TEORIA STABILITAȚEI LOCOMOTIVELOR

Mișcarea unei locomotive în mers este fórte complexă și eforturile ce exercită asupra căi ferate sunt diferite de acelea ce exercită locomotiva când e în repaos. Stabilitatea unei locomotive este afectată de perturbațiuni de diferite feluri, cari provin din următórele patru cause principale: efectul vaporilor în cilindre, acțiunea organelor locomotivei în mișcare relativă, acțiunea arcurilor, denivelarea căi.

Această cestiune a stabilităței locomotivelor a preocupat în tot timpul pe ingineri. Insă, vědênd diversitatea soluțiunilor adoptate în practică, e lesne de recunoscut că problema nu e complet resolvată. Aceasta, din causă că legile mișcărilor parazite n'au fost nicí o dată stabilite într'un mod lămurit și, prin urmare, nu ne putem da seama de gradul de stabilitate al unei mașini date.

Studiul ce urmează, are de scop de a studia mișcarea reală a unei locomotive în mers, ținênd seamă de toate influențele ce lucrează asupra ei.

In prima parte vom studia oscilațiunile pe arcuri a cadrului unei locomotive. Vom pleca de la un cas teoretic simplu care poate fi complet resolvat prin calcul și care ne va conduce la soluțiuni de casuri mai complicate, aproximative într'adevěr, însá suficient de exacte pentru practică. Vom vedea că oscilațiunile arcurilor pot dobândi o importanță considerabilă și, în unele casuri chiar, pot suprima complet o încărcare a roților și că, fiind dată o mașină determinată, amplitudinea acestor oscilațiuni trece printr'un maximum pentru o anume vitesă, care în multe casuri este vitesa obicinuită de mers. Vom examina, în fine, mijloacele de a compara importanța oscilațiunilor în mașini de diferite tipuri.

In a doua parte, vom studia mai în special șovăirea (*lacet*) și forțele ce o determină. Centrul de gravitate al unei locomotive are ca traectorie un fel de sinusoidă lungăreață, și mașina oscilează în același timp împrejurul unui ax vertical, ast-fel că trece când pe un șir de șine când pe cel-l'alt, exercitând pe calea ferată nisce eforturi laterale de o mare importanță. Vom determina aceste eforturi și legea acestei mișcări, fie în linie dreaptă, fie în linie curbă, ținênd seamă de diferitele elemente ce intră în joc: vitesă; tip, moment de inerție, *corpul locomotiveĭ* (empattement) repartizarea greutății pe roți; jocul osiilor produs de plane înclinate sau altele; mod de legătură cu tender, acțiunea *tampoanelor* și a *trenuluĭ;* joc, declivitate și starea căi, etc.

Din acest studiu se va vedea că e posibil a determina cu desevîrșire mersul și, caracterul, capricios, a unei locomotive.

Principiile fundamentale care au servit de bază la acest studiu sunt extrase din cursul predat la școala superioară de mine de d. inginer general de mine, E, Vicaire. D. Vicaire a fost primul care a tratat cestiunea repartizărei greutății unei mașini între puntele sale de sprijin ținênd seamă de flexibilitatea arcurilor, și cestiunea oscilațiunilor unui corp pus pe arcuri. In articolul de față sau generalizat și s'au desvoltat aceste probleme.

PARTEA ÎNTÎIA

Oscilațiunile cadruluĭ uneĭ locomotive pe arcurĭ

I. *Ecuațiunĭ generale ale oscilațiunilor unuĭ vehicul pus pe arcurĭ*

Se considerăm un *vehicul* așezat pe trei osii și susținut de șease arcuri situate într'un același plan orizontal. Presupunem că tóte arcurile au același coeficient de flexibilitate și că, în repaos, au aceași săgeată și suportă aceași greutate P. Daca *h* este înălțimea arcului, când nu este încărcat, și *f* săgeata când încărcarea este P, avem prin definiție:

$$h - f = KT.$$

In repaus, tensiunea T a arcului reprezintă greutatea P.

Vom reduce acum greutatea suspendată pe fie-care arc la un punt material unic cu masă invariabilă $\frac{P}{g}$. Vom avea ast-fel șease punte materiale formând un sistem rigid, adică ast-fel ca distanța lor să nu se schimbe și să rĕmâie tot-d'auna într'un același plan. Aceste punte materiale trebue să fie presupuse la o înălțime oare-care d'asupra arcului, pentru că centrul de gravitate al unui *vehicul* este la oare-care distanță de planul ce trece prin bazele superioare ale arcurilor.

Vom studia deci micile mișcări ale unui asemenea sistem de punte materiale, supuse la legături:

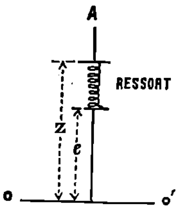


Fig. 1

Fie Z distanța bazei superioare a resortului încărcat cu o greutate P așeḑată într'un punt A, la o linie fixă oo' represintând linia mijlocie a șinei; *e*, distanța fixă a puntului de sprijin al arcului pe osie la șină.

Diferința Z-e este săgeata arcului încărcat. Presupunem că înălțimea Z cresce cu o cantitate mică *z*. Săgeata arcului cresce cu aceași cantitate și tensiunea T se micșorează cu cantitatea Θ ast-fel că:

$$z = -K\Theta.$$

Inălțimea *e* a bazei de sprijin a arcului d'asupra șinei este invariabilă. Șina din cauza flexibilitățe sale și a denivelărilor ce presintă, nu formează o linie dreaptă, ci o curbă oare-care ale cărei ordonate în raport oo' le vom represinta cu ε. Când ε e positiv, adică d'asupra lui oo', distanța bazei arcului la oo' devine e+ε, și arcul se comprimă. In fine săgeata arcului care, în starea statistică, este: Z-e, în casul general este: Z+z-(e+ε). Ea cresce deci cu z-ε, și variațiunea tensiunei, Θ, corespunḑătoare este dată de relațiunea:

$$z - \varepsilon = -K\Theta$$

Cantitatea *z* este tot-d'a-una mică; iar ε este și maĭ mic încă; cu toate acestea Θ poate lua valori însemnate, pentru că coeficientul de flexibilitate K este el însuși foarte mic (de la 0^m,003 la 0^m,01 pe tonă).

Avem dar o primă relațiune între deplasarea z a bazei superioare a arcului sau a greutăței suspendate în A, deplasarea ε a barei inferioare a arcului sau a șinei și tensiunea arcului.

Dacă considerăm acum mișcarea celor șease puncte materiale, se scie, că în virtutea principiului lui d'Alembert, este echilibru, din cauza legăturilor, între forțele de inerție și forțele aplicate.

Pentru fie-care punt forța de inerție este: $\frac{P}{g}\frac{d^2z}{dt^2}$.

Forțele aplicate sunt tensiunea T + ε îndreptată de jos în sus și forța datorită greutăței. Greutatea nu mai este egală cu P căci, în virtutea legăturilor și prin efectul deplasărilor z, greutatea fie-cărui punct material se repartizează într'un mod necunoscut între cele șease baze de sprijin pe arcuri. Forța datorită greutăței este deci P + π (π fiind o necunoscută nouă) și avem ecuațiunea de echilibru pentru fie-eare punct:

$$\frac{P}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = \Theta - \pi.$$

In fine avem, pentru cele șease puncte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 următoarele două serii de ecuațiuni:

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \frac{P}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = \Theta - \pi_1 \\ \frac{P}{g}\frac{d^2z_2}{dt^2} = \Theta_2 - \pi_2 \\ \frac{P}{g}\frac{d^2z_3}{dt^2} = \Theta_3 - \pi_3 \\ \frac{P}{g}\frac{d^2z_4}{dt^2} = \Theta_4 - \pi_4 \\ \frac{P}{g}\frac{d^2z_5}{dt^2} = \Theta_5 - \pi_5 \\ \frac{P}{g}\frac{d_2z_6}{dt^2} = \Theta_6 - \pi_6 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{l} z_1 - \varepsilon_1 = -K\Theta_1 \\ z_2 - \varepsilon_2 = -K\Theta_2 \\ z_3 - \varepsilon_3 = -K\Theta_3 \\ z_4 - \varepsilon_4 = -K\Theta_4 \\ z_5 - \varepsilon_5 = -K\Theta_5 \\ z_6 - \varepsilon_6 = -K\Theta_6 \end{array}\right.$$

Adică două-spre-ḑece ecuațiuni cu opt-spre-ḑece necunoscute cari sunt z, Θ și π. Valorile ε sunt cunoscute în funcție de timp, după forma căi.

