DESPRE COMPENSĂRI LA INCHIDEREA POLIGOANELOR IN MĂSURĂRI MICI

DE

VINZENZ BARCZEWSKI

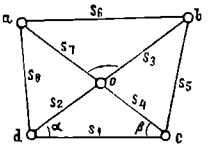
Se știe că toate resultatele din cadastru nu sunt exprimate în cifre și numai ca mărimi geometrice. Așa că pot resulta neajunsuri daca căutăm să ne procurăm numai pe cartă adevěratele lungimi ale locului pe care vrem să zidim, cari, adesea-ori, nu coincid cu adevěratele lungimi ale liniilor de pe câmp și cu acelea admise în proiect. Tot asemenea se întîmplă și cu valorile tot crescênde ale terenurilor și ale proectelor lor de parcelare în orașe, unde proprietarul și cumpărătorul se privesc cu neîncredere când e vorba despre mărimea suprafeței de parcelare, în casul când suprafața de împărțit trebue să coincidă cu suprafața dată de protocolul de parcele al cadastrului.

In toate aceste casuri se pretinde de la geometru o revisiune strictă a lucrărei dând, independent de cadastru, datele cele mai exacte asupra mărimei liniilor și a suprafețelor. E incontestabil că aceasta nu se poate face de cât prin măsurări repetate a tuturor liniilor, apoi prin măsurări de control și în cele din urmă prin deducerea valorilor celor mai mici patrate, de aceea vom trece îndată la resolvarea unor cestiuni ce se presintă mai des în practică, fără a mai discuta necesitatea acestei metoade și la operațiuni geodegice de un rang mai inferior.

In toate cestiunile ce urmează vom represinta prin:

s = adevěrata valoare a mărimei căutate.
s = valoarea observată a mărimei căutate.
$s + ds$ = valoarea cea mai apropiată a mărimei căutate.
p = greutăți obținute prin observațiuni.

1. Problemă.



(Fig. 1).

In patrulaterul de față s'au măsurat nu numai cele patru laturi, ci și ambele diagonale ce se intersectează în o, și s'a obținut:

$s_1 = 86{,}80^m$ cu greut. $p_1 = 1{,}15$,
$s_2 = 56{,}88^m$ » » $p_2 = 1{,}86$,
$s_3 = 77{,}30^m$ cu greutatea $p_3 = 1{,}29$,
$s_4 = 54{,}20^m$ » » $p_4 = 1{,}85$,
$s_5 = 84{,}37^m$ » » $p_5 = 1{,}18$,
$s_6 = 113{,}00^m$ » » $p_6 = 0{,}88$,
$s_7 = 66{,}95^m$ » » $p_7 = 1{,}49$,
$s_8 = 77{,}73^m$ » » $p_8 = 1{,}29$.

In această problemă sunt trei observațiuni mai mult așa că trebue să stabilim trei ecuațiuni de condițiune, și anume așa ex.:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{S_1^2 + S_2^2 - S_4^2}{2\,S_1\,S_2} = \frac{S_1^2 + (S_2 + S_3)^2 - S_5^2}{2\,S_1\,(S_2 + S_3)} \\
\cos\beta &= \frac{S_1^2 + S_4^2 - S_2^2}{2\,S_1\,S_4} = \frac{S_1^2 + (S_4 + S_7)^2 - S_8^2}{2\,S_1\,(S_4 + S_7)} \\
\cos\gamma &= \frac{S_3^2 + S_7^2 - S_6^2}{2\,S_3\,S_7} = \frac{S_2^2 + S_4^2 - S_1^2}{2\,S_2\,S_4}
\end{aligned}\right\} \ldots 1).$$

Dacă în aceste ecuațiuni înlocuim valorile adevěrate $S_1, S_2 \ldots S_8$ cu valorile $s_1, s_2 \ldots s_8$ obținute din observațiuni, aceste ecuațiuni nu vor mai fi satisfăcute, ci vom obține o valoare δ, daca, pentru a nu avea fracțiuni, le vom pune sub forma:

$$\left.\begin{aligned}
s_2\,(s_5^2 - s_3^2 - s_4^2) + s_3\,(s_1^2 - s_2^2 - s_4^2) &= \delta_1 \\
s_7\,(s_1^2 - s_2^2 - s_4^2) + s_4\,(s_3^2 - s_2^2 - s_7^2) &= \delta_2 \\
s_3\,s_7\,(s_2^2 + s_4^2 - s_1^2) - s_2\,s_4\,(s_7^2 + s_3^2 - s_5^2) &= \delta_3
\end{aligned}\right\} \ldots 2).$$

Cu toate acestea ecuațiunile (2) vor fi satisfăcute, adică vom obține in membrul al doilea zero

