Observațiuni asupra formulei lui Euler

In No. 3 al „Buletinului“ s'a publicat un articol datorit D-lui Ing. Perietzeanu arătând despre părțile slabe ale teorii clasice a formulei lui Euler. Credem util a rezuma câte-va din datele relative la această chestiune:

Intr'o primă analiză plecând de la formula:

$$\mathrm{EI}\,\frac{d\,y^2}{d\,x^2} = \mathrm{M}$$

și admițând că, din o cauză oare-care, piesa a căpătat o mică curbură, se ajunge la ecuația fibrei deformate:

$$y = b\,sin\,mx \tag{1}$$

în care b e un coeficient, care rămâne a se determinà, iar $m = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}$ fiind forța care acționează piesa.

Din această ecuație se trage concluzia că întru cât:

$$\mathrm{F} < \pi^2\,\frac{\mathrm{EI}}{l^2}$$

această forță nu este capabilă să menție curbarea piesei, care-și recapătă forma dreaptă, după ce cauza, care o făcuse să se curbeze, încetează. Ea nu e capabilă să menție curbarea, de cât daca e cel puțin egală cu $\mathrm{F}_0 = \pi^2\,\frac{\mathrm{EI}}{l^2}$.

Dacă însă $\mathrm{F} > \pi^2\,\frac{\mathrm{EI}}{l^2}$ din interpretarea ecuației (1) se trage concluzia, că piesa nu va fi în echilibru de cât sau întru cât ea a rămas perfect dreaptă, sau daca acest echilibru a fost turburat după-ce s'a încovoiat atât, în cât coarda ei să fie egală cu:

$$a = \pi \sqrt{\frac{EI}{F}}.$$

Se vede deci, că o piesă primitiv dreaptă, care se găsește sub acțiunea unor forțe dând o compresiune pe direcția fibrei neutre și de o mărime ast-fel față de lungimea ei în cât:

$$F > F_0$$

se găsește în echilibru atâta timp, cât toate condițiile de mai sus rămân realizate. Imediat ce acest echilibru, ori-cum ar fi numit el, e turburat din vre-o cauză oare-care, numai după ce piesa a luat o altă poziție, independentă de forța perturbatoare, se restabilește echilibrul. Și ceia ce e mai important, e că în răstimpul până ce piesa să ajungă în poziția de echilibru dată de ecuația (1) poate interveni un fenomen nou și anume curbura să devie suficient de mare pentru ca această ecuație să nu mai fie aplicabilă, iar rezistența suplementară provenită din această încovoere, *cu totul alta de cât cea care se poate deduce din ecuația (1)*, să fie suficientă pentru a rupe piesa.

Se admite atunci că piesele comprimate trebue să se găsească în așa condițiuni, în cât forța de compresiune să fie mai mică de cât limita F_0. Prin aceasta sîntem siguri, că piesa nu va lucrà în condițiile unei piese curbe supusă la flexiune.

După unii însă ecuația (1) este cu totul aproximativă, căci pentru a ajunge la ea s'a neglijat $\frac{dy}{dx}$ fără a se neglijà cantitatea de același ordin y*.

Eroarea rezultând de aci ar fi cu mult mai mare de cât cea, care provine din neglijarea diferenței între lungimea piesei curbată și coarda ei, căci dacă y este foarte mic, această diferență este și ea foarte mică față de l. Pe lângă aceasta daca se introduce această diferență, trebue să nu se uite scurtarea piesei din compresiune.

Și atunci într'un calcul puțin mai exact, fără a suprimà termenul $\frac{dy}{dx}$ se ajunge pentru săgeata piesei curbate la valoarea:

*) Flammant. Rezistența materialelor.

$$(2) \qquad f = 4\sqrt{\sqrt{\frac{EI}{F}}\left(\frac{l}{\pi} - \sqrt{\frac{EI}{F}}\right)}$$

aceasta presupuind iarăși că curbura e foarte mică. $\Bigg($Cazul general depinde de integrarea funcțiunii: $\dfrac{d\,\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\Bigg)$.

Formula (2) ne permite să găsim valoarea suplementului de rezistență la care e supusă piesa, în cazul când F întrece puțin limita F_0 ceia ce revine la a admite ca compresiunea să producă și o mică flexiune. Acest suplement este:

$$(3) \qquad R_1 = \frac{8\,l\,F\,u}{I}\sqrt{\frac{F}{F_0} - 1}$$

însemnând cu u distanța de la fibra considerată la axa neutră.

Adăogând la aceasta rezistența provenită din însăși compresiunea ajungem la formula:

$$(4) \qquad R = \frac{F}{\Omega}\left(1 + k\frac{\Omega\,l^2}{I}\right)$$

în care Ω este secțiunea, iar $k = \dfrac{8}{\pi^2}\dfrac{u}{\sqrt{EI}}\sqrt{F - F_0}$.

Din această din urmă formulă se poate deduce aceia a lui Rankine:

$$\frac{F}{\Omega} \leqslant \frac{R_0}{1 + k\dfrac{l^2}{r^2}}$$

în care R_0 e rezistența la compresiune simplă, r raza de girație iar k un coeficient care depinde de natura materialului (în (4) k depinde și de secțiune).

Din această a doua serie de formule se pot trage concluzii, cari confirmă pe cele trase mai sus din ecuația (1) și anume:

Intru cât $F < F_0$ săgeata luată de piesă e imaginară, deci forța F nu e suficientă pentru a menține o mică curbură, pe care ar fi luat-o piesa.

Valoarea F_0 reprezintă limita, de la care forța F nu numai că e capabilă să menţie o curbură oare-care, dar o dată curbarea începută, se va continuà până ce săgeata capătă o valoare depinzând de F. Suplementul de rezistenţă ce se produce prin această curbare este dat de formula (3) întru cât F diferă puţin de F_0.

Daca această diferenţă e ceva mai mare formulele nu mai sunt aplicabile, iar practica arată că noile condiţiuni, în care este pusă piesa, pot fi de aşa natură în cât să producă ruperea ei.

Când teoria va putea aborda şi această chestiune a pieselor primitiv drepte curbate apreciabil şi supuse la compresiune problema va fi rezolvată complect. Până atunci valoarea F_0 rămâne o limită peste care ne aşteaptă necunoscutul din punct de vedere teoretic, şi condiţiuni foarte desavantajoase din punct de vedere practic.

N. C.

Calculul încărcării ce poate suportà o grindă metalică aşezată pe două reazeme simple

In unele chestiuni se cere a se determinà maximul încărcării mobile uniform distribuite ce poate suportà o grindă de o secţiune dată astfel în cât rezistenţa să nu întreacă limitele prescrise de anumite circulări. In particular când se are în vedere circulara elveţiană, calculele necesare devin lungi dacă nu sunt conduse bine, iar rezultatele obţinute însoţite de erori. Imi propun a indicà acì un metod de calcul care conduce uşor la rezultat.

Fie W modulul de rezistenţă al grinzii date, g greutatea proprie pe unitatea de lungime, p sarcina mobilă pe unitate de lungime, l deschiderea grinzii. Vom lua ca unităţi klgr. şi cm. După circulara elveţiană rezistenţa admisibilă pentru flexiune este 0,9 din cea admisibilă pentru tensiune, iar aceasta este $800 + 250 \frac{E\,min}{E\,max}$ pentru