din acest punct de vedere, s'a introdus un formular special servind de legitimaţie de călĕtorie, în care casierul înscrie staţia de destinaţie şi clasa cerută de călĕtor şi aplică prin scriere, preţul biletului ast-fel cum rezultă din tarif. Acest sistem e pus în aplicare din cursul lunei August a. c.

NOTA

Asupra arcelor de parabolă si arcelor de cerc, cand se póte înlocui fără eróre neadmisibilă DS prin DX în formula lui Navier; Liniele de Influenţă a împingerilor si momentelor încovăetóre în casul arcelor parabolice

DE

TANCRED CONSTANTINESCU, Inginer în Serviciul Studiilor şi Construcţiilor

In nota de faţă n'am căutat de cât să dăm formulele împingerilor pentru arcele de parabolă şi cerc în casul când se poate înlocui elementul infinitisimal ds din lungimea arcului (mĕsurat pe fibra mijlocie) prin elementul dx corespunzĕtor lui ds; de asemenea am căutat să studiez liniile de influenţă ale împingerilor şi momentelor incovoetoare, datorite sarcinilor isolate mobile.

M'am servit mult şi de articolele publicate în «Annales des Ponts et Chaussées» de Inginerii Belliard şi Souleyre; Am dat expresiunea împingerei în funcţiune de cantităţi, a căror valori, speciale pentru fie-care cas, se pot găsi în ori ce Aide Memoire; am adăogat şi un tablou ce uşurează cu totul calculele.

In ultima parte a notei am studiat condiţiunile pentru ca formulele date în notă să găsească aplicaţiunea exactă.

CAP. I

Impingere

Să considerăm un arc A M B, simetric în raport cu axa oy, supus la o sarcină 2P aplicată în punctul M, vîrful arcului.

Fie 2a deschiderea arcului şi f fleşa; din causa acţiunei sarcinei 2P, se va naşte în punctele de reazăm A şi B nişte reacţiuni R_1 şi R_2 [1]); din causa simetriei arcului şi încărcărei, aceste reacţiuni vor fi egale, precum şi componentele lor orizontale şi verticale Q şi V; Q este împingerea arcului; Componenta verticală V o vom numi, pur şi simplu, reactiune.

O primă condiţiune de equilibru ne dă

$$2V - 2P = 0$$
$$V = P$$

Impingerea Q nu se poate găsi static de cât numai în casul când arcul ar fi articulat în M; în cas contrar, Q nu se poate găsi de cât bazându-ne pe teoria deformaţiunei pieselor curbe.

Navier a dat cel d'ântêiu formulă [2]).

$$\int_{S_0}^{S} Myds = 0$$

care împreună cu relaţiunile statice de equilibru resolvesc cestiunea equilibrului pieselor curbe; în această equaţiune M este momentul încovăetor în secţiunea corespundĕtoare abscisei x şi ordonatei y a curbei (fibra mijlocie) şi *ds* e elementul infinitesimal al fibrei neutre înainte de deformaţie.

Formula lui Navier nu ţine compt de compresiune—care de almintrelea influenţează puţin asupra mărimei eforturilor;—ea nu ţine compt nici de temperatură.

Nu vom ţine compt de compresiune; influenţa schimbărilor de temperatură se poate studia aparte.

Cestiunea e cu totul simplă,—nu mĕ voi ocupa de ea. Nu voi ţine compt de compresiune din motivele de mai sus şi voi aplica formula lui Navier.

1) *Parabolă.* Fie sarcina 2 P aplicată în punctul

[1]) Să se observe că—acum şi pentru întreg studiul,—considerăm arcele ca articulate la naşteri, deci reacţiunile R_1 şi R_2 trecênd prin punctele A şi B.

[2]) In această formulă numitorul E I e presupus constatat; de aceea nu figurează în formulă.

M cu abscisa $Z = au$; fie Q și Q' împingerile arcului, V_1 și V_2 reacțiunile; am imediat

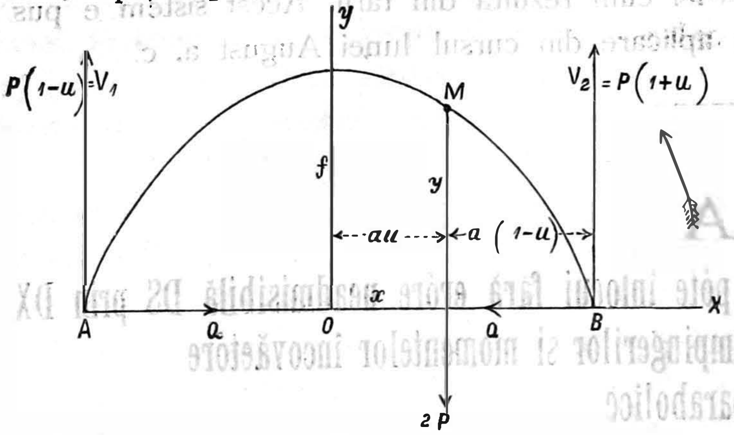


Fig. 1.

$Q - Q' = 0$ $V_1 + V_2 = 2P$ (1). Luând momentele un raport cu A am:

$V_2 = P(1+u)$ deci în virtutea lui (1)

$V_1 = P(1-u)$

Momentul încovăetor în secțiunea M este

$$M = \Big| -Qy \Big|_{-a}^{+a} + \Big| P(1+u)(a-x) \Big|_{au}^{a} + \Big| P(1-u)(a+x) \Big|_{au}^{-a}$$

considerând ca positive momentele forțelor ce tind a imprima o rotațiune în sensul săgeței.

Inlocuind valoarea lui M în equațiunea lui Navier în care am înlocuit ds prin dx am

$$Q\int_{-a}^{+a} y^2dx = P(1+u)\int_{au}^{a}(a-x)ydx + P(1-u)\int_{au}^{-a}(a+x)ydx$$

cea ce dă $Q = P\frac{(1+u)A+(1-u)B}{C}$ (2)

or am lesne, ținênd compt de equațiunea parabolei $y = f\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$

$$(3')\quad A = \int_{au}^{a}(a-x)ydx = f\int_{au}^{a}(a-x)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{1}{12}a^2 f(1-u)^3(3u+6)$$

$$(3'')\quad B = \int_{au}^{-a}(a+x)ydx = \int_{au}^{0}(a+x)ydx + \int_{0}^{-a}(a+x)ydx = \frac{1}{12}a^2 f(1+u)^3(5-3u)$$

$$C = \int_{-a}^{+a} y^2dx = \frac{16}{15}a f^2$$

Inlocuind aceste valori în equațiunea (2) am

$$Q = P\frac{\frac{1}{12}a^2 f}{\frac{16}{15}a f^2}\left[(1+u)(1-u)^3(3u+5)+(1-u)(1+u)^3(5-3u)\right]$$

sau în fine:

$$Q = \frac{5}{32}P\frac{a}{f}(1-u^2)(5-u^2)\text{*)}\quad (3)$$

Observ ca equat. (3) nu se schimbă când se înlocuesce u prin — u, lucru evident din causa simetriei arcului.

Equațiunea (3'') se poate deduce lesne din (3') înlocuind x prin —x și a prin —a.

Observare. Când avem mai multe puteri ce acționează asupra arcului, împingerea totală este

$$Q = \frac{5}{32}\frac{a}{f}\Sigma P(1-u^2)(5-u^2)$$

conform principiului suprapunerei efectului puterilor

Linia de influență a împingerei. Am avut

$z = au$ deci $u = \frac{z}{a}$

Inlocuind în equațiunea (3) am

$$Q = \frac{5}{32}P\frac{a}{f}\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)\left(5-\frac{z^2}{a^2}\right) \text{ sau}$$

$$(a^2-z^2)(5a^2-z^2) = m^3 Q \quad (4)$$

Equațiunea (4) ne represintă curba variațiune împingerilor în raport cu posițiunea sarcinei.

