, linia *s* se numesce *axa* colineaţiunei, iar liiniile *q¹* şi ***r*** se numesce *contra axe.* Observăm că distanţa între $\mathfrak{C}$ şi q¹ este egală cu distanţa între ***s*** şi *r.*

Unei linii *l'* ca imagine, îi găsim originalul *l* astfel: O intersectăm cu *s* în punctul *S* şi ducem din $\mathfrak{C}$ o paralelă la *l'* până întâlnesce *r* în *R.* Linia SR va fi *l* căutat.

Unei linii l ca original îi găsim *l'* ca imagine intersectând'o cu *s* în *S* şi ducênd din $\mathfrak{C}$ o paralelă la *l* până întâlnesce *q'* în *Q¹*. Linia SQ' va fi *l'* căutat.

Odată găsit *l* şi *l'* ca corĕspunzĕtoare, găsim unui punct A pe corĕspunzĕtorul sĕu A' prin intersecţia lui $\mathfrak{C}$A cu l'.

Am vĕzut în cel d'ântâi capitol că în aceeaşi colineaţiune raportul dublu ($\mathfrak{C}$SAA') şi (csaa') rĕmâne constant ; am numit acest raport, *caracteristica colineaţiunii* şi l'am însemnat cu Δ.

Printre diferitele feluri de colineațiuni am remarcat pe acea în care $\Delta = -1$.

In acest cas $(\mathfrak{C}SAA') = \frac{\mathfrak{C}A}{SA} \cdot \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} = -1$ sau $\frac{\mathfrak{C}A}{SA} = -\frac{\mathfrak{C}A'}{SA'}$ adică cele patru puncte $\mathfrak{C}$, S, A și A′ formează o grupă armonică.

Tot aci $(csaa') = \frac{\sin(ca)}{\sin(sa)} \cdot \frac{\sin(ca')}{\sin(sa')} = -1$ sau $\frac{\sin(ca)}{\sin(sa)} = -\frac{\sin(ca')}{\sin(sa')}$ adică, originalul și imaginea unei drepte împreună cu axa de colineațiune și raza S$\mathfrak{C}$, formează o fâșie armonică.

Tot d'odată s'a arătat că în acest cas imaginea și originalul pot fi schimbate între dênsele, adică avem o *involuțiune.*

Să mai completăm acestea, notând că în casul unei *colineațiuni involutorice*, cele două linii *q′* și *r* cad împreună, și anume, la mijloc între $\mathfrak{C}$ și *s*.

Colineațiune centrală plană poate fi considerată ca proecțiunea unei figuri plane în raport cu un centru și o axă în același plan.

Intinzênd această noțiune de colineațiune plană asupra spațiului, căpătăm *o colineațiune centrală în spațiu* astfel :

Admitem un plan **S** (fig. 65) ca *plan de colineațiune* un plan **Q′** ca *plan de convergență*, un punct $\mathfrak{C}$ ca centru și un plan **R** ca *plan de dispariițiune* situat astfel încât distanța între **S** și **R** să fie egală cu distanța între $\mathfrak{C}$ și **Q′**.

Când ni se dă o linie *l* care taie planul **S** în *S* iar planul **R** în *R*, unind $\mathfrak{C}$ cu *R* și ducênd din *S* o paralelă, obținem corĕspunzĕtoarea *l′*. Dânduni-se *l′* obținem pe *l*, ducênd din *S* o paralelă la $\mathfrak{C}R$.

Tot astfel un plan **P** taie S în *s* și **R** în *r*. Planul P′ va fi paralel la planul $\mathfrak{C}$r și va trece prin *s*. Tot de odată vedem că planul P trece prin *s* și e paralel cu planul $\mathfrak{C}$q′, q′ fiind intersecția între Q′ și P′.

Corĕspunzĕtorul A′ al unui punct *A* se află căutând mai întâi corĕspunzătoare unei linii care trece prin acel punct sau pe corĕspunzĕtorul unui plan, care trece prin acel punct, și intersectând linia sau planul găsit cu raza din raza din $\mathfrak{C}$ spre A.

In colineațiune în spațiu avem următoarele relațiuni : Intre punctele $\mathfrak{C}$, S, A și A′ pe aceași rază există un raport dublu constant, ori-care ar fi A și A′.

Intre cele două linii corĕspunzĕtoare *l* și *l′*, cari pornesc din *S*, între *s* și raza $\mathfrak{C}$S în același plan cu *l* și *l′* există iarăși un raport dublu constant.

Intre cele două plane corĕspunzĕtoare P și P′ cari se taie în *s* și între planul **S** și planul $\mathfrak{C}$s, există iarăși un raport dublu constant.

Toate aceste rapoarte duble constante sunt egale între dênsele se numesc *caracteristica colineațiunii* și se însemnează cu Δ.

In casul special când $\Delta = -1$, căpătăm *involuțiune*, originalul și modelul se pot schimba între dênsele.

Toate observațiunile făcute la colineațiune plană își au loc și aci, și teoremelor de acolo le corĕspund teoreme analoage.

Din toate vom releva următoarele fără de a mai repeta demonstrațiunile :

Când ni se dă două figuri coliniare centrale în spațiu și unim un punct A din original cu toate cele-l'alte originale B, C, D, iar pe corĕspunzĕtorul sĕu A′ din model cu toate cele-l'alte din model B′, C′, D′ obținem două mănuchi perspective.

Când unim linia l din original cu punctele B, C, D din original, iar linia l′ din model cu punctele B′, C′, D′ din model, obținem două fâșii de plane perspective.

Când tăiăm o linie l din original, cu toate planele din original, iar l′ din model cu toate planele din model obținem două serii perspective.

Când două figuri de ori-ce treaptă, sunt proective în original, ele rĕmân proective și în model.

Cu aceste noțiuni și teorem putem intra în cercetarea suprafețelor de al douilea grad.

Despre proectivitatea la figuri de întêia treaptă.

In capitolul I-iu ne-am ocupat cu proectivitate între două figuri de întêia treaptă cari sunt situate în același plan. Am vĕzut cum se poate construi pentru un element dintr'o figură, elementul corespunzĕtor din cea-l'altă figură, atât în casul când cele două figurĭ sunt separarte cât și în casul când sunt întrunite. Am tratat în special casul de involuțiune, care precum am vĕḑut are o însemnătate deosebită. Sub titlul de proectivitate la cerc și conice, am vĕḑut cum din combinațiunea elementelor corespunzĕtoare a două fiiguri proective de întêia treaptă și de aceeași spețâ se nasce o conică, fie cu o continuitate de puncte, fie-ca envelopă de tangente. Am arĕtat în trăsături generale cum putem să resolvăm cu ajutorul proectivității diferitele probleme care se rapoartă la conice.

Vom căuta să facem același lucru cu a treia speță de figură de întêia treaptă, adică, cu fâșiile de plane împrejurul unei muchii.

Am vĕḑut că două fâșii de plane sunt proective când tăindu-le cu un plan oare-care obținem două fâșii de raze proective.

In această proprietate se coprinde toate regulele relative la construcțiunea elementelor corespunzĕtoare. Nu ne este posibil să desvoltăm tóte construcțiunile, fiind-că spațiul nu ne permite.

In cea ce privesce suprafața născută din liniile de intersecțiune a două plane corespunzĕtoare din cele două fâșii suntem în drept să ne așteptăm că ea va fi de gradul al doilea, după cum în plan apărea peste tot figuri de gradul al doilea (In genere ne vom mărgini numai la suprafețele de al doilea grad, singurele cari au importanță în studiul staticei).

Intr'adevĕr când tăiam cele două fâșii de plane (fig. 59) $P_1, P_2, P_3 \ldots$ și $P'_1\ P'_2\ P'_3 \ldots$ din prejurul lui g și g′

ca muchii, cu un plan oare-care P, obţinem două fâşii de raze proiective l_1, l_2, l_3..... şi l_1', l_2', l_3',...... care precum ştim dau naşcere la o conică. Nu este însă greu de vědut că cele două vârfuri 0 şi 0' ale acestei conice se află pe muchiile g şi g', iar cele-alte puncte A_1, A_2, A_3..... se află pe *generatricele* h_1, h_2, h_3,.... adică pe liniile de intersecţiune a planelor corespunzătoare P_1 şi P_1', P_2 şi P_2' P_3 şi P_3'..... Prin urmare suprafaţa este într'adevěr o suprafaţă de a doua ordine.

Când cele două muchi g şi g_1, nu sunt situate în acelaşi plan, este vědit că nu se vor găsi două linii h^i şi h_k cari să fie în acelaş plan. Insă ori-ce linie h, trebue să întâlnească atât pe g'' cât şi pe g', fiind-că linia *h* provine din intersecţiunea a două plane, din care unul trece prin g iar cel'alt prin g'.

Punctele H_1, H_2, H_3.... şi H_1', H_2'. H_3'..... intersecţiunile liniilor g_1 g' cu h_1, h_2, h_3..... pot fi considerate şi ca intersecţiuni de ale liniilor g şi g' cu planele P_1, P_2, P_3,.... şi P_1' P_2' P_3',..... Aceste planuri fiind elemente din două fâşii proiective, resultă că şi punctele H_1, H_2, H_3...... şi H_1' H_2' H_3'..... sunt proiective.

