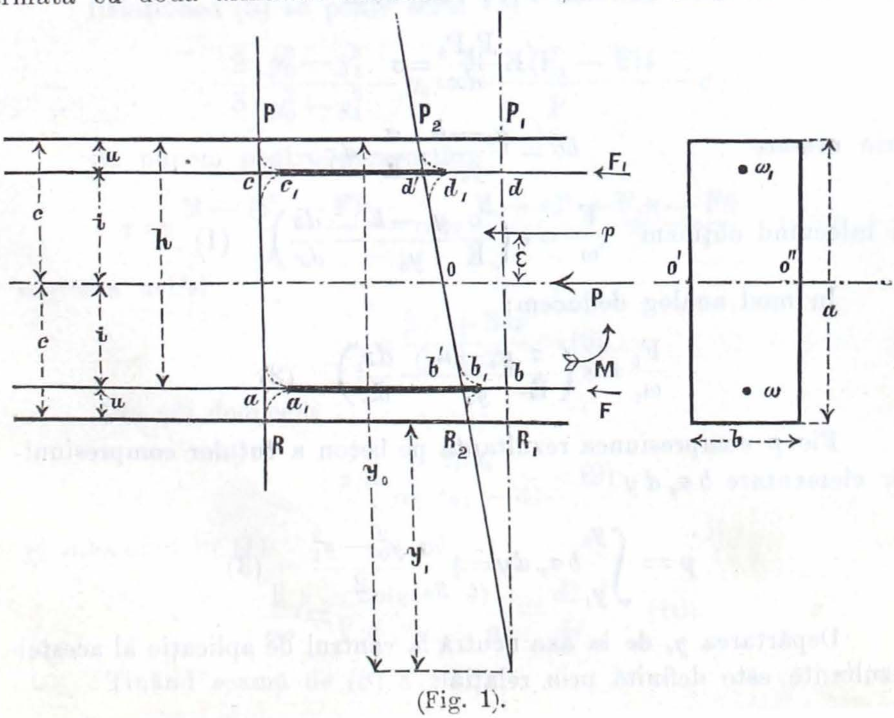
Studiu asupra betonului armat

(Urmare)

Flexiune compusă.

Flexiunea compusă intervine atunci când între forțele exterioare ce acționează grinda se găsește și o forță paralelă cu fibra medie. Această forță poate să fie o extensiune sau o compresiune Voi studia aci cazul când această forță este o compresiune suficientă ca axa neutră să fie în afară de secțiunea grindei, cu alte cuvinte cazul când nu avem eforturi de tensiune in beton.

Grinda ce voi considera are o secțiune dreptunghiulară și este armată cu două armături simetrice cu secțiunile ω, ω_1.



(Fig. 1).

Fie PR, P_1R_1 două secțiuni transversale la distanța dx. După deformare acestea se vor găsi respectiv în posițiunile PR, P_2R_2. Capetele a, b, c, d, ale ferului de la cele două armături, se vor găsi după deformare în posițiunile respective a_1, b_1, c_1, d_1, așa ca

$$a\,a_1 = z \quad b\,b_1 = z + \frac{dz}{dx}.dx$$

$$c\,c_1 = z_1 \quad d\,d_1 = z_1 + \frac{dz_1}{dx}.dx$$

Dacă însemnăm cu F efortul de compresiune în armătura de jos și cu F_1 în cea de sus vom avea

$$\frac{F}{\omega} = e\frac{dx - a_1b_1}{dx} = e\frac{bb' - dz}{dx}$$

$$\frac{F_1}{\omega_1} = e\frac{dx - c_1d_1}{dx} = e\frac{dd' - dz_1}{dx}$$

Insă $\dfrac{bb'}{P_1P_2} = \dfrac{y_0 - h}{y_0}$ și dacă σ reprezintă presiunea specifică a betonului în fibra extremă P_1P_2 vom avea

$$E\frac{P_1P_2}{dx} = \sigma$$

prin urmare $$bb' = \frac{y_0 - h}{y_0}.\frac{\sigma}{E}.dx$$

și înlocuind obținem $$\frac{F}{\omega} = e\left(\frac{\sigma}{E}\frac{y_0 - h}{y_0} - \frac{dz}{dx}\right) \quad (1)$$

