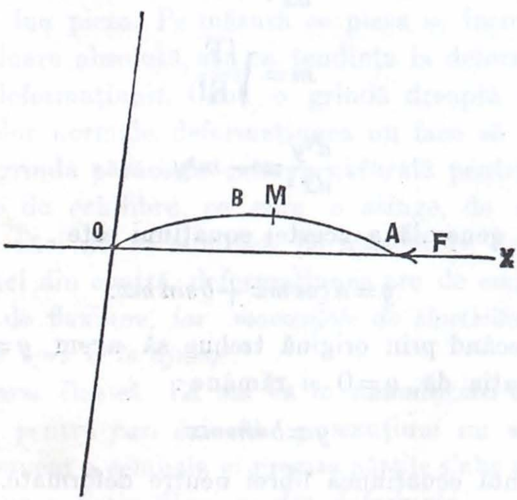
Calculul pieselor comprimate.

In genere piesele comprimate se considera în rele condițiuni de resistență și din această causă se iau diferite precauțiuni la calcularea lor. Această idee provine din principiul admis că echilibrul acestor piese deformate este instabil și că flambagiul început, el se termină o dată cu ruptura piesei.

Ne propunem a arăta că acest principiu este teoretic prea puțin fondat și dacă în practică piesele comprimate se rup în mod brusc, causa este cu totul alta.

Pentru aceasta vom relua teoria lui Euler asupra acestui calcul. (Collignon Cours de Mécanique appliquée aux constructions).

Fie $0x$, $0y$ două axe rectangulare și OBA o piesă elastică, care



are un început de flexiune. Fie F forța care a produs această flexiune, în planul axelor.

https://biblioteca-digitala.ro

Fie x, y coordonatele unui punct M al fibrei neutre. Momentul de flexiune în M, va fi

$$-\mathrm{F}y$$

iar momentul elastic este

$$\frac{\mathrm{EI}}{\rho}$$

ρ fiind rază de curbură în M a fibrei elastice, iar E și I două cantități cunoscute. Spre a avea echilibru trebue:

$$\frac{\mathrm{EI}}{\rho}=-\mathrm{F}y$$

însă

$$\mu=\frac{\left[1+\frac{dy}{dx}\right]^{3/2}}{\frac{d_y^2}{dx^2}}$$

sau neglijând pe $\frac{dy}{dx}$ pentru deformațiuni foarte mici vom avea:

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}=-\mathrm{F}y$$

sau punând

$$m=\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-m^2y$$

Integrala generală a acestei equațiuni este

$$y=a\cos mx+b\sin mx.$$

Curba trecând prin origină trebue să avem $y=0$ când facem $x=0$, deci ecuația dă, $a=0$ și rămâne:

$$(1) \qquad y=b\sin mx$$

ceia ce representă ecuațiunea fibrei neutre deformate.

Pentru determinarea celei de a doua constante arbitrare, se întrebuințează o metodă care nu e îndestul de riguroasă.

Continuăm teoria admisă:

https://biblioteca-digitala.ro

Deformaţiunea elastică fiind foarte mică putem confunda lungimea arcului de sinusoidă OBA cu coarda OA. Daca dar l e lungimea piesei va trebui să avem $x=0$ pentru $x=l$. Or aceasta nu se poate de cât daca avem:

$$(2) \qquad ml=k\pi$$

k fiind un număr întreg.

Astfel va trebui să avem $b=0$, ceia ce nu mai represintă o piesă deformată, ci o piesă supusă compresiunei simple.

Inlocuind pe m cu valoarea sa avem:

$$(3) \qquad F=\frac{EI\pi^2}{l^2}$$

„Acesta este, zice autorul citat, cea mai mică forţă care poate „să facă să se încovoae piesa. Dacă F e mai mic de cât aceste li„mite, echilibrul exige ca b să fie nul şi flexiunea laterală este „imposibilă; în acest cas compresiunea nu compromite stabilitatea „echilibrului.“