Aşa dar am demonstrat în acelaşi timp următoarele:

Prin intersecţiunea planelor corespunzětoare din două fâşii de plane proiective obţinem o suprafaţă riglată de a doua ordine.

Unind punctele corespunzětoare a două serii proiective de pe două linii ce nu sunt situate în acelaşi plan, obţinem o suprafaţă riglată de a doua ordine.

Lesne îşi mai poate demonstra ori-cine:

Ori-ce suprafaţă riglată de a doua ordine poate fi considerată ca provenită din intersecţiunea elementelor corespunḑětoare din două fâşii de plane proective, sau prin unirea punctelor corespunzětoare a două serii proective situate pe două linii cari nu se taiă.

Dacă tăiăm suprafaţa printr'un plan care trece print'uă linie *h*, este vădit că acest plan trebue să mai dea pe suprafaţă încă o linie, care împreună cu *h* să formeḑe o conică degenerată. Insă ori-ce plan dus d. e. prin h_1 întâlnind deja dreptele *g* şi *g'* în punctele H_1 şi H_1' nu le mai poate întâlni în alte pucte, însă pe cele-l'alte *h* trebue să le întâlnească, şi acolo unde întâlnesce avem puncte de intersecţie între plan şi suprafaţă. Aşa dar un plan oare-care prin h_k taie suprafaţa încă într'uă linia g_k care taie pe toate *h* însă nu pe *g* nici pe *g'*. Prin urmare:

In ori-ce suprafaţă riglată de a doua ordine avem două grupuri de generatriţe g şi h. Ori-ce generatriţă dintr'un grup taie pe toate generatriţele din cel-alt grup, însă nu taie nici una din acelaşi grup.

Este vădit că dacă tăiăm suprafaţa cu un plan paralel cu două generatriţe să obţinem ca puncte de intersecţiune a planului cu suprafaţa, două puncte la infinit, adică, curba să fie o iperbolă. Va să ḑică în ori-ce cas în această suprafaţă se găsesc secţiuni hiperbolice. Din această causă suprafaţa noastră se numesce *hiperboloid.*

Când cele două muchii *g* şi *g'* sunt situate în acelaşi plan (veḑi fig. 64) atunci hiperboloidul trece într'un *con de a doua ordine.*

Când cele două muchii *g* şi *g'* sunt paralele, suprafaţa *un cilindru de a doua ordine.*

Considerând suprafeţele de a doua ordine ca născute din combinarea elementelor corespunḑětoare din două figuri de întâia treaptă situate în spaţiu putem reduce problemele relative la aceste suprafeţe la construcţiunea elementelor corespunḑětoare din figuri proective.

Ast-fel: când ni se cere intersecţiunile unei drepte cu o ast fel de suprafaţă, ducem prin linia un plan după voie, care taie cele două fâşii de plane în două fâşii de raze proective. Intersecţiunile linii noastre cu conica determinată de aceste două fâşii de raze sunt cele două puncte date.

Două fâşii de raze proective situate în două plane diferite nu pot fi combinate între dênsele de cât dacă elementele sorespunḑětoare se întâlnesc. Indată ce ele nu sunt perspective, această întâlnire nu se poate face de cât dacă cele două vêrfuri cad împreună. In acest cas tăiând (în fig. 61) cele două plane ale fâşiilor printr'un plan P, obţinem două serii A_1, A_2, A_3 ... A_1', A_2', A_3'.... cari sunt proective. Prin unirea punctelor corespuḑětoare obţinem o conică ca envelopă de drepte. De aci resultă că planele de unire ale elementelor corespunḑětoare din cele două fâşii, înfăşură o suprafaţă de a doua clasă, şi anume un con.

Când ni se dă o fâşie de raze amêndouě proective între dênsele, şi tăiăm cea dêntêia fâşie cu planul fâşii de raze, obţinem o nouě fâşie de raze care este proectivă cu fâşia de raze dată. Aceste două fâşii de raze dau nascere la o conică, care este tocmai intersecţiunea fâşii de plane cu fâşia de raze.

Când ni se dă o fâşie de raze şi o serie de puncte pe o linie care nu e situată în planul fâşiei, căpătăm un mănunchiu de plane proectiv atât cu seria de puncte cât şi cu fâşia de raze.

Am vědut deci toate combinaţiunile ce se pot face între elementele de întâia treaptă.

Să trecem acuma la cele de a doua treaptă.

Proectivitatea între figuri de a doua treaptă.

Am vědut în capitolul I că proectivitatea la figuri de a doua treaptă este de două feluri şi anume *collineară* şi *reciprocă*, după cum elementele corespunḑětoare sunt de aceeaşi speţă (punct cu punct, linia cu linia) sau de speţe contrarie (punct cu linia, linia cu punct).

Două figuri collineare din acelaşi plan sunt proective când fâşia formată din razele duse de la un colţ la toate cele-l'alte colţuri din aceeaşi figură este proectivă cu fâșia formată din razele duse diu colțul corespundĕtor din cea-l'altă figură către toate cele-l'alte colțuri.

In acelaşi timp, seria obținută prin tăerea unei laturi dintr'o figură cu toate cele-l'alte din aceaşi figură e proectivă cu seria provenită din tăerea laturii corespundĕtoare din a doua figură cu toate laturele.

Pentru douĕ mănuchi de plane cari sunt în acelaşi timp şi mănuchi de raze, colineațiunea este atunci când tăiând cele douĕ mănuchi, cu un plan, obținem douĕ figuri colineare.

Studiul colineațiunii ne duce şi el la resolvirea multor probleme din suprafețe de al doilea grad. Renunțăm însă la acest studiu, nefiind de mare importanță la studiul staticei. Suntem siliți să ne limităm la cele absolut necesarie.

Cu totul alt-fel este a doua formă de proectivitate şi anume *reciprocitatea*. Importanța ei geometrică este mai mare decât colineațiune, iar aplicațiunile ei la studiul staticei sunt numeroase.

Ca şi la reciprocitatea din figuri plane situate în acelaşi plan, aşa şi la figurile din spațiu vom pleca mai întâi din casul special de *reciprocitate în involuțiune*.

Când ni se dă (fig. 62) o conică K în planul desenului şi aflăm pentru diferitele puncte A_1, B_1...., ale planului P polarele a_2. b_2...., obținem douĕ sisteme reciproce în involuțiune. Dacă unim un punct M din spațiu pe de o parte cu punctele A_1 B_1 C_1...., şi pe de altă parte cu a, b_2, c_2...., obținem un mănuchiu de raze a_1, b_1, c_1..., şi un mănunchiu de plane A_2, B_2, C_2..., reciproce involutorice.

Conului de a doua ordine format din razele duse din M la punctele conicei K îi corespunde în mănuchiul de plane conul de a doua clasă dus din M la tangentele la K. Aceste douĕ conuri reciproce se confund, avĕnd razele polare în planele polare corespundĕtoare.

Acest con îl numim **conul director** al celor douĕ mănuchi reciproce involutorice.

Când ducem din M raze la diferite puncte A_1, B_1..., ale polarei l_2, cari deci sunt toate situate într'un plan, atunci planele corespunzĕtoare se vor învêrti împrejurul muchii M L_1 care e polara planului M l_2 şi urmele acestor plane vor fi polarele a_2, b_2.... Planele cari unesc muchia M L_1 cu razele duble ale involuțiunii de polare vor fi plane tangente la con, iar razele duse din M la punctele duble ale involuțiunii de poli pe l_2 vor fi generatrițele de contact.

Când tăiăm fâşia de plane M a_1, b_1, a_2, b_2...., cu un plan paralel la M l_2 obținem uă fâşiă de raze α_1, α_2, β_1, β_2, în involuțiune, iar vîrfului $\mathcal{L}$, al acestei fâşii care se află pe Ml_2, îi corespunde ca polară dreapta de la infinit, prin urmare el este centrul conicei de intersecțiune al planului M l_2 cu conul MK, iar fâşia involutorică α_1, α_2. β_1, β_2...., este fâşia de diametre conjugate.

Notăm mai cu seamă:

Pentru un con de gradul al doilea, ori-ce rază polară este locul centrelor tutulor secțiunilor conului prin plane paralele la planul polar.

Să ducem prin *M* raza ML_1' normală la planul Ml_2 şi prin ea să ducem fâşia de plane *M.* a_1' b_1' a_2' b_2'... respectiv normale la razele din fâşia *M.* A_2 B_2 A_1 B_1..... Fâşia de plane şi cea de raze sunt deci proective şi find-că cu această din urmă e proectivă şi fâşia de plan *M.* a_1 b_1 a_2 b_2.... resultă că ambele fâşii de plane sunt proective şi vor da nascere la un con de gradul al doilea. Urma acestui con este conica *K'* născută, cele douĕ fâşii de raze L_1 şi L_1'.

Dacă ne închipuim un al doilea plan Mg_2 *), vom obține pentru fâşia razelor din el, douĕ fâşii de plane Mg_1 şi Mg_1', cari dau nascere la un con cu urma K''. Cele douĕ plane M. l_2 şi M g_2 tăiându-se într'uă liniă M. l_2 g_2, această linie îi corespunde un singur plan polar M. L_1 G_1 şi un singur plan normal M. L_1' G_1', cari la intersecțiunea lor ne dau generatrița comună celor douĕ conuri M. K' şi M. K''. Aceste douĕ conuri se mai taiă neapărat încă după o generatriță MX şi eventual încă în trei MX, MY, MZ.