Inainte de a stabili cele șease ecuațiuni de condițiuni cari sunt necesare pentru a putea resolva sistemul, să observăm că, dacă vrem să facem aplicațiunea acestor relațiuni la o locomotivă, trebue să introducem forțe noi în sistemul nostru. In adevĕr, vaporii lăcrând asupra pistooului transmite o forță oare-care bielei motrice producând o reacțiune verticală între capul pistonului și *glisiere*. Acestea din urmă făcĕnd corp cu cadrul mașinei, acea reacțiune modifică repartizarea greutăței suspendate pe fie-care arc. De altmintrelea ea lucrează de jos în sus, afară de timpul compresiunei și are ca valoare produsul presiunei pe piston prin tangenta unghiului ce face biela motrice cu axul cilindrului. Acest unghiu este mic, însă presiunea pe piston este foarte mare, ast-fel că această forță lucrând asupra *glisierelor* poate atinge valori însemnate, mai multe mii de kilograme

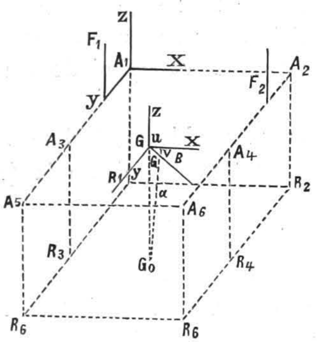


Fig. 2.

Mai lucrează și o altă forță asupra sistemului nostru: efortul asupra cîrligului de tracțiune. Pentru ca să nu aibă nici o acțiune asupra repartizărei greutăței suspendate ar trebui, după cum a demonstrat D. E. Vicaire (cours de chemins de fer de l'École des Mines), să se producă orizontal în planul șinelor. Efectul efortului de tracțiune depinde de momentul acestui efort în raport cu un punct al căi și nu e negligeabil. Dar rĕmâne constant dacă iuțeala e uniformă și nu influențează, prin urmare, mult asupra oscilațiunilor.

Fie (fig. 2) F_1 și F_2 presiunile pe *glisiere* de o parte și alta a locomotivei. Aceste forțe sunt la o distanță δ de linia A_3 A_4 trecênd prin centrul de gravitate G și cantitățile F_1, F_2 și δ sunt funcțiuni de timp. Forțele F_1 și F_2 se repartizează într'un mod necunoscut între cele șease puncte A_1, A_2, . . . A_6. Fie φ, forța aplicată în A_1; A în φ_2 în A_2, etc. Dacă numesc π'_1, π'_2, etc. (în loc de π_1, π_2, etc., după cum făcusem mai sus) crescerea greutățet suspendate, avem la un moment oare-care:

In A_1, forța: $P+\pi'-\varphi_1$,
In A_2, forța: $P+\pi'-\varphi_2$.

Ecuațiunile exprimând egalitatea între forța de inerție și forțele aplicate vor fi deci de forma:

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2z_1}{dt_2}=\Theta_1-(\pi'-\varphi_1).$$

Punênd $\pi_1=\pi'-\varphi_1$, recădem asupra sistemului ([1]), unde trebue să observăm că cantitățile π nu mai au aceiași simnificație ca maĭ sus.

II. *Ecuațiuni de condițiune*

Vom deduce aceste ecuațiuni din faptul că sistemul de puncte materiale este invariabil ca formă geometrică și ca disposițiune a maselor în raport cu centrul de gravitate.

Mai întâiu greutatea totală rĕmâne invariabilă. Avem deci:

$$P+\pi'_1+P+\pi'_2+P+\pi'_3+P+\pi'_4+P+\pi'_4+P\pi'_6=6\,P$$

sau înlocuind pe π'_1, π'_2, etc., prin valorile lor $\pi_1+\varphi_2$, $\pi_2+\varphi_2$, etc., avem:

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6+F_1+F_2=0 \qquad (3)$$

Aceasta este prima din ecuațiunile de condițiune.

Să exprimăm acum că cele șease punte rĕmân tot-d'auna într'un același plan, dacă să iaŭ treĭ axe coordonate, A_1 x, A_1 y, A_1 z, și însemnăm cu 2 a lungimea A_1 A_2, 2 b lungimea A_1 A_5, coordonatele diferitelor punte după deplasarea lor sunt:

	x	y	z
A_1	o	o	z_1
A_2	2 a	o	z_2
A_3	o	b	z_3
A_4	2 a	b	z_4
A_5	o	2 b	z_5
A_6	2 a	2 b	z_6

Ecuațiunea planului trecênd prin cele trei punte A_1, A_2, A_5, este:

$$\frac{z_1-z_2}{2az_1}\,x+\frac{z_1-z_5}{2bz_1}\,y+\frac{1}{z_1}\,z=1.$$

Inlocuind x, y și z succesiv prin coordonatele celor-l'alte trei punte, găsim cele trei relațiuni următoare:

$$z_1+z_6-z_2-z_5=0. \qquad (4)$$

$$2z_4-z_1-z_5=0. \qquad (5)$$

$$2z_4+z_1-2z_2-z_5=0. \qquad (6)$$

Obținem ast-fel trei ecuațiuni de condițiune.

Vom avea pe ultimele douĕ, aplicând principiul lui d'Alembert, în virtutea căruia forțele aplicate și forțele de inerție sunt în echilibru. Vom scrie dar că momentele acestor forțe în raport cu trei axe rectanghiulare sunt nule. Afară de aceasta, putem face abstracțiune de mișcarea de translațiune, care e presupusă uniformă.

Vom lua momentele în raport cu trei axe fixe G x, G y, Gz (fig. 2), trecênd prin centrul de gravitate al sistemului în repaus.

Forțele aplicate sunt:

1° Greutatea, — 6 P, aplicată în centrul de gravitate; în deplasare, acest centru de gravitate a venit în G', punt ale cărui coordonate orizontale sunt u şi v;

2^0 Tensiunile arcurilor, $T+\Theta_1$, $T+\Theta_2$, etc.;

3^0 Presiunile pe glisiere, F_1 şi F_2.

Toate aceste forţe fiind verticale, precum şi forţele de inerţie, momentele lor în raport cu axul vertical sunt nule.

Să luăm momentele în raport cu axul G x. Avem:

$$(T+\Theta_1)b+(T+\Theta_2)b-(T+\Theta_5)b-(T+\Theta_6)b+(F_1+F_2)$$
$$d+6Pv=b\left[\frac{P}{g}\frac{d^2z_1}{dt^2}+\frac{P}{g}\frac{d^2z_2}{dt^2}-\frac{P}{g}\frac{d^2z_5}{dt^2}-\frac{P}{g}\frac{d^2z_6}{dt^2}\right]$$

Inlocuind $\frac{P}{g}\frac{d^2z_1}{dt^2}$, etc., prin valorile lor trase din (1) şi efectuând reducerile, obţinem:

$$(F_1+F_2)d+6Pv+b(\pi_1+\pi_2-\pi_5-\pi_6)=o,$$

Asemenea, luând momentele în raport cu axul Gy, găsim:

$$(F_1-F_2)a+6Pu+a(\pi_1+\pi_3+\pi_5-\pi_2-\pi_4-\pi_6)+o.$$

Trebue acum să înlocuim u şi v prin valorile lor în funcţie de z.