Să considerăm derivatele

$$m^3 Q' = -4z(3a^2-z^2)$$
$$m^3 Q'' = 12(a^2-z^2)$$

să facem să varieze z de la — a până aproape de zero; derivata 1-a este positivă, funcțiunea cresce; derivata a 2-a fiind negativă curba e convexa în raport cu origina. Când z variază de la o valoare positivă, foarte vecină de zero până la a, derivata 1-a e negativă, funcțiunea descresce; derivata 2-a rĕmânênd constant negativă, curba e tot convexă în raport cu origina. Pentru $x = 0$ derivata se anulează trecênd de la valori positive la negative; Q e maximum pentru $x = 0$.

Maximul valorei împingerei corespunde când sarcina calcă în dreptul vêrfului acului.

Se poate construi lesne curba dată de eq. (4). In adevĕr să punem

$$z^2 = x' \quad (4')$$

și să construim această parabolă, în care valorile lui x' sunt cele date de equațiunea (4').

Curba deci se poate lesne construi.

2) *Cerc.* Să considerăm douĕ sarcini P simetric așezate în raport cu OY; împingerea Q, produsă va fi dublul împingerei Q ce ar resulta când o singură sarcină P ar fi aplicată în m corespundĕtor abscisei *lu*; vom găsi pe Q_1.

Momentul încovoetor în secțiunea m N corespundĕtoare abcisei *au* este:

$$M = \Big|Qy\Big|_{0}^{a} - \Big|Pa(1-u)\Big|_{0}^{au} \Big|P(a-x)\Big|_{au}^{a} \quad (5')$$

*) Formula lui Collignon.

care înlocuită în equațiunea lui Navier dă:

$$Q=\frac{Pa\,(1-u)\int_0^{au}ydx+P\int_{au}^{a}(a-x)yex}{\int_0^a y^2dx}$$

or după figură găsesc: $x=r\ \mathrm{sm}\theta$

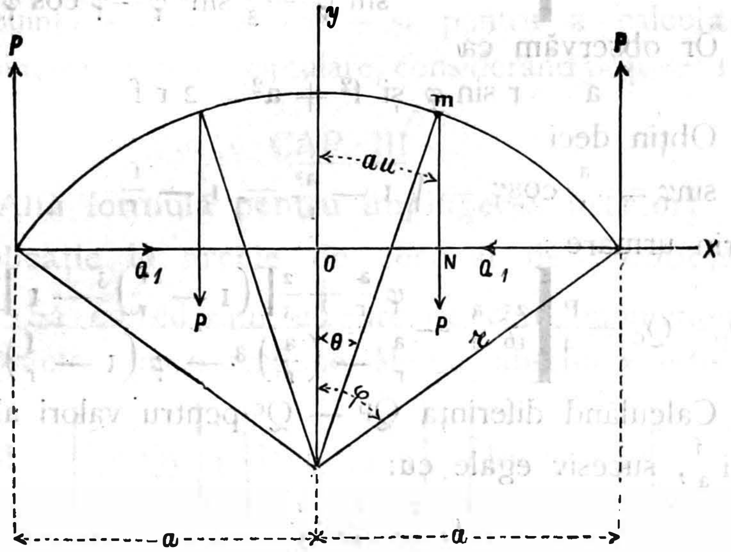


Fig. 2.

$$l-x=r\ (\mathrm{sm}\varphi-\mathrm{sm}\theta)$$

$$y=r\ (\cos\theta-\cos\varphi)$$

$$dx=r\ \cos\theta\ d\theta$$

și punênd:

$$I=\int_0^{au}ydx$$

$$I'=\int_{au}^{a}(a-x)ydx$$

$$I''=\int_0^a y^2dx$$

am:

$$Q_1=\frac{Pa\,(1-u)\,I+P\,I'}{I''}\ (5)$$

Or $I=\int_0^{au}ydx=r^2\int_0^{\varphi o}(\cos\theta-\cos\varphi)\ \cos\theta\ d\theta$

sau $I=r^2\ (A-B\ \cos\varphi)$

$$I'=\int_{au}^{a}(a-x)ydx=r^3\int_{\varphi_1}^{\varphi}(\sin\varphi-\sin\theta)\ (\cos\theta-\cos\varphi)\ \cos\varphi\ d\theta$$

sau $I'=r^3\ (A\ \sin\varphi-C-\frac{1}{2}B\ \sin 2\varphi+D\ \cos\varphi)$

în cari $\quad A=\int_0^{\varphi_0}\cos^2\theta\ d\theta=\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\sin 2\varphi_0}{4}$

$$-\cos\varphi\ B=-\cos\varphi\int_a^{\varphi a}\cos\theta\ d\theta=-\sin\varphi_0\ co\varphi$$

$$\sin\varphi\ A=\sin\varphi\int_{\varphi o}^{\varphi}\cos^2\theta\ d\theta=\sin\varphi\left[\frac{\varphi-\varphi_0}{2}+\frac{\sin 2\varphi-\sin 2\varphi_0}{4}\right]$$

$$-C=-\int_{\varphi o}^{\varphi}\sin\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{3}(\cos^3\varphi-\cos^3\varphi_0)$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\ B=-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos\theta\ d\theta=$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,(\sin\varphi-\sin\varphi_0)$$

$$D\cos\varphi=\cos\varphi\int\sin\cos\theta\cos\theta\ d\theta=\cos\varphi\ (\sin^2\varphi-\sin^2\varphi_0)$$

înlocuind aceste valori cu expresiunile lui I și I′, și apoi punând pe I și I′ cu equațiunea (5) ținênd compt că

$$l(1-u)=v\ (\sin\varphi-\sin\varphi)\ \text{găsesc:}$$

$$(6)Q_1\int y^2dx=Pr^3\Big\{\frac{2}{1}(\varphi\sin\varphi-\varphi_1\sin\varphi_1)+$$

$$\frac{1}{2}\ (\cos\varphi-\cos\psi_0)-\frac{1}{2}\ \cos\varphi(\sin^2\varphi-\sin^2\varphi_1)-\frac{1}{6}\ (\cos^3\psi-\cos^3\psi_0)\Big\}$$

or

$$\int_0^l y^2\,dx=v^3\int_0^{\varphi}(\cos\theta-\cos\varphi)^2\cos\theta\,d\theta=v^3\,x\ (6')$$

or,

$$X=\int_0^{\varphi}(\cos^2\theta+\cos^2\varphi-2\cos\theta\cos\varphi)\cos\theta\,d\theta=$$

$$\int_0^{\varphi}\cos^3\theta d\theta+\cos^2\varphi\int_0^{\varphi}\cos\theta d\theta-2\cos\varphi\int_0^{\varphi}\cos^2\theta d\theta$$

sau reducând după ce am integrat

$$X=\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\cos\varphi$$

prin urmare înlocuind cu (6′) am

$$\int_0^l y^2dx=r^3(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\cos\varphi)$$

deci înlocuind în (6) obțin

$$(7)\ Q=\frac{Q_1}{2}=\frac{P}{4}\ \frac{(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi)-}{\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\cos\varphi}$$

$$\frac{(\cos\varphi_0+\varphi_0\sin\varphi_0-\cos\varphi\sin^2\varphi_0-\frac{1}{3}\cos^3\varphi_0)}{\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\cos\varphi}$$

care este valoarea împingerei.

Variațiunea Impingerei. Numitorul equațiunei este tot-d'a-una positiv; în adevĕr să considerăm funcțiunea

$$N=\sin\varphi\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\cos\varphi$$

și derivata

$$\frac{dN}{d\varphi}=\sin\varphi\,(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)$$

care se poate scrie

$$\frac{dN}{d\varphi}=\sin^2\varphi\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi}-\cos\varphi\right)$$

cantitatea care e tot-d'a-una positivă; funcțiunea cresce necontenit; cum N este positiv pentru o valoare particulară a lui φ, numitorul e tot-d'a-una positiv.