In casul când avem numai M X_1 atunci planelor L_1 M X şi L_1' M X le corespunde o singură rază M X' în planul M le iar planelor G_1 *M X* şi G_1' M X le corespunde o rază M X'' în planul M g_1. Planul M x unirea razelor M X' şi M X'' va fi planul polar al linii M X intersecția planelor polare L_1 *M X* şi G_1 *M X* şi tot de odată normal la M X, care e intersecțiunea planelor normale L_1' *M X* şi G_1' *M X*.

Prin urmare planul M x şi razele polare M X sunt normale între dênsele. In *Mx*, involuțiunea diametrelor va da o pereche rectangulară M Y şi M Z. Cele trei polare M X_1 M Y_1 M Z se zic axe ale reciprocității şi în acelaşi timp al conului. Ele sunt normale între dênsele, şi fiecăreia între dênsele ca polară îĭ corespunde planul de unire al celor-alte ca plan polar normal.

Reciprocitate la mănuchii ne reunite

Douĕ mănuchi sunt reciproce când unei raze dintr'un sistem îi corespunde un plan din cel-l-alt, şi când tăindule pe amêndouĕ cu un singur plan obținem douĕ figuri reciproce.

Când ne punem întrebarea de ce natură este suprafața născută din intersecțiunea elementelor corespunzĕtoare din douĕ mănunchiuri reciproce, trebue să facem următoarele observațiuni:

Tăind cele douĕ mănuchi, M şi M_2 (fig. 63) cu un plan P, obținem douĕ figuri reciproce.

Aceste douĕ figurĭ reciproce, precum am arătat în capitol I, au o conică de poli K_1 şi o comică de polare K_2, ast-fel ca unui punct X_1 de pe conica K_1 să-i corespundă tangenta x_2 dusă prin X_1 la K_2. Pr. urmare razei M_1 X_1 îi corespunde planul M_2 x_2. Punctul X_1 este un

*) Pentru a nu complica figura, n'am mai desenat cele ce urmează.

punct al suprafeței căutate, iar conica de poli K_1 este intersecțiunea planului P cu suprafața noastră. Așa dar: ***Suprafața născută din intersecțiunea elementelor corespunzĕtoare din douĕ mănuchi reciproce este de a doua ordine.***

Fiind-că razei $M_1 M_2$ îi corespunde un plan prin M_2 care se taie cu acea rază în M_2, resultă că acest din urmă punct este un punct al suprafeței. Tot ast-fel este și M_1

Vedem deci cum suprafețele de al doilea grad sunt născute din douĕ mănuchi reciproce. Că acest fapt ne înlesnesc studiarea proprietăților suprafețelor de al doilea grad și resolvirea multor probleme, întrevedem ușor. Studiarea tutulor acestora sunt de mare folos pentru geometria descriptivă. Noi însă suntem siliți de a renunța la cercetarea lor, de oare-ce ele nu sunt absolut necesarie la expunerea studiului ce ne am propus. Ne mulțumim deci cu cele spuse relative la subrafețe de al doilea grad și trecem la aflarea modului cum putem aduce douĕ mănuchii reciproce în douĕ mănuchii reciproce în involuțiune.

Când ni se dă mănuchiul $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$..... reciproc la mănuchiul $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$..... (fig 63) și ducem prin M_2 plane normale la razele $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ . . . ele ne taie din planele $B_2\ B_2\ C_2\ D_2$..... nisce raze $a_2\ b_2\ c_2\ d_2$..... normale $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$..... și prin urmare în colineațiune.

Douĕ mănuchii colineare fiind posițiunea generală a douĕ mănuchii perspective trebue să fiă proprietăți comune la amăndouĕ.

Dacă ne închipuim un plan dus prin linia de unire a celor douĕ vêrfuri din douĕ mănuchi perspective și perpendicular la planul de perspective obținem (fig 64) douĕ fășii de raze perspective. Precum scim ele au douĕ perechi rectangulare $x_1\ y_1$ și $x_2\ y_2$. Dacă ducem prin U_1 o paralelă z_1 la planul de perspectivă, vom avea ca corespunzătoare paralelă Z_2. Cele trei raze x_1 y_1 și z_1 sunt normale între dênsele, tot ast-fel și corespunzĕtoarele lor $x_2\ y_2\ z_2$

Prin urmare și în fig. 63 vom avea douĕ triple rectangulare $x_1\ y_1\ z_1$ și $x_2\ y_2\ z_2$. Este vedit că:

planului	X_1	format din	y_1 și z_1	îi corespunde	rază	X_2
„	Y_1	„ „	z_1 și x_1	„	„ „	Y_2
„	Z_1	„ „	x_1 și y_1	„	„ „	Z_2
„	X_2	„ „	y_2 și z_2	„	„ „	X^1
„	Z_2	„ „	x_2 și y_3	„	„ „	Y^1
„	Y_2	„ „	z_2 și x_2	„	„ „	Z_1

Din cunoascerea celor douĕ triple și a douĕ elemente corespunzĕtoare, cele douĕ sisteme sunt determinate.

Dacă vom pune M_1 peste M_2 iar razelor corespunzĕtoare din cele douĕ triple le vom pune unul asupra altuia, vom obține o reciprocitate în involuțiune.

Această suprapunere poate fi făcută în 8 feluri din combinarea celor douĕ semne din cele 3 axe.

In raport cu secțiunile paralele cu câte douĕ axe resultă patru feluri de reciprocități, avĕnd drept directriță în acel plan, respectiv o elipsă reală, o iperbolă cu axa reală pe una din axele, o iperbolă conjugată acesteia, saŭ o elipsă imaginară.

Reciprocitatea involutorică a planelor și razelor polare este însă numai de douĕ feluri și anume:

a) Reciprocitate cu un con real drept con director.

b) Reciprocitatea cu un con imaginar drept con director.

Rociprocitate la figuri de a treia treaptă

Am vĕzut până aci marea analogiă ce există între reciprocitate la diferitele figuri de a doua treaptă. Am vĕzut cum același plan și în raport cu fie-care conică din ea, toate punctele și toate dreptele din plan se împart în douĕ sisteme reciproce involutorice. Tot ast-fel toate planele și toate dreptele din prejurul unui punct se împart în douĕ sisteme reciproce în raport cu fie-care con care își are vĕrful în acel punct.

Trecând la figuri de a treia treaptă să arĕtăm că în spațiu, toate planele și toate punctele se împart în douĕ sisteme reciproce involutorice în rapot cu ori-ce suprafață de gradul al doilea.

In figura 66 avem *K*, intersecțiunea planului de desen cu uă suprafață de gradul 2-lea și *P* un punct în acest plan. Știm că lui. *P* îi corespunde polara p și că împrejurul lui P se formează o involuțiune $a_1\ a_2\ b_1\ b_2$..... ast-fel ca lui a_1 ca polară să-i corespunză un punct A_1 pe a_2 și viceversă a_2 să-i corespunză A_2 pe a_1 ș. a. m. d. Tot de uă dată A_1, A_2 B_1, B_2 sunt situate pe *p* și formează pe ea uă involuțiune de puncte.

Pe raza a_1 avem că punctele $PA_2\ A_1\ A_2$ formează uă grupă armonică. Ori-ce plan dus prin a_1 va avea ca suprafață punctele comune A_1 și A_2, și armonia între $P_1 A_2\ a_1 a_2$ subsistă. De aci conchidem că în ori-ce plan care trece prin a_1 polara punctului *P* trece prin A_2, adică, taie pe *p*. Ori-ce alt plan a_2, a_1, b_2.... care trece prin P, va da pentru *P*, polare cari taie pe *p*. Prin analogiă putem conchide că toate aceste polare se întretaiă. Prin urmare: *Ducând un mănuchiu de plane împrejurul unui punct P obținem polare P cari se întretaiă între dênsele prin urmare sunt situate* în același plan **P**, Punctul *P* se numesce *polul* planului **P** și planul **P** se numesce *planul polar* al punctului *P* în raport cu suprafața dată.

Privind figura putem spune:

Planul polar $\mathbf{A}_1$ *al punctului* A_1 *va trece prin* a_2 *și vice-versa planul polar* $\mathbf{A}_2$ *al punctului* A_2 *va trece prin* a_1.

Când un plan se învêrtesce imprejurul linii de intersecție a douĕ planșe, polii se mișcă pe linia de unire a polilor corespunzători. In acest cas obținem o fășiă de plane involuntorică și o seriă de poli în involuțiune. Muchia fășii de plane și linia de unire a polilor se zic *linii conjugate.*

Când un plan descrie un mănuchiu împrejurul unui punct P, polii descriu uă figură de a doua treaptă situată în planul polar **P**.

Mănuchiul de plane împrejurul lui P și mănuchiul de raze din P spre polii respectivi formează două mănuchi reciproce involutorice. Conul directrice al acestor mănuchi este tangent la suprafața.

Liniile de intersecțiune între planele mănuchiului prin P și planul **P** *formează o figură reciprocă cu poli planeler și anume în involuțiune. Conica directrice a acestei reciprocități este intersecția planului* P *cu suprafața dată și formează curba de contact a conului dus din P tangent la suprafața dată.*

Dacă ni se dă un punct P și cerem *planul polar* **P** corespunzětor ducem prin P două plane cari taiă suprafața în două conice. Aflăm în ambele secțiuni polarele punctului P. Planul format de aceste polare va fi *planul polar căutat.*

Când punctul P este la infinit pe uă dreaptă, planul polar corespunzětor este *un plan diametral.* Prin intersecția a trei plane diametrale la trei puncte de la infinit, obținem *centrul* suprafeței. In casul unui paraboloid acest centru cade la infinit.