Insă, în deplasarea planului A al celor şase punte materiale, acest plan rĕmâne normal la linia care unesce puntul fix G_0 cu centrul de gravitate. Dacă unghiul $G\,G_0\,G'=\alpha$ nu este altul de cât unghiul ce face planul A cu un plan orizontal, şi unghiul $xGG'=\beta$ va fi dat de urma planului perpendicular la planul A şi trecênd prin $G_0\,G$.

Ecuaţiunea acestui plan sau a urmei sale este:

$$x-\frac{z_1-z_2}{z_1-z_5}y=o,$$

de unde deducem tg β şi

$$\cos\beta=\frac{z_1-z_2}{\sqrt{(z_1-z_2)^2+(z_1-z_5)^2}},\ \sin\beta=\frac{z_1-z_5}{\sqrt{(z_1-z_2)^2+(z_1-z_5)^2}}.$$

In cea ce privesce unghiul α, cosinusul sĕu este cosinusul director al planului A în raport cu Gz. Avem deci:

$$\cos^2\alpha=\frac{4a^2}{(z_1-z_2)^2+(z_1-z_5)^2+4a^2},$$

şi:

$$\sin^2\alpha=\frac{(z_1-z_2)^2+(z_1-z_5)^2}{4a^2}.$$

Cum α e foarte mic, se poate egala cu sinusul sĕu, şi obţinem în cele din urmă:

$$\alpha=\frac{\sqrt{(z_1-z_2)^2+(z_1-z_5)^2}}{2a}$$

Valorile lui u şi v sunt acum lesne de stabilit. Avem numind e inălţimea $G_0\,G$:

$$u=e\,\alpha\cos\beta=\frac{e(z_1-z_2)}{2a},$$
$$v=e\,\alpha\sin\beta=\frac{e(z_1-z_5)}{2b},$$

Ducênd acestor valori în ultimele două ecuaţiuni de condiţiune, obţinem:

(7) $3Pe(z_1-z_2)+(F_1-F_2)a^2+a^2(\pi_1+\pi_3+\pi_5-\pi_2-\pi_4-\pi_6)=o$

(8) $3Pe(z_1-z_5)+(F_1+F_2)b\delta+b^2(\pi_1+\pi_2-\pi_5-\pi_6)=o.$

Acestea sunt ultimele două ecuaţiuni de condiţiune.

Ast-fel, pentru a resolva problema, trebue să găsim soluţiunea celor opt ecuaţiuni de la (1) la (8).

E de observat că raţionamentele ce preced se pot aplica la un un vehicul purtat de un numĕr oare-care *n* de roţi, şi vom vedea mai departe că resolvarea ecuaţiunilor nu e mai grea. Dacă sunt n roţi sistemele (1) şi (2) vor da 2n relaţiuni.

Invariabilitatea greutăţei totale suspendate şi teorema momentelor vor da trei ecuaţiuni de condiţiune, şi cele-lalte n-3 vor resulta din aceea ce n punte trebue să se afle întru'un acelaşi plan. Vom putea ast-fel găsi cele 3n necunoscute.

III. *Integrarea ecuaţiunilor*

Să înlocuim în cele şase ecuaţiuni din sistemul (1) pe θ prin valorile sale trase din (2) şi apoi să le adunăm; obţinem:

$$\Sigma\frac{P}{g}\frac{d^2z}{dt^2}+\Sigma\frac{z}{K}=\Sigma\frac{\varepsilon}{K}-\Sigma\pi.$$

In virtutea ecuaţiunei (3):

$$\Sigma\pi=-(F_1+F_2).$$

Să punem:

(9) $\Sigma z=u,\qquad \Sigma\varepsilon=E.$

Avem:

(10) $\frac{P}{g}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{u}{K}=\frac{E}{K}+F_1+F_2;$

u este o necunoscută auxiliară; F_1 şi F_2 sunt funcţiuni de timp numai. Ecuaţiunea de sus poate dar să fie integrată. Punênd:

$$m=\sqrt{\frac{g}{PK}}$$

integrala ar forma:

$$u=\frac{\sin mt}{m}\frac{g}{P}\int\left(\Sigma\frac{\varepsilon}{K}+\Sigma_1+\Sigma_2\right)\cos mt\,dt$$
$$-\frac{\cos mt}{m}\frac{g}{P}\int\left(\Sigma\frac{\varepsilon}{K}+F_1+F_2\right)\sin mt\,dt+A\sin mt$$
$$+B\cos mt,$$

A şi B fiind constante arbitrare.

Presupunem dar *u* cunoscut Cu ajutorul celor patru ecuațiuni (4), (5), (6) și (9), vom stabili valoarea a patru din necunoscutele z în functie de cele-lalte două, de z_1 și z_2 de exemplu. Vom găsi asf-fel:

$$z_3 - \frac{u}{6} + \frac{z_1 - z_2}{2},$$

$$z_4 = \frac{u}{6} - \frac{z_1 - z_2}{2},$$

$$z_5 = \frac{u}{3} - z_2,$$

$$z_6 = \frac{u}{3} - z_1.$$

Cu ajutorul acestor vălori, putem elimina în (7) și (8) toate necunscutele afară de z_1 și z_2.

Să observàm mai întâi că, în virtutea ecuațiunei (3), ecuațiunea (7) se poate scrie:

(7-bis) $3Pe(z_1 - z_2) + 2a^2F_1 + 2a^2(\pi_1 + \pi_3 + \pi_5) = o.$

Afară de aceasta, avem după sistemul ecuațiuor (1):

$$\pi_4 = \frac{\varepsilon_1}{K} - \frac{z_2}{K} - \frac{P}{g}\frac{d^2 z_1}{dt^2},$$

$$\pi_2 = \frac{\varepsilon_2}{K} - \frac{z_2}{K} - \frac{P}{g}\frac{d^2 z_2}{dt^2},$$

$$\pi_3 = \frac{\varepsilon_3}{K} - \frac{z_3}{K} - \frac{P}{g}\frac{d^2 z_3}{dt^2} = \frac{\varepsilon_3}{K} - \frac{u}{6K} - \frac{z_1 - z_2}{2K} - \frac{P}{6g}\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{P}{2g}\left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} - \frac{d^2 z_2}{dt^2}\right).$$

Această din urmă ecuațiune devine, după relațiunea (9):

$$\pi_3 = \frac{\varepsilon_3}{K} - \left(\frac{E}{6K} + \frac{F_1 + F_2}{6}\right) - \frac{z_1 - z_2}{2K} - \frac{P}{2g}\left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} - \frac{d^2 z_2}{dt^2}\right).$$

Obținem de asemenea:

$$\pi_5 = \frac{\varepsilon_5}{K} - \left(\frac{E}{3K} + \frac{F_1 + F_2}{3}\right) + \frac{z_2}{K} + \frac{P}{g}\frac{d^2 z_2}{dt^2}.$$

Inlocuind în (7-bis) π_1, π_3 și π_5 prin valorile lor, obținem:

$$3Pe(z_1 - z_2) + 2a^2\left[F_1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5}{K} - \left(\frac{E}{2K} + \frac{F_1 + F_2}{2}\right)\right] - 3a^2\left[\frac{P}{g}\left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} - \frac{d^2 z_2}{dt^2}\right) + \frac{z_1 - z_2}{K}\right] = o.$$

Punênd: $E_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_6$, și luând ca necunoscută auxiliară valoarea $v = z_1 - z_2$, această ecuațiune devine, după ce am făcut toate reducerile:

$$(11)\quad \frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\frac{g}{PK} - \frac{ge}{a^2}\right)v = \frac{g}{3P}\left[\frac{E_1}{K} + F_1 - F_2\right].$$

Această ecuațiune diferențială are aceași formă ca (10) și se integrează în același mod.

