NOTA

Asupra deosebitelor chipuri de a aplica regula trapezului la calculul stabilității baragelor de zidărie.

Regula ipotetică zisă a trapezului, a fost aplicată, după cum se știe, în diferite chipuri:

De D-l inspector general Delocre, la secțiunile orizontale;

De D-l inspector general Bouvier, la secțiunile normale curbei de presiune;

De D-l inspector general Guillemain, acelea din secțiunile eșite din fie-care punct al paramentului din aval, care dă cea mai mare presiune normală în acest punct.

Fie:

$$n'', \quad n''_1, \quad n''_2,$$

presiunile normale respective găsite într'un punct al paramentului aval, după regula aplicărei trapezului, aplicată în unul din chipurile expuse. Vom avea:

$$n''_2 > n''_1 > n''$$

adică că chipul de a procede a D-lui Guillemain va da presiunea cea mai mare n''_2; apoi vine n''_2 obținută prin procedeul D-lui Bouvier; și în sfârșit metoda D-lui Delocre dă presiunea cea mai mică n''.

După aceasta, prudența ar cere întrebuințarea metodei preconizate de cel d'întâiu dintre acești autori, de și este cea mai complicată.

De fapt însă, ea nu dă presiunea maximum și nu are posibilitatea de a'l găsi mai mult de cât procedeurile mai simple ale D-lor Delocre și Bouvier. Presiunea maximum, în adevĕr, are loc pe elementul *normal* paramentului aval. Acesta e un principiu *riguros*, adică independent de legea trapezului, precum și de ori-care altă ipoteză. Am insistat deja asupra acestui fapt capital în comunicațiunea făcută Academiei de Sciințe la 5 August 1895. In această notă voiu stabili această propozițiune, care de altmintrelea este un corolar al teoriei matematice a elasticităței. Voiu arăta în urmă urmările relativ la chipul de a aplica legea trapezului.

Fie: a fig. (1) un punct al paramentului aval al unui dig, ab, un element al suprafeței (presupun, că se consideră o lungime de dig de $1^m.00$) normal la acest parament; și ac, un element oare-care făcênd cu elementul normal un unghiu $cab = i$.

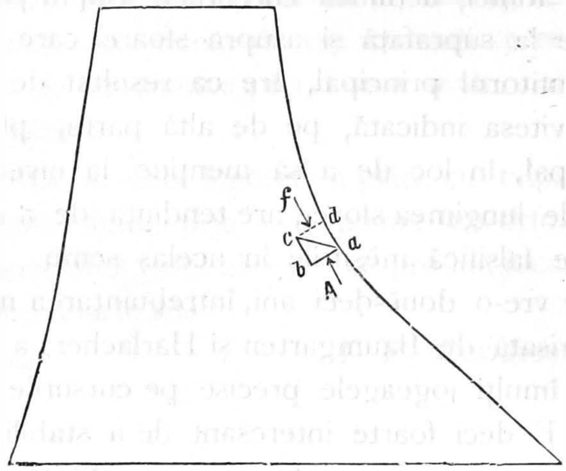


Fig. 1

Să ducem elementul cb paralel cu tangenta la parament în a.

Prismul triunghiular infinitesimal, proectat după secțiunea sa dreaptă acb; este în echilibru sub influența: 1^0 a presiunilor ce suporta pe cele trei fețe ale sale; 2^0 a greutăței sale. Insă, de oare-ce presiunile pe fețele ac și ab sunt de același ordin de mărime ca și aceste fețe, adică infinit mici, de ordinul întêiu, pe când greutatea triunghiului este de ordinul suprafeței sale sau de al doilea ordin, această greutate este riguros negligeabilă. De asemenea și pentru presiunea exercitată pe elementul cb paralel cu această față. Căci dacă completăm dreptunghiul $abcd$, elementul ad pe față suportă o presiune riguros nulă; deci presiunea pe unitatea de suprafață pe elementul cv paralel cu ad este infinit mică, și această presiune inmulțită cu elementul cb este însăși de al doilea ordin. Deci, în definitiv, triunghiul este *riguros* în echilibru sub influența numai a celor două presiuni exercitate pe laturile sale ac și ab. Deci aceste două forțe sunt egale și direct opuse, și, de oare-ce pot fi considerate ca aplicate respectiv la mijlocul acestor laturi, ele sunt dirigeate după dreapta care unesce aceste mijloace, adică că ele sunt paralele cu tangenta în punctul a al paramentului.

