II

MEMORII SI COMUNICARI

NOTA

ASUPRA VOLUMULUI TRUNCHIULUI DE PIRAMIDĂ ȘI AL OBELISCULUI TRUNCHIAT

Printre obiectele de artă ce se întâlnesc la ingineri, sunt multe cari au forma unui trunchiu de piramidă. Sunt altele cari cu toate că la prima vedere par a fi nisce piramide trunchiate, însă fiind-că nu toate muchiile concură într'un punct, sunt corpuri de altă natură. Să numim acest corp, *obelisc trunchiat*, fiind-că poate fi considerat că provine din trunchiarea corpului desenat alăturea în proecția orizontală, și pe care să'l numim *obelisc*.

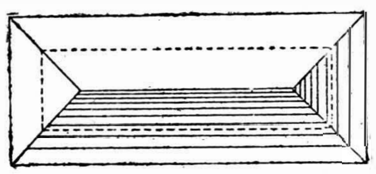


Fig.1

Pentru casul unui trunchiu de piramidă e cunoscută următoarea regulă :

Volumul unui trunchiu de piramidă cu base paralele este egal cu volumurile a trei piramide cari ar avea succesiv ca base : basa cea mare, basa cea mică și o medie proporțională între cele 2 base; înălțimele acestor piramide fiind egale cu înălțimea trunchiuluĭ.

Această regulă nu e aplicabilă la obeilscuri trunchiate, cari formează majoritatea casurilor din practică dar chiar pentru trunchiu de piramidă, din causa radicalelor nu e cu plăcere întrebuințată, și foarte adesea se preferă mai multe procedeuri aproximative.

In cele ce urmează voim să demonstrăm uă altă regulă de cât cea cunoscută, care în acelaşi timp este și matematicește exactă, și fiind simplă este mai aptă a fi aplicată în practică.

Această regulă este :

Volumul unui trunchiu de piramidă sau al unui obelisc trunchiat, cu base paralele este egal cu :

1) Volumul unei prisme drepte cu base paralele asemenea celor 2 base date, având laturi succesiv egale, cu semi suma a două laturi corespunzătoare din cele două base date. Inălțimea prismei este egală cu înălțimea trunchiului

Plus.

2) Volumul unei piramide de aceeași înălțime având ca basă, un poligon asemenea celor două base date și ale cărui laturi sunt succesiv egale cu semi-diferința a două laturi corespunzătoare din cele două base.

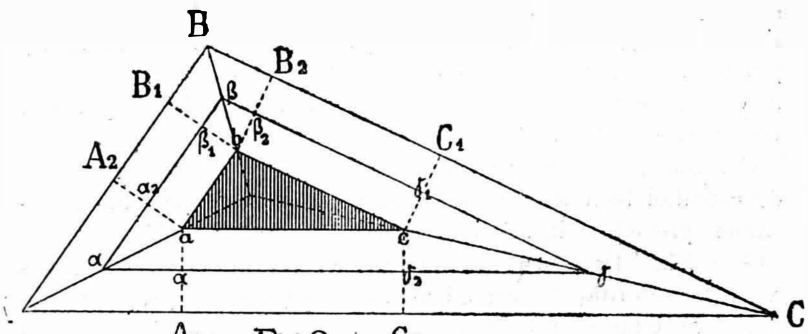


Fig.2

Demonstrație.

Fie a b c A B C un trunchiu de piramidă cu base paralele și de uă înălțime egală cu *h* (Desenul represintă proecția ortogonală p'un plan paralel cu cele două base).

Să tăiăm trunchiul cu un plan paralel cu cele două base și care să treacă la 1/2 înălțimeĭ trunchiuluĭ.

Fie $\alpha . \beta . \gamma .$ secțiunea acestui plan cu trunchiu.

Să ducem prin *a* planurile a A_1, a A_2 perpendiculare pe laturile AC și AB ; prin b planurile bB_1 și bB_2 perpendiculare pe laturile AB și BC ; prin c planurile cC_1 și cC_2 perpendiculare pe BC și CA.