Să înlocuim acum, în (8) z_5, π_5 și π_6 cu valorile lor în funcție de z_1 și de z_2. Calculele se fac fără greutate și luând $z_1 + z_2 = w$ ca variabilă auxiliară, după ce am pus:

$$E_2 = \frac{5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) - (\varepsilon_5 + \varepsilon_6)}{6},$$

găsim ecuatiunea următoare în w:

$$(12)\quad \frac{d^2 w}{dt^2} + \left(\frac{g}{PK} - \frac{3ge}{2b^2}\right)w = \frac{g}{PK}E_2 + \frac{g}{P}(F_1 + F_2)\left(\frac{\delta}{2b} + \frac{1}{3}\right) - \frac{ge}{2b^2}w.$$

Membrul al doilea fiind funcție de t numai, această diferențială se integrează ca și 10 și 11; soluțiunea acestor trei ecuațiuni dă soluțiunea problemei.

Punênd:

$$n = \sqrt{\frac{g}{PK} - \frac{ge}{a^2}},$$

$$p = \sqrt{\frac{g}{PK} - \frac{3ge}{2b^2}},$$

integralele din (11) și (12) se scriu:

$$v = \frac{\sin nt}{n}\frac{g}{3P}\int\left(\frac{E_1}{K} + F_1 - F_2\right)\cos nt\,dt - \frac{\cos nt}{n}\frac{g}{3P}\int\left(\frac{E_1}{K} + F_1 - F_2\right)\sin nt\,dt + A_1 \sin nt + B_1 \cos nt,$$

$$w = \frac{\sin pt}{p}\int\frac{g}{P}\left[\frac{E^2}{K} + (F_1 + F_2)\left(\frac{\delta}{2b} + \frac{1}{3}\right) - \frac{ge}{2b^2}u\right]\cos pt\,dt - \frac{\cos pt}{p}\int\frac{g}{P}\left[\frac{E^2}{K} + (F_2 - F_2)\left(\frac{\delta}{1b} + \frac{1}{3}\right) - \frac{ge}{2b^2}u\right]\sin pt\,dt + A_2 \sin pt + B_2 \cos pt,$$

ecuațiuni în cari A_1, B_1, A_2, A_2, sunt niște constante arbitrare.

Primii doi termeni din valorile lui u, v, w, au forma următoare:

$$\varphi(t) = \sin\mu t \int\psi(t)\cos\mu t\,dt - \cos\mu t\int\psi(t)\sin\mu t\,dt,$$

în care ψ (t) este o funcțiune de timp. Maĭ tîrḑiu va fi de trebuință a cunoasce valorile luĭ φ în cele două casuri când ψ este: 1) o funcțiune liniară, 2) o funcțiune periodică simplă de timp. Le vom stabili dar chiar de acum.

Când ψ este o fcncțiune liniară de forma: $\eta = \lambda t$ în care η și λ sunt constante, avem:

$$\varphi = \frac{\eta - \lambda t}{\mu}$$

Când ψ este o funcțiune periodică de forma: $a \sin qt + b \cos qt$, în care a, b, q sunt constante, avem:

$$\varphi = \frac{1}{q^2 - \eta^2}(a \sin qt + b \cos qt).$$

Pentru a întrebuința integralele, trebue să cunoascem forma funcțiunilor E sau ε și F, adică acțiunsa șinelor și acea a presiunei pe *glisiere*. Ne vom ocupa acum de aceasta.

IV. *Curba formată de şine sub roţile unei locomotive*

Linia şinelor pe cari se învîrtesc roţile nu este esact o linie dreaptă. Flexibilitatea şinelor, scufundarea traverselor *în balast, jocul eclíselor* înclinarea şinelor, etc., produc denivelări relativ importante. Un studiu foarte precis şi foarte amănunţit a fost făcut de D-nu Coüard, inginer al companiei din Lyon (*Revue générale des chemins de fer, Octobre et de Décembre 1887*). Iată principalele resultate :

In urma scufundărei traverselor în balast şi a înclinări şinelor, şina din aval este în tot-d'a-una mai jos de cât şina *din amonte* şi roata cade de pe una pe cea l'altă. Denivelarea unei şine este maxima la prima sau la a doua traversă, după cum îndoparea este veche sau recentă. Fie-care şină formează ast-fel un fel de plan înclinat pe care trebue să'l urce roţile. Pentru şine de 5 metri denivelarea medie a şinei din *aval* este de 4 milimetri; ea poate atinge 8 sau 9 milimetri, mai cu seamă dacă cele douě fire de şine nu sunt exact la acelaş nivel. Pentru şine de 10 metri, denivelările sunt aproximativ cu o treime mai mici şi nu se propagă pe toată lungimea şinei.

Ele sunt aceleaşi, adică calea presintă acelaşi profil pentru toate roţile locomotivei. Resultă din cea ce precede că, negligiând flexiunea şinelor între cele douě traverse de *rost*, calea presintă aproximativ forma dinţată din fig. 3.

Această curbă este constituită de fragmente de drepte din care fie-care, AB de

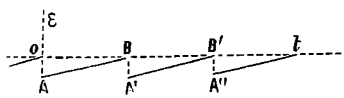


Fig. 3.

exemplu, raportată la axe ca ot, oε, poate fi representată printr'o ecuaţiune de forma :

$$\varepsilon = -\eta + \lambda t$$

în care $\eta = {}_0A$ şi λ e înclinaţiunea lui AB.

Dacă V e vitesa de translaţie în metri pe secundă, şi l lungimea şinei, avem :

$$\lambda = \frac{V\eta}{l}$$

Loviturile roţilor pe cale dacă n'au o intensitate prea mare, nu produc nici un efect asupa oscilaţiunilor arcurilor, pentru că nu cchimbă înălţimea punctului lor de sprijin. Aceasta nu s'ar întâmpla de cît dacă roata ar fi ridicată d'asupra şinei în urma unei ciocniri. Insă ciocnirile de obicei nu sunt aşa de violente pentru ca să producă acest resultat. Aşa că numai denivelările determină, în genere, mişcările arcurilor.

Funcţiunea de timp care representă curba discontinuă AB A'B', etc., este o funcţiune periodică a cărei perioadă este egală cu timpul necesar pentru a parcurge o şină. S'ar putea stabili această funcţiune cu ajutorul seriilor lui Fourier, însă s'ar obţine nisce formule prea complicate şi, afară de aceasta, nici nu e necesar pentru rezolvarea problemei după cum se va vedea mai departe.

V. *Reacţiunile capului pistonului asupra glisierelor*

Numind p presiunea vaporilor asupra pistonului şi a *tigeĭ* sale, reacţiunea între capul pistonuluĭ şi *glisiere* este : $p \operatorname{tg} \beta$, β fiind unghiul bielei motrice cu axul cilindrului presupus orizontal. Cantitatea p se poate deduce din *diagrama* presiunilor vaporilor în cilindre, însă nu se poate ajunge a se presinta printr'o funcţiune simplă. Se scie numai că este o funcţiune periodică a cărei perioadă este egală cundurata unei învârtituri de roată.