în loc de δ, daca vom rectifica resultatele s, obținute din observațiuni, cu valoarea ds, așa că vom obține:

$$\left.\begin{aligned}
&s_2(s_5^2-s_3^2-s_4^2)+s_3(s_1^2-s_2^2-s_4^2)+2s_1s_3\,ds_1\\
&+(s_5^2-s_3^2-s_4^2-2s_2s_3)\,ds_2+(s_1^2-s_2^2-s_4^2-2s_2s_3)\,ds_3\\
&-2s_4(s_2+s_3)\,ds_4+2s_2s_5\,ds_5 &&=0\\
&s_7(s_1^2-s_2^2-s_4^2)+s_4(s_8^2-s_2^2-s_7^2)+2s_1s_7\,ds_1\\
&-2s^2(s_4+s_7)\,ds_2+(s_8^2-s_2^2-s_7^2-2s_4s_7)\,ds_4\\
&+(s_1^2-s_2^2-s_4^2-2s_4s_7)\,ds_7+2s_4s_8\,ds_8 &&=0\\
&s_3s_7(s_2^2+s_4^2-s_1^2)-s_2s_4(s_7^2+s_3^2-s_6^2)-2s_1s_3s_7\,ds_1\\
&+[2s_2s_3s_7-s_4(s_7^2+s_3^2-s_6^2)]\,ds_2\\
&+[s_7(s_2^2+s_4^2-s_1^2)-2s_2s_3s_4]\,ds_3\\
&+[2s_3s_4s_7-s_2(s_7^2+s_3^2-s_6^2)]\,ds_4+2s_2s_4s_6\,ds_6\\
&+[s_3(s_2^2+s_4^2-s_1^2)-2s_2s_4s_7\,ds_7 &&=0
\end{aligned}\right\}\ldots 3).$$

Dacă scădem acum egalitățile 2) din 3), obținem ecuațiunile erorilor în cari δ se află un semn ne schimbat în membrul din stînga.

Pentru presentare scriem aceste ecuațiuni sub forma următoare:

$$\left.\begin{aligned}
&+M_1\,ds_1+M_2\,ds_2+M_3\,ds_3-M_4\,ds_4+M_5\,ds_5+\varepsilon_1 &&=0\\
&+M_6\,ds_3-M_7\,ds_2+M_8\,ds_4+M_9\,ds_5+M_{10}\,ds_8+\varepsilon_2 &&=0\\
&-M_{11}ds_1+M_{12}\,ds_2+M_{13}ds_3+M_{14}ds_4+M_{15}ds_5+M_{16}ds_7+\varepsilon_3 &&=0
\end{aligned}\right\}4)$$

din cari

M_1	$2\,s_1\,s_2$	$+\ 13419.28$
M_2	$-s_5^2-s_3^2-s_4^2-2\,s_2\,s_3$	$-\ 10588.18$
M_3	$-s_1^2-s_2^2-s_4^2-2\,s_2\,s_3$	$-\ 7432.38$
M_4	$2\,s_4\,(s_2+s_3)$	$+\ 14545.11$
M_5	$2\,s_2\,s_5$	$+\ 9597.93$
M_6	$2\,s_1\,s_7$	$+\ 11622.52$
M_7	$2\,s_2\,(s_7+s_4)$	$+\ 13782.02$
M_8	$s_8^2-s_2^2-s_7^2-2\,s_4\,s_7$	$-\ 8933.06$
M_9	$s_1^2-s_2^2-s_4^2-2\,s_4\,s_7$	$-\ 5896.11$
M_{10}	$2\,s_4\,s_8$	$+\ 8425.93$
M_{11}	$2\,s_1\,s_3\,s_7$	$+\ 898420.80$
M_{12}	$2\,s_2s_3s_7-s_4(s_7^2+s_3^2-s_6^2)$	$+\ 714013.02$
M_{13}	$s_7(s_2^2+s_4^2-s_1^2)-2s_2s_3s_4$	$-\ 567752.46$
M_{14}	$2\,s_4s_3s_7-s_2(s_7^2+s_3^2-s_6^2)$	$+\ 692468.33$
M_{15}	$2\,s_2\,s_4\,s_6$	$+\ 696734.60$
M_{16}	$s_3(s_2^2+s_4^2-s_1^2)-2\,s_2s_4s_7$	$-\ 518025.61$

Corecțiunile ds cari represintă în același timp și valorile cele mai apropiate ale erorilor de observațiune, trebuesc ast-fel determinate ca, suma patratelor lor multiplicate cu valorile corespundętoare ale greutăților p, să fie un minimum. Fie Sq această sumă vom avea:

$$(pds^2)=p_1\,ds_1^2+p_2\,ds_2^2+p_3\,ds_3^2+p_4\,ds_4^2+p_5\,ds_5^2+p_6ds_6^2+$$
$$+p_7\,ds_7^2+p_8\,ds_8^2=Sq=\text{minimum}.$$

Pentru a obține aceasta, multiplicăm mai întâi ecuațiunile 3) cu coeficientul nedeterminat $-K$, și adunăm apoi cu ecuațiunea de condițiune pentru minimum de mai sus, și avem:

$$\begin{aligned}
Sq=&\,p_1ds_2^1+(-K_1M_1-K_2M_6+K_3M_{11})ds_1-K_1\delta_1\\
&+p_2ds_2^2+(-K_1M_2+K_2M_7-K_3M_{12})ds_2-K_2\delta_2\\
&+p_3ds_3^2+(-K_1M_3-K_2M_8-K_3M_{13})ds_3-K_3\delta_3\\
&+p_4ds_4^2+(+K_1M_4-K_2M_8-K_3M_{14})ds_4+p_5ds_5^2+(K_5M_5)ds_5\\
=&\,p_6ds_6^2+(-K_3M_{15})ds_6+p_7ds_7^2+(-K_2M_9-K_3M_{16})ds_7+\\
&+p_8ds_8^2+(-K_2M_{10})ds_8,
\end{aligned}$$

Sq trebue diferențiat în raport cu fie-care ds și diferențiala egalată cu zero.