In acest mod trunchiul e descompus în : 1-iu Uă prismă dreaptă cu basa cursele și înălțime *h*. — 2-a Trei prisme triunghiulare: ab, $A_2 B_1$; bc $B_2 C_1$; și c a $C_2 A_1$. — Prisma ab $A_2 B_1$ având drept dimensiuni pe *h*, aA_2 și *ab* volumul său este egal cu $\frac{ab \times aA_2 \times h}{2}$ — 3-a Trei piramide aA_1 AA_2 ; bB_1 BB_2; cC_1 CC_2; volumul lui aA_1 $AA_2 = \frac{\text{Supraf. } aA_1 \ AA_2 \times h}{3}$

Dacă ducem prin laturile poligonului $\alpha\beta\gamma$ nisce plane perpendiculare pe planele celor două base și considerăm prisma mărginită de aceste base putem și p'acest corp să'l considerăm compus din: 1-iu Prisma dreaptă cu basa $a\,b\,c$ și înălțimea h.—2-a Trei prisme dreptunghiulare drepte $a\,b\,\alpha_2\,\beta_1$; $b\,c\,\beta_2\,\gamma_1$ și $c\,a\,\gamma_2\,\alpha_1$ — Volumul prismei $a\,b\,\alpha_2\,\beta_1$ în vederea că $\alpha_2\,\beta_1 = a\,b$, și $a\,\alpha_2 = \frac{aA_2}{2}$ este egal cu $\frac{a\,b \times a\,A_2 \times h}{2}$.—3-a Trei prisme patrulatere $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$, $b\,\beta_1\,\beta\,\beta_2$ și $c\,\gamma_1\,\gamma\,\gamma_2$.— Volumul prismei $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ este egal cu suprafacia $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2 \times h$ și fiind-că tóte laturile patrulaterului $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ sunt jumătățile laturilor $a\,A_1\,AA_2$, resultă că:

$$\text{Vol. prism. } a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2 = \frac{\text{Supr. } a\,A_1\,A\,A_2}{4} \times h.$$

Comparând părțile în care am descompus trunchiul dat cu cele în cari am descompus prisma vedem:

a) Părțile de sub No. 1 și 2 ale trunchiului sunt egale în volum cu cele de sub No. 1 și 2 ale prismei.

b) Părțile de sub No. 3 ale trunchiului nefiind egale cu cele de sub No. 3 ale prismei, diferința lor va fi tocmai partea ce trebue adaugată la prismă pentru a obține volmul trunchiului.

Piramida $a\,A_1\,A\,A_2$ are patrulaterul $a\,A_1\,A\,A_2$ drept basă și pe h drept înălțime; și fiind-că supr. $a\,A_1\,AA_2 = \frac{1}{4}$ suprafacia $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ resultă că piramida $a\,A_1\,A\,A_2$ valorează cât patru piramide, cari ar avea ca basă pe $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ și pe h drept înălțime.

Știut este că prisma $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ valorează cât trei piramide $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$; deci diferința între piramida $a\,A_1\,A\,A_2$ și prisma $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ este egală cu uă piramidă care ar avea pe $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ drept basă și pe h drept înălțime.

Diferința între trunchiul dat și prismă este deci suma celor trei piramide $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$, $b\,\beta_1\,\beta\,\beta_2$, $c\,\gamma_1\,\gamma\,\gamma_2$.

Dacă ne închipuim piramida $b\,\beta_1\,\beta\,\beta_2$ pusă lângă piramida $a\,\alpha_1\,\alpha\,\alpha_2$ ast-fel ca $b\,\beta_1$ să vie lângă $a\,\alpha_2$ pe urmă piramida $c\,\gamma_1\,\gamma\,\gamma_2$ lângă piramida $b\,\beta_1\,\beta\,\beta_2$ ast-fel ca planul $c\,\gamma_1$ să vie lângă planul $b\,\beta_2$, va resulta de la sine că $c\,\gamma_2$ să vie lângă $a\,\alpha_1$, așa în cât cele trei piramide se vor întruni într'una triunghiulară de aceeași înălțime h și avênd drept basă un triunghiŭ format din laturile $\alpha\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta$; $\beta\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma$; $\gamma\,\gamma_2 + \alpha_1\,\alpha$.

