NOMOGRAFIA

SAU

TEORIA TABLOURILOR GRAFICE (ABACE).

(urmare)

7. *Deplasarea scărilor.* Am văzut că alipind două scări putem forma o abacă pentru a reprezenta o formulă cu două variabile. In loc de a alipi scările le am putea așeza paralel una cu alta, așa că originile lor să fie pe aceiași perpendiculară comună. In acest caz am putea găsi punctele conrespondente ducînd perpendiculare comune la cele 2 scări. Aceste perpendiculare le putem duce cu echerul, sau cu un *calc* pe care ar fi trase 2 perpendiculare, sau chiar am putea trasa pe hîrtie un număr oare-care de perpendiculare ori cît de apropiate am voi.

Am avea atunci o abacă cu scări paralele directe. Am putea însă întoarce o scară din cele două cap la cap, și în acest caz e evident că liniile ce unesc punctele conrespondente vor trece toate prin un același punct situat pe perpendiculara dusă la mijlocul scărilor și în mijlocul acelei perpendiculare. In acest caz conrespondența celor două scări se va face ast-fel: prin punctul de diviziune al unei scări și punctul fix ducem o dreaptă, care taie scara cealaltă în diviziunea conrespunzătoare celei de pe prima scară. Această dreaptă o putem duce cu rigla, cu un fir de ață, cu o dreaptă trasată pe un calc, sau chiar putem trasa pe hîrtie un număr oare-care din aceste drepte. Este evident că în cazul cînd voim a trasa liniile chiar pe abacă, nu e nevoie a duce numai de cît drepte, ci putem duce ori-ce linii curbe sau frînte cu condițiune de a le face să treacă prin punctele conrespondente; căci plecînd de la o diviziune și urmărind linia ce pleacă din ea vom ajunge la cealaltă diviziune. Această înlocuire e bine să se facă ori de cîte ori liniile drepte ar da o abacă prea confuză, și în care nu s'ar putea urmări bine din ochi drumul de la o diviziune de pe o scară la o diviziune de pe altă scară.

Dacă avem o abacă cu scările paralele, putem da uneia din scări o translațiune în lungul ei. In acest caz punctele conrespondente vor rămîne pe drepte paralele cu o direcție dată dacă scările sînt directe, sau vor trece iarăși prin un punct dacă scările erau inversate.

Putem încă roti una din scări în jurul uneia din extremitățile ei, și a stabili conrespondența diviziunilor prin linii drepte sau ori-cum. Cu modul acesta, două scări care erau alipite le putem pune în ori-ce pozițiune una față de alta. Așa de exemplu, dacă scările AB, CD erau alipite, și voim a duce scara CD în $C'''D'''$, o putem duce în $C'D'$ paralel cu CD, o putem deplasa în $C''D''$ și apoi în $C'''D'''$. Liniile de conrespondență ale diviziunilor sînt în aceste diferite cazuri mn, mn', mn'', mn'''.

Conrespondența diviziunilor se poate face și în alt mod, care are avantagiul de a permite construcțiunea abacelor pentru formule cu mai multe variabile. Prin punctele conrespondente m, n''' putem duce paralele cu două direcțiuni date L și L' și a căuta punctul de întîlnire k al acelor paralele. Dacă pentru toate punctele conrespondente de pe cele două scări facem aceiaşi construcţiune, vom găsi o serie de puncte analoage cu k, pe care unindu-le cu o linie continuă vom obţine o curbă PQ. Această curbă ne poate permite de a găsi punctele conrespondente de pe cele două scări. In adevăr, dacă prin un punct de pe scara AB ducem o paralelă cu dreapta L pînă taie curba PQ şi din punctul de întîlnire o paralelă cu L′, această paralelă tae scara $C'''\ D'''$ în puntul conrespondent celui de pe scara AB. Această construcţiune grafică se poate înlocui, prin deplasarea pe abacă a unui calc pe care ar fi trase două drepte făcînd între ele un unghiu egal cu al dreptelor L şi L′ şi a deplasa acest calc pe abacă aşa ca laturile unghiului să fie paralele cu L şi L′, ca vîrful lui să percurgă curba PQ şi ca una din laturi să treacă prin o diviziune a unei scări. Atunci cealaltă latură trece prin diviziunea conrespondentă de pe cealaltă scară. S'ar putea chiar trasa pe abacă o serie suficientă de drepte analoage cu mk; $n'''k$ pentru a putea urmări din ochi diviziunile ce se conrespund.