Daca F este superior limitei sale, echilibrul are loc când $b=0$ *dar e instabil*, şi, dacă flexiunea începe, nu numai că analisa nu determină coeficientul b, dar ea arată că echilibrul este imposibil, ori ce curbură ar lua piesa. Pe măsură ce piesa se încovoae, ordonatele y cresc în valoare absolută, aşa ca tendinţa la deformare creşte prin chiar faptul deformaţiunii. Când o grindă dreaptă se încovoae sub acţiunea forţelor normale, deformaţiunea nu face să varieze momentele forţelor; grinda părăseşte „starea naturală pentru a merge către „o nouă stare de echilibru, pe care o atinge, de oare ce această „stare e fixă, căci nu se modifică pe măsură ce deformaţia devine „mai mare. Aci din contră, deformaţiunea are de consecinţă sporirea „momentelor de flexiune, *iar momentele de elasticitate nu cresc des„tul de repede spre a le ajunge.*“

Iată teoria clasică. Ea sta ca o ameninţare continuă asupra acestor piese, pentru cari ori câte precauţiuni nu sunt prea multe.

Ne propunem a semnala şi preciza părţile slabe ale acestor teorii.

Să reluăm ecuaţia fibrei neutre deformate:

$$(1) \qquad y=b \sin mx$$

Ori cât de mică ar fi deformaţiunea, distanţa OA nu poate fi

https://biblioteca-digitala.ro

egală cu l. A admite $OA = l$ este a admite de la început că nu există flexiunea și atunci e invederat că avem $b = 0$ și atunci nu numai daca $F = \frac{EI\pi^2}{l^2}$ ci pentru ori ce valoare de x

Să însemnăm cu a perioada smusoidei. Observăm că ecuațiunea (1) având o constantă nedeterminată represintă o serie de smusoide trecând toate prin origine și având aceiași perioadă a.

Lungimea arcului perioadei se va obține prin integrale definite

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} (1 + b^2 m^2 cos^2 mx)^{\frac{1}{2}} dx$$

b va varia dar cu lungimea piesei, așa ca să avem totdeauna

$$(2) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{m}} (1 + b^2 m^2 cos^2 mx)^{\frac{1}{2}} dx = l$$

Ecuațiunea (2) va determina pe b, care represinta și săgeata luată de grindă.

Să considerăm o serie de piese de diferite lungimi însă pentru cari m e constant. Ecuațiunea (1) arată ca perioadă sinusoidelor ce represintă fibra neutră deformată a acestor piese, e aceiași; săgețile luate de aceste piese, ca și toate ordonatele lor vor varia proporțional cu b, dedus din ecuația (2). Putem dar zice: toate piesele elastice pentru cari $\frac{F}{EI}$ e constant vor lua forma unor sinusoide având aceliași perioade, sau cu alte cuvinte extremitățile lor se vor apropia la aceiași distanță, ori care ar fi lungimea lor.

Să presupunem acum că piese de aceiași formă și formate din același material, însă de lungimi diferite, sunt supuse unei forțe constante. Vom avea încă $\frac{F}{EI}$ constant și prin urmare toate aceste piese, de ori ce lungime ar fi, vor lua forma unor sinusoide având aceiași perioadă.

Să urmărim una din aceste piese în deformația sa. Vom distinge trei casuri, după cum $l \gtreqless \frac{\pi}{m} = \pi \sqrt{\frac{EI}{F}}$.

https://biblioteca-digitala.ro

1^{o} Pentru $l > \frac{\pi}{m}$. Să însemnăm cu a lungimea OA a perioadei sinusoidei vom avea : $a = \frac{\pi}{m} = \pi \sqrt{\frac{F}{EI}}$.

Am văzut că forța F va reduce piesa la o sinusoidă de perioada a. Să presupunem că forța F în loc de a fi constantă ar crește apropiindu-se de limita sa F. Piesa comprimată va lua și ea forma a diferite sinusoide cu perioade din ce în ce mai mici, iar când forța F va atinge limita sa, piesa va lua forma sinusoidei de perioada a. Vedem dar, cu cât sinusoida are o perioadă mai mică, cu atât forța ce provoacă deformația trebue să fie mai mare, spre a obține echilibrul; că dar echilibrul nu e de loc instabil, de oare-ce pentru a face să crească deformația piesei, trebue să sporim și forța F. De și momentul Fy crește când deformația crește, însă dacă forța F rămâne constantă, produsul Fy rămâne mai mic de cât momentul elastic. In adevăr fie a_1 o perioadă mai mică a sinusoidei. Această perioadă corespunde unei forțe F_1, așa că $a_1 = \pi \sqrt{\frac{EI}{F_1}}$ și dacă $a_1 < a$ și $F_1 > F_1$; în această situație, momentul elastic este egal cu $F_1 y > F y$, deci deformația piesei nu poate trece dincolo de sinusoida cu perioada a, dacă forța F nu trece dincolo de valoarea $a = \pi \sqrt{\frac{EI}{F}}$ adică $F = \frac{\pi^2 EI}{a^2}$.