Se vede lesne că $\alpha\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta = \frac{A\,A_2 + B_1\,B}{2} = \frac{A\,B - a\,b}{2}$ precum și că cele alte laturi sunt succesiv egale cu $\frac{B\,C - b\,c}{2}$, $\frac{C\,A - c\,a}{2}$.— Așa dar diferința de care ne ocupăm este uă piramidă cu înălțimea h și cu basa un triunghiŭ asemenea celor date avênd drept laturi diferințele a două laturi omoloage din cele două base date.

Așa dar trunchiul dat este egal cu uă prismă avênd drept basă pe $\alpha\,\beta\,\gamma$ în care laturile sunt egale cu semi suma a două laturi din basele trunchiuluĭ, plus uă piramidă triunghiulară avênd drept basă un triunghiŭ unde laturile sunt succesiv egale cu semi diferința a două laturi omoloage din basele trunchiului. Amêndouĕ corpurile au aceeași înălțime ca trunchiul dat. *Teoremul este deci demonstrat* pentru trunchiu triunghiular. Și fiind-căori-care alt trunchiŭ îl putem descompune în mai multe triunghiulare, teoremul e valabil și pentru ori-ce alt trunchiu. El este valabil și pentru trunchiu de obelisc, fiind-că în tot raționamentul nostru n'a intervenit de loc deosebirea ce există între trunchiul de piramidă și cel de obelisc.

Suprafața ori-cărui poligon, putênd fi exprimată prin productul a două linii, numite dimensiunile poligonului, să numim A și B dimensiunile basei celei mari, a și b pe aceleа ale basei mici. Fie h înălțimea trunchiului:

In acestcas dimensiunile prismei intermediare vor fi $\frac{A+a}{2}$, $\frac{B+b}{2}$ și h; iar aceleа ale piramidei $\frac{A-a}{2}, \frac{B-b}{2}$ și h.

Volumul trunchiului dat va fi deci representat prin formula:

$$V = \frac{A+a}{2} \times \frac{B+b}{2} \times h + \frac{A-a}{2} \times \frac{B-b}{2} \times \frac{h}{3}$$

In casul unei piramide întregi $a = o$ $b = o$ și formula se reduce la $V = \left[\frac{A \times B}{4} + \frac{A \times B}{12}\right] h = A \times B \times \frac{h}{3}$

In casul unui obelisc avem $b = o$ și formula este

$$V = \frac{A+a}{2} + \frac{B}{2} \times h + \frac{A-a}{2} \times \frac{B}{2} \times \frac{h}{3} = \frac{B\,h}{2}(2\,A + a)$$

Să reluăm formula dedusă

$$V = \frac{A+a}{2} \times \frac{B+b}{2} \times h + \frac{A-a}{2} \times \frac{B-b}{2} \times \frac{h}{3} \quad (1) \text{ sau}$$

$$V = \frac{h}{3}\left(\frac{3\,(A\,B + a\,b)}{4} + \frac{A\,B + a\,b}{4} + \frac{3\,(A\,b + a\,B)}{4} - \frac{A\,b + a\,B}{4}\right.$$

$$\text{sau } V = \frac{h}{3}\left[A\,B + a\,b + \frac{A\,b + a\,B}{2}\right]$$

Cele doă base fiind paralele avem $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ sau $A\,b = a\,B$ sau $(A\,b)^2 = A\,b \times a\,B$; sau $A\,b = \sqrt{A\,B \times a\,b}$ de ac resultă: $\frac{A\,b + a\,B}{2} = Ab = \sqrt{A\,B \times ab}$; prin urmare:

$$V = \frac{h}{3}\left(A\,B + a\,b + \sqrt{A\,B \times a\,b}\right) \quad (2).$$

Formula (2) esprimă vechea regulă cunoscută și am demonstrat identitatea ei cu (1) pentru casul unui trunchiŭ pe piramidă, însă și pentru obeliscul trunchiat, pentru care formula (2) nu e valabilă.