In mod analog deducem:

$$\frac{F_1}{\omega_1} = e\left(\frac{\sigma}{E}\frac{y_0 - u}{y_0} - \frac{dz_1}{dx}\right) \quad (2)$$

Fie p compresiunea rezultantă pe beton a tutulor compresiunilor elementare $b\,\sigma_y\,d\,y$

$$p = \int_{y_1}^{y_0} b\,\sigma_y\,d\,y = \frac{b\sigma}{y_0}\frac{y_0^2 - y_1^2}{2} \quad (3)$$

Depărtarea y_2 de la axa neutră la centrul de aplicație al acestei rezultante este definită prin relația

$$y_2 = \frac{\int_{y_2}^{y_1} b\,\sigma_y\, y\, dy}{p} = \frac{2}{3}\,\frac{y_0^3 - y_1^3}{y_0^2 - y_1^2} \qquad (4)$$

Insemnând prin ε distanța de la centrul de aplicație al compresiunei pe beton p la axa de simetrie orizontală a secțiunei avem

$$\varepsilon = y_2 - (y_0 - c)$$

Să luăm momentele tutulor forțelor interioare din secțiunea P_2R_2 în raport cu axa $O'O''$; suma acestor momente este

$$p\varepsilon + F_1 i - Fi = M$$

sau
$$p(y_2 - y_0 + c) + (F_1 - F)i = M \qquad (5)$$

M fiind momentul forțelor exterioare în raport cu axa $O'O''$ proectată în O. Momentul compresiunei exterioare P este nul că ea acționează în centrul O.

Proectând toate forțele pe fibra medie avem:

$$p + F + F_1 = P \qquad (6)$$

Relațiunea (5) se poate scrie

$$\frac{2}{3}\,\frac{y_0^3 - y_1^3}{y_0^2 - y_1^2} - y_0 = \frac{M - (F_1 - F)i}{p} - c$$

Să punem pentru prescurtare

$$v = \frac{M - (F_1 - F)i}{p} - c = \frac{M - cP + F_1 u + Fh}{p} \qquad (7)$$

obținem astfel

$$y_0 = \frac{2a^2 + 3av}{6v + 3a} \qquad (8)$$

Din (3) deducem

$$\sigma = \frac{2py_0}{ab(2y_0 - a)} \qquad (9)$$

si înlocuind în (1)

$$\frac{F}{e\omega} = \frac{2p(y_0 - h)}{Eab(2y_0 - a)}\,\frac{dz}{dx} \qquad (10)$$

Ținând seamă de (8) avem:

$$\frac{2p(y_0-h)}{2y_0-a}=\left(4-6\,\frac{h}{a}\right)p-\frac{12vpi}{a^2}$$

Inlocuind p și v prin valorile lor din (6) și (7) și punând pentru prescurtare

$$\beta=4-6\,\frac{h}{a}+12\,\frac{ci}{a^2}\,;\ \gamma=\frac{12i}{a^2}\,;\ \delta=4-\frac{h}{a}+\frac{12iu}{a^2}\,;\ \eta=4-6\,\frac{h}{a}+\frac{12ih}{a^2}$$

obținem

$$\frac{2p(y_0-h)}{2y_0-a}=\beta P-\gamma M-\delta F_1-\eta F$$

așa că equațiunea (10) devine

$$\frac{F}{e\omega}=\frac{\beta P-\gamma M-\delta F_1-\eta F}{Eab}-\frac{dz}{dx}$$