Maximul lui Q

$$Q=\frac{P}{4}\cdot\frac{Q'-Q'_0}{N}$$

corespunde minimului lui Q'_0

$$Q'_0=\frac{1}{2}\cos\varphi_0\,(\varphi_0-2\cos\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\ \sin\varphi_0)=\frac{1}{2}\cos\varphi_0\ K$$

să facem pe φ_0 să varieze de la $-\varphi$ la $+\varphi$ trecând prin zero; $\cos\varphi_0$ este tot-d'a-una positiv;

Să considerăm valoarea lui:

$$K=\varphi_0-2\cos\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\sin\varphi_0\ (8)$$

putem pune

$$\varphi_0=\sin\varphi_0+\varepsilon$$

deci

$$K = \varepsilon + \sin\varphi_0\,(1 + \cos\varphi_0 - 2\cos\varphi) = \varepsilon + \sin\varphi_0\, K'$$

or cantitatea K va fi de sigur positivă dacă K' va fi positiv, căci punênd pe $\sin\varphi^0$ în loc de φ_0 am micşorat scădutul; or K' se poate scrie

$$K' = (1 - \cos\varphi) + (\cos\varphi_0 - \cos\varphi);$$

când φ_0 varieazā între φ şi zero, este evident că K' este tot-d'a-una positiv; cu atât mai mult şi K când φ_0 variează între 0 şi $-\varphi$ am : (schimbând pe φ_0 în $-\varphi_0$ pentru a pune în evidenţă semnul în equaţiunea 8)

$$K_1 = -\varphi_0 + 2\cos\varphi\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0\sin\varphi_0 = -(\varphi_0 - 2\cos\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\sin\varphi$$

deci K_1 este tot-d'a-una negativ.

Deci Q'_0 anulându-se pentru $\varphi_0 = 0$ trecând de la valori negative la positive, (când φ_0 variază între $-\varphi$ şi $+\varphi$) Q'_0 trece prin un maximum pentru $\varphi_0 = 0$

Deci :

Maximul împingerei Q se produce când sarcina calcă dreptul vêrfului arcului.

CAP. II

Comparaţiune între arcele parabolice şi circulare de aceiaşi deschidere şi fleşă din punctul de vedere al împingerei

Pentru arcele parabolice am găsit

$$Q_p = \frac{5}{64}\, P\, \frac{a}{f}\,(1 - u^2)(5 - u^2)$$

şi pentru cele circulare

$$Q_c = \frac{P}{4}\;\frac{(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi) -}{\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi}$$

$$\frac{(\cos\varphi_0 + \varphi_0\sin\varphi_0 - \cos\varphi\sin^2\varphi_0 - \frac{1}{3}\cos^3\varphi_0)}{\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi}$$

Or

$$\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi = \frac{2}{3}\cos^3\varphi + \varphi\sin\varphi$$

Deci

$$Q_c = \frac{P}{4}\;\frac{(\varphi\sin\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi) - \cos\varphi_0 + \varphi_0\sin\varphi_0 - \cos\varphi\sin^2\varphi_0 - \frac{1}{3}\cos^3\varphi_0)}{\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi}$$

Să presupunem că posiţia sarcinei este aceiaşi în raport cu arcurile considerate; să studiem variaţiunea funcţiunei

$$Q_p - Q_c = \frac{P}{4}\left[\frac{5}{16}\,\frac{a}{f}\,(1-u^2)(5-u^2) - \frac{\varphi\sin\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi - 2}{\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi}\right]$$

pentru a face comparaţiunea facilă să considerăm casul când sarcina P calcă în dreptul vârfului arcului; în acest cas am

$$q = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{16}\,(1 - u^2)(5 - u^2) = \frac{25}{16}$$

deci

$$Q_p - Q_c = \frac{P}{4}\left[\frac{25}{16}\,\frac{a}{f} - \frac{\varphi\sin + \frac{2}{3}\cos^3\varphi - \frac{2}{3}}{\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi}\right]$$

Or observăm că

$$a = r\sin\varphi \quad \text{şi} \quad f^2 + a^2 = 2rf$$

Obţin deci

$$\sin\varphi = \frac{a}{r} \quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_0}} = 1 - \frac{f}{r}$$

prin urmare :

$$Q_p - Q_c = \frac{P}{4}\left[\frac{25}{16}\,\frac{a}{f} - \frac{\varphi\frac{a}{r} + \frac{2}{3}\left[\left(1 - \frac{f}{r}\right)^3 - 1\right]}{\frac{a}{r} - \left(\frac{a}{r}\right)^3 - \varphi\left(1 - \frac{f}{r}\right)}\right]$$

Calculând diferinţa $Q^p - Q^c$ pentru valori ale lui $\frac{f}{a}$, sucesiv egale cu:

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5}$$

cari corespund unei turtiri $\left(\frac{f}{2a}\right)$ de

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$$

găsesc resultatele din tabloul următor :

$\frac{f}{2a}$	Valórea împingerei Q	
	Parabolă	Çerc
$\frac{1}{2}$	0.390,625 P	0.27,122 P
$\frac{1}{3}$	0. 58,594 P	0 54,447 P
$\frac{1}{4}$	0, 78,125 P	0.71,908 P
$\frac{1}{5}$	0. 97,656 P	0.91,502 P

Nota 1.— S'ar putea deci întrebuinţa, pentru a găsi împingerea Q în casul arcelor circulare, tot formula simplă a împingereĭ ar celor parabolice, cu condiţiune ca acea împingere să fie multiplicată cu un factore μ :

$$Q = \mu\,\frac{5}{64}\,\frac{a}{f}\,(1 - u^2)(5 - u^2)$$

μ ar fi un factore variabil, depinḑênd de raportu $\frac{f}{2a}$ Um tabloŭ analog cu cel de maĭ sus, ar putea determina valorile lui φ pentru valori mai apropiate ale lui $\frac{f}{2a}$.

Nota 2.— Se vede lesne din tabloul de mai sus, că arcele parabolice sunt cu mult mai avantajóse de cât cele circulare, în cas când arcele nu sunt prea turtite ; In adevĕr împingerea dă un moment, ce se scade din momentul total ; prin urmare avantagiul e de partea arcelor parabolice.

In cas când arcele — fie parabolice saŭ circulare — sunt turtite $\left(\frac{f}{2a} < \frac{1}{4}\right)$, nu este diferință însemnată între aceste categorii de arce; alegerea unui tip sau altuia e arbitrară; pe lângă acésta, formula impingerei arcelor parabolice se poate întrebuința — în acest cas — și pentru a calcula împingerea arcelor circulare, considerând pe $\mu = 1$

CAP. III

Altă formulă pentru impingerea arcelor. Aplicație la arcele de cerc și de parabolă

Să considerăm un arc de cerc; momentul încovăetor în o secțiune M cu abscisa x este:

$$M = \Big| - Qy \Big|_0^l + \Big| P(1-u)x \Big|_0^{lu} + \Big| Pu(l-x) \Big|_{lu}^{l}$$

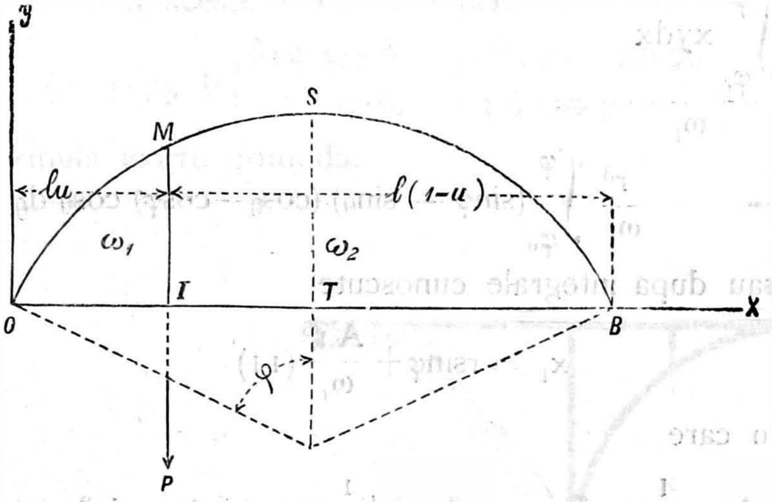


Fig. 3.