Cu toate acestea, în practică, se poate ajunge a representa aproximativ presiunea asupra *glisierelor* printr'o funcţiune trigonometrică compusă dintr'un singur termen.

să construim de exemplu curba $F_1 = p \operatorname{tg} \beta$ pentru o iuţeală de trei învârtituri pe secundă. *Fig. 1, Pl. I*, representă diagrama presiunilor într'un cilindru, ale cărui dimensiuni sunt : diametru $0^m,44$; cursa: $0^m,65$ şi curba F_1 din *fig. 2, Pl. I*, în care axul obsciselor exprimă unghiurile de manivelă, dă reacţiunile, exercitate asupra *glisierelor* de partea dreaptă a maşinei. Asemenea curba F_2 dă reacţiunile din partea stângă. Din acestea se deduc curbele representate de F_1+F_2 şi F_1 F_2. Acestea sunt valorile ce trebue găsite, pentru-că ele intră în integralele mişcărei arcurilor. Insă se recunoase că curba F_1+F_2 este aproximativ o sinusoidă al cărei ax ar fi o.x', iar diferinţa de fază ar fi o'A' cu mişcarea manivelei motrice avênd drept origină *puntul mort înainte, din partea dreaptă*, în fine a cărei perioadă ar fi un sfert de învîrtitură. se poate dar scrie :

$$F_1+F_2 = A+B \sin (4\alpha-\varphi) = A+B \sin 2\pi n (4t-\varphi)$$

n fiind numĕrul de învîrtituri, egal cu trei în casul de față.

$$F_1 - F_2 = C \sin (2 d - C) = C \sin 2 \pi n (2 t - C)$$

Fig. 3, Pl. I, dă curbele $F_1 + F_2$ și $F_1 - F_2$, când iuțeala este de patru învîrtituri pe secundă.

Aceşte curbe au acelaşi mers ca şi când $n = 3$, şi acest fapt poate fi considerat ca general. Ori care ar fi iuțeala, reacțiunile asupra *glisierelor* se pot representa aproximativ prin funcțiuni trigonometrice cu un singur termen.

E necesar a observa că, în integrala w (§ III), termenul $F_1 + F_2$ este însoțit de factorul d, distanța capului pistonului la axul transversal trecênd prin centrul de gravitate al mașinei, d variază ca și drumul percurs de piston. In tipul de mașini cu trei osii care s'a luat de bază minimum (osia motoare fiind cea din mijloc), d este lungimea bielei motoare mărite sau micșorate cu drumul percurs de piston plecând de la posițiunea sa mijlocie. Dacă biela are $1^m 80$ lungime, și manivela $0^m 325$, d variază de la $1^m 475$ la $2^m 123$. Nu vom ține seamă de această variațiune, și vom lua pentru d valoarea sa mijlocie. S'ar putea face calculul integralelor fără această restricțiune, însă ar fi mai complicat fără profit mare din punctul de vedere al exactității.

VI. *Oscilațiuni proprii arcurilor*

Cunoscând cantitățile E și F cari se află în ecuațiunile (10), (11) și (12), putem termina integrarea.

Expresiunea generală a integralei (10), A și B fiind niște constante arbitrare, este:

$$u = \frac{u_0 \sin mt}{m} \frac{g}{p} \int (E + F_1 + F_2 \cos mt \, dt$$
$$- \frac{\cos mt}{m} \frac{g}{p} \int (E + F_1 + F_2) \sin mt \, dt + A \sin mt + B \cos mt.$$

Cantitățile A și B se obțin făcênd $t = 0$ în această expresiune și în derivata sa $\frac{du}{dt}$ și dând lui u și $\frac{du}{dt}$ valorile lor inițiale u_0 și u'_0.

Se vede că B va fi o sumă de trei termeni din cari unul va fi u_0, cel l'alt valoarea expresiunei $\frac{g}{Pm} \int E \sin tm \, dt$ pentru $t = 0$, pe care o vom numi Be, și al treilea valoarea expresiunei $\frac{g}{Pm} \int (F^1 \; F_2) \sin mt \, dt$ pentru $t = 0$, pe care o vom numi Bf. Tot asemenea și pentru A. Valoarea lui u se poate dar scrie:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} u = {} & \frac{u'_0}{m} \sin mt + u_0 \cos mt \\ & + \frac{\sin mt}{m} \frac{g}{p} \int E \cos mt \, td - \frac{\cos mt}{m} \frac{g}{p} \int E \sin mt \, dt \\ & \qquad + Ae \sin mt + Be \cos mt \\ & + \frac{\sin mt}{m} \frac{g}{p} \int (F_1 + F_2) \cos mt \, dt \\ & - \frac{\sin mt}{m} \frac{g}{p} \int (F_1 + F_2) \sin mt \, dt + Af \sin mt + Bf \cos mt \end{aligned} \right.$$

De unde resultă că mişcarea periodică **u** este resultanta a trei mişcări elementare datorite: prima, valorilor inițiale ale lui u și $\frac{du}{dt}$; a doua, denivelărei șinelor; a treia, reacțiunilor asupra *glisierelor*. Acest fapt era, de altmintrelea, prevĕḑut, căci resultă din principiul independenței micilor mișcări simultanee. Ceia ce s'a spus despre u este de asemenea adevĕrat și pentru v și w și, prin urmare, pentru z. Vom putea dar, mai departe, studia în parte fie-care din mișcările componente.

Să ne ocupăm mai ântêiu de oscilațiunile datorite unei mișcări inițiale, adică de oscilațiunile proprii arcurilor.

Raportându-ne la ecuațiunile (11) și (12) avem:

$$v = \frac{v'_0}{n} \sin mt + v_0 \cos nt,$$

$$u = \frac{u'_0}{m} \sin mt + v_0 \cos mt,$$

$$w = - \frac{\sin pt}{p} \frac{ge}{2b^2} \int u \cos pt \, dt$$

$$+ \frac{\cos pt}{p} \frac{ge}{2b^2} \int u \sin pt \, At + A \sin pt + B \cos pt$$

sau efectând integralele și observând că:

$$\frac{ge}{2b^2} = \frac{m^2 - p^2}{3},$$

$$= w \frac{1}{3} \left(\frac{u'_0}{m} \sin mt + u_0 \operatorname{sos} mt \right)$$

$$+ \left(\frac{w'_0}{p} - \frac{mu'_0}{3p} \right) \sin pt + \left(w_0 - \frac{u_0}{3} \right) \cos pt.$$

Valoarea oscilațiunei proprie a unui arc, dată de $z, = \frac{V + W}{2}$, este dar, și ea, resultanta a trei mișcări elementare avênd ca perioade respective: $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{a\pi}{n}$ și $\frac{2\pi}{p}$. In realitate, mișcarea resultând nu este așa de complicată după cum pare a fi după aceste resultate, căci valorile lui m, n și p diferă foarte puțin. Să le calculăm luând un exemplu din practică. Să considerăm o locomotivă cu șease roți de acelaşi diametru, de o greutate de

36 de tone egal repartizate, în repaus, pe fie-care roată. Geutatea unei *osii montate* fiind presupusă egală cu 2.000 kilograme, încărcarea purtată de fie-care arc este de 5 tone.

Să punem dar:

$$P = 5.000 \text{ kilograme},$$

Flexibilitatea arcurilor, $K = 0{,}01$;

Semi-spaţiul punctelor de atârnare (arcuri interioare), $a = 0^m{,}55$; distanţa a două osii consecutive, $b = 2^m{,}1$;

Inălţimea centrului de gravitate d'asupra puntelor de atârnare: $e = 0^m{,}40$.