Avem ast-fel acest teorem.

Presiunea totală exercitată pe un element oare-care eșit dintr'un punct al paramentului aval a unui baragiu este paralelă cu tangenta la parament în acest punct.

De unde și corolarul:

Presiunea exercitată pe un element normal paramentului aval este normală la acest element.

Fie A presiunea pe unitatea de suprafață exercitată pe elementul *ab* normal pe parament in *a*; și f, presiunea totală pe unitatea de suprafață exercitată pe un element oare-care *ac* făcând unghiul *i* cu elementul normal.

Presiunile exercitate pe aceste două elemente sunt respectiv:

$$A \times ab \quad \text{și} \quad f \times ac$$

și de oare-ce aceste forțe își fac echilibru, avem:

$$f \times ac = A \times ab,$$

de unde:

$$f = A \times \frac{ab}{ac}.$$

Fie f_t și f_n composantele normală și tangențială ale lui f vom avea:

$$(1) \quad f_n = f \cos i = A \cos^2 i,$$

$$(2) \quad f_t = f \sin i = A \sin i, \cos i \; \frac{A}{2} \sin 2\, i.$$

Intâia din aceste expresiuni arată ca maximum lui f_n are loc pentru $i = 0$ și este egal cu A. *Deci elementul normal este acela care suportă presiunea maximum.*

Și dacă printr'un mijloc oare-care (regula trapezului sau alta) s'au găsit presiunea normală f_n exercitată pe un element făcând unghiul *i* cu elementul normal presiunea maximum este:

$$A = \frac{f_n}{\cos^2 i}.$$

Să observăm încă că, după formulă, maximum forței de profesare într'un punct al paramentului oval are loc pentru $i = 45^0$ și este tot-d'a-una egal cu $\frac{A}{2}$, de unde această propozițiune importantă din punctul de vedere al distrugerilor digurilor prin forfecare: *Maximum efortului de forfecare într'un punct al paramentului oval are loc după două direcțiuni inclinate la 45⁰, pe acest parament și are tot-d'a-una, ca valoare absolută, jumătatea efortului maximum de compresiune A.*

Să revenim la acest efort. Fie respectiv:

$$i, \; i_1, \; i_2,$$

unghiurile pe care le formează, cu normala la fața oval într'un punct *a*, secțiunea orizontală (Delocre), secțiunea normală la curba presiunilor (Bouvier) și secțiunea pentru care f_n este maximum (Guillemain). Presiunile in *a*, asupra acestor secțiuni, găsite prin regula trapezului, fiind însemnate respectiv prin:

$$n'', \; n''_1, \; n''_2,$$

presiunea maximum de adoptat este:

Pentru metoda Delocre $\quad A = \frac{n''}{\cos^2 i}.$

Pentru metoda Bouvier $\quad A_1 = \frac{n''_1}{\cos^2 i_1}.$

Pentru metoda Guillemain $\quad A_2 = \frac{n''_2}{\cos^2 i_2}.$

Dar cele trei metode să exclud una pe alta pentru că regula trapezului fiind aplicată la un sistem de secțiuni, presiunile pe toate cele-l'alte secțiuni sunt complect determinate, după cum rezultă din nota mea sus menționată de la 5 August 1895 și nu urmează legei trapezului. Forțele:

$$\frac{n''_2}{\cos^2 i}, \quad \frac{n''_1}{\cos^2 i_1}, \quad \frac{n''}{\cos^2 i_2},$$

nu sunt deci matematicește aceleași. Dar rezultă din calculul numeric pe care l'a făcut D-l inginer șef Denys, pentru cele trei secțiuni Delocre, Bouvier și Guillemain care plecă dintr'un punct al paramentului aval situat la 32 metri de adâncime a digului New-Croton de 73 metri inălțime, construit in America, că aceste trei mărimi nu să deosibesc cu mai mult de 2⁰/₀ din valorile lor.