Diferențialele sunt dar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dSq}{dds_1}&=2p_1ds_1-K_1M_1-K_2M_6+K_3M_{11}\\
\frac{dSq}{dds_2}&=2p_2ds_2-K_1M_2+K_2M_7-K_3M_{12}\\
\frac{dSq}{dds_3}&=2p_3ds_3-K_1M_3-K_3M_8-K_3M_{13}\\
\frac{dSq}{dds_4}&=2p_4ds_4+K_1M_4-K_2M_8-K_3M_{14}\\
\frac{dSq}{dds_5}&=2p_5ds_5-K_1M_5\\
\frac{dSq}{dds_6}&=2p_6ds_6-K_3M_{15}\\
\frac{dSq}{dds_7}&=2p_7ds_7-K_2M_9-K_3M_{16}\\
\frac{dSq}{dds_8}&=2p_8ds_8-K_2M_{10}
\end{aligned}\right\}\ldots 5).$$

Aceste diferențiale trebuesc, după cum s'a spus egalate cu zero, dacă însă le dividem în același timp cu 2p, obținem expresiunile căutate ale corecțiunilor ce trebuesc adăogate la observațiunile s pentru ca patrulaterul cu diagonalele sale să satisfacă la cerințele teoretice. Aceste corecțiuni însă nu 'și obțin adevărata valoare de cât după ce am calculat mai întâi coeficientul K. Pentru aceasta n'avem de cât să introducem expresiunile lui ds din ecuațiunile 5) în ecuațiunile 4 și obținem ast-fel ecuațiunile tipice de mai jos.

Aceste ecuațiuni, ordonate după K sunt:

$$K_1\left(\frac{M_1^2}{p_1}+\frac{M_2^2}{p_2}+\frac{M_4^2}{p_4}+\frac{M_5^2}{p_5}\right)+$$
$$+K_2\left(\frac{M_1M_6}{p_1}-\frac{M_2M_7}{p_2}-\frac{M_4M_8}{p_4}\right)+$$
$$+K_3\left(\frac{M_1M_{11}}{p_1}+\frac{M_2M_{12}}{p_2}+\frac{M_3M_{13}}{p_3}-\frac{M_4M_{14}}{p_4}\right)+2\delta_2=0,$$

$$K_1\left(\frac{M_1M_6}{p_1}-\frac{M_2M_7}{p_2}-\frac{M_4M_8}{p_4}\right)+$$
$$+K_2\left(\frac{M_6^2}{p_1}+\frac{M_7^2}{p_2}+\frac{M_8^2}{p_4}+\frac{M_9^2}{p_7}+\frac{M_{10}^2}{p_8}\right)+$$
$$+K\left(-\frac{M^6M_{11}}{p_1}-\frac{M_7M_{12}}{p_2}+\frac{M^8M_{14}}{p_4}+\frac{M_9M_{16}}{p_7}\right)+2\delta_2=0,$$
$$K_1\left(\frac{M_1M_{11}}{p_1}+\frac{M_2M_{12}}{p_2}+\frac{M_3M_{13}}{p_3}-\frac{M_4M_{14}}{p_4}\right)+$$
$$+K_2\left(\frac{M_6M_{11}}{p_1}-\frac{M_7M_{12}}{p_2}+\frac{M_8M_{14}}{p_4}+\frac{M_9M_{16}}{p_7}\right)+$$
$$+K_3\left(\frac{M_{11}^2}{p_1}+\frac{M_{12}^2}{p_2}+\frac{M_{13}^2}{p_3}+\frac{M_{14}^2}{p_5}+\frac{M_{15}^2}{p_4}+\frac{M_{16}^2}{p_7}\right)+2\delta_3=6$$

sau presentate:

$$K\,A+K_2B+K_3C+2\delta_1=0$$
$$K_1B+K_2D+K_3E+2\delta_2=0$$
$$K_1C+K_2E+K_3F+2\delta_3=0$$

Pe lânga aceasta mai trebuesc calculate și valorile pentru δ și pentru M^2 și M M.

Avem:

$$s_2(s_5^2-s_3^2-s_4^2)=-102073.0427,$$
$$s_3(s_1^2-s_2^2-s_4^2)=+195225.8309,$$
$$s_7(s_1^2-s_2^2-s_4^2)=+91136.7319,$$
$$s_4(s_8^2-s_2^2-s_7^2)=-90822.0728,$$
$$s_3s_7(s_2^2+s_4^2-s_1^2)=-7044869.3744,$$
$$s_2s_4(s_7^2+s_3^2-s_6^2)=-7125828.9361,$$

de unde:

$$\delta_1=+3132.7881,$$
$$\delta_2=+314.6591,$$
$$\delta_3=+80939.5587.$$

De asemenea:

$$\frac{M_1^2}{p_1}=+156588761.49,$$
$$\frac{M_2^2}{p_2}=+63698624.43,$$
$$\frac{M_3^2}{p_3}=+42821944.27,$$
$$\frac{M_4^2}{p_4}=+114356909.77,$$
$$\frac{M_5^2}{p_5}=+78068036.71,$$
$$\frac{M_6^2}{p_1}=+117463453.17,$$
$$\frac{M_7^2}{p_2}=+107922832.69,$$
$$\frac{M_6^2}{p_4}=+43134936.44,$$
$$\frac{M_9^2}{p_7}=+23331654.37,$$
$$\frac{M_{10}^2}{p_8}=+55035914.77,$$
$$\frac{M_{11}^2}{p_1}=+701878197117.62,$$
$$\frac{M_{12}^2}{p_2}=+289667378262.60,$$
$$\frac{M_{13}^2}{p_3}=+249878177097.31,$$
$$\frac{M_{14}^2}{p_4}=+259195886380.44,$$
$$\frac{M_{15}^2}{p_6}=+551635179450.80,$$
$$\frac{M_{16}^2}{p_7}=+180101025267.70,$$
$$\frac{M_1M_6}{p_1}=+135622478.42,$$
$$\frac{M_2M_7}{p_2}=+82912821.61,$$
$$\frac{M_3M_{13}}{p_3}=+327112662.44,$$
$$\frac{M_4M_{14}}{p_4}=+5444340245.47,$$
$$\frac{M_6M_{11}}{p_1}=+9089924930.37,$$
$$\frac{M_7M_{12}}{p_2}=+5591118471.82,$$
$$\frac{M_4M_{14}}{p_4}=-3343710234.22,$$
$$\frac{M_9M_{16}}{p_7}=+2049891429.79,$$