Pentru fie-care *plan diametral*, avem o *rază diametrală conjugată* adică, raza dusă din centru la polul planului. Această *rază diametrală* trece prin toate centrele secțiunilor obținute în suprafață prin plane paralele la planul diametral.

Involuțiunea *planelor* și *razelor* diametrale au un *con* directrice, care este imaginar la un elipsoidul și real la hiperboid cu două pênze. In acest din urmă cas avem *conul asimptotic.*

In ori-ce cas avem un triplu de plane și raze diametrale rectangulare, cari formeaze *planele* respective, *razele axiale* ale corpului.

Reciprocitats neinvolutorică la figuri de a 3-a treaptă.

In spațiu putem să grupăm toate planele și toate punctele în două sisteme ast-fel :

1. Fie-care plan și fie-care punct poate fi considerat ca aparținênd când la un sistem când la altul. Unui plan dintr'un sistem îi corespunde un sigur punct din cel'alt sistem. Aceluiași plan considerat la al doilea sistem îi corespunde un alt punct din întêiul sistem, însă unul singur

2. Punctului de intersecțiune a 3 plane, dintr'un sistem îi corespunde planul celor 3 puncte corespunzětoare din cel-alt.

3. Fășiei de plane împrejurul unei drepte îi corespunde o seriă de puncte pe o altă dreaptă și anume în relațiuni proective.

4. Ori-cărui mănuchiu de plane împrejurul unui punct îi corespunde o figură de puncte plană în relațiuni reciproce și anume :

a) Mănuchiu de plane împrejurul punctului și mănuchiul de raze de la acelaşi punct spre punctele corespunzětoare din plan, formează două mănuchi reciproce (însă nu involutorice).

b) Intersectând mănunchiul de plane împrejurul punctului cu planul corespunzětor acestui punct, obținem o figură de drepte reciprocă cu figura de punct corespunzětoare planelor din mănuchiu.

In figura 67 avem două sisteme reciproce determinate prin cele 5 plane $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{E}_1$, și cele 5 puncte A_2, B_2 C_2, D_2, E_2. Dintre cele d'ântei nu sunt 4 cari să se taie într'un punct, și între cele din urmă nu sunt 4 cari să fie situate într'un plan.

Dacă prin linia de unire A_2, B_2, ducem plane la C_2, D_2, E_2, și linia de intersercție $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, o intersectăm cu $\mathbf{C}_1$. $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{E}_1$, în $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$...., obținem o fășie de plane și o seriă de puncte proective.

Tăind fășia de plane din prejurul A_2, B_2, cu linia $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, obținem seria $\mathfrak{C}_2$ $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_2$. .., proectivă cu $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$.

Dacă ni se cere planul **X** corespunzětor lui **X**, unim A_2 B_2 cu X printr'un plan și-l intersectăm cu $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, în $\mathfrak{x}_1$ și aflăm pe această linie corespunzětorul $\mathfrak{x}_2$. Pe urmă admitem o fășiă de plane împrejurul B_2 C_2 și aflăm pe $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_2$, un alt punct $\mathfrak{x}_2$. In mod analog aflăm și un punct $\mathfrak{x}_2$ pe $\mathbf{C}_2$ $\mathbf{D}_2$. Unirea celor trei puncte $\mathfrak{x}_2$ ne dau planul **X** căutat.

Procedând invers obținem pentru ori-ce plan **X** corespunzětorul sěu **X**.

Ori-ce plan putênd fi considerat și la unul și la cel-alt sistem, va avea doi poli corespuzětori unui plan și viceversa pentru ori-ce punct vom avea două plane polare.

Când ni se dă un plan $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ cu cei doi poli P_1 și P_2 (n'am mai făcut figură specială, fig. 63 cu oare-care schimbări de litere ce ori-cine și le poate găsi, poate să servească și la desvoltările cari urmează), atunci mănuchiul planelor polare din jurul lui P_1 și mănuchiul de raze din P_2 la polii respectivi, formează două mănuchi reciproce cari dau nascere la o suprafață de gradul al doilea. Această suprafață e tăiată de planul $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ într'o conică K_1 care este conică de poli, avênd proprietatea ca ori-cărui punct de pe ec planul polar să treacă chiar prin el. Tot d'odată aceste din urmă plane cari au proprietatea de a trece prin polii lor așezați pe K_1, înfășură un con de gradul al doilea cu arma K_2. Pe ori-ce plan locul punctelor, cari au proprietatea de a fi aședați în planele lor polare, este o conică și din ori-ce punct mănuchiul planelor, cari trec prin polii lor, este un con de gradul al doilea. De acea :
Locul geometric al tutulor punctelor din spațiu situate pe planele lor polare este o suprafață de gradul al doilea zisă suprafață de poli.

Toate planele din spațiu cari trec prin poli lor înfășură o suprafață de gradul al doilea zisă suprafața de plane polare.

Construcțiile arětate relative la fig.67 le putem aplica la trei puncte de la infinit și să aflăm la intersecțiunea lor un punct M_1 corespunzĕtor planului M_2, și aceluaiși plan considerat ca $M_1\alpha$ ci putem găsi și M_2.

In cele două mănuchi de plane și raze polare conjugat din prejurul lui M_1 și M_2 găsim cele două triple rectangulare $x_1\, y_1\, z_1$ și $x_2\, y_2\, z_2$ — Suprapunênd M_1 peste M_2 și învârtind cele două triple ast-fel ca să se acopere, obținem *douĕ sistem reciproce în involuțiune,* care involuțiune este determinată îndată ce pe lângă cele 3 axe x, y, z ni se mai dă două elemente corespunzĕtor P și P.

Din combinarea semnelor + sau — de la cele două triple, obținem 8 feluri de involuțiuni, din care remarcăm mai cu seamă acelea cari au un *elipsoid real* drept *suprafața directrice* și un *elipsoid imaginar* drept *suprafață directrice.* In casul acesta din urmă elipsoidul real îi ține loc, și avênd un punct P, îi căutăm planul polar P^1 în raport cu elipsoidul real, iar simetricul acestuia în raport cu elipsoidul va fi planul **P** polar căutat.

Un cas special al reciprocității involuntorice este acela unde ori-ce pol cade în planul polar respectiv. Acest cas special a fost numit *sistem nul* de către unii sau *sistem focal* de către alții. Polul este în acest din urmă cas numit *focarul* planului.

Vom trata acest cas în același timp cu compunerea puterilor în spațiu, cari nu sunt situate în același plan.

Părăsim acuma geometria de posițiune și trecem la puteri în spațiu.

CAP. IV

FORTE IN SPATIU

Mănuchiu de forțe

Când ni se dă mai multe forțe în spațiu formând un mănuchiu, compunem două din ele în planul lor, apoi resultanta acestor uă combinăm cu a treia ș. a. m. d.

In fig. 68 avem trei forțe A. B C. care se taie în punctul O.

Compunerea lor se póte face în 3 feluri și anume:

1. Punem în planul AB: $\mathfrak{A}O=A$ și $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'=B$. Linia $O\mathfrak{B}'$ va fi resultanta între A și B. Pe urmă ducem $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}''=C$. Linia $O\mathfrak{C}''$ va fi reseltanta R.

2. Punând în planul BC:$O\mathfrak{B}=B$ și $\mathfrak{B}\mathfrak{C}'$=C, pe urmă $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''=\!\!\|$ A.

3. Punând în planul CA: $\mathfrak{C}\mathfrak{C}=C$ și $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'=A$, pe urmă $\mathfrak{A}\mathfrak{C}''=\!\!\|$ B.

In modul acesta vedem că resultanta O$\mathfrak{C}$ apare ca diagonala unui paralipiped oblic.

Mai resultă încă 4 puteri în spațiu care se taie într'un punct sunt în equilibru când punêndu-le una după alta și paralele cu dênsele, obținem un patrulater strâmb închis.

Forțe paralele

In fig. 69 avem $A.B.C.D.$ patru forțe paralele, cu punctele lor de aplicațiune *1,2,3,4...* Dacă am învêrti forțele $A_1 B$ împrejurul punctelor lor de aplicațiune *1* și *2* ast fel ca ele să rĕmâie peralele, resultanta lor se va mișca și ea împrejurul punctuluĭ ei de învêrtire, care trebuie să rĕmâie pe 12 și păstrând anumită posiție în raport cu 1 și cu 2. Continuând cu aceleași rațіonament relativ la resultanta între A_1B și putere C când ele se învêrtesc împrejurul punctelor lor de aplicațiune s. a. m. d. Conchidem.

Când mai multe puteri paralele din spațiu, se învertesc împrejurul punctelor lor de aplicațiune ast-fel ca ele să remâie paralele: între dênsele resultanta se învêrtește și ea împrejurul punctului ei de aplicațiune zis centrul.

Dacă învêrtim forțele ast-fel ca să devie paralele cu un plan P, și le proectăm pe acest plan, nu este greu de vĕḑut că pentru două forțe, *proecția resultantei este egală cu resultanta proecției.* Intinderea acestui teorem la tóte forțele este de sine ințeleasă.