Inlocuind $\frac{dz}{dx}=\frac{\mu d^2F}{\chi dx^2}$ (B. p. 36 Trim. III 1904) avem în definitiv:

$$\frac{\mu d^2F}{\chi dx^2}+\left(\frac{1}{e\omega}+\frac{\eta}{Eab}\right)F+\frac{\delta}{Eab}\,F_1+\frac{\gamma}{Eab}\,M-\frac{\beta}{Eab}\,P=0 \quad (11)$$

Urmând o cale analogă și punând pentru prescurtare

$$\beta_1=46-\frac{u}{a}-\frac{12ci}{a^2}\,;\ \gamma_1=-\frac{12i}{a^2}\,;\ \delta_1=4-6\,\frac{u}{a}-\frac{12ih}{a^2}\,;\ \eta_1=4-6\,\frac{u}{a}-\frac{12iu}{a^2}$$

obținem:

$$\frac{\mu_1}{\chi_1}\,\frac{d^2F_1}{dx}+\left(\frac{1}{e\omega_1}+\frac{\eta_1}{Eab}\right)F_1+\frac{\delta_1}{Eab}F+\frac{\gamma_1}{Eab}\,M-\frac{\beta_1}{Eab}P=0 \quad (12)$$

Dacă ținem seamă de relațiunile ce există între a, h, i, c, equațiunile (11) și (12) se pot pune sub forma:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2F}{dx^2}+mF+jF_1+eM+gP=0\\&\frac{d^2F_1}{dx^2}+m_1F_1+j_1F+e_1M+g_1P=0\end{aligned}\right\}\quad (13)$$

în cari

$$m=\frac{\chi}{\mu}\left[\frac{1}{e\omega}+\frac{1}{Eab}\left(4-\frac{12h}{a}+\frac{12h^2}{a^2}\right)\right];\ j=\frac{\chi}{\mu E\,ab}\left(\frac{12h}{a}-\frac{12h^2}{a}-2\right)$$

$$e=\frac{\chi}{\mu}\,\frac{12i}{Ea^3b}\,;\ g=-\frac{\chi}{\mu Eab}$$

iar

$$m_1 = \frac{\chi_1}{\mu_1}\left[\frac{1}{e\omega_1} + \frac{1}{\mathrm{E}ab}\left(4 - \frac{12h}{a} + \frac{12h^2}{a^2}\right)\right]; \; j_1 = \frac{\chi_1}{\mu_1 \mathrm{E}ab}\left(\frac{12h}{a} - \frac{12h^2}{a^2} - 2\right)$$

$$l_1 = -\frac{\chi_1}{\mu_1}\frac{12i}{\mathrm{E}a^3b}; \; g_1 = -\frac{\chi_1}{\mu_1 \mathrm{E}ab}$$

Sistemul (13) e integrabil și să căutăm în acest scop a-l satisface prin

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{F} &= \mathrm{A}\cos(\alpha x + \varepsilon) + \mathrm{B}\cos(\beta x + \lambda) + \mathrm{CP} + \mathrm{DM} + \mathrm{L}\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} \\ \mathrm{F}_1 &= \mathrm{A}_1\cos(\alpha x + \varepsilon) + \mathrm{B}_1\cos(\beta x + \lambda) + \mathrm{C}_1\mathrm{P} + \mathrm{D}_1\mathrm{M} + \mathrm{L}_1\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Suposând că M este un polinom ce nu trece de gradul al 3-lea deducem:

$$\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2} = -\mathrm{A}\alpha^2\cos(\alpha x + \varepsilon) - \beta^2\mathrm{B}\cos(\beta x + \lambda) + \mathrm{D}\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\mathrm{F}_1}{dx^2} = -\mathrm{A}_1\alpha^2\cos(\alpha x + \varepsilon) - \beta^2\mathrm{B}_1\cos(\beta x + \lambda) + \mathrm{D}_1\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}$$

