CALCULUL LUCRARILOR DE CIMENT ARMAT

Aplicabilitatea formulelor relative la un solid omogen bolţilor de ciment armat.

Fie dA travaliul de deformaţiune al bolţei într'un strat oare-care ds.

dA_0 acel relativ la beton.

dA_0 acel relativ la armatura metalică.

Avem $dA = dA_0 + dA_1$, să însemnăm prin M_0, M_1, P_0, P_1, momentnle interioare şi forţele normale solicitând respectiv betonul şi ferul, vom avea:

$$dA_0 = \frac{M_0^2}{2E_0I_0}ds + \frac{P_0^2}{2E_0F_0}ds$$

$$dA_1 = \frac{M_1^2}{2E_1I_1}ds + \frac{P_1^2}{2E_1F_1}ds \quad (1)$$

ecuaţiuni în care E_0 şi E_1 sunt coeficienţii de elasticitate ai betonului şi ai ferului, I_0 şi I_1, momentele lor de inerti şi P F_0 şi F_1 secţiunile lor respective.

Dacă M este momentul datorit rezultantei P, trebue să avem;

$$M = M_0 + M_1 \quad (2)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad (3)$$

Pe lângă aceste din cauza legăturei intime între fer şi beton variaţiunile de lungime şi torsiunile acestor materiale trebue să fie în totul identice.

Aceste variaţiuni de lungime şi torsiunile sunt date prin câturile travaliului de deformaţiune provenind din forţa normală şi moment şi sunt exprimate prin:

$$\triangle ds = \left(\frac{dA_0}{dP_0}\right) = \left(\frac{dA_1}{dP_1}\right)$$

$$\triangle \varphi = \left(\frac{dA_0}{dM_0}\right) = \left(\frac{dA_1}{dM_1}\right)$$

sau având în vedere ecuaţiunile (1) şi (2).

$$\frac{P_0}{E_0F_0} = \frac{P_1}{E_1F_1} \quad (4)$$

$$\frac{M_0}{E_0I_0} = \frac{M_0}{E_1I_1} \quad (4)$$

de unde:

$$M_1 = \frac{E_1}{E_2}\frac{I_1}{I_1}M_0$$

$$P_1 = \frac{E_1}{E_0}\frac{F_1}{F_0}P_0$$

şi dacă punem $\frac{E_1}{E_0} = n;\ \frac{I_1}{I_0} = \alpha;\ \frac{F_1}{F_0} = \beta$

$$M_; = \alpha n M_0$$

$$P_1 = \beta n P_0$$

şi după ecuaţiunile (2) şi (3)

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \frac{M}{1+\alpha n} \\ P_0 &= \frac{P}{1+\beta n} \end{aligned}\right\} (6)$$

şi:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{\alpha n}{1+\alpha n}M \\ P_1 &= \frac{Bn}{1+\beta n}P \end{aligned}\right\} (7)$$

n trebue să rĕmâie constant în elementul de boltă considerat, şi dacă *n* variează cu funcţiunile statice ecuaţiunile sunt mereu satisfăcute.

După ecuaţiunile (1) (6) şi (7) espresiunea travaliului de deformaţiune devine:

$$oA = \frac{1}{(1+\alpha n)^2}\frac{M^2ds}{2E_0I_0} + \frac{1}{(1+\beta n)^2}\frac{P^2ds}{2E_0F_0} + \frac{\alpha^2{}_n^2)}{(1+\alpha n^2}\frac{M^2ds}{2E_1I_1^1} + \frac{\beta^2n^2}{(1+\beta_n)^2}\frac{P^2ds}{2E_1F_1}$$

sau dacă punem:

$$E^1 = nE_0$$

$$I_1 = \alpha I_0$$

$$F_1 = \beta F_0$$

$$dA = \frac{M^2\,ds}{2E_0(1+\alpha n)I_0} = \frac{P^2\,ds}{2E_0(1+\beta n)F_0}$$

şi înlocuind I_0 prin $I - I_0$

F_0 prin $F - F_0$

I şi F fiind momentele de inertie şi suprafaţa secţiuneĭ bolteĭ considerată ca omogenă

Avem:

$$dA = \frac{M^2ds}{2E_0(1+\alpha n)(I-I_1)} + \frac{P^2ds}{2E_0(1+\beta n)(F-F_1)}$$