Să pare deci că rezultă in practică, că cele trei metode sunt echivalente Ar trebui deci a adopta pe cea mai simplă, acea a D-lui Delocre, care consistă în a aplica legea trapezului secțiunilor orizontale. Pe lângă simplicitate ea mai prezintă un avantagiu și mai important încă.

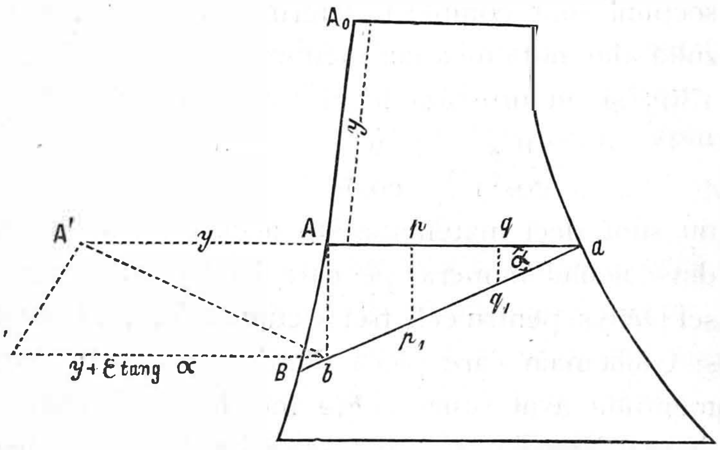
In adevĕr ea să aplică pe toată înălțimea digului, pe cât timp secțiunile înclinate încetează, către partea de jos a digului, de a întâlni paramentul amonte și întilnesc baza digului, cea ce dă nascere la dificultăți și cere nouĕ ipoteze.

După observațiunile ce preced, metoda D-lui inspector general Guillemain perde puțin rațiunea de a fi. Ea consistă în adevĕr în a aplica legea trapezului secțiunei care, în fie-care punct al paramentului oval, dă maximum n''_2 al presiunei normale la această secțiune, pe câtă vreme, cea ce ar trebui determinat, este secțiunea care da maximum A, adică: $\frac{n''_2}{\cos^2 i_2}$. Ast-fel însă s'ar ajunge la rezultate excesive și la secțiuni care s'ar îndepărta prea mult de secțiunile normale la fibra neutră medie, care sunt, singurele cărora principiile resistenței materialelor prescriu a le aplica legea trapezului. Cu ajutorul corectivului indicat în nota de față, să poate aplica și secțiunilor avute în vedere de D-l Bouvier sau de D-l Delocre, și în virtutea considerațiunilor care au fost indicate acestor din urmă secțiuni ea convine a fi aplicată.

Pentru mai multă siguranță să poate face comparația între cele trei metode sau între valorile forțelor n'', n''_1, n''_2 precum și între:

$$\frac{n''}{\cos^2 i}, \quad \frac{n''_2}{\cos^2 i_1}, \quad \frac{n''}{\cos^2 i_2},$$

prin care propun a fi înlocuite.



(Fig. 2)

Să considerăm, pentru aceasta (fig. 2), profilul unui dig, și într'un punct a, să luăm secțiunea orizontală aA și o secțiune oare-care aB făcând cu precedenta un unghiu AaB$=\alpha$.

Chiar când paramentul din amonte nu este exact vertical, se poate, fără mare eroare, înlocui porțiunea AB, coprinsă între cele două secțiuni, prin proecțiunea sa verticală Ab. Ceea ce voiu face. Intr'o aplicațiune particulară ne putem dispensa de această simplificare.

Să aplicăm legea trapezului secțiunei ab pentru a găsi presiunea normală f_n în punctul a al acestei secțiuni. Pentru aceasta o împart în trei părți egale prin punctele p_1, q_1, și împart de asemenea secțiunea orizontală prin punctele p, q.

Presiunea totală exercitată pe ab se compune:

1⁰ Din cea exercitată pe Aa;

2⁰ Din greutatea triunghiului Aab;

3⁰ Din presiunea apei pe porțiunea Ab a paramentului din amonte.