Dacă vom pune forțele în două posițiuni paralele cu planul de proecțiune, vom obține două proecțiuni de ale resultanteĭ, și la intersecțiunea planelor proectante vom obține o verticală care trece prin centrul forțelor.

Dacă proectăm forțele pe un al doilea plan obținem un al treilea plan proectant al resultantei. La intersecțiunea celor trei plane proectante obținem centrul.

Proectând forța A în A′ pe plan putem spune că am descompus această forță într'o forță A′=A și o forță de la infinit al cărui mement este $A\times a$.

Același lucru îl putem spune și despre cele alte forțe, precum și despre resultanta R că e descompusă în forța R'=R și momentul Rr. Insă fiind-că R′ este resultanta tutulor A'_1B'... trebue și Rr să fie resultanta momentelor forțelor de la infinit. Pentru că atât componenta de la infinit a resultantei cât și cele-alte componente de la infinit sunt situate pe aceiași linie de la infinit, de oare-ce planele proectante sunt toate paralele resultă că avem relațiunea :

$$Rr=Aa+Bb+Cc+\ldots,..$$

Numind *momentul unei forțe relative la un plan productul forții prin distanța punctului de aplicațiune de la planul dat avem teorema:*

Momentul resultantei este egal cu suma momentelor componentelor.

Forțe oare-care

Când nisă dă un sistem de forțe A_1B_1C (fig. 70) le putem reduce la două forțe ast-fel: Le tăiem cu un plan **P** în $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ și dintr'un punct O din spațiu le proectăm în $A\,B\,C'$ situate în **P** Descompunem A în A' și A''_1 B în B' și B''.... Forțele A' și B'_1 C' ne dau o resultantă R' în **P**, iar $A''_1B''_1C''$ ne dau o resultantă R'' care trece prin O. Acéstă descompunere variază cu planul **P** și cu punctul O. Prin urmare sunt un numĕr infinit de perechi care pot representa același sistem. Două forțe R' și R'' la care se poate reduce un sistem, se numesc *forțe conjugate.*

De aci înainte în loc de a ne ocupa de un sistem de mai multe forțe ne vom ocupa numai de două forțe A' și A''.

In fig. 71 avem două forțe A' și A'' să le transformăm în alte două forțe B' și B'' din care una să fie situată în planul **P**, iar alta să treacă prin O_∞

Insemnând cu h' distanța extrimității lui A' și cu h'' acea a lui A'', de la **P** vedem că : $\frac{A'_2}{A''_2} = \frac{h'}{h''} =$ și că această proporțiune se menține ori-care ar fi direcția lui O_∞. Prin urmare putem înlocui A'_2 cu h', A''_2 cu h'', (ca maxime), iar resultanta acestora să le îmulțim cu $\frac{A'_2}{h'}$

Variând direcția lui O'_∞ puterile h' și h'' se învêrtesc împrejurul punctelor lor de intersecțiune cu h' remânênd însă paralele și egale, și de aci resultă că punctul de intersecțiune P al resultantei cu A nu se mișcă.

Dacă în aceași figură alegem O situat la finit, atunci în loc de a aplica descompunerile asupra lui A' și A'' e tot una să le aplicăm la B' și B''.— Forța B' nu'mi va da nici uă componentă care să treacă prin O iar forța A'' va da *una*, care este singura forță care trece prin O Vedem că ea trece și prin P.

Prin urmare avem teorema :

Când menținem planul* P *și variăm punctul O. resultanta care trece prin acest punct O variabil trece și prin unul și același punct fix P situat în P.

Când ne închipuim un plan P_1 care trece prin B'', el va tăia B' în punctul P_1 care are acelaș rol relativ la $\mathbf{P}_1$ precum îl are P relativ la **P**. Invêrtind planul **P** împrejurul lui B'' descriind uă fâșie de plane, vedem că P, descrie pe B' uă serie perspectivă cu acea fâșie, și când planul **P** descrie un mănuchiu de plane împrejurul lui P, avem că P, descrie uă figură plană în **P** perspectivă cu acel mănuchiu.

Avem deci toate condițiunile unei reciprocități proective între planele **P** cari coprind una din cele două forțe conjugate la cari se pot reduce un sistem de forțe în spațiu și punctele P situate în acele plane și prin care trece cea-l'altă forță. Reciprocitatea este special denumită *Sistem nul* sau *Sistem focal.* precum am vêdut. Toate construcțiile vêdute la reciprocitate între *plane* și *puncte* sunt și aci aplicabile. In special avem următoarea înlesnire, după ce avem două perechi de forțe conjugate A′ și A″și B′, B″ cari ne represintă același sistem.

In acest cas (fig. 72) pentru a găsi unui punct P planul sêu polar **P** ducem din P două transversale t_a și t_b la A′, A″ respectiv B′, B″ cari formează acel plan.

Intr'adevêr planului dreptelor A' și t_a îi corespunde (A′) pe A″.

Planului dreptelor A'' și t_b îi corêspunde (A'' pe A'
" " B' și t_b " " (B') " B''
" " B'' și t_b " " (B'' " B'

Avem deci că planul dreptelor t_a și t_b este unirea a 4 plane (și ar fi fost destul trei) cari trec prin P, prin urmare este **P** căutat. Vice-versa, dacă ni s'ar fi dat **P**, l'am fi intersectat cu A',A'' respectiv cu $B'B''$ și unind câte două două, punctele de intersecție am obține la intersecția liniilor punctul P.

Reducerea la uă forță finită și una infinit de mică situată la infinit.

In fig. 73 avem A′ și A″ două puteri conjugate. Luăm un punct P pe A' și ducem două puteri egale și opuse cu A″. Din $+A''$ și A' obținem puterea U', iar cele-l'alte două puteri formează o pereche cu momentul $A''a$. Am înlocuit astfel sistemul dat printr'uă putere U' și uă putere U''_∞ care cade în dreapta de la infinit al planului perechii A''.

Plimbând P pe A′ vom vedea că U' se mișcă paralel cu sine însăși și rêmâne egal în mărime, iar momentul lui U''_∞ variază de oare-ce ***a*** variază. Acest moment devine minimum atunci când ***a*** devine minimum, adică când ducem normala comună la cele două puteri A′ și A″.

In fig. 73 planul perechii A″ (cuplu) este precum se vede planul polar al lui P. Dreapta de la infinit al acestui plan și dreapta U' sunt conjugate în sensul reciprocității. Prin urmare când planul **P** se învârtesce împrejurul dreptei sale de la infinit (adică se mișcă paralel) polul P se mișcă pe U' Când planul **P** ia pozițiа planului de la infinit atunci P vine la U_∞ adică, direcția puterii finite vine în polul planului de la infinit. Pentru că planul de la infinit nu poate avea de cât un singur pol, resultă că *în ori-ce mod vom proceda pentru a înlocui sistemul de puteri date, print'o putere finită și o pereche* (*cuplu*), *puterea finită va avea una și aceeași direcție.*

Sistemul focal este un sistem reciproc involutoric, cu centrul la infinit (pe direcția puterii finite) și cu planul de la infinit ca singurul plan diametral iar paralele la U' ca diametre.

Planele perechilor sunt plane-coarde cu U' corêspunzêtor.

Compunerea momentelor

In fig 74 avem ca date puterile A' și A'' și punctul P care nu e situat pe nici una din ele. Dacă din P vom duce câte două puteri egale, paralele și de sens contrar cu A′ respectiv A″, sistemul nu s'a schimbat. Din Combinarea lor obținem o singură putere U' și două perechi cu momentele $A'a'$ și $A''a''$.

Se admitem că am construit planul **P** polar lui P și să înlocuim puterile A', A'_1 A'', A''_1 și U în componente B', B'_1 B'', B''_1 situat în **P** și în C', C'_1 C'', C''_1 și U cari sunt paralele cu U. De oare-ce P este polul lui **P**, resultă că resultanta celor din urmă 5 puteri să treacă prin P și să fie egală cu suma lor care se vede că este U', de oare-ce $C' = - C'_1$ și $C'' = C''_1$ și prin urmare se anulează Cele d'întâi 4 puteri B, B'_1 B'', B''_1

se înlocuiescŭ cu pereche R' R'' al cărui moment este R' r' și care deci este momentul resultant al lui A' a' și A'' a."

In cele spuse este deci cuprinsă regula cum se pot compune momentele unui sistem de forțe în raport cu un punct P într'un singur moment care este situat în planul polar al lui P.

Tot de o dată am arĕtat că ori-ce sistem poate fi înlocuit printr'o singură putere finită U' care să treacă printr'un punct dat P și o singură pereche'$_1$ R R'_1.

Variând P direcția lui U' nu va varia de oare-ce ea este direcția centrului sistemului.

Momentul perechii R' R' va deveni minimum atunci când planul polar va fi normală la U, adică pentru posiția axei.

Această posițiune a axei se află ast-fel:

Ducem (fig) 75 a' a'' normala comună la A' A'' Din a' ducem o putere egală și paralelă cu A'', care compunêndu-se cu A' da U' care este direcția axei. Prin $a'a''$ ducem planul **N** normal la U'. Prin focarul N al acestui plan va trece U'n axa sistemului. Descompunênd A' și A'' în componente paralele cu U'n și alte situate în **N**, vom obține și U' ca mărime, și perechea R 'R'_1 cu momentul R 'n minimum.