Introducând relațiunile (14) și (15) în (13) obținem următoarele condițiuni:

$$m\mathrm{A} + j\mathrm{A}_1 - \alpha^2\mathrm{A} = 0 \qquad m\mathrm{B} + j\mathrm{B}_1 - \beta^2\mathrm{B} = 0$$

$$m_1\mathrm{A}_1 + j_1\mathrm{A} - \alpha^2\mathrm{A}_1 = 0 \qquad m_1\mathrm{B} + j_2\mathrm{B} - \beta^2\mathrm{B}_1 = 0$$

$$g + m\mathrm{C} + j\mathrm{C}_1 = 0 \qquad l + m\mathrm{D} + j\mathrm{D}_1 = 0$$

$$g_1 + m_1\mathrm{C}_1 + j_1\mathrm{C} = 0 \qquad l_1 + m_1\mathrm{D}_1 + j_1\mathrm{D} = 0$$

$$\mathrm{D} + m\mathrm{L} + j\mathrm{L}_1 = 0$$

$$\mathrm{D}_1 + m_1\mathrm{L}_1 + j_1\mathrm{L} = 0$$

Dacă în primele relațiuni eliminăm A, A_1, B, B_1, obținem:

$$\begin{bmatrix} m - \alpha^2 & j \\ j_1 & m_1 - \alpha^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} m - \beta^2 & j \\ j_1 & m_1 - \beta^2 \end{bmatrix} = 0$$

ceia ce arată că α^2 și β^2 sunt rădăcinile equațiunei de gradul al II-lea.

$$z^2 - (m + m_1)z - jj_1 = 0$$

Luând A și B arbitrari obținem:

$$\mathrm{A}_1 = \frac{\alpha^2 - m}{j}\mathrm{A} \qquad \mathrm{B}_1 = \frac{\beta^2 - m}{j}\mathrm{B}$$

Din a doua grupă de condițiuni obținem:

$$C=\frac{jg_1-m_1g}{mm_1-jj_1}\qquad C_1=\frac{j_1g-mg_1}{mm_1-jj_1}$$

$$D=\frac{jl_1-m_1l}{mm_1-jj_1}\qquad D_1=\frac{j_1l-ml_1}{mm_1-jj_1}$$

iar din a 3-a grupă:

$$L=\frac{l(m_1^2+jj_1)-l_1j(m+m_1)}{(mm_1-jj_1)^2}$$

$$L_1=\frac{l_1(m^2+jj_1)-lj_1(m+m_1)}{(mm_1-jj_1)^2}$$

Astfel expresiile lui F și F_1 în o secțiune sunt determinate; putem apoi calcula compresiunea maximă a betonului cu formula

$$\sigma=\frac{1}{ab}\left[P+\frac{6M}{a}+\left(\frac{6u}{a}-4\right)F_1+\left(\frac{6h}{a}-4\right)F\right]\quad(16)$$

ce se deduce lesne din (9).

Problema este astfel complect rezolvată.

Se vede din formulele (14) că în expresiile lui F și F_1 intră 4 constante arbitrare A, B, ε, λ, ceia ce arată că avem nevoe de încă 4 condițiuni ca chestiunea să fie determinată.

Aceste condițiuni sunt în general dependente de modul cum sunt terminate capetele armăturilor.

Observare.—Equațiunea care ne dă α^2 și β^2 este

$$z^2-(m+m_1)z-jj_1=0$$

Se vede din aceasta că rădăcinile sunt reale iar una din ele este totdeauna negativă căci produsul

$$jj_1=\frac{\chi\chi_1}{\mu\mu_1E^2a^2b^2}\left(\frac{12h}{a}-\frac{12h^2}{a^2}-2\right)^2 \quad \text{este positiv}$$

Prin urmare dacă β_1^2, reprezintă valoarea absolută a rădăcinei negative, avem $\beta^2=-\beta_1^2$ prin urmare

$$\beta=\beta_1\sqrt{-1}$$

Din această cauză factorul $\cos(\beta x+\lambda)$ se transformă în $\cos(\beta_1x\sqrt{-1}+\lambda)=\cos\hat{}(\beta_1x+\lambda_1)$ λ_1 fiind asemenea o constantă arbitrară.