Presiunea totală exercitată pe Aa să poate descompune în două: una verticală, cea-l'altă orizontală.

Cea d'întâiu poate la rândul său să fie descompusă în alte două paralele, aplicate în p și q. Să representăm aceste două composante verticale respectiv prin:

$$\frac{n'\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad \frac{n''\varepsilon}{2}$$

în care s'a făcut pentru prescurtare A$a$$=\varepsilon$.

Atunci n' și n'' sunt presiunile verticale în A și a, pe care le dă aplicațiunea metodei D-lui Delocre. Pot fi deci calculate.

Forța verticală $\frac{n'2}{2}$, aplicată în p, să transmite în p, și după regula trapezului, nu dă presiune normală în a.

Acea $\frac{n'2}{2}$ să transmite în q_1. Compozanta sa normală la ab este:

$$\frac{n''\varepsilon}{2}\cos\alpha.$$

După regula trapezului, această forță dă, în a, îndoit de ceea ce ar da daca ar fi uniform repartizată pe ab Ea va da deci:

$$(3) \qquad \frac{n''\varepsilon\cos\alpha}{ab} = \frac{n''\varepsilon\cos\alpha}{\left(\frac{\varepsilon}{\cos\alpha}\right)} = n''\cos^2\alpha.$$

Or-care ar fi forma paramentului din amonte, forța orizontală sau de forfecare pe aA este:

$$\frac{K_0 y^2}{2}$$

numind K_0 greutatea specifică a apei, și presupunând secțiunea aA la adâncimea y. Această forță poate să fie descompusă în două altele de asemenea orizontale aplicate în p_1 și q_1. Cea d'întâiu nu dă presiune normală în a. A doua este egală cu:

$$K_0 y^2.$$

Ea dă o compozantă normală la ab representată prin:

$$K_0 y^2 \sin\alpha$$

și, în punctul a, o presiune pe unitatea de suprafață.

$$(4) \qquad \frac{2K_0 y^2 \sin\alpha}{ab} = \frac{2K_0 y^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\varepsilon}.$$

Greutatea triunghiului Aab, fiind îndreptată după verticala pp_1, nu dă presiune normală în a. Presiunea apei pe paramentul, Ab inlocuind pe AB aproximativ, este reprezentată printr'un trapez $AA'bb'$, in care:

$$AA' = AA_0 = y \text{ şi } bb' = bA_0 = y + \varepsilon tg\alpha.$$

El poate fi descompus in douĕ triunghiuri prin diagonala $A'b$. Triunghiul $A'bb'$ represintă o forţă orizontală, trecând prin punctul p, şi care nu dă presiune normală in a.

Triunghiul AbA' represintă o forţă orizontală:

$$\frac{K_0 y^2 \varepsilon tg\alpha}{2}$$

care trece prin punctul q_1. Compozanta sa normală a ab este:

$$\frac{K_0 y \varepsilon tg\alpha \sin\alpha}{2}$$

şi dă in a o presiune normală:

$$(5) \qquad \frac{K_0 y \varepsilon tg\alpha \sin\alpha}{\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)} = K_0 y \sin^2\alpha.$$

Reunind expresiunile (3), (4) şi (5), se găsesce, pentru presiunea normală f_n, exercitată in a pe secţiunea ab:

$$f_n = n'' \cos^2\alpha + \frac{2K_0 y^2}{2} \sin\alpha\cos\alpha + K_0 y \sin^2\alpha$$

sau:

$$(6) \qquad f_n = \frac{n + K_0 y}{\varepsilon} + \frac{n'' - K_0 y}{2}\cos 2\alpha + \frac{K_0 y^2}{\varepsilon}\sin 2\alpha$$

Presiunea n''_2, pe care ar da-o metoda D-lui Guillemain, fără a ţine in seamă observaţiunile de mai sus, este maximum lui f_n când se face să varieze α. Acest maximum este:

$$(7) \qquad n''_2 = \frac{n'' + K_0 y}{2} + \sqrt{\left(\frac{n'' + K_0 y}{2}\right)^2 + \frac{K_0{}^2 y^4}{\varepsilon^2}}$$

fie:

$$n''_2 - n'' = -\frac{n'' - K_0 y}{2} + \sqrt{\left(\frac{n'' - K_0 y}{2}\right)^2 + \frac{K_0{}^2 y^4}{\varepsilon^2}}$$

pentru diferinţa intre presiunile obţinute prin metodele D-lor Delocre şi Guillemain, aşa cum sunt aplicate.