Este adevărat că momentele de flexiune cresc prin simplul fapt al deformării, căci ordonatele cresc; nu e însă adevărat, cum dice D-l Collignon, că momentele elastice nu cresc destul de repede spre a le ajunge.

Urmează dar ca o piesă comprimată, poate resista la compresiuni și printr'o flexiune elastică, dacă această flexiune nu impune materiei un travaliu mai mare de cât poate ea suporta.

Calculul pieselor elastici ar trebui făcut dar în modul următor:

După ce vom afla valoarea lui b din ecuația (2) vom afla produsul Fb, care dă momentul de flexiune maxim în mijlocul piesei. Calculul se va urma ca pentru piesele supuse la flexiune.

Din nenorocire integrala eliptică din ecuația (2) conduce la calcule complicate. Putem însă răsturna problema.

https://biblioteca-digitala.ro

Fie E, I, F, R, conficientul de elasticitate, momentul de inerție, fața de compresiune și travaliul admisibil pentru o piesă comprimată. Ne propunem a calcula lungimea piesei care ar suporta această forță cu un travaliu R. Vom calcula mai întâiu lungimea perioadei sinusoidei ce represinta fibra neutră deformată.

Avem $a = \pi \sqrt{\frac{F}{EI}}$.

După acea vom căuta săgeata luată de piesă.

Or, ν fiind distanța, pentru secțiunea piesei dată, de la axul trecând prin centrul de greutate la areta cea mai depărtată, iar M, momentul de flexiune maxim :

$$M = Fb = \frac{RI}{\nu}$$

de unde $b = \frac{RI}{F\nu}$ (3)

In fine vom căuta valoarea integralei definite

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{m}} \left[1 + b^2 m^2 cos^2 mx \right]^{\frac{1}{2}} dx \qquad (4)$$

Vom observa că cătimea $b^2 m^2 = \frac{b^2 F}{EI} < 1$, à fortiori $b^2 m^2 cos^2 mx < 1$ prin urmare putem desvolta binomul și avem :

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p-1} \frac{1}{2p-1} \frac{1.3.5....(2p-1)}{2.4.6.......2p} b^{2p} m^2 p cos^{2p} mx = \left[1 + b^2 m^2 cos^2 mx \right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \left[1 + b^2 m^2 cos^2 mx \right]^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{m} + \frac{\pi}{m} \sum^{p=\infty} (-1)^{p-1} \frac{1}{2p-1} \frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6 \quad\quad 2p} b^{2p} m^{2p} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{m}} cos^{2p} mx dx$$

Este ușor de văzut că avem :

$$\int cos^{2p} mx\, dx = \frac{1}{2mp} sin mx \, cos^{2p-1} mx + \frac{2p-1}{2p} \int cos\, 2(p-1) mx\, dx$$

https://biblioteca-digitala.ro

$$\text{sau} \quad \int_0^{\frac{\pi}{m}} \cos^{2p} mx\,dx = \frac{2p-1}{2p}\int_0^{\frac{\pi}{m}} \cos 2(p-1)mx\,dx$$

aplicând aceiaşi formulă integrală din membrul al doilea şi tot aşa din aproape în aproape, găsim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \cos^{2p} mx\,dx = \frac{1.3.5\ldots.(2p-1)}{2.4.6\ldots..2p}\frac{\pi}{m}.$$

de unde substituind în (5) şi apoi în (4) avem:

$$l = \left[1 + \sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}\frac{1}{2p-1}\left[\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots..2p}b^p m^p\right]^2\right]\frac{\pi}{m}, \quad (5)$$

Care va da valoarea lui l printr'o serie convergentă, căci raportul unui termen la precedentul tinde spre bm, adică spre o limită mai mică de cât 1.