deci equațiunea lui Navier

$$\int_{S_0}^{S} Myds = 0$$

în care se înlocuește ds prin dx ne dă:

$$Q = \frac{P(1-u)\int_0^{lu} xydx + Pu\int_{lu}^{l}(l-x)ydx}{\int_0^l y^2dx} \quad (9)$$

Fie ω_1 și ω_2 ariile porțiunilor OMI și MSBI și ω aria totală OSB; am

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Fie x_1 și x_2 abscisele centrelor de greutate ale ariilor ω_1 și ω_2, x_3 și y_3 coordonatele centrului de greutate al ariei ω;

$$\omega_1 = \int_0^{lu} ydx \quad \omega_2 = \int_{lu}^{l} ydx$$

Pe de altă parte scim ca suma momentelor ariilor elementare (d Ω) în raport cu o axă, este egală cu momentul ariei totale, — considerată ca concentrată în centrul de greutate — în raport cu aceiași axă; deci:

$$\omega_1 x_1 = \int_0^{lu} xydx \quad \omega_2 x_2 = \int_{lu}^{l} xydx$$

deci adunând:

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = \int_0^l xydx = \omega x_3$$

și

$$\int_0^l y_2 dx = \omega y_3$$

ținênd compt de cele de mai sus, equațiunea (9 devine:

$$Q = \frac{P(1-u)\,\omega_1 x_1 + Pul\,\omega_2 - Pu\,\omega_2 x_2}{\omega y_3} = P\frac{\omega_1 x_1 + lu\,\omega_2 - u\,\omega x_3}{\omega y_3}$$

sau

$Q = P\frac{\omega_1 x_1 + u(l\omega_2 - \omega x_3)}{\omega y_3}$ și cum $x_3 = \frac{l}{2}$ am:

$$Q = P\frac{\omega_1 x_1 + ul\left(\omega_2 - \frac{\omega}{2}\right)}{\omega y_3}$$

dar $\omega_2 = \omega - \omega_1$, deci $\omega_2 - \frac{\omega}{2} = \omega - \omega_1 - \frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2} - \omega_1$, deci

$$Q = P\frac{\omega_1 x_1 + lu\left(\frac{\omega}{2} - \omega_1\right)}{\omega y_3}$$

sau în fine:

$$Q = P\frac{\omega_1}{\omega}\frac{x_1 - lu}{y_3} + \frac{1}{2}P\frac{lu}{y_3} \quad (10)$$

acesta este formula generală a împingerei pentru ori-ce arc, când se poate înlocui ds prin dx în formula lui Navier.

Cu ajutorul acestei formule putem lesne găsi formulele deja date pentru arcele de parabolă și cerc.

A) *In casul Parabolei.* Raportându-ne la fig. 3, equațiunea parabolei O S B va fi:

$$Y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

$$\text{deci: } x_1 = \frac{\int_0^{lu} xydx}{\int_0^{lu} ydx} = \frac{l\int_0^{lu} x^2dx - \int_0^{lu} x^3dx}{l\int_0^{lu} xdx - \int_0^{lu} x^2dx} = lu\frac{4-3u}{6-4u}$$

de asemenea:

$$\omega_1 = \int_0^{lu} ydx = l\int_0^{lu} xdx - \int^{lu} X^2dx = \frac{2}{2} flu^2(2-2u)$$

făcênd $u = 1$ găsesc:

$$\omega = \frac{2}{3} fl$$

$$\omega y_3 = \int_0^l y^2 dx = \frac{16f^2}{l^4}\int_0^l x^2 (l-x)^2 dx = \frac{16}{30} f^2 l$$

$$\text{deci} \quad y_3 = \frac{\frac{16}{30} f^2 l}{\frac{2}{3} fl} = \frac{4}{5} f$$

înlocuind în equat (10) am:

$$Q = P \frac{\frac{2}{3} flu^2 (3-2u)}{\frac{2}{3} fl} \frac{lu\frac{4-3u}{6-4u} - lu}{\frac{4}{5} f} + \frac{1}{2} P \frac{lu}{\frac{4}{5} f}$$

și făcênd tóte reducerile:

$$Q = \frac{5}{8} P \frac{l}{f} u (1-u)(1+u-u^2)$$

Ca să revenim la formula dată (3), observ că trebue să mut axele cu origina în T (fig. 3); deci

$$l(2-u) = a + au^1 \quad u = \frac{1-u^1}{2}; \ (10^1)$$

observând că trebue să înlocuim P prin 2P (în casul fig. 3 sarcina aplicată e 2P) și ţinênd compt de (10¹) am:

$$Q = \frac{5}{8}\, 2P\, \frac{2a}{f} \frac{1-u^1}{2} \frac{1+u^1}{2} \frac{5-u^2}{4} = \frac{5}{32} P \frac{a}{f} (1-u^2)(5-u^2)$$

care e formula căutată.

B. In casul Cercului.— In acest cas am:

$$x = r(\sin\varphi - \sin\theta)$$
$$y = r(\cos\theta - \cos\varphi)$$
$$dx = -r\cos\theta\, d\theta$$

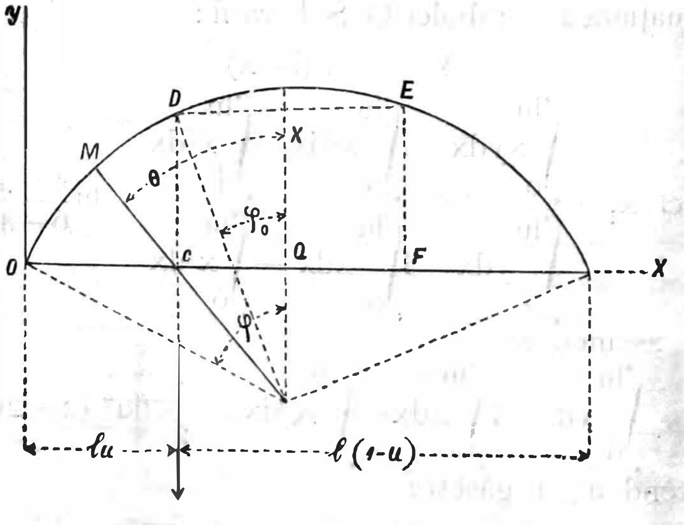


Fig. 4.

In acest cas am:

$$\omega_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} y\, ex = r^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\cos\theta - \cos\varphi)\cos\theta\, d\theta$$

și efectuind integrale cunoscute găsesc:

$$\omega_1 = r^2 \left[\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \sin\varphi\cos\right) - \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi.\right)\right]$$

In mod analog găsesc

$$\omega_0 = \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi_0\right) r^2$$

și

$$\omega = \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi\right) 2r^2$$

de asemenea

$$\frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi} xydx}{\omega_1} = \frac{r^3}{\omega_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi} (\sin\varphi - \sin\theta)(\cos\theta - \cos\varphi)\cos\theta\, d\theta$$

sau după integrale cunoscute

$$x_1 = r\sin\varphi + \frac{A r^3}{\omega_1} \ (11)$$

în care

$$A = \frac{1}{3}(\cos^3\varphi - cas^3 \varphi_0) + \frac{1}{2}\cos\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0)$$

In acelaș mod

$$\omega y_3 = 2r^3 \int_0^{\varphi} (\cos\theta - \cos\varphi)^2 \cos\theta\, d\theta$$

saŭ după reduceri simple:

$$y_3 = \frac{4}{3}\frac{r^3 \sin^3\varphi}{\omega} - 2r\cos\varphi \ (12)$$

Inlocuind valorile de maĭ sus în equaţiunea (10) am:

$$Q = P\frac{\omega_1}{\omega} \frac{r\sin\varphi + \frac{Ar^3}{\omega} - lu}{\frac{4}{3}\frac{r^3\sin^3\varphi}{\omega} - 2r\cos\varphi} + \frac{1}{2} P \frac{lu}{\frac{4}{3}\frac{r^3\sin^3\varphi}{\omega} - 2r\cos\varphi}$$

ţinênd compt că

$$lu = r(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \quad \text{și ca} \quad \omega_1 = \frac{\omega}{2} - \omega_0$$

am

$$Q = 1{,}5\, P \frac{\omega}{1} \frac{\sin\varphi + Ar^2 - \omega'_0 \sin\varphi_0}{2\, r^2 \sin^3\varphi - 3\omega\cos\varphi} \ (12')$$

Cantitățile ω, ω'_0, A sunt lesne de calculat.