Avem:

$$m^2 = \frac{g}{PK} = 196, \qquad m = 14,$$

$$n^2 = \frac{g}{PK} - \frac{ge}{a^2} = 183{,}04, \qquad n = 13{,}5292,$$

$$p^2 = \frac{g}{PK} - \frac{3ge}{2b^2} = 194{,}667, \quad p = 13{,}9523,$$

Dacă calculăm perioadele T_m, T_n şi T_p, găsim:

$$T_m = \frac{2\pi}{m} = 0'',4488,$$

$$Tn = \frac{2\pi}{n} = 0'',4643$$

$$Tp = \frac{2\pi}{p} = 0'',4504$$

Tm şi Tn diferă cu $\frac{16}{10000}$ din secundă, cea ce e cu totul negligeabil. Diferinţa între Tm şi Tn este de de $0'',0155$, saŭ aproximativ $\frac{1}{30}$ din Tm se póte asemenea negligea. Ţinênd seamă de aceasta, am găsi pentru perioada reală, care e cel mai mic comun multiplu al lui Tm şi Tn, valoarea $30\,Tn = 31\,Tm = 13'',912$.

In tot ce va urma, nu vom ţine seamă de aceste diferinţe între perioade, şi vom presupune că mişcarea proprie de oscilaţiune a arcurilor are ca perioadă Tm.

Se vede în acelaşi timp că influenţa lui e, înălţimea centrului de gravitate d'asupra planului de atârnare, este negligeabilă cel puţin în limita valorilor ce se găsesc în practică. Această cantitate e modifică puţin valoarea perioadei m, ea nu e conţinută explicit în ecuaţiunile ce dau amplitudina oscilaţiunilor.

VII. *Influenţa denivelărilor căi asupra oscilaţiunilor arcurilor.*

Am vĕdut în § IV că un fir de şine, sub trecerea roţilor unei locomotive, formează aproximativ o *linie dinţată* ast-fel că la fie-care *rost* roţile cad *de pe şina din amonte pe şina din aval.* Cele două fire de şine formeaaă obicinuit curbe diferite. Cu toate acestea vom admite pentru a simplifica calculile că aceste curbe sunt aceleaşi presupunênd că calea este în linie dreaptă şi că nu e supraînălţare a firului de şine exterior. Prin urmare, luând drept origina timpului momentul când primele roţi ale maşinei trec pe *rosturile* presupuse concordante, avem pentru denivelările primelor două şine, din dreapta şi din stânga:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\eta + \lambda t.$$

Cele lalte valori ε_3, ε_4, ε_5, ε_6 se obţine lesne dacă represintăm posiţiunea ce ocupă în acel moment locomotiva pe cale. Osiile ocupă posiţiunile 1, 2, 3, la origina timpului (fig. 4). Daca numim τ timpul întrebuinţat pentru a prescurge o şină, şi τ timpul întrebuinţat pentru a parcurge distanţa coprinsă între două osii consecutive, avem evident pentru puntul 2:

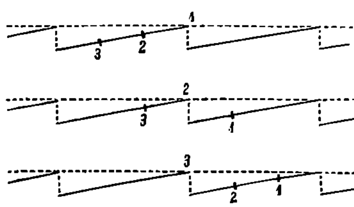


Fig. 4.

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \eta + \lambda\,(\tau - t_1 +),$$

şi pentru puntul 3:

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -\eta + \lambda\,(\tau -_2 t_1 + t).$$

Aceste valori ale lui ε sunt continue până în momentul când a doua osie ajunge pe *rost*. Din acest moment valorile lui ε sunt date de ecuaţiunile următoare:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\eta + \lambda\,(t + t_1)$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -\eta + \lambda\,t,$$
$$\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -\eta + \lambda\,(\tau - t_1 + t).$$

In fine, din momentul când a treia osie trece pe *rost* avem, admiţênd că distanţa osiilor extreme este inferioaeă lungimei şinei,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\eta + \lambda\,(t +_2 t_1),$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -\eta + \lambda\,(t + t_1),$$
$$\varepsilon_5 - \varepsilon_6 = -\eta + \lambda\,t.$$

Cu aceste trei sisteme do valori ale lui ε, vom calcula deplasările z ale puntelor suspendate. Aplicând relaţiunile de la finele § III, obţinem lesne valoarea lui n dată de al doilea rând al ecuaţiunei (13); tot asemenea şi pentru w, şi găsim ast-fel valoarea următoare pentru deplasarea z, a puntului suspendat pe una din roţile dinainte

14) $Z_1 = -\frac{5}{6}\eta + \lambda t - \frac{\lambda}{m} \sin mt + \frac{5}{6}\eta \cos. mt.$

Această ecuațiune nu este exactă de cât până când roțile celei d'a două osii trec la rândul lor pe *rost*. Din acest moment, trebue să considerăm al doilea sistem de valori ale lui ε, și avem pentru z, A și A fiind constante arbitrare.

$$Z_1 = -\eta + \lambda t_1 - \frac{\lambda\tau}{6} + \lambda t + A \sin mt + B \cos mt$$

Pentru a calcula pe A și B, trebue să facem, în această ecuațiune și în derivata sa, $t = o$, dând lui z_1 și $\frac{dz_1}{dt}$ valorile lor inițiale, ce se obțin făcênd $t = t_1$ în ecuațiunea (14) și în derivata sa. Găsim ast-fel:

(14 bis) $Z_1 = -\frac{7}{6}\eta + \lambda(t+t_1) + \frac{\eta}{3}\cos mt - \frac{\lambda}{m}\sin m$

$$(t+t_1) + \frac{5}{6}\eta \cos m (t+t_1)$$

Această ecuațiune e valabilă până la trecerea pe rost a celei d'a treia osii. Din acel moment găsim valoarea lui Z, în același mod ca și mai sus, și avem:

(14 ter) $Z_1 = -\eta + \lambda(t+2t_1) - \frac{\eta}{6}\cos mt + \frac{\eta}{3}\cos m(t+t_1)$

$$-\frac{\lambda}{m}\sin m(t+2t_1) + \frac{5}{6}\eta \cos m (t+2t)$$

Această ecuațiune e valabilă până la trecerea primei osii pe la extremitatea primei șine; din acest moment aceleași valori ale lui ε se reproduc. Avem dar pentru a doua șină și pentru următoarele aceleași valori ale lui Z, ca și mai sus, adunate cu un termen care este funcțiune de valorile inițiale ale deplasării și ale iuțelei, dică de valorile lui Z, și $\frac{dz_1}{dt}$ luate la sfîrșitul șinei din *amont*, Acest termen e de forma:

$$\frac{z'_{01}}{m} \sin mt + z_{01} \cos mt$$

După ceea ce precede, deplasările punctelor suspendate sunt continue, cu toată discontinuitatea curbei formate de șine.

Daca n'am obținut ecuațiunea generală a deplasărilor z, ar fi posibil de stabilit, însă cu ajutorul unor calcule foarte complicate, căci ecuațiunea uneĭ liniĭ poligonale este o serie infinită), tot putem construi curba acestor deplasărĭ cu ajutorul ecuațiunilor ce găsirăm.

Aceste ecuațiunĭ arată că deplasările z, depind:

1^0 de η, denivelarea la rosturile șinelor.

2^0 de λ și de τ, adică de iuțeala și de lungimea șinelor;

3^0 de t_1, adică de distanța osiilor,

4^0 de m, adică de greutatea suspendată și de flexibilitatea arcurilor.

Am stabilit formula oscilațiunilor z_1 a arcurilor d' înainte. Formulele relative la arcurile celor-l'alte osiĭ se deduc. N'avem decît să calculăm pe u și să aplicăm formulele:

$$z_3 = z_4 = \frac{u}{6},$$

$$z_5 = z_6 = \frac{u}{3} - z_1.$$

VIII. *Legea de periodicitate*

Acum vom determina legea de periodicitate a mișcăreĭ. Pentru aceasta, să presupunem că la origina timpului valorile inițiale ale lui z_1 și $\frac{dz_1}{dt}$ sunt nule (s'ar putea asemenea presupune că nu atuncĭ o valóre oare care, și raționamentul ce va urma va fi acelașĭ), și să căutăm după cât timp devin iarăși nule. Valorile inițiale succesive sunt acelea ale lui z_1 și $\frac{dz_1}{dt}$ la trecerea primei osii pe rosturi.