Inclinaţiunea α_2 a secţiunei ab, dată prin metoda D-lui Guillemain, se obţine anulând derivata lui f_n in raport cu α. De unde:

$$-\frac{n'' - K_0 y}{2}\sin 2\alpha_2 + \frac{K_0 y^2}{2}\cos 2\alpha_2 = 0$$

sau:

$$(8) \qquad tg 2\alpha_2 = \frac{2K_0 y^2}{\varepsilon(n'' - K_0 y)}.$$

Fie i unghiul fructului paramentului aval in a. Presiunile maximum date respectiv prin metodele Delocre şi Guillemain, modificate cum s'a zis în această notă, sunt respectiv:

$$(9) \qquad A = \frac{n''}{\cos^2 i} \text{ şi } A_2 = \frac{n''_2}{\cos^2(i - \alpha_2)}$$

formulele (7) şi (8) permit a compara metodele ast-fel aplicate.

Să căutăm asemenea expresiunea presiunei maximum n''; dată de metoda D-lui Bouvier, pentru a o compara cu cele-l'alte douĕ.

Pentru aceasta, trebue a căuta forţa totală de forfecare pe secţiunea ab (fig. 2), metoda D-luĭ Bouvier revenind la alegerea, printre secţiunile ab, acea pentru care această forţă de forfecare e nulă.

Presiunea verticală pe secţiunea Aa este:

$$\frac{n' + n''}{2}\varepsilon.$$

Greutatea triunghiului aAb este:

$$\frac{k\varepsilon^2}{2} tg\alpha.$$

Numind k greutatea specifică a zidăriei. Forţa verticală pe ab este deci:

$$\frac{n' + n''}{2}\varepsilon + \frac{k\varepsilon^2}{2} tg\alpha,$$

compozanta sa tangenţială socotită pozitiv de la b spre a este:

$$-\left[\frac{n' + n''}{2}\varepsilon + \frac{k\varepsilon_2}{2} tg\alpha\right]\sin\alpha.$$

Forţa de forfecare pe Aa este:

$$\frac{k_0 y^2}{2}.$$

Presiunea apei pe A şi Ab este:

$$k_0\left[y + \frac{\varepsilon tg\alpha}{2}\right]\varepsilon tg\alpha.$$

Cea ce dă o forţă totală orizontală:

$$\frac{k_0}{2}[y^2 + 2y\varepsilon tg\alpha + \varepsilon^2 tg^2\alpha].$$

sau:

$$\frac{k_0}{2}[y + \varepsilon tg\alpha]^2.$$

Compozanta sa după ba este:

$$\frac{k_0}{2}[y + \varepsilon tg\alpha]^2 \cos\alpha$$

Forţa de forfecare totală este deci:

$$-\left[\frac{n' + n''}{2}\varepsilon + \frac{k\varepsilon^2}{2} tg\alpha\right]\sin\alpha + \frac{k_0}{2}[y + \varepsilon tg\alpha]^2\cos\alpha$$

Formula trebue anulată pentru a avea inclinarea $\alpha = \alpha_1$ a secțiunei de considerat după D-l Bouvier. Vom avea deci:

$$-k_0 (y + \varepsilon \mathrm{tg}\alpha)^2 + [(n' + n'') \varepsilon + k \varepsilon^2 \mathrm{tg}\alpha] \mathrm{tg}\alpha_1 = 0,$$

sau:

$$(k - k_0) \varepsilon^2 \mathrm{tg}^2 a + (n' + n'') - 2k_0 y) \varepsilon \mathrm{tg} a - k_0 y^2 = 0.$$