Nota.— Fiind că, aprópe în ori ce Aide-Mémoire se găsesc suprafețele segmentelor pentru raza 1 și unghiul la centru dat, ω, și ω se pot găsi imediat; în adevĕr dacă numesc:

δ_1 aria segmentului de raza 1 și unghiul la centru φ

δ_0 « « « « « « « « φ_0

am

$$\omega = r^2\delta \ (13 \quad \delta = \varphi - \sin\varphi\cos\varphi$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2} r^2 [\varphi_0 - \sin\varphi_0 - 2\sin\varphi_0 (\cos\varphi - \cos\varphi_0)];$$

$$\omega'_0 = \frac{1}{2} r^2 \delta_0 - r^2 \sin\varphi_0 (\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad (14)$$

sau

$$\omega \quad \frac{r^2}{2} (\delta_0 + \tau_0)$$

în care:

$\delta_0 = \varphi_0 - \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \tau = 2 \sin\varphi_0 (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$

Inlocuid aceste valori în equat. (12') am

$$Q = 0.75 \, P \frac{\frac{1}{2}\delta \sin\varphi + A - \frac{1}{2}(\delta_0 + \tau_0) \sin\varphi_0}{\sin^3\varphi - 3\,\delta \cos\varphi}$$

formulă foarte comodă.

Notă. S'a calculat, după cum se vede în tabloul din pag. 55 cantitățile ce intră în formula (15) pentru valorile lui $\frac{f}{l}$ cuprinse între 0.50 și 0.15 (din 0.05 în 0.05).

Aceasta s'a făcut în 3 hipotese:

1) Sarcina P e aplicată în dreptul vârfului arcului

2) « « « « centru de gravitate al arcului.

3) Sarcina P e aplicată la jumătatea semi deschiderei arcului.

Aceste sunt casurile de considerat căci pilaștri prin cari se transmit arcului sarcinele P_1 P'_1 P'' (reacțiuni) se așează de obiceiu în porțiunile considerate.

Cu ajutorul cifrelor din tablou se poate calcula cu înlesnire împingerea arcelor circulare.

Intocmirea lui a fost destul de laborioasă.

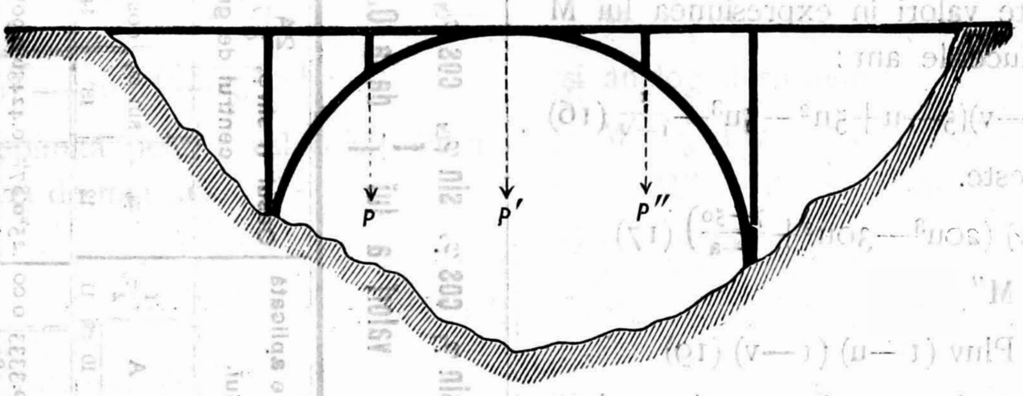


Fig. 5

CAP. IV

Liniile de Influență a momentelor încovăetóre în casul arcelor parabolice articulate la nasceri (când nu se ține compt de comprimare și când se poate înlocui ds prin dx în formula lui Navier) Casul sarcinelor isolate

Să căutăm liniile de influență a momentelor încovăetoare produse de o forță P aplicată în secțiunea M' cu abscisa *lu* în raport cu o secțiune M cu abscisa $lv = \frac{4f}{l^2} x\,l - x$);

Vom distinge două casuri:

1) Sarcina P e aplicată la dreapta secțiunei;

2) Sarcina P e aplicată la stânga secțiunei.

1) *P la dreapta secțiunei*

Momentul încovăetor în secțiunea M este (fig. 6)

$$M = Qy - Plu\,(1 - v) + Pl\,(u - v)$$

sau

$$M = Qy - Plv\,(1 - u)$$

or împingerea Q (pag. 12) este

$$Q = \frac{5}{8} P \frac{l}{f} u\,(1-u)\,(1+u-u^2) \text{ și } y = 4\,f\,v\,(1-v)$$

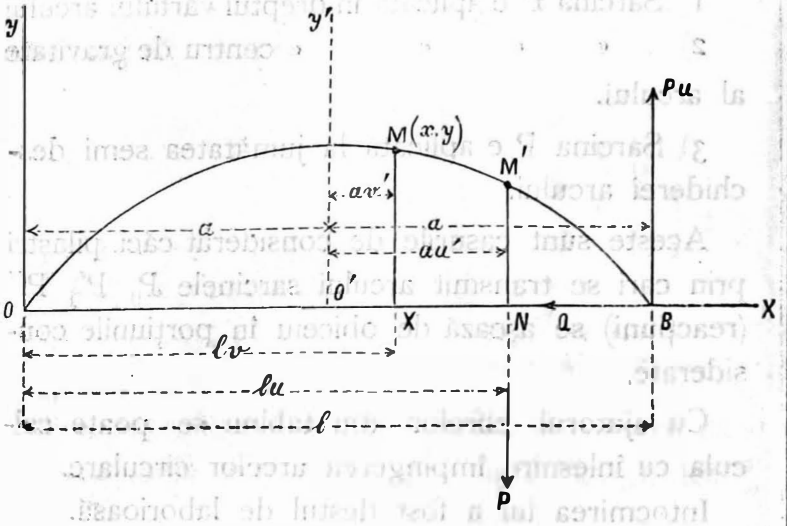


Fig. 6

deci înlocuind aceste valori în expresiunea lui M și făcênd toate reducerile am :

$$M = \frac{1}{2} Plv\,(1-u)(1-v)(5-u+5u^2-5u^3-\frac{2}{1-v} \quad (16)$$

derivata întâia M′ este.

$$M' = \frac{1}{2} Plv\,(1-v)\,(20u^3-30u^2+\frac{7-50}{1-a}) \quad (17)$$

și derivata a doua M″

$$M'' = -30\ Pluv\,(1-u)\,(1-v) \quad (19)$$

Curba represintată de equațiunea 16 presintă câte un punct de inflexiune în O și B.

Curba presintă tot-d'a-una convexitatea sa către ygrecurile positive.

Coeficientul angular al tangentei în punctul B este

$$tg\ O = \frac{1}{2}\ Plv\ (5\,v-3) \quad (19)$$

Equațiunea (19) arată că tangenta la ramura din dreapta se confundă cu O X pentru $V = \frac{3}{5}$

Punctul cu această abscisă distinge două regiuni :

a) Când $v < \frac{3}{5}$ curba taie axa ox încă cu un punct afară de B;

b) Când $v > \frac{3}{5}$ curba nu taie pe Ox cu nici un punct altul afară de B.

Tablou de valorile cantităților φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_0$, $\cos\varphi_0$, A, δ, δ etc. carĭ intră în calculul împingereĭ, pentru valorĭ a luĭ $\frac{f}{l}$ de la 0.50 până la 0.15.