Se poate pune acum întrebarea pentru ce să mai facem atîtea construcţiuni sau să trasăm atîtea linii cînd prin mijlocul scărilor alipite aveam foarte simplu conrespondenţa diviziunilor? Avantagiurile ce rezultă din deplasarea scărilor sînt două. Mai întîiu, după cum vom vedea, putem reprezenta în acest mod formule cu trei variabile, şi apoi, nu mai e nevoie a construi scări speciale pentru fie-care variabilă. In adevăr, nimic nu ne împedică ca, în locul scărei $C'''\ D'''$ să punem o scară regulată, ca şi scara AB, căci prin drepte analoage cu mn'''; sau curbe analoage cu PQ, putem stabili foarte uşor conrespondenţa diviziunilor. La rigoare, diviziunile pe AB şi $C'''\ D'''$ ar putea fi luate complect arbitrare, căci trasînd linii de conrespondenţă suficiente, putem găsi valorile cari convin formulei ce voim a reprezenta. Se obişnueşte însă ca aceste scări să se gradeze în mod regulat, pentru a se putea face mai uşor interpolarea din vedere. In practică se obişnueşte a se aşeza cele două scări regulate AB, $C'''\ D'''$ perpendiculare una pe alta, avînd origina în punctul de întîlnire al lor, iar direcţiunile L şi L′ se dau paralele cu scările. Obţinem atunci cea ce se numeşte o *abacă carteziană*.

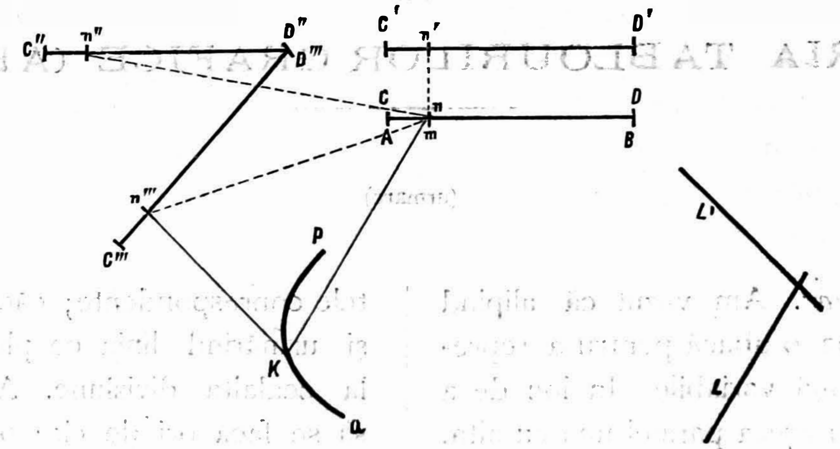
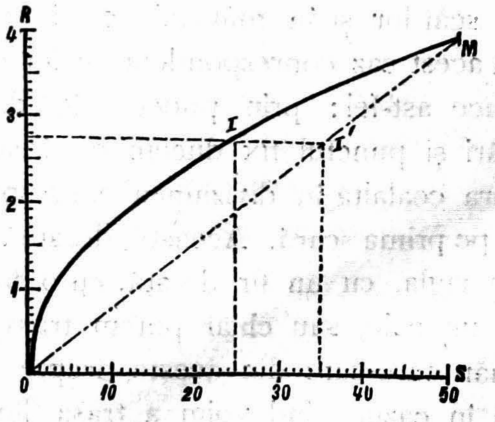


Fig. 7

8. *Abace carteziane simple sau cu curbe cotate.* Să ne propunem ca să construim abaca carteziană care să reprezinte formula (1). Pe două drepte perpendiculare OX, OY vom trasa două scări regulate, prin punctele de diviziune conrespondente ridicăm perpendiculare pe cele două scări şi unim punctele de diviziune prin o curbă. In figura 8 s'a luat pentru suprafeţe 1^{mm} pentru 1^{dcm^2} iar pentru raze 1^{mm} pentru 1^{cm}. Curba construită