Puteri proporționale cu distanțele de la un plan. Momente centrifugale. Momente de inerție. Elipsoid de inerție.

Deducerea elipsoidului de inerție se face în mod analog ca acea a elipsei de inerție.

Când avem un corp în punctele căruia sunt aplicate puteri paralele proporționale cu distanțele de la un plan **A**, puterile vor avea un centru de aplicațiune A. Variând **A** atât puterile cât și centrul A vor varia. Să arătăm că planele **A** cu centrele lor A formează o reciprocitate involutorică.

In figura. 76 avem: G centrul de gravitate al unui corp cu volumul V cu distanțele x_G și y_G de la două plane **A** și **B**; un punct P cu volumul dV cu distanțele x și y de la **A** și **B**. Punctele A și B sunt centrale planelor **A** și **B**, avênd coordonatele x_A, y_A, x_B și y_B.

Printr'un raționament identic ca la putere în plan, ajungem la formula:

$$x_G \; y_A = y^G \; x_B$$

Și că prin urmare atunci când $y^A = 0$, adică, când planul **B** trece prin A, și $X = 0$, adică și punctul B e situat în planul **A**.

Prin urmare când planul **B** se va învêrti împrejurul punctului A descriind un mănuchi de plan, punctul B se va mișca în **A** descriind o figură plană, și pentru că pentru fie-care plan corespunde un singur punct, mănuchiul și figura plană vor fi proectivă.

Avem deci uă reciprocitate proectivă involutorică între **B** și. **B** Ea este eliptică în toate sensurile și prin urmare *suprafața directrice* va fi un *elipsoid imaginar* al cărui representant real este *elipsoidul de inerție* cu centrul în G.

Numai însistăm asupra acestui subiect care pe lângă că n'are importanță practică, apoi și din punctul de vedere teoretic nu presintă nimic noŭ.

Aplicațiunile staticei la resistența materialelor.

Puteri interioare, Elipsoid de tensiune.

In fig. 77 avem trei plane OAB, OBC, OCA cari trec prin O împreună cu cele trei tensiuni R_1, R_2. R_3 cari trec prin cele trei centre de gravitate P_1, P_2, P_3.

Descompunem: R_3 în S_3 paralel cu OC și în T_3 situat în OAB. Aceasta din urmă o descompunem în T_{31} paralel cu OA și T_{32} paralel cu OB.

Tot ast-fel obținem R_1 descompus în $S_1 \parallel OA$, $T_{12} \parallel OB$, $T_{18} \parallel OC$ și R_2 descompus în $S_2 \parallel OB$, $T_{21} \parallel OA$, $T_{23} \parallel OC$.

Dacă se cere tensiunea planului ABC, observăm că ea trebue să fie egală și sens contrar cu resultanta celor trei puteri R_1, R_2, R_3 și prin urmare resultanta acestora trebue să treacă prin P centrul de gravitate al triunghiului ABC; fiind-că însă cele trei S trec prin P, resultă că resultantele T_{12}, T_{21}; T_{13}, T_{32}; T_{31}, T_{13} (cari sunt situate în 3 plane cari trec prin P) să treacă fiecare prin P.

Pentru ca aceasta să fie possibil trebue să avem:

$$T_{12} : T_{21} = b : a \text{ sau } \frac{T_{12}}{b} = \frac{T_{21}}{a} \text{ sau } \frac{T_{12} \sin \alpha}{{}^1/_2 bc \sin \alpha} = \frac{T_{21} \sin \beta}{{}^1/_2 \, ca \sin}$$

De oare-ce $^1/_2$ *bc sin* α și $^1/_2$ *ca sin* β nu sunt de cât suprafețele triunghiurilor OBA și OCA, resultă că

$$T_{12} \sin \alpha = T_{21} \sin \beta$$

unde T_{12} și T_{21} sunt tensiuni specifice. Prin analogică avem:

$$\text{(I)} \begin{cases} T_{12} \sin \alpha = T_{21} \sin \beta \\ T_{23} \sin \beta = T_{32} \sin \gamma \\ T_{31} \sin \gamma = T_{13} \sin \alpha \end{cases}$$

In casul când cele trei axe sunt rectangulare avem:

$$\text{(II)} \begin{cases} T_{12} = T_{31} \\ T_{23} = T_{32} \\ T_{31} = T_{13} \end{cases}$$

Când planul BOC este paralel cu R_2 (tensiunea planului COA) resultă că $T_{12} = 0$ prin urmare și $T_{21} = 0$ și de aci resultă că R_1 e paralelă cu planul COA.

Avem deci teorema:

Când un plan e paralel cu tensiunea unui alt plan, atunci și tensiunea planului întâi e paralel cu planul al doilea.

In fig. 78 avem planul **P** cu tensiunea OP. Prin OP trecem uu plan POC (care deci este paralel cu tensiunea planului P) și punem din O tensiunea specifică OC' a acestui plan, care trebuind a fi paralel cu **P** și trecând printr'un punct din acest plan, cade in el. Scim din articolele trecute că OC și OC' descriu în învêrtirea lor o involuțiune de raze zisă *involuțiunea secțiunilor conjugate*. De aci resultă că fâșia planelor POC este în reciprocitate involutorică cu fâșia razelor OC'. și avem deci teorema:

Când un plan descrie un mănuchiu de plane împrejurul unui punct, atunci mănuchiul tensiunilor respective puse din acelaşi punct este în reciprocitate involutorică cu cel d'întâi.

Aceste două munuchii, precum ştim au trei axe rectangulare.

Am mai vĕzut în capitolul precedent că atunci când OC se învârtesce împrejurul O, punctul C' extremitatea tensiunii specifice descrie o elipsă. Dacă ne închipuim că planul POC se învêrtesce împrejurul lui OC, atunci OC se va învêrti într'un plan şi punctul C' va descrie acolo altă elipsă de inerţie care însă se va tăia cu elipsa din inerţie din P, prin urmare atunci când planul POC va descrie un mănuchiu împrejurul lui O, extremitatea tensiunilor specifice va fi un elipsoid zis *elipsoid de tensiune*.

Legătura între puterile esterioare şi interioare

Puterile interioare fiind un resultat al celor exterioare trebue să existe relaţiuni pentru a putea găsi cele d'întêi în funcţiunea celor din urmă.

Aceste relaţiuni se caută luând în cercetare un element al corpului împreună cu puterile ce lucrează asupra lui

De obicei în statică avem de aface cu bare adică cu corpuri formate din mişcarea normală a unei secţii plane pe o linià continuă, ast-fel ca centrul de gravitate să rămâie pe acea linie. Secţiunea poate varia în dimensiune însă în mod continu.

Când ne închipuim un element mărginit între două secţiuni normale foarte apropiate, atunci toate puterile exterioare le descompunem într'o putere Q aşezată în planul uneia din secţiuni şi o putere P normală pe acea secţiune şi care o taie în punctul A.

Fig. 79 represintă această secţiune împreună cu puterea P. Acţiunea acestei puteri are de efect ca planul S să se misce din loc, venind în S'. Admiţênd ipotesa că secţiunea rĕmâne plană şi după această mişcare, atunci S cu S′ se vor tăia într'uă linià a şi tot de o dată fibrele longitudinale se vor lungi sau scurta (după cum avem extensiune sau presiune) în mod proporţional cu distanţele lor de la linia a. Introducênd ipotesa probabilă că lungirile sau scurtările fibrelor depind în mod direct de tensiunile interioare ce domnesc asupra lor, avem ca conclusiune că *puterea P normală pe o secţiune produce în diferitele puncte ale secţiunii, tensiuni proporţionale cu distanţele lor de la o linià a.* Pe basa acestei ipotese resultată din cele două ipotese fundamentale, am vĕḑut că linia a este antipolara punctului A în raport cu *elipsa centrală de inerţie.*

Tensiunea într'un punct oare-care cu suprafaţa ΔF, va fi cunoscută îndată ce vom cunoasce numai tensiunea dintr'un punct, d. e. tensiunea punctului extrem al secţiunii.

Nu putem să intrăm în detalii asupra modului cunoscut de a găsi tensiunea specifică σ al punctului extrem.

Dăm dea dreptul următoarele două formule bine cunoscute pentru σ:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{e}{n}\right) \qquad (1)$$

$$\sigma = \frac{Pp}{J}(e+u) \qquad (2)$$

Ori-ce altă tensiune $\sigma' = \sigma . \frac{y+n}{e+n}$ (3)

A se vedea în figură semnificarea literelor.

Când P trece prin G, axa nautrală trece la infinit prin urm. $n = \infty$ şi din (1) avem

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

Când P este la infinit, atunci axa nautrală trece prin centru şi $n = o$. Din (2) resultă

$$\sigma = \frac{Ppe}{J} \quad (4)$$

Când în loc de a avea o putere P normală la secţiune, o avem înclinată situată într'un plan normal prin G, atunci o descompunem într'o putere T situată în secţiune (fig. 80) trecând prin G şi una N normală la secţiune.