din aceste valori obținem:

$$A=+455534276.67,$$
$$B=+288768498.07,$$
$$C=-1695234206 3.95,$$
$$D=+346888791.44,$$
$$E=+1597496220 6.62,$$
$$F=+2232355844576.47,$$

așa că putem forma imediat ecuațiunile tipice. Vom divide prima ecuațiune tipică cu A, a doua cu B și a treia cu C:

$$+K_1+0.63391167K_2-37.21419645K_3+0.000013842=0,$$
$$+K_1+1.20724956K_2-55.32100000K_3+0.000002170=0,$$
$$-K_1-0.94234553K_2+131.68521426K_3+0.000000955 1=0.$$

Eliminând pe K_1 și făcând și reducerile posibile obținem:

$$+K_2-31.914923K_3-0.000020556=0,$$
$$-K_2+306.209875K_3+0.000675845,=0,$$

de asemenea:

$$+272.37565K_3+0.000055289 = 0,$$

de unde în fine obținem valorile căutate ale lui K:

$$K_1 = -0.000030319$$
$$K_2 = +0.000014078,$$
$$K_3 = -0.000002029.$$

Prin urmare după 5):

$$ds_1 = \frac{K_1M_1+K_2M_6-K_3M_{11}}{2p_2},$$

$$ds_2 = \frac{K_1M_2-K_2M_7+K_3M_{12}}{2p_2},$$

$$ds_3 = \frac{K_1M_3+K_3M_{13}}{2p_3}$$

$$ds_4 = \frac{L_2M_8-K_1M_4+K_3M_{14}}{2\,p_4},$$

$$ds_5 = \frac{K_1M_5}{2\,p_5},$$

$$ds_6 = \frac{K_3M_{15}}{2\,p_6},$$

$$ds_7 = \frac{K_2M_9+K_3M_{16}}{2\,p_7},$$

$$ds_8 = \frac{K_2M_{10}}{2\,p_8},$$

de unde servindune de valorile calculate ale lui K și M, și de greutățile date p obținem corecțiunile cele mai apropiate precum și valorile cele mai apropiate ale laturilor s+ds:

$ds_1 = -0.0246$; $s_1+ds_1 = 86.773$,
$ds_2 = -0.0054$; $s_2+ds_2 = 36.875$,
$ds_3 = +0.1319$; $s_3+ds_3 = 77.432$,
$ds_4 = +0.0472$; $s_4+ds_4 = 54.247$,
$ds_5 = -0.1233$; $s_5+ds_5 = 84.247$,
$ds_6 = -0.0803$; $s_6+ds_6 = 112.920$,
$ds_7 = +0.0074$; $s_7+ds_7 = 66\,957$,
$ds_8 = +0.0459$; $s_8+ds_8 = 77.776$.

Pentru că această cestiune a fost deja tratată și de Prof. Koll, deși într'o formă cu totul deosebită, și resultatele sale concordă cu resultatele noastre nu ne vom mai ocupa de calculele de control ce sunt neapărat trebuincioase pentru asemenea operațiuni și ne vom limita numai a determina eroarea ce resultă din suprimarea ultimelor decimale în valorile de corecțiune la determinarea suprafeței. E de observat aci numai deosebirea ce există în modul de a determina *compensarea. (Ausgleichung)*, pentru că Prof. Koll calculează mai întâi cordonate foarte apropiate pentru cele cinci puncte ale patrulateruiui și apoi corespunțător la acestea stabilea ecuațiuni de condițiuni, pe când în resolvirea noastră s'au luat valorile de observațiune d'a dreptul ca compensațiani. Nu s'ar putea spune care din aceste metode merită prioritatea în întrebuințare, numai practica ar putea decide. Amândouě 'și au dasavantagiele. Metoda Prof. Koll presintă calcule separate mult mai scurte pe când metoda noastră conține o mulțime de calcule lungi și obositoare, cari însă se pot face ușor fără multă osteneală și fără multă perdere de timp dacă calculatorul dispune de o mașină de calculat.

Calcularea suprafeței. Calculăm după Koll, care pentru valorile finale s+ds obține:

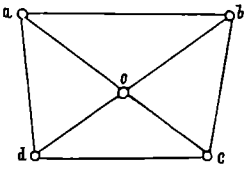


Fig. 2.