Pentru a avea pe z_1 și $\frac{dz_1}{d}$ la începutul celei d'a doua șine, trebue să facem în ecuațiunea (14 ter): $t+2t_1 = \tau$. Vom pune:

$$z_{01} = x, \quad \text{și:} \frac{z'_{01}}{m} = y.$$

Pentru a avea valorile inițiale z_{02} și z'_{02} la începutul celeĭ d'a treia șine, n'avem de cît să adăogăm la valorile precedente, z_{01} și z'_{01}, pe acelea ce obținem făcînd $t = \tau$ în termenul complimentar:

$$\frac{z'_{01}}{m} \sin mt + z_{01} \cos mt = y \sin mt + x \cos mt,$$

și în derivata sa. Să punem $m\tau = \alpha$.

Avem:

$$z_{02} = x + y \sin \alpha + x \cos \alpha,$$

$$\frac{z'_{02}}{m} = y + y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Valorile inițiale z'_{03} și z_{03}, la începutul celei d'a patra șine, se obțin adăogînd lui x și y rezultatele înlocuirei lui t cu τ în termenul complimentar:

$$\frac{z'_{02}}{m} \sin mt + z_{02} \cos mt,$$

și în derivata sa.

Insă înlocuind $\frac{z'_{02}}{m}$ și z_{02} prin valorile lor în funcție de x și y, avem:

$$z_{03}=x+(y+y\cos\alpha-x\sin\alpha)\sin\alpha+(x+y\sin\alpha+x\cos\alpha)\sin\alpha,$$

$$\frac{z'_{03}}{m}=y+(y+y\cos\alpha-x\sin\alpha)\cos\alpha-(x+y\sin\alpha+x\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Legea formării valorilor succesive ale luĭ $\frac{z'_{04}}{m}$, z'_{04}, $\frac{z'_{05}}{m}$, z'_{05}, etc., apare evidentă.

Pentru a scrie termenul general vom transforma expresiunile obținute. E lesne de vădut că z_{03} se póte scrie:

$$z_{03}=x(1+\cos\alpha+\cos2\alpha), \\ +y(\sin\alpha+\sin2\alpha),$$

și $\frac{z'_{03}}{m}$:

$$\frac{z'_{03}}{m}=y(1+\cos\alpha+\cos2\alpha), \\ -x(\sin\alpha+\sin2\alpha).$$

Obținem asemenea pentru z_{04} și $\frac{z'_{04}}{m}$:

$$z_{04}=x(1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha) \\ +y(\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha),$$

$$\frac{z'_{04}}{m}=y(1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha) \\ -x(\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha).$$

Acum termenii generali sunt evidenți:

$$z_{on}=[1+\cos\alpha+\cos2\alpha+.....+\cos(n-1)\alpha] \\ +y[\sin\alpha+\sin2\alpha+......+\sin(n-1)\alpha],$$

$$\frac{z'_{on}}{m}=y[1+\cos\alpha+\cos2\alpha+.....+\cos(n-1)\alpha]. \\ -x[\sin\alpha+\sin2\alpha+.....+\sin(n-1)\alpha.$$

Avem sume de sinusuri și cosinusuri de arce în progresiune eritmetică. Se pot dar simplifica expresiunile de mai sus servindu-ne de formulele cunoscute:

$$S_1=\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+.....+\sin(n-1)\alpha \\ =\frac{\sin(n-1)\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$S_2=1+\cos\alpha+\cos2\alpha+......+\cos(n-1)\alpha \\ =\frac{\cos(n-1)\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Și obținem:

$$z_{on}=x\frac{\cos(n-1)\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+y\frac{\sin(n-1)\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{n\alpha}{2}}\left[x\cos(n-1)\frac{\alpha}{2}+y\sin(n-1)\frac{\alpha}{2}\right],$$

$$\frac{z'_{on}}{m}=y\frac{\cos(n-1)\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-x\frac{\sin(n-1)\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[y\cos(n-1)\frac{\alpha}{2}x\sin(n-1)\frac{\alpha}{2}\right].$$

E de notat că aceste formule nu sunt valabile de cât dacă $\sin\frac{\alpha}{2}$ este diferit de zero.

In casul contrariu, examinarea seriei inițiale arată că avem:

$$Z_{on}=nx, \qquad \frac{Z_{on}}{m}=ny.$$

Aceste valori cresc deci indefinit cu n, adică cu timpul.

Vom avea, după cum s'a spus mai sus, perioada mișcărei, dacă găsim un numĕr întreg n astfei ca Z_{on} și Z'_{on} să se anuleze în acelaș timp. Se recunoasce îndată că e imposibil de a anula simultaneu termenii din parentez. Insă Z_{on} și Z'_{on} va fi nulă dacă facem:

$$\sin\frac{n\alpha}{\pi}=0$$

sau:

$$(14)\ \frac{n\alpha}{2}=q\pi,$$

q fiind un numĕr întreg oare-care.

Am pus mai sus: $\alpha=m\tau=\frac{ml}{V}$, l fiind lungimea șinei și V iuțeala în metri pe secundă.

Problema periodicităței oscilațiunilor revine deci la resolvare în numere întregi a ecuațiunei nedeterminate:

$$\frac{nml}{V}\ 2q\pi,\ \text{saŭ:}\ \frac{\pi}{q}=\frac{2\pi V}{ml}.$$

Pentru a găsi pe n și q, n'avem de cât să convertim cantitatea $\frac{2\pi V}{ml}$ într'o fracțiune nereductibilă, al cărei numĕrător va fi valoarea lui n. Perioada mișcării este timpul întrebuințat a percurge n șine și e, prin urmare, egală cu $\frac{nl}{V}=q\frac{2\pi}{m}$, adică egală cu un multiplu întreg al perioadei de oscilațiune proprie a arcurilor.

Se poate resolva grafic ecuațiuațiunea (15). Nu avem de cât să luăm pe un cerc (fig. 5), plecând din origina O, arcul $\frac{\alpha}{2}=OA$, apoi acelaș arc

$AA = \frac{\alpha}{2}$ plecând din A, și să continuăm înscrierea poligonului regulat avênd drept latură OA, până ce unul din vîrfurile acestui poligon va coincida sau cu punctul O sau cu punctul O'.

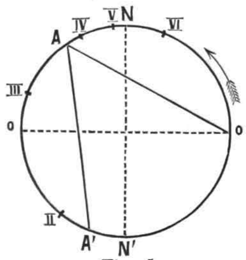


Fig. 5.

Vom avea atunci, dacă n este numĕrul laturilor, $\frac{n\alpha}{2} = q\,\pi$. Operațiunea se face foarte lesne și foarte repede cu ajutorul compasului. Ea presintă, după cum vom vedea mai tirḑiu, avantage particulare pentru studiul amplitudinei oscilațiunilor.