Cea dêntêia produce tensiuni transversale de care ne vom ocupa în urmă; iar a doua produce la extremitatea secţiunei o tensiune normală dată prin formula 2)

$$\sigma = \frac{Nn\ (e+n)}{J}$$

Insă fiind-că $Nn = Pp$ resultă că

Prin urmare : $$\sigma = \frac{Pp\ (e+n)}{J} \quad (5)$$

Când avem o putere Q situată într'un plan normal prin G, atunci ea se descompune într'o putere transversală Q egală cu dênsa şi una P normală însă cu punctul de aplicaţiune la infinit. Din combinarea lui (4) (5) va resulta tensiunea normală din extremitatea secţiunii

$$\sigma = \frac{Qqe}{J} \quad (6)$$

Trecând la puterea Q situată în planul secţiunii, o descompunem într'una Q paralelă şi egală trecênd prin G şi uă pereche. Aceasta din urmă are ca efect tensiunea corpului.

Nu ne vom ocupa de dênsa, de oare-ce metoadelor geometrice nu le a reuşit până acum şi de alminterea are importanţă numai la maşini.

Efectul puterii Q trecând prin centru îl căutăm considerând în fig. 81 un element din corp mărginit între două secţiuni şi avênd lungimea Δx.

Efectul puterii Q asupra secţiunei din dos, va fi pe de o parte una transversală Q şi pe de altă parte va produce precum am vĕḑut tensiuni normale.

Tensiunea din extremitatea secţiunii va fi conform cu (6) $$\sigma = \frac{Q \Delta x e}{J}$$

Ducênd o secţiune longitudinală A B A′ B′ paralelă cu NN diametru conjugat cu Q şi la distanţa Y, vom avea că suma tutulor tensiunilor normale din secțiunea a do a și care se află de asupra lui A B A′ B′ va fi

$$T = \Sigma_y^e \frac{Q\Delta xy}{J} \Sigma F = \frac{Q\Delta x}{J} \Sigma_y^e y \Delta F.$$

Această putere fiind paralelă cu A B A′ B′, formula de mai sus va representa și puterea din înăuntrul planului *A B A′ B′* și dacă uă considerăm ca egal repartisată pe A B A′ B′, vom avea (cu însemnările din figură), că tensiunea specifică *T* din planul *A B A′B′* va fi: $T = \frac{T}{Z\Delta x} = \frac{Q}{ZJ} \Sigma_y^e y. \Delta F.$ (7)

Formula (7) ne arată efectul puterii *Q* asupra planului A B A′ B′ și anuma componenta situată în plan și care e paralelă cu axa.

Intorcându-ne acuma la efectul puterei secțiunii *S* însăși, și anume într'un punct oare-care al linii A B, descompunem tensiunea transversală din acel punct în *T′* paralelă cu *Q* și *T″* în direcțiunea lui *AB*.

Invocând formula I din paragraful precedent și cu însemnările din figură, vom avea

$T' \sin \omega = T \sin 90^0$ sau cu (7)

$$T' = \frac{Q}{ZJ \sin\omega} \Sigma_y^e y \Delta F$$

Ast-fel am putut după un mic înconjur să aflăm componenta tensiunii specifice transversale care este paralelă cu *Q*.

In ceea-ce privesce *T″* o aflăm în modul urmĕtor.

In fig. 82 avem o secțiune. AB A′B′ este o fâșiă paralelă diametrul conjugat lui *Q*. Ducem tangentele în A și B cari să taie în D. In punctele A și B nu pot exista tensiuni transversale perpendiculare pe tangente prin urmare tangentele vor arĕta acolo direcțiele tensiunilor transversale. Avem deci ·

Ori-ce liniă DXX′ care trece prin D, represintă o secțiune care ca și DAA′ și DBB′ nu poate avea tensiune normală la *XX′*. Așa dar linia *DX* represintă direcțiunea tensiunii transversale în punctul *X*. De oare-ce cunoascem în acest punct mărimea luĭ *T′*, putem să deducem acuma ușor mărimea *T″*.

O privire resumativă

Statica ca și toată mecanica poate fi studiată din două puncte de vedere și anume, din punctul de vedere curat științific și din punctul de vedere tehnic.

Din punctul de vedere curat sciințific cu toate că mecanica nu este de cât uă aplicațiune a matematicelor putem totuși să uă clasăm între ramurile lor; de oare-ce prin marea importanță ce are și prin interesul ce înspiră problemele ei, ea exercită o deosebită atracțiune asupra matematicilor și dă ast-fel un impuls direct progresului diferitelor discipline din acea vastă sublimă și tot de uă dată de a pururea împunătoare sciință. Cine studiază mecanica din punctul de vedere curat matematica nu se preocupă de foloasele imediate ce ea poate aduce constructorului, ci caută numai adevĕrul fiind satisfăcut îndată ce a putut să înțeleagă esența scinței și mai ales când a reușit să rĕspundă la întrebări neresolvite încă sau măcar să clarifice mai bine respunsurile întunecoase,

Privită ast-fel chestiunea, cine-oare poate să susțină că analisa e de preferit geometriei sau vice-versa ?

Din punctul de vedere matematic nici nu se poate discuta avantagile uneia asupra celei-l-alte. Pentru matematicul amêndouĕ au aceași importanță, fiind-că fiecare din cele douĕ discipline (analisa și geometria) îl fac să vază mecanica sub o altă fața dar amêndouĕ tot atât de plăcute și de atrăgătoare.

Când însă tehnicul studiază mecanica, el caută să tragă foloase imediate pentru cerințele constructive.

El nu are timpul să urmărească studiul ei în toate detaliile și este silit să se mulțumească cu mai puțin și mai ales cu acele părți cari îi pot oferi mijloace lesnicioase și expeditive pentru construcțiunile sale. Tehnicul ia tot ce e bun pentru scopul sĕu ori unde îl găsesce.

Cu toate aceste și el este obligat să studieze mecanica mai întêi într'un mod abstract, tocmai pentru ca să poată să-și aleagă într'un mod conștiincios metoadele ce-i trebuesc.

Și pentru acelaşi motiv pentru care el studiază așa de desvoltat diferitele științe pure, ar trrbui să studieze și noua geometrică car îi oferă atâtea noui mijloace pentru statica.

Cu atât mai mult ar trebui să uă studieze cu cât ea îi vine în ajutor și în alte părți și mai ales fiind-că nu presintă dificultăți mai mari de cât algebra.

Precum această din urmă caută să uă reducă resolvările diferitelor equațiunilor de grad superior la cele de grad inferior și mai cu seamă la cele de gradul întêi, tot ast-fel și geometria de posițiune caută să reducă construcțiunile cele mai complicate la construcțiuni liniare și câte-o-dată la construcțiuni cu compas.

Plecând din procesul de proecțiune, ea arată că douĕ serii perspective sau în genere douĕ figuri de întâia treaptă perspective sunt cu totul determinate, îndată ce cunoascem douĕ perechi de elemente corespunzĕtoare. Intr'adevĕr îndată ce admitem că *A* și A^1, și *B* B^1 se corespund perspectiv (vezi fig. 1 planșa 1), vom avea că centrul lor de perspectivă se află în intersecția lui AA^1 cu BB^1 și de aci înainte corespunzĕtorul X^1 al unui punct *X* va fi bine determinate de oare ce se va afla pe raza *OX* și pe linia l^1

Tot așa cele douĕ fășii perspective din fig. 2 sunt determinate, îndată ce cunóscem douĕ perechi de raze corespunzĕtóre, cari ne daŭ axa de perspectivă, și de aci înainte construcția elementelor respective, este o simplă construcțiă liniară.

In douĕ figuri proective, construcția elementelor respective, se face printr'o construcțiune liniară.

In fig...., unde avem douĕ serii proective, determinate prin trei perechi AA'_1 BB'_1 CC'_1 am admis fâșia T.ABC perspectiv cu seria A_1 B_1 C_1 și fâșia T.′ A′ B′ C′ perspectivă cu seria $A'_1 B'_1 C'_1$ însă ast-fel, ca cele douĕ fâşii să fie perspective între dênsele. In acest mod construcţia elementelor corespunzĕtóre din cele douĕ *serii proective*, s'a redus la construcţia elementelor corespunzĕtóre din douĕ *fâşii perspective*.

Tot aşa se reduce construcţia elementelor corespunzĕtóre din douĕ *fâşii proective* la construcţia elementelor corespunzĕtoare din douĕ *serii perspective*.

Când douĕ *serii proective sunt reunite* atunci din douĕ puncte oare-cari nesituate pe linia lor, se formează douĕ fâşii perspective, cu câte una din seriile şi pr. urm. proective între dênsele.

Tot aşa când avem douĕ fâşii *proective reunite*, reducem construcţia elementelor lor la acele douĕ serii proective remite.

In casul figurilor proective reunite avem şi elemente comune, cari sunt în tot-d'auna douĕ (reale separate, reale reunite saŭ imaginare). Găsirea lor este un problem de gradul al doilea şi nu póte fi făcută de cât cu compasul, de aceia nu am putut arăta aceasta de cât după ce am desvoltat relaţiunile proective, la curbe de gradul al doilea.

Relaţiunile fondamentale de acest fel, precum am vĕdut, sunt:

Fâşiele formate din douĕ puncte óre-cari ale unei conice către tóte cele-l'alte puncte ale aceleaşi conice sunt proective.

Seriile obţinute pe douĕ tangente fixe ale unei conice de toate cele-l'alte sunt proective.

Aceasta dă mijlocul de a representa o conică saŭ ca unire a tutulor punctelor de intersecţiune a razelor corespunzĕtóre din douĕ fâşii proective, saŭ ca envelopă a tuturor liniilor de unire a elementelor corespunzĕtóre din douĕ serii proective şi ne dă mijlocul la studiarea diferitelor proprietăţi ale conicelor. Acestea pot fi însă deduse şi considerând conica ca proecţiunea centrală a unui *cerc* din spaţiu sau al unei alte conice.