$s_1+ds_1 = 87.775$
$s_2+ds_2 = 56.874$
$s_3+ds_3 = 77.433$
$s_4+ds_4 = 54.247$
$s_5+ds_5 = 84.245$
$s_6+ds_6 = 112\,920$
$s_7+ds_7 = 66.657$
$s_8+ds_8 = 77.777$

după formula trigonometrică cunoscută pentru triunghiuri

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

suprafața de trei ori și anume:

1) din cele patru triunghiuri
2) » triunghiurile abd+bcd,
3) » » abd+abc.

de unde se obține

pentru 1) $= 7941.194^{m^2}$
» 2) $= 7941.508^{m^2}$
» 3) $= 7940.874^{m^2}$

cu media aritmetică și eroarea acestei medii:

$$F = 7841.222 \pm 0.164^{m^2}$$

pe când întrebuințându-se resultatele noastre se obține:

pentru 1) $= 7940.910^{m^2}$
» 2) $= 7941.402^{m^2}$
» 3) $= 7931.398^{m^2}$

cu media aritmetică și eroarea sa:

$$F = 7941.255 \pm 0.165^{m^2}$$

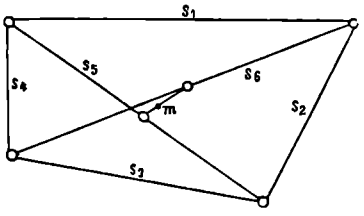
Pentru că, după cum a arătat deja prof. Jardon, se ivesc cu atât mai multe greutăți la întrebuințarea metodei celor mai mici pătrate cu cât ne coborîm de la operațiuni de la un ordin mai înalt la altele de un ordin mai jos, vom căuta alte metoade care să ne simplifice lucrarea cât va fi cu

putință. Aceasta se poate obține dacă pe câmp mijlocurile diagonalelor patrulaterului și se măsoară dreaptă ce unește aceste două puncte, de unde resultă relațiunea simplă. In ori-ce patrulater suma pătratelor celor patru laturi e egală cu suma pătratelor diagonalelor mărită cu de patru ori pătratul distanței mijlocurilor diagonalelor. Sau algebricește pentru aceasta a

2. Problemă:

$$S_5^2+S_6^2-(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)+4M^2-o,$$

în care resultatele observațiunei sunt date mai jos cu greutățile:



(Fig. 3).

$s_1 = 109.80$ $p_1 = 0.8$
$s_2 = 63.30$ $p_2 = 1.5$
$s_3 = 80.09$ $p_3 = 1.4$
$s_4 = 40.75$ $p_4 = 1.0$
$s_5 = 96.12$ $p_5 = 1.2$
$s_6 = 116.60$ $p_6 = 1.0$
$m = 17.21$ $p_m = 3.8$

De oare-ce mersul e analog cu cel de sus putem expune lucrurile mai pe scurt.

Obținem dar, introducênd valorile observațiunei în ecuațiunea de mai sus, expresiunea:

$$s_3^2+s_6^2-(s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2)+4m^2=\delta \ldots 2),$$

care va da zero în membrul al doilea daca la valorile s mai adăogăm corecțiunea căutată ds. Săvîrșind aceasta și scăděnd apoi dintr'insa ecuațiunea 2) obținem neglijând puterile mai înalte ale lui ds, ecuațiunea erorei:

$$2s_5\,ds+2s_6\,ds_6-2s_1\,ds_1-2s_2\,ds_2-2s_3\,ds_3-2s_4\,ds_4+8m\,dm+\delta=o \ldots 3).$$

Dacă adăogăm acum la condițiunea de minimum:

$$Sq=p_1\,ds_1^3+\ldots+p_6\,ds_6^2+pm\,dm^2,$$

ecuațiunea erorei multiplicată cu $-2K$ așa ca să obținem:

$$Sq=p_1ds_1^2+p_2ds_2^2+p_3ds_3^2+p_4ds_4^2+p_5ds_5^2+p_6ds_6^2+pm\,dm^2$$
$$-4Ks_5ds_5-4Ks_6ds_6+4Ks_1ds_1+4Ks_2ds_2$$
$$+4Ks_3ds_3+5Ks_4ds_4-16Km\,dm-2K\delta$$

și apoi diferențiem pe Sq în raport cu fie-care ds și cu dm. și egalăm diferențialele cu o, obținem expresiunile corecțiunilor, adică:

$$ds_1=-K\frac{2s_1}{p_1},$$

$$ds_2=-K\frac{2s_2}{p_2},$$

$$ds_3=-K\frac{2s_3}{p_3},$$

$$ds_4=-K\frac{2s_4}{p_4},$$

$$ds_5=+K\frac{2s_5}{p_5},$$

$$ds_6=+K\frac{2s_6}{p_6},$$

$$dm=+K\frac{8m}{pm},$$

și aceste expresiuni substituite în ecuațiunea eroarei 3) dau ecuațiunea tipică:

$$K\left[\left(\frac{4ss}{p}\right)+\frac{64m^2}{pm}\right]+\delta=o.$$

In problema noastră avem:

$$\frac{4s_1^2}{p_1}=4.\frac{12056.04}{0.8}=60280.20,$$
$$\frac{4s_2^2}{p_2}=4.\frac{4006.89}{7.5}=10685.05,$$
$$\frac{4s_3^2}{p_3}=4.\frac{6414.41}{1.4}=18184.02,$$
$$\frac{4s_4^2}{p_4}=4.\frac{1660.56}{2}=3321.12,$$
$$\frac{4s_5^2}{p_5}=4.\frac{9239.05}{1.2}=30796.85,$$
$$\frac{4s_6^2}{p_6}=4.\frac{13595.56}{1.0}=54382.24,$$
$$\frac{64m^2}{pm}=64\frac{296.18}{3.8}=4983.36,$$

de unde ecuațiunea normală:

$$182632.84\,K-118\,55=o$$

și:

$$K=+0.000649.$$

Cu valoarea obținută pentru K obținem și valorile cele mai apropiate ale corecțiunilor și ale laturilor:

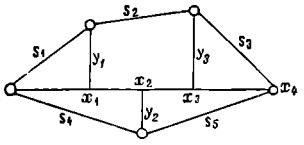
$ds_1=-0.174$	$s_1+ds_1=109.626,$
$ds_2=-0.054$	$s_2+ds_2=63.246,$
$ds_3=-0.074$	$s_3+ds_3=80.016,$
$ds_4=-0.026$	$s_4+ds_4=40.724,$
$ds_5=+0.104$	$s_5=96.224,$
$ds_6=+0.023$	$s_6=116,751.$

Calculele de control necesare pentru această problemă se obțin mai ușor calculând cu ajutorul valorilor corectate ale laturilor, valorile a câte două unghiuri consecutive și suma lor, sau calculând de două ori suprafața patrulaterului din câte două triunghiuri adiacente la diagonală. In exemplu nostru obținem pentru suprafață:

$$1.4630\,545^m,$$
$$2.4630.367^m,$$

prin urmare destul de în acord.

Trecem acum la problema 3-a care e la ordina dilei în practica geometrică.



(Fig. 4).

In pentagonul $s_1 \ldots s_5$ s'au determinat nu numai abscisele și ordonatele dar s'au măsurat, pentru mai multă siguranță, și toate cinci laturi.

S'a obținut ast-fel:

$x_1 = 42.60$	$p_1 = 2.2,$
$x_2 = 63.65$	$p_2 = 3.6,$
$x_3 = 87.60$	$p_3 = 1.8,$
$x_4 = 124.36$	$p_4 = 3.6,$
$y_1 = 30.15$	$p_5 = 2.5,$
$y_2 = 18.20$	$p_6 = 2.0,$
$y_3 = 34.83$	$p_7 = 1.5,$
$s_1 = 52.03$	$p_8 = 2.0,$
$s_2 = 45\,43$	$p_9 = 3.5,$
$s_3 = 50.69$	$p_{10} = 1.6,$
$s_4 = 66.25$	$p_{11} = 0.8,$
$s_5 = 63\,44$	$p_{12} = 1.0.$

Mai avem în același timp ecuațiunea generală:

$$X^2 + Y^2 - S^2 = 0'$$

care însă, prin introducerea resultatelor observațiunei, nu mai dă zero în membrul al doilea, ci S.

Calculele fiind aceleași ca și mai sus, obținem cinci ecuațiuni pentru erori:

$$z_1 dx_1 + y_1 dy_1 - s_1 ds_1 + \frac{\delta_1}{2} = 0 \quad . \quad \text{I)},$$

$$\left.\begin{array}{l}(x_3 - x_1)\,dx_3 + (x - x)dx_1 + (y_3 - y_1)dy + \\ \quad + (y_1 - y_3)dy_3 - s_2 ds_2 + \frac{\delta_2}{2} = 0\end{array}\right\} \quad . \; . \quad \text{II)},$$

$$(x_4 - x_3)dx_4 + (x_3 - x_4)dx_3 + y_3 dy_3 - s_3 ds_3 + \frac{\delta_2}{2} = 0 \quad \text{III)},$$

$$x_2 dx_2 + y_2 dy_2 - s_4 ds_4 + \frac{\delta_4}{2} = 0 \quad . \quad \text{IV)},$$

$$(x_4 - x_2)dx_4 + (x_2 - x_4)dx_2 + y_2 dy_2 - s_5 ds_5 + \frac{\delta_5}{2} = 0 \text{V)}.$$

Deci ecuațiunea pentru minimum ordonată după K, e:

$$(pSg) = p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2 + p_3 dx_3^2 + p_4 dx_4^2 + \\ + p_5 dy_1^2 + p_6 dy_2^2 + p_7 dy_3^2 + \\ + p_8 ds_1^2 + p_9 ds_2^2 + p_{10} ds_3^2 + p_{11} ds_4^2 + p_{12} ds_5^2$$

$$+ K_1 \left\{\begin{array}{l} - 4x_1 dx_1 \\ - 4y_1 dy_1 \\ + 4s_1 ds_1 \\ - 2\delta_1 \end{array}\right\} \quad + K_3 \left\{\begin{array}{l} - 4x_1 dx_1 \\ - 4x_1 dx_1 \\ + 4x^1 dx_3 \\ - 4x_3 dx_3 \\ - 4y_1 dy_1 \\ + 4y_3 dy_1 \\ + 4y_1 dy_3 \\ - 4y_3 dy_3 \\ + 4s_2 ds_2 \\ - 2\delta_2 \end{array}\right\} \quad + K_3 \left\{\begin{array}{l} + 4x_4 dx_2 \\ - 4x_2 dx_3 \\ + 4x_3 dx_4 \\ - 4x_4 dx_4 \\ - 4y_3 dy_3 \\ + 4s_3 ds_3 \\ - 2\delta_3 \end{array}\right\}$$

$$+ K_4 \left\{\begin{array}{l} - 4x_2 dn_2 \\ - 4y_2 dy_2 \\ + 4s_4 ds_4 \\ - 2\delta_4 \end{array}\right\} \quad + K_5 \left\{\begin{array}{l} + 4x_4 dx_2 \\ - 4x_2 dx_2 \\ + 4x_2 dx_4 \\ - 4x_4 dx_4 \\ - 4y_2 dy_2 \\ + 4s_5 ds_5 \\ - 2\delta_5 \end{array}\right\} = \text{minimum.}$$