Expresiunea $(1+\alpha n)(I-I_1)$ să póte scrie

$$\left(1+\frac{I_1}{I-I_1}n\right)(I-I_1) = I + (n-1)I_1$$

saŭ $I\left[1+(n-1)\frac{I_1}{I}\right] = I(1+\acute{\alpha}n')$

punênd $\acute{\alpha} = \frac{I_1}{I}$ şi $n' = n-1$

saŭ $n' = \frac{E_1}{E_0} - 1 = \frac{E_1 - E_0}{E_0}$

de asemenea expresiunea: $(1+\beta n)(F-F_1)$ se póte scri:

$$F(1+\beta' n')$$

dacă punem $\beta' = \frac{F_1}{F}$

și $n' = n - 1 = \frac{E_1 - E_0}{E_0}$

Travaliul de deformațiune să póte pune deci sub forma:

$$d A = \frac{M^2 ds}{2 E_0 (1 + \acute{\alpha} n') I} + \frac{P^2 ds}{2 E_0 (1 + \beta' n') F} = \frac{1}{E_0 (1 + \acute{\alpha} n')} \left[\frac{M^2 ds}{2 I} + \frac{1 + \acute{\alpha} n'}{1 + \beta' n'} \frac{P^2 ds}{2 F} \right]$$

și dacă $E = E_0 (1 + \acute{\alpha} n')$

$$d A = \frac{1}{E} \left[\frac{M^2 ds}{2 I} + \frac{1 + \acute{\alpha} n'}{1 + \beta' n'} \frac{P^2 ds}{2 F} \right]$$

De óre-ce influința forțelor normale este negligeabilă în raport cu acea a momentelor să póte înlocui cu 1 coeficientul $\frac{1 + \acute{\alpha} n'}{1 + \beta n'}$, care este egal cu 1,10 în medie și obținem:

$$d A = \frac{M^2 ds}{2 E I} + \frac{P^2 ds}{2 E F}$$

De óre-ce pe lângă acestea, coeficientul $\acute{\alpha} = \frac{I_1}{I}$ variază fórte puțin pentru tóte secțiunile, póte fi înlocuit printr'o valóre medie și resultă *că suntem în drept a stabili calculile bolței propuse, ca și cum materialele care o compun ar fi omogene și ar avea drept coeficient de elasticitate* $E = E_0 (1 + \acute{\alpha} n')$.

NOTA.

TABLOUL COEFICIENȚILOR $\acute{\alpha}$ ȘI β'

Secțiuni	d(*) in cm.	d_1 (*) in cm.	I_1 in $\overline{cm.}^4$	I_1 in $\overline{cm.}^4$	$\frac{I_1}{I} = \acute{\alpha}$	F in $\overline{cm.}^2$	F_1 in $\overline{cm.}^2$	$\frac{F_1}{F} = \beta'$
	60,0	46,0	1,800,000	23,379	0,01299	6000	46,18	0,00770
I	55,0	40,0	1,386,000	18,472	0,01332	5500	46,18	0,00840
II	52,0	37,0	1,171,730	15,804	0,01349	5200	46,18	0,00888
III	47,5	32,5	893,100	12,192	0,01365	4750	46,18	0,00972
IV	43,0	28,0	662,590	9,051	0,01366	4300	46,18	0,01074
V	38,5	23,0	475,550	6,376	0,01340	3850	46,18	0,01200
VI	35,0	20,0	357,290	4,618	0,01293	2500	46,18	0,01319

$\acute{\alpha} = 0{,}01335$; $\beta' = 0{,}01009$ valori medii.

(*) d este grosimea bolței
(*) d este distanța zăbrelelor metalice

Valori medii ale expresiunei $\frac{1 + \acute{\alpha} n'}{1 + \beta n'}$

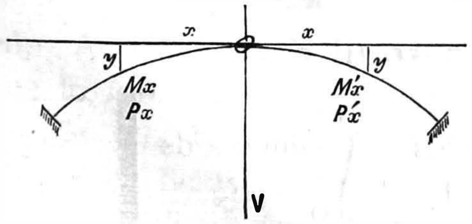
pentru $n' =$	$\frac{1 + \acute{\alpha} n'}{1 + \beta' n'} =$
20	1.046
40	1.093
69	1.122

Se va aplica deci, pentru diverse încărcări, formulele care se raportă la ipoteza unei materii omogene.

Calculul momentelor încovăetóre și compresiunilor normale.

In arcurile simetrice fară articulație la nasceri, travaliul total de deformațiune se póte exprima, prin formula următóre, în tóte cazurile unde împingerea se póte negligea:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{M_x{}^2 + M_x'^2}{2 E I_x} ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{P_x{}^2 + P_x'^2}{2 E F_x} ds + L \ldots (10)$$



(Fig. 1)

M_2, M'_2 sunt momentele încovăetóre.

P_x, P'_x forțele normale pentru secțiuuea x y.

$E = E_0 (1 + \acute{\alpha} n')$ coeficientul de elasticitate.

I_x momentul de inerție.

F_x suprafața secțiunei pline.

ds lungimea unui element de arc.

L travaliul de deformațiune provenind din reacțiunile pe rézeme.

Dacă mai însemnăm prin:

M momentul la chee.

H împingerea orizontală.

S puterea tăietóre la chee.

m_x, m'_x momentele forțelor esterióre pe axa de la chee până la secțiunea (x y).

V_x, V'_x compozantele verticale ale suprafețelor pentru acéstă secțiune.

φ_x — unghiul normalei la arc cu verticală.