Ecuaţia (5) în care b are valoarea dată de ecuaţie (3) dă lungimea maximă a piesei pentru care travaliul materialului nu trece peste R.

Pentru lungimi mai mari, flambagiul va supune materialul la travalii mai mari de cât R.

Este dar evident că piesele supuse la flambagiu lucrează tot aşa de bine ca piesele supuse la flexiune prin forţe normale, dacă se calculează travaliul materiei aşa ca să nu întreacă resistenţa admisă. Echilibrul astfel obţinut este stabil de oare ce o deformaţiune mai mare a piesei nu poate avea loc, dacă nu se sporeşte forţa de compresiune. Este sigur că în practică toate piesele flambează din causa imperfecţiunei construcţiei, piesele neputând fi nici perfect drepte, nici perfect centrate.

Experienţele făcute cu piesele comprimate au arătat că ruptura se produce îndată ce flambagiul începe. Causa este că în experienţă, piesa fiind perfect—sau aproape perfect centrată—resistă la compresiune simplă şi suportă o forţă cu mult mai mare de cât permite elasticitatea piesei. Când dar forţa de compresiune, care a întrecut deja limita de ruptură la flambagiu, provoacă un început de flambagiu, ruptura e imediată, echilibrul forţelor imediat superior fiind obţinut prin compresiune simplă. Daca însă forţa nu întrece valoarea, care prin flambagiu face să lucreze piesa la maximum de travaliu

https://biblioteca-digitala.ro

admisibil, nu vom avea ruptura, fie că avem sau nu flambagiu. Să reluăm ecuațiunea:

$$(6) \qquad l=\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}\frac{1}{2p-1}\left[\frac{1.3.5....2p-1}{2.4.6....\ \ 2p}b^p m^p\right]^2\frac{\pi}{m}$$

Seria care represintă coeficientul lui $\frac{\pi}{m}$ având termeni alternativi negativi și positivi și în acelaș timp descrescând avem

$$l>\frac{\pi}{m}\left[1+\frac{1}{4}b^2m^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}b^2m^2\right)^2\right]$$

înlocuind pe b și m cu valorile lor avem

$$l>l_1=\pi\sqrt{\frac{EI}{F}}\left[1+\frac{1}{4}\frac{R^2I}{EF\nu^2}-\frac{3}{64}\frac{R^4I^2}{E^2F^2\nu^4}\right]$$

2° $l<\frac{\pi}{m}$. Este evident că perioada sinusoidei, fiind mai mare de cât lungimea piesei, flambagiul e imposibil.

In adevăr piesele de acest profil spre a fi deformate trebue să fie supuse la o forță mai mare de cât F, căci momentele lor elastice fiind egale cu $F_1 b$ sunt mai mari de cât Fb, ca și în casul precedent.

3°. $l=\frac{\pi}{m}$ în acest cas de asemenea și pentru aceleași motive ca în casul 2 deformațiunea este imposibilă.

Este dar stabilit că echilibrul pieselor comprimate nu este instabil. Este adevărat că flexiunea pieselor trebue să fie foarte mică, căci coeficientul de travaliu crește foarte repede. In adevăr formula (6) arată că în practică lungimea l nu poate întrece de cât cu o cantitate negligeabilă valoarea $\frac{\pi}{m}$. Cu alte cuvinte conclusiunea teoriei clasice că forța F nu trebue să întreacă valoarea dată de ecuația

$$l=\frac{\pi}{m}=\pi\sqrt{\frac{EI}{F}}$$

https://biblioteca-digitala.ro

este bună. Este însă inutil a micșorà această valoare prin coeficienți de siguranță prea mici, căci posiția limită nu represintă un pericol, cu atât mai mult că travaliul admisibil introduce dejà un coeficient de siguranță, iar încastrarea chiar imperfectă ce o au piesele, adaugă încă la resistența lor.

Alexandru Perietzeanu
Inginer
Sub-șef de Divizie în Serviciul Intreținerei
C. F. R.

https://biblioteca-digitala.ro