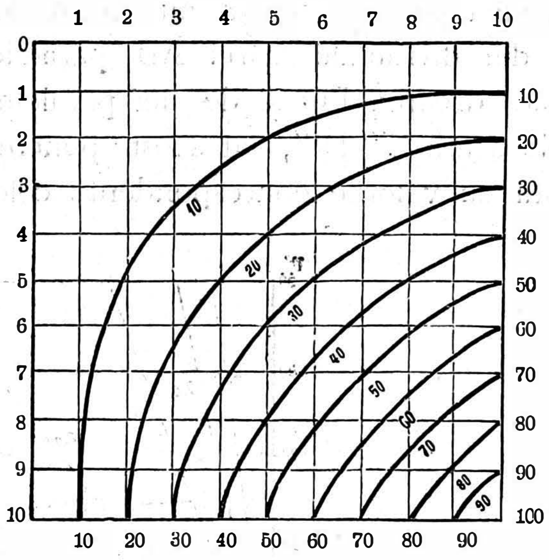


(Fig. 8.)

aici nu e de cît parabola de la fig. 3. Putem să ne servim de o asemenea abacă în mai multe moduri: *a*) Sau ducînd în un punct de pe scara S (sau R) o perpendiculară pînă întîlneşte curba şi de aci o paralelă cu scara S (sau R) pînă întîlneşte scara R (sau S) şi vom găsi punctul de pe scara R (sau S) care conrespunde celui de la care am plecat; *b*) sau trasăm pe abacă o serie de paralele cu cele 2 scări pentru a urmări din ochi diviziunile ce se conrespund; *c*) sau trasăm pe un calc 2 perpendiculare şi îl deplasăm aşa ca întîlnirea lor să vie pe curbă, iar liniile perpendiculare pe scări; *d*) sau construim pe o linie mobilă una din scări şi o deplasăm paralel pînă ce diviziunea dată e pe curbă, în care caz origina scărei arată diviziunea conrespondentă de pe cealaltă scară.

Dacă formula ce voim a reprezenta coprinde trei variabile procedăm în modul următor: dăm uneia din variabile o valoare numerică oare-care şi atunci formula va avea numai 2 variabile, în care caz putem construi o abacă carteziană cu o curbă, pe care curbă o vom numerota cu valoarea dată primei variabile; dăm alte valori prime, variabile şi construim alte curbe în acelaşi mod şi repetăm această operaţiune dînd valori variabilei ori-cît de apropiate am voi, şi în limitele în care acea variabilă e dată în practică. Vom obţine ast-fel o abacă cu o serie de curbe numite *curbe cotate*, prin analogie cu curbele de nivel topografice. In toate construcţiunile curbelor cotate păstrăm aceleaşi scări pentru cele 2 variabile. Este uşor de văzut cum ne putem servi de o asemenea abacă. Fie în adevăr *a, b, c*, cele trei cantităţi ce intră în formula ce voim a reprezenta, şi fie *c* cantitatea căreia îi dăm valori numerice, fie *b* cantitatea reprezentată pe scara verticală şi *a* cantitatea reprezentată pe scara orizontală. Dacă se dă două valori ale lui *a* şi *b*, căutăm punctele ce le conrespund pe scări, ducem prin ele perpendiculare pe scări şi cota curbei pe care se taie aceste perpendiculare e valoarea căutată a lui *c*. Dacă se dă *a* şi *c* atunci ridicăm pe scara *a* în punctul conrespondent o perpendiculară pînă taie curba a cărei cotă e valoarea dată lui *c*, şi de aci ducem o paralelă cu scara *a* pînă taie scara *b*, care punct de tăere ne dă valoarea căutată a lui *b*. In mod analog se procede cînd se dă *b* şi *c*. Dacă nu avem o curbă care să conrespundă unei valori date lui *c*, atunci putem interpola din vedere o curbă între curbele cari au ca cote o valoare imedicat superioară şi imediat inferioară celei date pentru *c*.

Şi la abacele cu curbe cotate putem întrebuinţa un calc, o scară mobilă sau să ducem un număr oare-care de paralele cu cele două scări. Ca exemplu de asemenea abace dăm aci abaca lui *Pouchet* pentru înmulţire, care este prima abacă cunoscută. Ecuaţia ce reprezintă această abacă este $c = ab$. Dacă dăm lui c o valoare constantă c_1 atunci ecuaţia $ab = c_1$ reprezintă o hiperbolă echilateră, aşa că curbele cotate sînt hiperbole echilatere. (Fig. 9).



(Fig. 9).