Avem:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= m - Hy - Sx + m_x \\ m'_x &= m - Hy - Sx + m'_z \end{aligned} \right\} \ldots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} P_x &= H \cos \varphi_x + S \sin \varphi_x + V'_x \sin \varphi_x \\ P'_x &= H \cos \varphi_x + S \sin \varphi_x + V'_x \sin \varphi_x \end{aligned} \right\} \ldots (12)$$

M. H. S. sunt valori pe care statica nu le póte determina. Pentru determinarea lor trebuesc introduse condițiunile.

$$\frac{dA}{dM} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{dA}{DH} = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{dA}{dS} = 0 \qquad (14)$$

Avênd în vedere ecuațiunile (11) și (12), ecuațiunile (13), (14) și (15) devin.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{M_x + M'_2}{E\,I_x} ds + \frac{dL}{dM} = \qquad (16)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{M_x + M'_x}{E\,I_x} y\, ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(P_x + P'_x}{E\,F_x} \sin\varphi_x\, ds + \frac{dL}{dS} = 0\ (18)$$

Și după (11) și (12)

$$2\frac{M}{E}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dS}{I_x} = \frac{2H}{E}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{yds}{I_x} + \frac{1}{E}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m_x + m'_x}{I_x} ds + + L' = 0 \ldots \quad (I)$$

$$\frac{2M}{E}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{yds}{I_x} + \frac{2H}{E}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{yds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^2\varphi_x\, ds}{F_x}\right] + \frac{1}{E}\left[-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m_x + m'_x}{I_x} yds + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{V_x + V'_x}{F_x} \sin\varphi_x \cos\varphi_x\, ds\right] + + L'' = 0 \ldots \quad (II)$$

$$\frac{2S}{E}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 ds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sm^2\varphi_x\, ds}{F_x}\right] + \frac{1}{E}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-m + m'_x}{I_x} x\, ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-V_x + V'_x}{F_x} sm^2\varphi_x\, ds\right] + L''' = \ldots \quad (III)$$

Ecuațiunile (I), (II) și (III daŭ valorile luĭ M S, H pentru tóte încărcările.

a) *Greutatea proprie a arculuĭ*

In acest caz:

$m_x = m'_x$

$V_x = V'_x$

$L = L' = L'' = L''' = 0$

și prin urmare după (III) $S=0$

Aceste ecuațiunĭ devin după înmulțirea cu $\frac{E}{2}$

$$M\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I_x} - H\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{I} ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m_x}{I_x} = 0 \quad (I_a)$$

$$-M\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{yds}{I_x} + H\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y^2 ds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\varphi\, x^2\, ds}{F_x}\right] - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m_x y}{I_x} ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{V_x \sin\varphi_x \cos\varphi_x\, ds}{F_x} + \quad (II\text{-}a)$$

b) *Influența uneĭ încărcărĭ numaĭ de o parte*

Atuncĭ avem :

$m'_x = 0$

$V'_x = 0$

$L = L' = L'' = L''' = 0$

și prin urmare :

$$M\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I_2} - H\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{yds}{I_2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2m_2\, ds}{I_x} = 0 \quad (I_b)$$

$$-M\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{yds}{I_x} - H\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{yx_2 ds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\varphi\, x^2 ds}{F_x}\right] - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m_x\, yds}{I_x} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{V_x \sin\varphi_x \cos\varphi x ds}{F_n} = 0 \quad (IIb)$$

$$S\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 ds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\varphi x^2 ds}{F_x}\right] - \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m_x x\, ds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{V_x \sin\varphi\, x^2 ds}{F_x}\right] = 0 \quad (III\ b)$$

c) *Influența torsiunei culeei*

Avem (fig. 2).

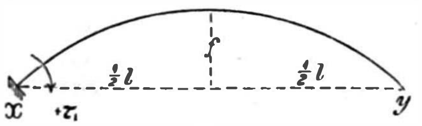


Fig. 2

$m_x = m'_x = 0$

$V_x = V'_2 = 0$

$L = M_0$ arc T_0 în care $M_0 = FH - \frac{1}{2} l S$ (momental a nasceri).

arc τ_0, torsiunea culeei

Avem deci

$$L' = \frac{dL}{dM} = \tau_0$$

$$L'' = \frac{dl}{dH} = -f\tau_0$$

$$L''' = \frac{dL}{dS} = -\frac{1}{2} l\, \tau$$

și ecuațiunile I, II și III

$$M\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I_x} - H\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho\, ds}{I_x} + \frac{1}{2} E\,\tau_0 = 0 \quad (I\ c)$$

$$-M\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y\, ds}{I_x} + H\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y^2 ds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\varphi\, x\, ds}{F_x}\right] - \frac{1}{2} E\, f\, \tau_0 = 0 \quad (II\ c)$$

$$S\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 ds}{I_x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sim}\,\varphi\, x^2 ds}{F_x}\right] - \frac{1}{2} E l\, \tau = 0 \quad (IIIc)$$

(Va urma)