Formula

$$V = \frac{A+a}{2} \times \frac{B+b}{2} \times h + \frac{A-a}{2} \times \frac{B-b}{2} \times \frac{h}{3}$$

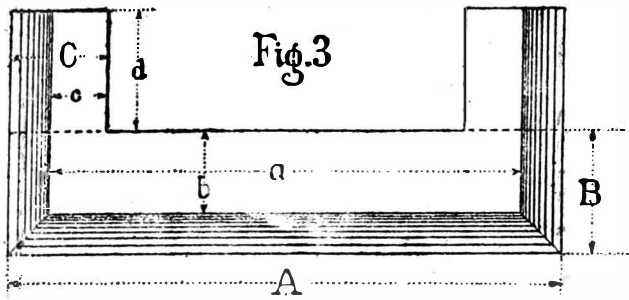
pe lângă că e tot atât de exactă ca cea cunoscută are avantagiul asupra ei, că neavênd radicale, e mai lesne calculabilă și mai poate fi pusă sub formă de tablou, așa cum practica o cere, pentru ca calculele antemăsurătoarelor să poată fi lesne verificate.

Tabloul care ar representa această formulă ar fi:

Numirea părților	No. părților as.	Lung.	Lățim.	Inălț.	Vol.	OBSERV.
Trunchiu de piramidă cu base paralele:						
1. Prisma medіă.	1	$\frac{A+a}{2}$	$\frac{B+b}{2}$	h	....	
2. Piramida suplimentară.	1	$\frac{A-a}{2}$	$\frac{B-b}{2}$	$\frac{h}{3}$	....	
Total . . .						

https://biblioteca-digitala.ro

Să luăm un cas obișnuit în practică, uă culee cu aripele ei precum e desenată în alăturata figură.



Acest corp poate fi descompus în *culeă* proprie zisă și *aripi*.

Culea este un obelisc trunchiat unde basa superioară are ca dimensiuni pe a și b, iar cea inferioară pe A și B

Tabloul următor exprimă volumul corpului desenat

Numir. părților	No. părți-lor as.	Lung.	Lățim.	Inălț.	Vol.
Culea					
1. Prisma medie.	1	$\frac{A+a}{2}$	$\frac{B+b}{2}$	h	....
2. Piram. suplimentară	1	$\frac{A-a}{2}$	$\frac{B-b}{2}$	$\frac{h}{3}$	....
Aripi	2	$\frac{C+c}{2}$	d	h	....
Total . . .	....	....	....	....	....

Une ori în practică se ia drept volumul culeei cea ce e însemnat aci ca prismă medie. Se neglijează deci volumul piramidei suplimentarie. — Să vedem cât de mare e greșeala ce se comite. Se vede că $A-a=2(B-b)$ când presupunem inclinațiuni egale la aripi și la culee.

Fiă *i* valoarea lui $B-b$ pentru $1^m.00$ de înălțime.

Volumul neglijat $V=\frac{A-a}{2}\times\frac{B-b}{2}\times\frac{h}{3}=\frac{(B-b)^2}{2}\times\frac{h}{3}=$

Fiind-că $B-b=i\times h$; resultă $V=\frac{i\times h^3}{6}$

Vedem că greșala este proporțională cu pătratul inclinațiunei și cu cubul înălmiții.

Admițêndu-se $i=0,1$ $h=1^m,00$ avem $V=0,0016$, uă cantitate într'adevĕr neglijiabilă.

Pentru $i=0,1$ și $h=10^m,00$ avem $V=1^{m3},666$.

Dar deja la $h=5^m,00$ și $i=0,1$ avem $V=0,20833$, uă cantitate care nu mai e neglijabilă. In acest cas în loc d'a se recurge la formula exactă cea vechea, e incontestabil mai avantajos a se aplica formula dedusă de noi, cu alte cuvinte, a adauga la cubul obținut prin procedeul aproximativ, cea ce am numit *piramida suplimentară*.

Cum formula dedusă se poate întinde și la trunchiu de con, cred de prisos a demonstra. Dau enunțul resultatului care este:

Volumul unui triunchiu de con cu base circulare paralele este egal cu:

Volumul unui cilindru drept care are drept basă un cerc a cărui rază este egală cu semisuma razelor date plus

Volumul unui con drept cu basa un cerc a cărui rază e egală cu semidiferența razelor date.

Inălțimea amêndoror corpurilor sunt egale cu înălțimea trunchiului dat.

Iacob Solomon.
Inginer.

https://biblioteca-digitala.ro