O abacă cu curbe cotate poate servi în unele cazuri şi pentru valori numerice mai mari sau mai mici ca cele ce sînt însemnate pe ea. Aceasta se întîmplă de exemplu cînd multiplicînd două variabile cu puteri ale lui 10, şi a treia variabilă se înmulţeşte cu o putere a lui 10. Aşa de exemplu pentru abaca precedentă observăm că $(10\,a)(10\,b) = 100\,c$; aşa că cu ajutorul abacei putem multiplica de exemplu şi pe 40 cu 50 şi avem ca produs $20 \times 100 = 2000$.

In multe cazuri curbele cotate se reduc la drepte cotate, şi în acest caz construcţia abacei se simplifică foarte mult. Aşa de exemplu să ne propunem a construi o abacă, care să ne dea volumul cilindrelor cînd cunoaştem raza şi înălţimea. Dacă însemnăm cu v volumul, cu r raza bazei şi cu h înălţimea avem:

$$v = \pi r^2 h$$

Să construim două scări regulate perpendiculare care să ne reprezinte pe h şi pe r iar pe v să'l reprezentăm prin curbe cotate. Se vede că făcînd r constant în ecuația precedentă, ea reprezintă drepte ce pleacă din origină. Se poate construi ast-fel ușor abaca din figura 10 care reprezintă formula precedentă. Ast-fel se vede pe abacă că pentru un cilindru de $3^m,20$ înălțime și avînd 1,50 ca rază a bazei avem aproximativ 22^{mc} volum.

9. *Anamorfoza.* Cînd curbele cotate se reduc la drepte, sau chiar la circonferințe construcțiunea abacelor se simplifică foarte mult. In cazul cînd voim a reprezenta o formulă cu 2 variabile prin o abacă putem tot-deauna obține în locul curbei PQ din fig. 7 o linie dreaptă, dacă construim una din scări, după ce ne am fixat o dreaptă în locul lui PQ, căci pentru aceasta nu avem de cît să ducem din diviziunile scărei AB paralele cu L pînă taie dreapta PQ și de aci paralele cu L′ pînă taie scara C‴ D‴, iar aceste puncte le vom numerota cu valorile conrespondente celor de la

O abacă cu curbe cotate în general nu se poate transforma în alta cu drepte sau circomferințe cotate, căci pentru aceasta ar trebui ca o transformare aplicată uneia din curbe pentru a o înlocui cu o dreaptă sau circonferință, să transforme în drepte sau circonferințe toate cele lalte curbe cotate, lucru ce nu se întîmplă de cît dacă formula dată este de anumite tipuri.

Pentru ca o formulă cu trei variabile să se poată reprezenta prin o abacă cu drepte cotate trebue ca să se poată descompune în trei părți legate între ele două prin semnele + sau — și a treia prin semnul = de cele-lalte două. Una din părți trebue să conție numai o variabilă; a doua să se descompue în un produs de doi factori din care unul să depindă numai de prima variabilă, ca și prima parte, iar al doilea factor de a doua variabilă numai; iar a treia parte să se descompue în un produs de doi factori din care primul să de-