An însistat asupra casului special de proecţiune, unde rabatând conică din spaţiu ea acoperă proecţia ei. Acest cas special l'am numit *involuţiune* şi am dedus pe baza ei teoria *polilor* şi *polarelor*. Polul l'am considerat ca *centru* iar polarele ca axa de colineaţiune involutorică în care *conică* originală acoperă *imagina*.

Demonstrând următoarele teoreme:

Când un pol se mişcă pe o dreaptă polarele se învêrtesc împrejurul polului dreptei şi vice-versa.

Polii pe o dreaptă formează douĕ serii proective în involuţiune, ast-fel că polara unuĭ element trece prin cel alt corespunzĕtor şi vice-versa.

Polarele împrejurul unui punct formează douĕ fâşii involutorice, ast-fel că polul unei raze e situat pe a doua corespunzĕtoare şi vice-versa, am complectat cunoscinţele fundamentale pe cari se bazează toate cercetările ulterioare şi cu regula de găsire a elementelor duble precum şi a razelor rectangulare, am terminat toate construcţiunile la cari se reduc toate construcţiunile cele mai complicate ale geometriei de posiţiune.

Ducerea tangentelor dintr'un punct la o conică, intersecţiunea unei drepte cu uă conică, aflarea centrului, diametrele conjugate, axele unei conice şi a ori-cărei suprafeţe de gradul al doilea se resolvă cu acest numĕr restrâns de construcţiuni.

Ar fi de prisos ca să mai însistăm mai departe, de oare-ce tóte acestea reese aşa de clar din toate capitolele ce au urmat.

Dar şi curbe şi suprafeţe de gradul al treilea şi cele de grad superior pot fi studiate pe basa acestor puţine teorene. N'am putut atinge această chestiune find-că ese din cadrul ce mi l'am propus.

Generalisând relaţiunile proective între puncte şi drepte considerate ca poli şi polare am obţinut teoria reciprocităţii proective, pe cât timp polii şi polarele formează figuri reciproce în involuţiune.

La studiul reciprocităţei plane se reduce acela al reciprocităţii din spaţiu, şi precum am vĕdut reciprocitatea este basa întregii statice.

Cu ajutorul ei am putut studia relaţiunile între poligoanele funiculare şi de forţe..

Cu ajutorul reciprocităţii involutorice am dedus teoria elipsei şi elipsoiduluĭ de inerţie.

Cu ajutorul reciprocităţei speciale, dis sistemul focar am putut studia relaţiunile între puterile în spaţiu. Acest studiu de o valoare teoretică şipractică, nu numai că nu l'am putut epuisa, dar nici n'am putut să indicăm toată întinderea sa, maĭ alas cea teoretică.

In resistenţa materialelor am vĕdut cum geometria de posiţie, resolvă diferite probleme precum relaţiunile între variaţiunile secţiunilor şi tensiunilor, atât în plan cât şi în spaţiu precum şi relaţiuni între puterile exterioare şi interioare.

Pentru a nu intinde prea mult aceste articole am renunţat la expunerea aplicaţiunii gemetriei la teoria diformaţiunilor elastice, unde dacă până acuma geometria nu poate disputa cu analisa, totuşi îi vine mult în ajutor.

Cu toate omisiunile ce am făcut, credem totuşi că ne-am ajuns scopul ce ni l'am produs, adică, acela de a da cititorului atent o idee desluşită despre cea-ce vor geometria de posiţiune şi statica grafică a lui Culmann (care ar putea fi numită statică geometrică) precum şi de metoadele ce ele urmează în ajungerea scopului lor.

Spre sfârşit, să-mi fie permis a rĕspunde la câte-va obiecţiuni amicale ce mi-au făcut maĭ mulţi colegi amici.

Aşa mi s'a făcut observaţiunea că conţinutul articolelor nu corespunde cu titlul ce i-am pus, şi că ar fi fost mai nemerit dacă puneam titlul de: „O privire asupra staticeĭ grafice de Culmann". Nu sunt de acord cu această observaţiune, însă a disputa asupra înţelesului cuvêntuluĭ de „studiu“ nu cred de nemerit. Dacă unii au putut înțelege prin cuvêntul *studiu* alt-ceva de cât ceea-ce mi-am propus, această propunere am indicat-o imediat, la început în introducțiune. Am spus că „vreau să fac'o schiță“ și aceesta am și făcut-o Pentru aceasta m'am servit în mare parte de *„Fiedler, Darstellende geometrie in organischer Verbindung mit der geometrie der Lage“* (geometria de posițiune în legătura organică cu geometria de posițiune), trei volume și de operile lui Culmann și ale succesorului sĕu Ritter. Urmând însă în mare parte pe acești autori, aceste articole sunt departe de a fi numai nisce simple extrase traduse din ei, precum le-a plăcut la unii să susție, bine înțeles aruncându-și numai ochii asupra numirilor paragrafelor din text și a figurilor, fără de a-și mai da osteneala ca să citească.

Dacă am luat hotărârea de a scrie aceste articole, causa este că am observat că sunt prea puțini ingineri dintre cei cari nu 'și-au făcut studiele în Zurich, carĭ să aibă o ideie clară despre statica grafică așa cum a înțeles-o Culmann, și că unii chiar au o idee pe nedrept defavorabilă teorielor acestui bărbat însemnat.

Am credut deci că fac bine să expun pe cât pot aceste teorii. Dacă pe de o parte am putut constata cu mâhnire că sunt prea puțini cititori, pe de altă parte am constatat cu plăcere că articolele au deșteptat atențiunea multor membrii de valoare din societate asupra teorielor expuse în ele. Fie ca eĭ să se decidă de a trata această chestiune cu o mai mare competență, și într'un mod mai desvoltat. Ast-fel munca ce am întrebuințat-o și sacrificiile buletinului vor fi pe deplin rĕsplătite.

Iacob Solomon

Inginer

CUM SE DESVOLTĂ TECNICA CONSTRUCȚIILOR ȘI ÎNRÂURIREA LUI JOHAN BAUSCHINGER

Propășirea, ce a făcut'o tecnica în ultima jumĕtate a veacului nostru ie datorită avêntului luat de construcția Căilor ferate, cari la rîndul lor n'ar fi ajuns la o desvoltare atât de mare, dacă nu sĕ înlătura piedicele, ce mereu le ieșia înainte.

Trecerea riurilor și ale adêncilor prăpăstii a pricinuit pe de o parte căutarea de metode simple și raționale în construcția podurilor, iar pe de alta, atât întrebuințarea de materiale, cari sĕ presinte relativ la un volum mic o resistență mare, cât și cercetarea resistenței materialelor pentru a se putea deslușit hotărâ, ce sarcină poate duce un anumit fel de material fără să se obosească.

Ast-fel vedem pe tecnicianii noștri înpărțiți în douĕ tabere. Una își frămăntă gândirea ocupându-se cu înjghebarea de felurite theorii peutru a găsi puterile launtrice ale părților, din cari ie alcătuit podul, și cari puteri vor trebui să țină piept celor din afară, pentru ca osatura întreagă să poată sta în cumpănă; iar cea-l-altă înfundată în laboratorii are mintea și privirea îndreptată către mașinele de încercare, observând modul deformațiuniler și momentul cedărei unui material supus la încercare, ca ast-fel din numeroasele observațiuni să poate trage încheierea, la ce muncă anume se poate pune un material dat. Numai lucrându-se paralel în ambele direcțiuni am ajuns să posedĕm ađi acea horbotă ridicată în aier *Turnul Eiffel* și în curând se vedem Dunărea fălindu-se cu mândrul colier, ce-l va purta la gâtu-i *Podul de la Cerna-voda*.

Ori și cât de întemeiate și vădite teorii am avea la îndemână pentru găsirea puterilor, ce solicită o construcția, totuși dimensiunile ei nu se pot determina, căci statica ni înfățișează pentru a lor căutare formule, în cari se află o necunoscută, ce numai practica o poate determina. Aceasta-i putere pe unitate de Secțiune sau *coeficientul de resistență*. De la alegerea acestui coeficient atârna dimensionarea construcției prin urmare și costul ei. Cum însă toată actuala activitate omenească se resfrânge în a câștiga mult și a cheltui puțin, iată și tecnica nu se dă în lături, ci ocupă ai sĕi representanți cu găsirea mijloacelor pentru a satisface principiul vremei de ađi.

De și mecanică încă de la început, dar maĭ ales de la descoperirea *grapho-staticei* întemeiându-se pe descompunerea puterilor în plan, a găsit mijloacele pentru combinațiunea simplă și clară a construcțiunilor menite să susțină greutăți, totuși pratica n'a avut încredere pe acea simplicitate dată de theorii pentru alcătuirea bună oară a fermelor, și ast-fel, pe de o parte a îngroșat dimensiunile theoretice, iar pe de alta a întrodus o grămadă de bucăți pentru susținere, părți pe cari theoria le arată, că sunt cu totul de prisos. Această temere a practicei era întru-cât-va justificată.

Ochiul deprins cu formele greoaie și pline, ce ni le dă zidăria, i-a venit greŭ să se desvețe așa de-o-dată și să primească fără nici un control, formele scheletice și