$\frac{f}{l}=\alpha$	φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\delta$	Casul I $\varphi_0=0$ forța P e aplicată la vêrful arculuĭ.						Casul II $\sin\varphi_0=\frac{2A}{o}$; forța P e aplicată în centrul de greutate al arcului						Casul III $\sin\varphi_0=\frac{1}{2}\sin\varphi$; forța P e aplicată la jumătatea semi deschideri arcului						OBSERVAȚIUN
					φ_0	$\sin\varphi_0$	$\cos\varphi_0$	$\frac{1}{2}\tau_0$	A	$\frac{1}{2}\tau_0$	φ_0	$\sin\varphi_0$	$\cos\varphi_0$	$\frac{1}{2}\tau_0$	A	$\frac{1}{2}\tau_0$	φ_0	$\sin\varphi_0$	$\cos\varphi_0$	$\frac{1}{2}\tau_0$	A	$\frac{1}{2}\tau_0$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0.50	90°	1	0.00	0.7854	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.3333	0.00	25°6′87″	0.42436	0.90549	0.0270	-0.2745	0.3843	30°	0.50000	0.86603	0.0453	-0.2165	0.4330	
0.45	83°58′43″	0.99448	0.10453	0.6811	0.00	„	„	„	-0.2809	„	24°21′26″	0.41242	0.91085	0.0247	-0.2086	0.3324	29°49′15″	0.49729	0.86748	0.0445	-0.1516	0.3794	
0.40	77°20′	0.97561	0.21928	0.5679	0.00	„	„	„	-0.2256	„	23°25′0″	0.39743	0.91764	0.0220	-0.1668	0.2775	29°11′22″	0.48780	0.87300	0.04185	-0.1401	0.3190	
0.35	70°	0.93960	0.34202	0.45017	0.00	„	„	„	-0.1690	„	22°3′0″	0.37541	0.92685	0.0184	-0.1327	0.2271	28°1′17″	0.46980	0.88277	0.0372	-0.1028	0.2542	70° (rond)
0.3333	67°22′46″	0.92307	0.38461	0.41046	0.00	„	„	„	-0.1502	„	21°28′0″	0.36593	0.93063	0.0170	-0.1010	0.1998	27°29′9″	0.46153	0.88710	0.0351	-0.0929	0.2319	
0.30	61°55′37″	0.88235	0.47060	0.33555	0.00	„	„	„	-0.1179	„	20°34′14″	0.35136	0.93626	0.0150	-0.0848	0.1646	26°10′44″	0.44117	0.89743	0.0300	-0.0688	0.1883	
0.25	53°7′45″	0.80000	0.60000	0.22360	0.00	„	„	„	-0.0694	„	18°21′5″	0.31484	0.94915	0.0107	-0.0507	0.1599	23°34′41″	0.40000	0.91646	0.0225	-0.0407	0.1266	
0.20	43°35′	0.68982	0.72440	0.13064	0.00	„	„	„	-0.0346	„	15°21′29″	0.26485	0.96432	0.0083	-0.0382	0.0636	20°10′35″	0.34491	0.93864	0.0142	-0.0198	0.0567	
0.15	33°23′54″	0.55046	0.83485	0.06164	0.00	„	„	„	-0.0136	„	12°41′45″	0.22053	0.97537	0.00365	-0.0092	0.0311	15°58′32″	0.27523	0.96138	0.0071	-0.0092	0.0310	

$$\sin\varphi = \frac{4\alpha}{1+4\alpha^2};\ \alpha = \frac{f}{l}$$

Pentru a găsi porţiunea sarcinei pentru care momentele încovăetoare să fie maxime, n'avem de cât să studiem variaţiunea cantităţi u pentru valori ale lui v superioare sau inferioare lui $\frac{3}{5}$, în equaţiunea :

$$M'=Plv\,(1-a)\left(20\,u^3-30\,u^2+\frac{7.5\,v}{1-v}\right)=0$$

ceea ce dă : $20\,u^3-30\,u^2+\frac{3.5\,v}{1-v}=0$

$$\text{de unde : } V=\frac{30\,u^5-20\,u^3-7}{30\,u^2-20\,u^3-5} \qquad (20)$$

equaţiunea 20 se poate scri :

$$V=\frac{2\,(u+0.42666)\,(u-1.28889)\,(u-0.63776)}{(2\,u-1)\,\left(u-\sqrt{\frac{3+1}{2}}\right)\left(u+\sqrt{\frac{3-1}{2}}\right)}$$

numitorul este negativ pentru valori ale lui u inferioare lui $\frac{1}{2}$, or numărătorul este positiv pentru aceste valori; u trebue să aibă deci valori mai mari ca $\frac{1}{2}$ şi pentru ca υ să fie positiv trebue ca:

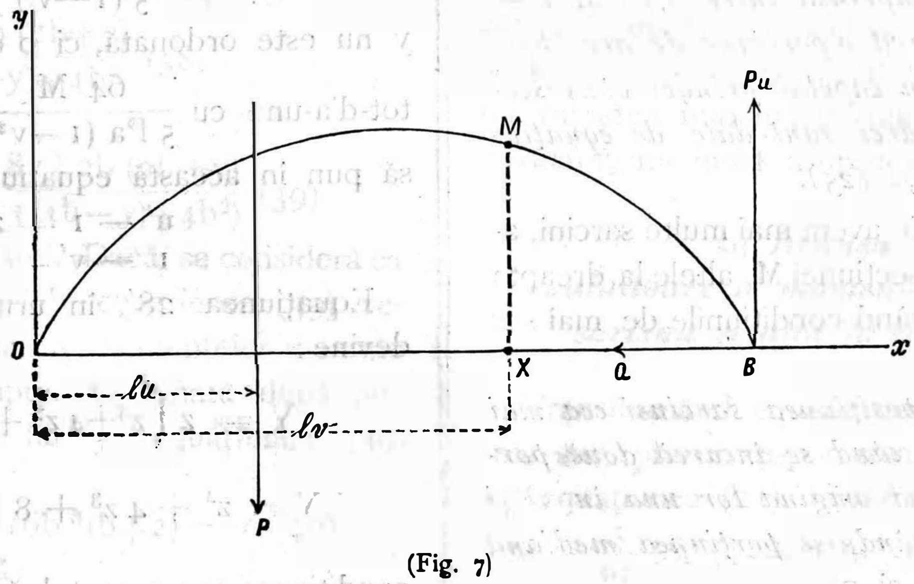
$$u > 0.63776$$

condiţiune ce cuprinde cu sine pe $u > 0.50$

Condiţiunea $v > 1$ se reduce la

$$1-\frac{2}{30\,u^2-20\,u^3-5}<1$$

care e evident îndeplinită pentru valori ale lui u ce satisfac condiţiunei de mai sus.



(Fig. 7)

Equaţiunea 23 arată că ramura din stânga presintă un punct de inflexiune în O şi B.

Curba presintă tot-d'a-una convexitatea către ygrecurile positive.

Valoarea limită a lui v, corespunde lui $u=1$ această valoare e $v=\frac{3}{5}$ de acord cu cele deduse mai sus.

In resumat :

Când v variază între : o — şi — $\frac{3}{5}$,

U este cuprins între : 0.63777—şi—1;

deci :

Maximul momentului încovăetor, datorit unor sarcine P, situate la dreapta secţiunei — când secţiunea considerată e cuprinsă între o şi $\frac{3}{5}l$*— se obţine când se încarcă o porţiune din arc, porţiune avênd origina în capătul grindei opus secţiunei; limitele încărcărei sunt date de equaţiunile de mai sus, (eq. 20).*

2) *Sarcina P la stânga secţiunei.*

Momentul încovăetor în secţiunea **M** este :
$M=Qy-Pu\,(l-lv)$ sau $M=Qy-Plu\,(1-v)$ înlocuind pe Q şi Y prin valorile lor respective :
$Q=\frac{5}{8}P\frac{1}{f}u\,(1-)\,(1+u-u^2)$ şi $Y=4\,fv\,(1-v)$
am dupe toate reducerile :

$$M=\frac{1}{2}Pluv\,(1-v)\left(5\,u^3-10\,u^2+5-\frac{2}{v}\right) \qquad (21)$$

şi analog derivatele :

$$M'=\frac{1}{2}\,Plv\,(1-v)\left(20\,u^3-30\,u^2+5-\frac{v}{2}\right) \qquad (22)$$

$$M''=-30\,Plvu\,(1-v)\,(1-u) \qquad (23)$$

Coeficientul angular al tangentei cu B este :

$$\operatorname{tg}\theta'=-\frac{1}{2}\,Pl\,(1-v)\,(5\,v-+2)$$

care nu se anulează pentru nici o valoare a lui v cuprinsă între o — şi 1.