Astfel expresia efortului în fer se compune din termeni ce nu variază cu abscisa, din un termen periodic representat prin funcțiunea circulară $\cos(\beta x+\varepsilon)$ și un termen representat prin funcțiunea hiperbolică $\cosh(\beta_1 x+\gamma_1)$.

Formulele relative la compresiunea simplă se deduc lesne din cele stabilite la flexiunea compusă făcând $M=0$.

Aplicație. Presupunem că avem de calculat rezistența unui stâlp cu secțiune dreptunghiulară încărcat vertical însă încărcarea nu e centrală ci are o excentricitate d. Armăturile sunt simetrice, fiecare avînd o secțiune ω. Din considerațiuni practice s'a luat $u=0{,}1a$; $i=0{,}4a$ deci $c=0{,}5a$; $h=0{,}9a$. Coeficientul de elasticitate al ferului se consideră de 10 ori mai mare ca al betonului.

Să însemnăm cu φ raportul secțiunei totale a ferului către secțiunea betonului adică $\varphi=\dfrac{2\omega}{ab}$ și prin K câtimea $K=\dfrac{\chi}{\mu E ab}$.

Efectuând expresiile lui $m, l, j, g, m_1, l_1, j_1, g_1$, obținem:

$$m=m_1=K\left(\frac{0{,}2}{\varphi}+2{,}92\right)$$

$$j=j_1=-0{,}92\ K$$

$$l=-l_1=\frac{4{,}8}{a^2}\ K$$

$$g=g_1=-K$$

Așa dar equațiunea $z^2-(m+m_1)z-jj_1=0$ devine

$$z^2-2K\left(\frac{0{,}2}{\varphi}+2{,}92\right)z-0{,}92^2K^2=0$$

de unde

$$z=K\left[\frac{0{,}2}{\varphi}+2{,}92\pm\sqrt{\left(\frac{0{,}2}{\varphi}+2{,}92\right)^2+0{,}92^2}\right]$$

De oarece φ e un număr mic căci în practică foarte rar dacă atinge 0,06, putem desvolta în serie radicalul și avem destul de apropiat pentru cele 2 rădăcini ale equațiunei în z

$$\alpha^2=K\left[\frac{0{,}4}{\varphi}+5{,}84+\frac{0{,}0085}{\frac{0{,}4}{\varphi}+5{,}84}\right]$$

$$\beta_1^2 = K\left[\frac{0{,}0085}{\frac{0{,}4}{\varphi}+5{,}84}\right]$$

Dacă am lua chiar valoarea $\varphi = 0{,}06$ vedem că $= \beta_1^2 = K\,0{,}00068$ câtime foarte mică.

Asemenea valoarea lui α^2 se poate lua simplu

$$\alpha^2 = k\left[\frac{0{,}4}{\varphi}+5{,}84\right]$$

punând pentru prescurtare $s = \frac{0{,}2}{\varphi}+3{,}84$ $\quad q = \frac{0{,}2}{\varphi}+2{,}92$ și calculând constantele C, D, L, etc. obținem:

$$C = C_1 = \frac{s}{q} \qquad D = -D_1 = -\frac{4{,}8s}{aq^2}$$

Așa că expresiile eforturilor în fer devin (formulele 14) înlocuind și $M = P\,d$ și observăm că $\frac{d^2M}{dx^2} = 0$

$$F = A\cos(\alpha x+\varepsilon)+B\cos(\beta_1 x+\gamma_1)+\left(1-4{,}8\frac{d}{a}\right)\frac{Ps}{q^2}$$

$$F_1 = \frac{q}{0{,}92}A\cos(\alpha x+\varepsilon)\frac{q}{0{,}92}B\cos(\beta_1 x+\gamma_1)+\left(1+4{,}8\frac{d}{a}\right)\frac{Ps}{q^2}.$$

(Va urma)

Gogu Constantinescu
Inginer