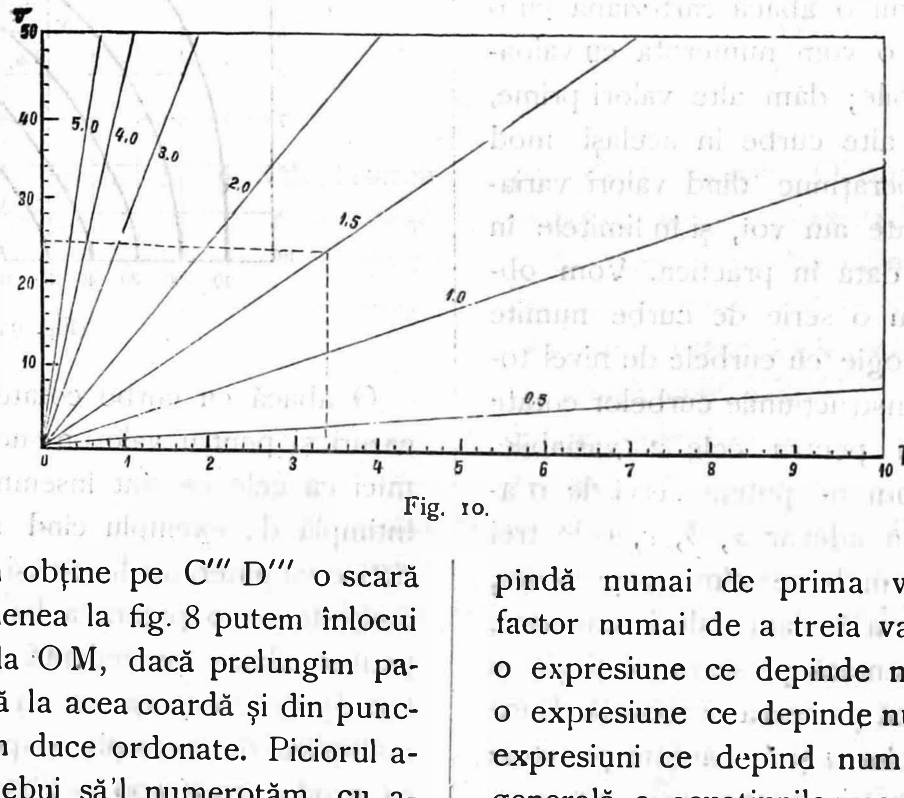


Fig. 10.

care am plecat. Vom obține pe C‴ D‴ o scară neregulată. Tot asemenea la fig. 8 putem înlocui curba OIM cu coarda OM, dacă prelungim paralelele la scara S până la acea coardă și din punctele de intîlnire I′ am duce ordonate. Piciorul acestei ordonate va trebui să'l numerotăm cu același număr cu care era numerotat piciorul ordonatei lăsată din I. Scara S se va deforma atunci și nu va mai fi o scară regulată. Transformațiunei prin care se înlocuește o curbă de pe o abacă prin drepte sau alte curbe mai simple de construit, i s'a dat numele de *anamorfoză*.

O abacă se poate anamorfoza fie pe cale geometrică după cum am arătat mai sus, fie căutînd legea după care se modifică diviziunile de pe una sau ambele scări.

pindă numai de prima variabilă, iar al doilea factor numai de a treia variabilă. Așa dacă A e o expresiune ce depinde numai de variabila a, B o expresiune ce depinde numai de b iar C, C′, C″ expresiuni ce depind numai de c, atunci forma generală a ecuațiunilor ce se pot reprezenta prin abace cu drepte cotate este:

$$C = \pm C'A \pm C''B.$$

Un mare număr de formule se poate pune supt forma aceasta. Așa $ab=c$ se poate scrie $o=a-c\frac{1}{b}$ care conrespunde cazului cînd $C=o$, $C'=1$, $C''=c$, $A=a$, $B=1:b$.

Formula:

$$t=0{,}800-0{,}003\frac{l}{r},$$

care ne dă travaliul la flambagiu al unei piese de oţel dulce, în funcţie de lungimea de flambagiu l şi de raza de giraţie r se poate scrie:

$$o=(0{,}800-t)\,r\,b-0{,}003\,l,$$

care conrespunde cazului cînd $C=o$, $C'=1$, $C''=0{,}003$, $A=0{,}800-t$, $B=l$. Vom construi mai tîrziu o abacă pentru această formulă luînd ca variabile momentul de inerţie şi secţiunea.

Unele formule care nu se pot pune supt forma dată, se pot aduce la acea formă dacă le aplicăm logaritmi. Aşa formula $ab=c$; devine aplicînd logaritmi: $\log c=\log a-\log b$, care conrespunde cazului cînd $C=\log c$, $C'=1$, $C''=1$, $A=\log a$, $B=\log b$. Pe acest principiu e construită abaca din fig. 11 care poartă numele de *abaca universală a lui Lalanne*.