Condiţiunea ca momentul încovăetor să fie maximum ne dă:

$$V = \frac{2}{20\,u^3 - 30\,u^2 + 5} \quad (24)$$

cu condiţiunea ca

$$1 > V > 0 \quad (25)$$

Equaţiunea 24 se poate scri:

$$V = \frac{1}{5\left(2u - 1\right)\left(u + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(u - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}$$

Condiţiunea $v > 0$ dă

$$U < 0.5 \quad (26)$$

Condiţiunea $v < 1$ dă ţinênd compt de (26)

$$2 < 20\,u^3 - 30\,u^2 + 5$$

sau $\quad 2\,u^3 - 3\,u^2 + 0.30 > 0$

care se pot scri, resolvind'o:

$$2\,(u - 0.36224)\,(u - 1.42664)\,(u + 0.28892) > 0$$

deci

$$0 < u < 0{,}36224 \quad (27)$$

care coprinde pe (26).

Prin urmare:

Când v e coprins între $\frac{2}{5}$ şi 1

U variază între o şi 0.36224

deci:

Maximul momentului încovăetor datorit unor sarcine P, situate la stânga secţiunei—când secţiunea considerată e cuprinsă între 0,4 l şi l — se obţine când se încarcă o porţiune de arc, porţiune avênd origina în capĕtul grindei opus secţiunei; limitele încărcărei sunt date de equaţiunile de mai sus (24) şi (25).

Dacă presupunem că avem mai multe sarcini, aplicate unele la stânga secţiunei M, altele la dreapta acestei secţiuni, observând condiţiunile de mai sus deducem:

A) *Când* $v < \frac{3}{5}$ *posiţiunea sarcinei cea mai defavorabilă se obţine când se încarcă două porţiuni din grindă, avênd origina lor una în O şi alta în B, sau încărcându-se porţiunea mediană complementară* (fig. 8 şi 9).

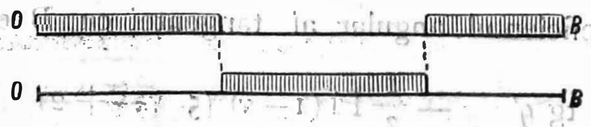


Fig. 8 şi 9.

B) *Când* $v > \frac{3}{5}$ *posiţiunea sarcinei cea mai defavorabilă se obţine când se încarcă o porţiune din grindă, avênd origina în O, sau o porţiune cu origina în B. (fig. 10 şi 11).*

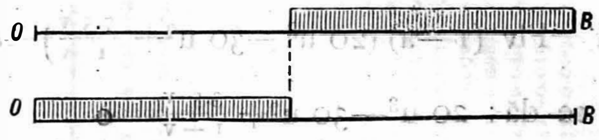


Fig. 10 şi 11.

CAPIT. V

Curba învăluitoare a momentelor maxime în casul arcelor paralele.

a) **Branşa curbei când sarcina se află la dreapta secţiunei (ramura din dreapta).**

Să considerăm equat. (16) şi să transportăm axele coordonate paralel cu O y aşa că origina O să vie în O'; equaţiunile de transformare vor fi (fig. 6):

$$U = \frac{1+u'}{2} \qquad v = \frac{1+v'}{2} \qquad l = 2\,a$$

equaţiunea (16) devine:

$$M = \frac{5}{64}\,Pa\,(1 - v'^2)(u' - 1)\left[u'^3 + u'^2 - 5u' + \frac{25\,v' + 7}{5\,(1 - v')}\right] \quad (28)$$

equaţiunea se poate scri

$$Y = \frac{64\,M}{5\,Pa\,(1 - v'^2)} = (u' - 1)\left(u'^3 + u'^2 - 5u' + \frac{25\,v' + 7}{5\,(1 - v')}\right) \quad (28')$$

y nu este ordonată, ci o cantitate variabilă egală tot-d'a-una cu $\frac{64\,M}{5\,Pa\,(1 - v^2)}$

să pun în această equaţiune:

$$\left.\begin{aligned} u' - 1 &= z \\ 1 - v' &= t \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Equaţiunea 28', în urma acestei substituţiuni devine:

$$Y = z\left(z^3 + 4\,z^2 + \frac{32}{5t} - 8\right) \text{ sau}$$

$$Y = z^4 + 4\,z^3 + 8\left(\frac{4}{5t} - 1\right)z \quad (30)$$

condiţiunea ca momentul să fie maximum $\left(\frac{dM}{du} = 0\right)$ dă

$$\frac{dy}{dz} = \text{ sau } z^3 + 3z^2 + 2\left(\frac{4}{5t} - 1\right) = 0 \quad (31)$$

Pentru a găsi curba învăluitoare a momentelor n'avem de cât să eliminăm în equaţiunile (30) şi

(31) variabila z; artificiile de calcul ce le am făcut pentru a pune sub o formă simplă equaţiune (28) şi derivata sa, fac eliminarea foarte uşoară; în adevĕr, equaţiunile (30) şi (31) se pot scri:

$$z^4 + 4z^3 + 4\,bz - y = 0 \quad (32)$$

şi

$$z^3 + 3z^2 + 2b = 0 \quad (33)$$

Imulţind equaţiunea (33) cu z şi scăḑênd'o din 32) am

$$z^3 + 2bz - y = 0 \quad (33')$$

pe care scăḑênd'o din (33) obţin:

$$3z^2 - 2bz + (2b + y) = 0 \quad (34)$$

Equaţiunile (32) şi (33) dau:

$$\frac{z^4 + 4z^3}{z^3 + 3z^2} = \frac{4bz - y}{2b}$$

sau reducênd:

$$2bz^2 + (4b - y)\,z - 3y = 0 \quad (35)$$

Equaţiunile (32) şi (32) dau de asemenea:

$$\frac{z^3 + 4z^3 + 2bz}{z^2 + 3z} = -\frac{y}{b}$$

sau făcênd reducerile:

$$2bz^3 + (8b + y)\,z^2 + 3yz + 8b^2 = 0$$

dacă din această equaţiune scădem pe (33'), după ce am îmulţit toţi termenii sĕi cu 2b, obţin, după toate simplificările:

$$(2b + y)z^2 + 3yz + 4b^2 = 0 \quad (36)$$

Resolvind equat (34) şi (36) in raport cu Z (îmulţind pe 34 cu (2b + y) şi pe (36) cu (3) şi scăḑênd) am:

$$Z = \frac{(2b+y)^2 - 12\,b^2}{9y + 2b\,(2b+y)} \quad (37)$$

Eliminând pe z^2 din equatiunile 34 şi 35 obţin:

$$Z = \frac{9y + 2b\,(2b+y)}{2\,(4b - y) + 4b^2} \quad (38)$$

prin urmare:

$$\frac{(2b+y)^2 - 12\,b^2}{9y + 2b\,(2b+y)} = \frac{8y + 2b\,(2b+y)}{3\,(4b - y) + 4b^2)} \quad (39)$$

care e resultatul eliminărei. Dacă se consideră ca cordonate variabilele y şi b equaţiunea (39) represintă curba evaluitoare a momentelor maxime pentru ramura din dreapta. Ordonată după puterile descrescânde ale lui y, equaţiunea (39) devine:

$$Y^3 + (12b + 27)\,y^2 + 16b^3(b + 2) = 0 \quad (40)$$

formulă cu totul simplă:

Pentru a reveni la variabilele u' şi v' înlocuesc pe y şi b cu valorile lor scoase din equaţiunile (28'), (29) şi equaţiunea:

$$(40')\quad \frac{b}{2} = \frac{4}{5t} - 1$$

obţin;

$$(40'')\quad y = \frac{4\,\delta\,M}{5\,Pa\,(1 - v'^2)} = \frac{2\,\delta.\,M}{5\,Pa\,(1 - v'^2)};\quad b + 2 = \frac{8}{5\,f} = \frac{2^3}{6\,(1 - v')}$$

$$\text{şi } 12\,b + 27 = 12\,(b + 2) + 3 = \frac{96}{5\,(1 - v')} + 3 = \frac{111 - 15\,v'}{5\,(1 - v')} = 3.\frac{37 - 5\,v'}{5\,(1 - v')}$$

$$b^3 = 2^3\left(\frac{4}{5\,t} - 1\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}\left(\frac{5\,v' - 1}{1 - v'}\right)^3$$

deci equaţiunea 40 devine

$$\frac{2^{18}M^3}{5^3P^3a^3(1 - v')^3(1 + v') +} 3.\frac{37 - 5v'}{5(1 - v')}.\frac{2^{12}\,M^2}{5^2P^2a^2(1 - v')^2(1 + v')^2} + \frac{2^4.2^3}{5^4}\left(\frac{5\,v' - 1}{1 - v'}\right)^2.\frac{2^3}{(1 - v')} = 0$$

sau

$$64\,(1 - v')\,M^3 + 3\,Pa\,(1 - v'^2)\,(37 - 5v')\,M^2 + \frac{P^3\,a^3}{20}\,(1 + v')^3\,(5\,v' - 1)^3 = 0 \quad (41)$$

Aceasta este curba învăluitoare a momentelor maxima pentru ramura din dreapta.

Am vĕḑut că v poate varia între o şi $\frac{3}{5}$ deci v poate şi el varia între -1 şi $\frac{1}{5}$; secţiunea considerată e cuprinsă între $-$ a şi $\frac{a}{5}$.

Equaţiunea (41) s'ar putea construi, pe direct fie cu ajutorul equat. (40), (40') şi (40'').

S'ar putea găsi şi valoarea «*maxima maximorum*» a momentelor încovăetoare; n'am avea de cât să eliminăm pe v între equat (41) şi derivata sa în raport cu v; equat resultanta în M ne ar da valoarea maximă şi minimă a momentului încovăetor, nu insist asupra acestei cestiuni.

b) *Branşa curbei învăluitoare a momentelor maxime când sarcina se află la stânga secţiunei.*

Transformând equaţiunea (21) în modul arătat mai sus, prin transportarea axelor, cu origina în O' equaţiunea (21) devine:

$$M = \frac{5}{64}\,Pa'\,(1 - v'^2)\,(u' + 1)\left[u'^3 - u'^2 - 5u' + \frac{25v' - 7}{5(1 + v')}\right] \quad (42)$$

şi condiţiunea ca momentele să fie maximum dă

$$u'^3 - 3u' - \frac{5}{5\,(1 + v')} = 0 \quad (43)$$

Observ că equat (42) se poate deduce din (28) schimbând pe u′ în — u′ şi pe v′ în — v′, prin urmare equaţiunea curbei învăluitoare a momentelor maxime, ramura din stânga, se va putea deduce din equat (41) schimbând pe v′ în — v′ (u nu figurează în acea equaţiune), deci acea equaţiune va fi

$$(44)\ 64\ (1+v')\ M^3+3\ Pa\ (-v'^2)$$
$$(37+5v)\ M^2-\frac{P^3a^3}{20}\ (1-v')^3\ (5v'+1)=0$$

găsirea momentului «*maxima maximorum*» ar fi o cestiune de calcul. Variabila v e coprinsă între $v=\frac{1}{5}$ şi $v=1$.

Notă. Formulele împingerilor şi liniile de influenţă date mai sus, sunt destul de aproximative numai când arcele sunt mai turtite; în acest cas valorile împrejurărilor, deci şi a momentelor nu diferă mult între ele (dupĕ cum am vĕḑut) şi liniile de influenţă pentru arcele circulare sunt aproape aceleaşi ca şi pentru arcele parabolice.

Variaţiunea secţiunei grinḑii arcului pentru ca formulele ce se obţin înlocuind pe ds prin dx să fie perfect exacte.

Presupunênd, ca şi până acum, arcul simetric în raport cu o axă verticală trecênd prin mijlocul deschiderei, presupunênd reazemele de nivel şi fixe, neţinênd compt de compresiune şi lansând la o parte eforturile datorite temperaturei, equaţiunea de condiţiune pentru equilibrul arcului este:

$$\int_0^l \frac{Myds}{EI}=0\ (45)$$

să presupunem pe E constant pe toată întinderea ccţiunei ω; equat.

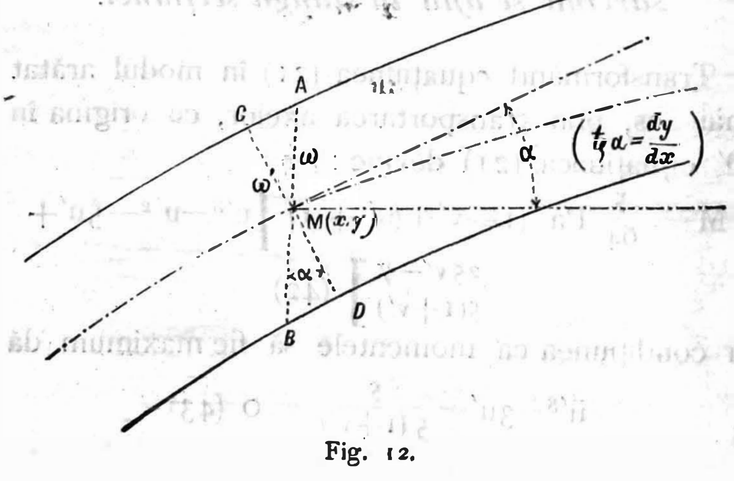


Fig. 12.

(45) se poate scri:

$$\int_0^l \frac{Mydx}{I\ \frac{dx}{ds}}=0;$$

n cas când:

$$I\ \frac{dx}{ds}=\text{constant}\ (46)$$

formulele aplicate mai sus sunt exacte.

Equaţiunea (46) nu se poate scri

$$\omega\, r^2\ \cos\alpha=\text{constant}$$

sau

$$\omega'\, r^2=\text{constant}$$

ω′ fiind secţiunea normală pe fibre mijlocie; când ω′ este constant am

$$r=\text{const}$$

raḑa de giraţie e constantă. Aceste sunt condiţiunile necesare şi suficiente.

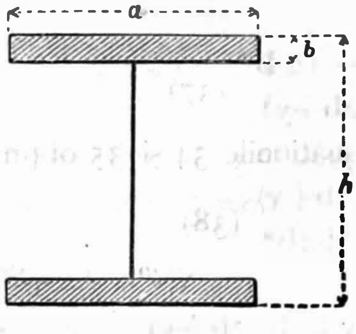
In cas când secţiunea arcului e un dublu T, condiţiunile devin

$$\omega'=2\,ab=\text{constantă}=k$$

şi

$$r=\frac{h}{2}=\text{constantă};$$

Am presupus că secţiunea inimei dublului T este negligeabilă căci numai in acest cas am:



$$I=\frac{1}{2}\ a\,b\,h^2$$

$$\text{şi}\ r^2=\frac{I}{\Omega}=\frac{\frac{1}{2}abh^2}{2\,ab}=\frac{h^2}{4}$$

$$\text{sau}\quad r=\frac{h}{2}$$

Fig. 13.

Tancred Constantinescu
Inginer în Serviciul Studiilor şi Construcţiunilor