Exemple de determinarea perioḑeĭ. Să punem: $l = 5^{m},50$ și să presupunem că avem: $\sqrt{\frac{9}{PK}} = 6\pi$, cea cea, pentru o încurcare a arcurilor de 5 tone, corespunde la un coeficient de flexibilitate K, ceva mai mic ca 0,006. Aceasta este valoarea obicinuită a flexibilitățeĭ arcurilor de locomotive. Perioada oscilațiunilor propii ale arcurilor este:

$$T_m = \frac{2\pi}{m} = \frac{1}{3} \text{ din secundă.}$$

Pentru această valoare de m, avem :

$$\frac{n}{q} = \frac{2\pi V}{ml} = \frac{V}{3l} = \frac{V}{3\times5{,}5} = \frac{V}{16{,}5}.$$

Să considerăm iuțeală de la una până la șase învêrtiturĭ pe secundă carĭ, cu roțĭ motrice de 2 metri de diametru, dau pentru V numerile următoare:

6^{m},2822—12,5664—18,85—25,13—31,41—37,699,

sau în kilometri pe oră :

22^{km},619—45,237—67,86—90,46—113,095—135,72

Pentru o iuțeală de o învêrtitură pe secundă, avem:

$$\frac{n}{q} = \frac{6{,}2832}{16{,}5} = 0{,}3808.$$

Această fracțiune nu diferă de $\frac{8}{21} = 0{,}380952$ de cât cu o cantitate maĭ mică de cât 0,0002. Prin urmare, putem pune: $\frac{n}{q} = \frac{8}{21}$, n=8 șine și perioada este de $\frac{8l}{V} = 7''{,}0028$ sau simplu șapte secunde

Pentru iuțeala de două învêrtiturĭ pe secundă, avem:

$$\frac{n}{q} = \frac{2\times6{,}2832}{16{,}5} = \frac{16}{21};$$

decĭ n=16 șine. Numĕrul șinelor s'a îndoit, însă pentru că timpul întrebuințat pentru a percurge o șină s'a micșorat de jumătate, perioada este tot de șapte secunde. Se vede ușor că, pe cât timp numĕrul învârtiturilor n'are divizor comun cu 21, perioada are aceașĭ durată sau o durată maĭ mare, în casul când numĕrul de învêrtiturĭ este fracționar.

De exemplu, când vitesa este de trei învêrtituri, avem :

$$\frac{n}{q} = \frac{388}{21} = \frac{8}{7},$$

de unde: n=8. Perioada este atunci de: $\frac{7''}{3} = 2''\frac{33}{100}$.

Pentru o vitesă de trei învêrtituri și jumĕtate, avem :

$$\frac{n}{q} = \frac{3{,}5\times8}{21} = \frac{4}{3},$$

n=4, și perioada e de $1''\frac{165}{1.000}$.

Presupunem încă că șinele ar avea 8 metri lungime. Avem, pentru iuțeala de o învêrtitură pe secundă:

$$\frac{n}{q} = \frac{V}{3l} = \frac{6{,}2832}{24} = 0{,}2618.$$

Insă: $\frac{6}{23} = 0{,}26807$. Fracțiunea nereductivilă $\frac{6}{23}$ nu diferă de $\frac{n}{q}$ de cât cu 0,00093. Deci n=6 și perioada este de V_2'o $7''\frac{65}{100}$.

Examinarea metoadei grafice ne va conduce asemenea, la resultate interesante privitoare la perioade.

Valorile luĭ $\frac{2}{\alpha} = \frac{m\tau}{2}$, pentru vitese de două, trei, patru, cinci și șease invîrtituri pe secundă sunt:

$$\pi + 56^{0}30' - \frac{\pi}{2} + 67^{0}30' - \frac{\pi}{2} + 28 - \frac{\pi}{2} + 430 - 79^{0}.$$

Luând aceste unghiuri pe un cerc de la origina O în sensul săgeței (fig. 5) obținem puntele II, III, IV, V, VI.

Pentru o vitesă absolut oare-care coprinsă între două și șease invîrtituri, puntul representativ al luĭ $\frac{\alpha}{2}$ se aflâ între puntele II și VI. Reciproc, ori-ce punt situat între II și VI corespunde la o vitesă oare-care. Dar, căutarea numĕrului de șine ale perioadei revine la înscrierea unui poligon regulat a căruĭ latură este córda arculuĭ $\frac{\pi}{2}$. Acest arc putênd să aibă tóte valorile posibile, numĕrul n de laturi ale poligónelor înscrise poate varia de la 1 la infinit.

De exemplu $n=1$ pentru $\frac{m\tau}{2}=\pi$, de unde: $V=16^{m},5$ ($59^{km},4$ pe oră). E de observat că, în acest cas, perioada $\frac{2\pi}{m}$ a oscilațiunilor proprii ale arcurilor este egală cu perioada $\tau=\frac{1}{V}$ a funcțiunei ce represintă curba formată de cale. Mișcarea nu mai e atunci periodică, ci o funcțiune de timp indefinit crescândă.

Daca, teoreticesce, perióda poate avea o valoare oare-care, în practică, când n este mare, există tot-d'auna sub-perioada aproximativă, și numai acestea sunt interesante de considerat.

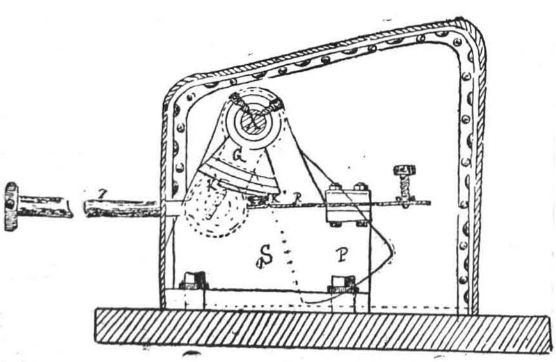
(Va urma)

CONTROLOR ELECTRIC PENTRU ACELE LINIILOR FERATTE MANEVRATE DE LA DISTANȚA

Manevra acelor de la distanță presintă două inconveniente care ar putea să devie o cauză de serióse pericole, dacă nu s'ar lua precauțiuni pentru înlăturarea lor.

Unul dintre acesre inconveniente este nesiguranța în care se găsește *acarul* despre poziția ocupată de schimbarea liniei; în adevĕr, este posibil, ca acele să fie dirigeate către una saŭ către alta din două linii, saŭ chiar ca ele să ocupe o poziție intermediară, fără ca acaru să fie prevenit. Al 2-lea inconvenient provine de la distanța, de la care se efectuază manevra. In adevĕr, este periculos ca acarul să opereze această manevră când un tren circulând de la vêrful acului s'a angajat pe aparat, în cazul acesta o deraiare este inevitabilă.

Aceste inconveniente se corigează într'und mod foarte convenabil prin diferite combinații de aparate mecanice precum: *facing-poiut-lock*, de D-nii *Saxby* și *Farmer*, *ruleta* de sistem *Siemens*, aparatele luĭ *Williams* și *Büssing* și înfine aparatul sistem *Hohenegger*.



(Fig. 1).
Controlor sistem Chaperon.

Electricitatea, care tinde astă-ḑĭ să se generalizeze în exploatația căilor ferate, se poate aplica și pentru controlarea acelor manevrate de la distanță. Controlorul sistem *Chaperon*, se compune dintr'un sector isolant (G) purtând o piesă metalică (K'K'') (fig. 1) de care se freacă simultaneu două resorturĭ (R), în comunicație unul cu pământu, iar altul cu o pilă-electrică și cu soneria. In stare de repaos, cele două resorturĭ nu ating piesa metalică, și prin urmare circuitul este deschis iar când raiul mobil este aplicat de raiul fix, cu alte cuvinte, când schimbarea liniei s'a efectuat, raiul mobil împinge o tige (T) care transmite mișcarea sa prin ajutorul unei manivele, asupra arborelui horizontal (X) care conține piesa (G), și cu modul acesta circuitul va fi închis, iar soneria va funcționa anunțând că schimbarea liniei este bine făcută.

Când acul este readus în poziția sa primitivă, o greutate (P) fixată de arborele (X) 'l face să se 'nvârtească în sens invers, și circuitul este întrerupt.

Controlorul *Lartigue* consistă într'o cutie de ebonită care se învârtește împrejurul unei axe horizontale, și care este împărțită în două compartimente comunicând printr'un mic orificiu (fig. 2), a se vedea în pag. alăturată.

In compartimentu (A) opus axei de rotațiune există două fire de platină terminând un circuit electric care conține o sonerie, cutia de ebonită conține mercur. Când aparatul este horizontal,