Abaca universală a lui Lalanne

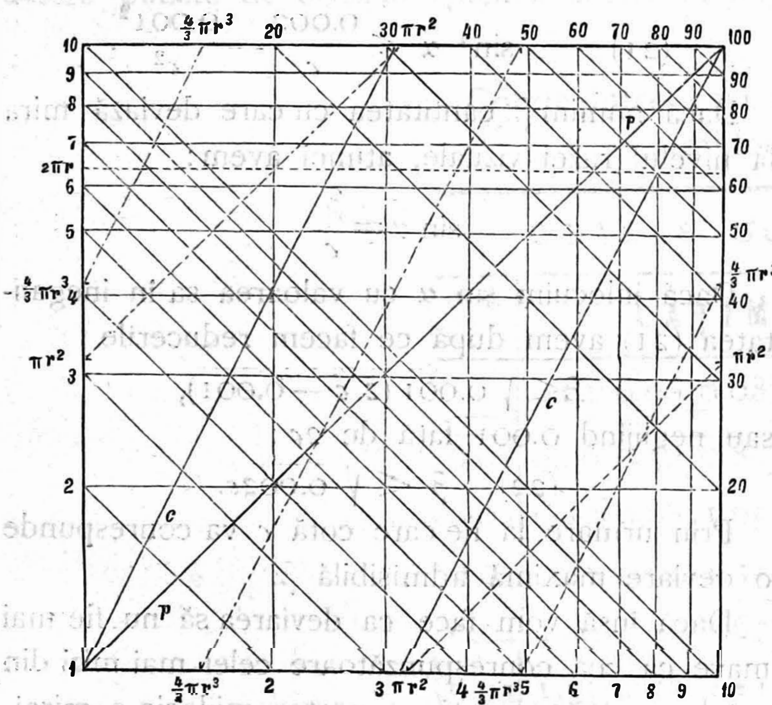


Fig. 11.

Cu ajutorul ei putem face înmulţiri, împărţiri, ridicare la puteri, extrageri de rădăcini, precum şi alte calcule uzuale ca găsirea lungimei circomferinţei, ariea cercului, volumul sferei, etc.

Pentru a afla produsul a 2 numere citim cota dreptei care trece prin intersecţia orizontalei şi verticalei ce conrespund celor două numere. Aşa otizontala lui 4 se taie cu verticala lui 5 pe linia cotată 20. Cotele liniilor se citesc pe latura superioară sau din dreapta a pătratului.

Pentru a împărţi de exemplu pe 30 cu 6, urmărim orizontala 6 pînă taie linia cotată 30 şi piciorul verticalei ce trece prin puntul de întîlnire ne va da cîtul 5. Pentru a afla patratul unui număr e uşor de văzut că punctele ce dau pătratele sînt pe diagonala *pp* a pătratului şi că prin urmare găsim patratul unui număr urmărind orizontala acelui număr pînă la diagonala *pp* şi citind cota liniei ce trece prin acel punct. Pentru rădăcini patrate procedăm în mod invers şi anume luăm intersecţia liniei cotate ce conrespunde numărului dat cu linia *pp* şi citim pe orizontala (sau verticala) punctului de întîlnire rădăcina căutată. Pentru ridicarea la cub observăm că aceasta revine la înmulţirea unui număr cu patratul său şi că dacă luăm numărul pe scara orizontală, iar patratul pe scara verticală şi că lungimea pe scară a unui patrat e dublul lungimei ce conrespunde acelui număr (de oare ce $\log a^2=2\log a$), atunci rezultă că toate cuburile se vor găsi pe o dreaptă plecînd din 1 şi avînd înclinarea de 2 către 1. Aceste linii sînt trasate pe abacă şi însemnate cu *c, c*. Pentru a găsi un cub cu această abacă luăm numărul dat (de exemplu 2) pe scara orizontală şi mergem pe verticală pînă la linia *c* iar cota (8) a dreptei ce trece prin punctul de întîlnire e cubul căutat. Pentru rădăciuni cubice se procede în modul următor. Tot cu liniile *c* se poate găsi şi puterea $\frac{2}{3}$ a unui număr. Aşa de exemplu dacă voim a avea pe $8^{\frac{2}{3}}$, luăm linia cotată 8 şi căutăm întâlnirea ei cu linia *c* iar orizontala ce trece prin punctul de întâlnire ne dă numărul căutat 4.

Pe abacă linia puntată $2\pi r$ ne dă circonferinţile, citind cota linii ce trece prin întîlnirea acestei drepte cu verticala ce conrespunde lui v; căci aceasta revine la a înmulţi 2π cu r.

Linia πr^2 paralelă cu diagonala *pp* şi care trece prin punctul ce conrespunde lui π pe scara verticală ne dă ariile cercului. Demonstraţia e uşoaă observând că $\log\pi r^2=\log\pi+\log r^2$, aşa că $\log r^2$ se sporeşte tot-de-a-una cu aceiaşi cantitate $\log\pi$ cea ce revin la a ridica în sus diagonala *pp'* pe o distanţă verticală egală cu $\log.\pi$. Linia $\frac{4}{3}\pi r^3$ paralelă cu linia *c* ne dă volumul sferei. Aceste linii trec prin punctul de pe scara verticală conrespunzător lui $\frac{4}{3}\pi$. Demonstraţia se face ca şi la aria cercului. Tot prin mijloace analoage cu acesta putem reprezenta pe abacă ori-ce formule de tipul $a=m\,b^n$.

(va urma)

I. Ionescu