De unde ne luând de cât rădăcina pozitivă:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{k_0 y - \frac{n' + n''}{2} + \sqrt{k k_0 y^2 - k_0 y (n' + n'') + \left(\frac{n' + n''}{2}\right)^2}}{\varepsilon (k - k_0)}$$

valoarea $\mathrm{tg}\alpha_1$ fiind ast-fel găsită, ecuațiunea (6), sau acea ce precede, dă pentru presiunea maximum n''_1 dată de metoda D-lui Bouvier:

$$n''_1 = \frac{n'' = \frac{2 k_0 y}{2} \mathrm{tg}\alpha_1 + k_0 y \mathrm{tg}^2 \alpha_1}{1 + \mathrm{tg}^2 \alpha_1}$$

și pentru presiunea maximum corespunzătoare, ținênd seamă de teoremul stabilit mai sus:

$$(10) \qquad A_1 = \frac{n''_1}{\cos^2 (i - \alpha_1)} = n_1'' [1 + \mathrm{tg}^2 (i - \alpha_1)]$$

i fiind și aci unghiul fructului paramentului aval în punctul considerat. Ast-fel cele trei metode ale D-lor Delocre, Guillemain și Bouvier, aplicate ținênd seamă de teoremul riguros stabilit mai sus, dau respectiv pentru presiunea maximum, în punctul paramentului aval valorile:

$$A, A_2, A_1,$$

determinate prin ecuațiunile (9) și (10) în loc de:

$$n, n''_2; n''_1.$$

Din alte studii rezultă că regula trapezului este exactă, pentru un dig cu secțiunea triunghiulară dar nu este adevĕrată pentru digurile cu secțiunea trapez și încă și mai puțin pentru digurile obișnuite cu paramentele nu plane. Cu toate acestea exactitatea sa în digul triunghiular, pe lângă interesul ce'l dă acestei forme teoretice, dă asemenea presumpțiunea că ea nu trebue să fie prea departe de adevĕr pentru formele obișnuite mai mult sau mai puțin asemenea.

Calculul resorturilor de suspensiune pentru vagoanele cailor ferate.

Buna întreținere a căilor ferate are drept resultat neutralizarea diferitelor trepidațiuni, și asigură în același timp rigiditatea liniei. Diferitele lovituri cari se transmit vagoanelor în mersul unui tren, fie din causa unei întrețineri defectuoase, cu alte cuvinte când balastul nu transmite solului într'un mod uniform presiunea trenului, fie din alte cause precum mișcarea numită de șovăire (de Lacet), sau de nivelația liniei etc.; sunt combătute prin nisce organe mecanice numite *resorturi de suspensiune*. Scopul acestor organe este, așa dar, de a neutraliza aceste lovituri pe de o parte, iar pe de altă parte, ele servesc ca legătură între cadrul rigid care compune ori-ce vagon numit chassis și cutia care conține substanța lubrifiantă.

Aceste resorturi sunt formate din lame egale sau neegale, dreptunghiulare, triunghiulare, hyperbolice, parabolice sau în formă de helice.

Teoria resorturilor formate din lame a fost făcută de D-nii *Phillips* inginer de mine [1]) și *F. Redtenbacher*, directorul Școalei polytechnice din Carlsruhe [1]), însă acești autori, după părerea D-lui *A. Huberti*, inspector al căilor ferate Belge, stabilind nisce formule destul de complicate, nu au atins cu toate acestea o exactitudine matematică.

Pentru redactarea acestui articol ne-am inspirat în special de remarcabilele lecțiuni profesate la școala polytechnică din Bruxelles și la școala centrală din Lyon.

Calculul unui resort format din lame egale.

Aceste resorturi se calculează ca un solid fixat la o extremitate și suportând o greutate la cea-l'altă extremitate.

Cercetând condițiunile de equilibru interior al solidelor fixate la o extremitate, Galileu a creat acum două secole sciința resistenței de materiale. Hypotesa pe care el ș'o propunea era, în adevăr, inadmisibilă; Galileu considera fibra neutră în punc-

[1]) Annales des Mines.

[1]) Die Gesetze des Locomotivbaues 1854.