După aceia diferențiăm și apoi obținem expresiunile pentru corecțiuni:

$$dx_1 = 2\left(K_1 \frac{x_1}{p_1} + K_2 \frac{x_1 - x_3}{p_1}\right),$$

$$dx_2 = 2\left(K_4 \frac{x_2}{p_2} + K_5 \frac{x_2 - x_4}{p_2}\right),$$

$$dx_3 = 2\left(K_2 \frac{x_3 - x_1}{p_3} + K_3 \frac{x_3 - x_4}{p_3}\right),$$

$$dx_4 = 2\left(K_3 \frac{x_4 - x_3}{p_4} + K_5 \frac{x_4 - x_2}{p_4}\right),$$

$$dy_1 = 2\left(K_1 \frac{y_1}{p_5} + K_2 \frac{y_1 - y_3}{p_5}\right),$$

$$dy_2 = 2(K_4 + K_3) \frac{y_2}{p_6},$$

$$dy_3 = 2K_2 \frac{y_3 - y_1}{p_7}$$

$$ds_1 = -2K_1 \frac{s_1}{p_8}$$

$$ds_2 = -2K_2 \frac{s_2}{p_9}$$

$$ds_3 = -2K_3 \frac{s_3}{p_{10}},$$

$$ds_4 = -2K_4 \frac{s_4}{p_{11}},$$

$$ds_5 = -2K_5 \frac{s_5}{p_{12}},$$

pentru cari luăm iarăși valorile absolute obținute prin observațiune, le substituim în ecuațiunile erorilor și obținem următoarele ecuațiuni finale:

$$+2558.1936K_1 - 927.6908K_2 + 2.0370 = 0 \; . \; . \; . \; . \quad \text{I)},$$

$-927.6908K_1+2673.4096K_2-921.0422K_3-1.9931=0$ II),
$-812.3793K_2+2732.0038K_3619.6387K_5-1.2626=0$ III),
$+6942.9353K_4-742.1465K_5-1.62250=0$ . . IV),
$+619.6387K_3-742.1465K_4+6403.4856K_5-1.9224=0$ V),
de unde:

$$K_1=-0.000537,$$
$$K_2=+0.000781,$$
$$K_3=+0.000934,$$
$$K_4=+0.000262,$$
$$K_5=+0.000268,$$

și în fine cu ajutorul acestora obținem corecțiunile dx, dy, ds și valorile cele mai apropiate ale absciselor, ordonatelor și laturilor:

dx_1	$=-0.053$	x_1	$=42{,}447,$
dx_2	$=+0.000$	x_2	$=63.650,$
dx_3	$=-0.004$	x_3	$=87.596,$
dx_4	$=+0.014$	x_4	$=124.374,$
dy_1	$=-0.016$	y_1	$=30.134,$
dy_2	$=+0.009$	y_2	$=18.209,$
dy_3	$=+0.005$	y_3	$=34.835.$
ds_1	$=+0.028$	s_1	$=52.058,$
ds_2	$=-0.020$	s_2	$=45.410,$
ds_3	$=-0.040$	s_3	$=50.650,$
ds_4	$=-0.043$	s_4	$=66.207,$
ds_5	$=-0.034$	s_5	$=63.407,$

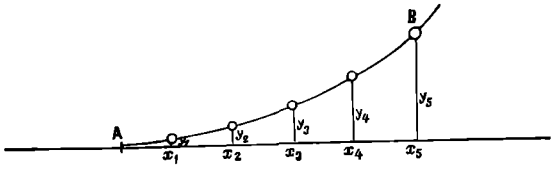


Figura 5.

In fine dăm mai la vale și a cincea problemă care de și nu prea se întrebuințează în practică, însă e dat aci ca exemplu de resolvare și de compensare cu ajutorul observațiunilor. E luată după o problemă cu ecuațiuni liniare din tratatul lui Hagen «Grundzüge der Wahrscheinlichkeilsrechnung».

O șosea părăsită și stricată formează de la începutul arcului A până în B, hotarul între comunele M și N. Unele din puncte au fost luate pe prelungirea liniei drepte prin abscisele și ordonatele x y, valorile observate încă ale lui y nu dau o curbă formată după o lege analitică. Să se găsească posițiunea cea mai probabilă a liniei de limitare.

De oare-ce s'a indicat că, curba a fost stabilită după formula:

$$y=\frac{x^3}{6c}$$

vom forma îndată ecuațiunile erorilor:

$$\delta_1=x_1^3-6y_1c,$$
$$\delta_2=x_2^3-6y_2c,$$
$$\delta_3=x_3^3-6y_3c,$$
$$\delta_4=x_4^3-6y_4c,$$
$$\delta_5=x_5^3-6y_5c,$$

de unde se vede bine, că trebue să se determine numai valoarea cea mai apropiată a constantei C.

Și fiind-că pentru resolvarea acestei probleme avem și ecuațiunea de condițiune pentru minimum

$$\frac{d(\delta\delta)}{dc}=\text{minimum}.$$

Vom forma pătratele ecuațiunilor erorilor:

$$\delta_1^2=x_1^6-12x_1^3y_1c+36y_1^2c^2,$$
$$\delta_2^2=x_2^6-12x_2^3y_2c+36y_2^2c^2,$$
$$\delta_3^2=x_3^6-12x_3^3y_3c+86y_3^2c^2,$$
$$\delta_4^2=x_4^6-12x_4^3y_4c+36y_4^2c^2,$$
$$\delta_5^2=x_5^6-12x_5^3y_5c+36y_5^2c^2,$$

cari adunate și diferențiate apoi în raport cu c, dau condițiunea:

$$\frac{d(\delta\delta)}{dc}=\text{min.}=6c\,(yy)-(yxx)=0,$$

de unde valoarea căutată a constantei c:

$$C=\frac{(yxx)}{6(yy)}.$$

Pentru problema noastră s'a observat :

x_1	$=20.0$	6_1	$=0.08,$
x_2	$=40.0$	7_2	$=0.92,$
x_3	$=60.0$	7_3	$=3.09,$
x_4	$=80.0$	7_4	$=7.02,$
x_5	$=100.0$	7_5	$=13.70,$

Avem prin urmare

$$x_1^3y_1=6400.0,$$
$$x_2^3y_2=58880.0,$$
$$x_3^3y_3=667440.0,$$
$$x_4^3y_4=3594240.0.$$
$$x_5^3y_5=13700000.0,$$
$$(yxx)=18026960.0.$$

De asemenea:

$$y_1^2=0.0064,$$
$$y_2^2=0.8464,$$
$$y_3^2=9.5481,$$
$$y_4^2=49.2804,$$
$$y_5^2=187.6900,$$
$$(yy)=247.3713$$

și $6\,(yy)=1484.2278,$

de unde prin introducerea acestor valori în ecuațiunea tipică obținem:

$$C = 12145.0$$

și prin întrebuințarea acestei valori în

$$y = \frac{x^3}{6c}$$

obținem direct valorile cele mai apropiate ale ordonatelor y, și prin urmare și posițiunea cea mai apropiată a curbei ce formează linia de limitare. Avem dar:

$$y_1 = 0.109,$$
$$y_2 = 0.888,$$
$$y_3 = 2.964,$$
$$y_4 = 7.026,$$
$$y_5 = 13.723.$$

INCĂLDIREA CU PETROL

METODA HOLDEN, ÎNTREBUINȚATĂ LA LOCOMOTIVE IN TUNELUL DIN ARLBERG

De H. TICHY, *Inginer în Innsbruck.*

Tunelul din Arlberg e de 10,4 km. lungime. In direcțiunea de la extremitatea de vest la Langen către extremitatea de est la St. Anton, tunelul se urcă pe o lungime de 6,4 km. cu $15^0/_{00}$, de acolo se înclină cu $2^0/_{00}$.

Tunelul nu are o ventilație specială, gazele fumului merg către est și ies afară prin extremitatea de est care e cu 88^m mai înaltă. Vîntul de Vest favorisează eșirea fumului, gonind repede gazele fumului. Vîntul de est însă impedică eșirea fumului și causează vîrteje de gaz în tunel, în casul acesta se formează barage de fum cari, influențate de circulațiunea trenului, se mișcă când înainte când îndărăt și dacă această stare durează mai mult impedică de a se mai auți și de a se vedea semnalele.

La începutul exploatărei tunelului se încălțeau locomotivele cu cărbnni, însă pentru că oamenii trenului și lucrătorii ocupați în tunel erau foarte incomodați de fumul de cărbune, s'a adoptat numai de cât încălțirea cu cok. Cu aceasta s'a introdus o îmbunătățire în aerul tunelului, însă nici această încălțire n'a satisfăcut pe deplin căci s'au ivit, mai cu seamă la lucrătorii tunelului, boale ușoare cari resultau din inspirațiunea acidului carbonic.

Administrațiunea drumurilor de fer austriace decise după aceea, pentru a abține un aer mai bun, să întrebuințeze pentru încălțirea locomotivelor o substanță lichidă și prin aceasta se dobîndească o combustiune cât se poate de perfectă.

Pentru acest scop se alese încălțirea cu păcură după Holden.

Acest mod de încălțire constă în aceea că substanța lichidă în formă de praf e suflată pe un foc slab de cărbuni întreținut în continuu pe grătar.

Până aci se întrebuință încălțirea cu păcură la locomotivele trenurilor de transport cu *tender de categoria a patra*, avînd următoarele dimensiuni.

Diametrul cilindrului	500^{mm}
Diametrul mecanismului motor . . .	1100 »
Totalitatea greutăți, precum și forța de fie-care	55 t
Suprafața de încălțire a cutiei de fum	$11,2^{mp}$
» » » a tuburilor . .	170,8 »
suprafața de încălțire totală . . .	182,0 »
suprafața grătarului	22,5 »

După cum reiese din fig. 1 până la 3, în spatele căldărei, lângă ușa furnalului sunt două deschidături (fig. 3) prin care pătrund doi *pulverizatori* în cutia de foc *Pulverizatorii* comunică prin tuburi cu un vas cu petrol cu cana ce se află d'indărătul tenderului și care coprinde vr'o 1200 l. (fig. 8, Pl.). Afară de aceasta mai au *pulverizatoarele două robinete de afluență a petrol*, în conductele e (fig. 1 și 2), cari sunt cuplate și regulează afluența păcurei. La căldare se află o cutie de robinete (fig. 3, Pl.), cu patru robinete de vapori. Un robinet a (fig. 1, 2 de mai jos și fig. 3), mijlocește intrarea aburilor în tuburile (țevile de aer) din mijlocul *pulverizatorului* (fig. 1 și 2 de mai jos și fig. 9, Pl.), un al do-