V. Numesc legatar universal, care va fi în acelaş timp şi esecutor testamentar, pe Preşedintele şi cei doi Vice-preşedinţi ai Comitetului Societăţii Politecnice din Bucureşti, pe care îi rog să bine-voiască a lua în primire toată averea mea arătată în prezentul testament, a o distribui după formele legale, după cum se specifică mai sus şi a priveghia atât Domniile lor, cât şi toţi succesorii Domniilor lor după timpuri, la esacta şi conştiincioasa îndeplinire a acelor prescripţiuni.

Implor ertare tutulor acelora, cărora, fără a mea voinţă, am putut aduce vre-o supărare în cursul vieţii şi cer cu stăruinţă ca înmormântarea mea să se facă în Bucureşti şi cu cea mai mare simplicitate.

Prezentul testament s'a întocmit, scris şi semnat de mine însumi la Bucureşti, astăzi în zece Noembre anul una miă nouă sute unul.

(ss) S. YORCEANU.

Oscilarea vagoanelor în timpul mersului

(Urmare)

Avem ast-fel 4 ecuaţiuni diferenţiale de ordinul al 2-lea cu coeficienţi constanţi, între cele 4 necunoscute x, y, z, θ.

Primele 2 din aceste ecuaţiuni nu coprind de cât 2 variabile y şi θ.

Să punem

$$a = -\frac{2g}{k\mathrm{G}} \qquad b = \frac{a_2 - a_1}{k\mathrm{G}}\, g$$

$$a' = \frac{a_2 - a_1}{k\mathrm{I}}, \quad b' = -\frac{a_2{}^2 + a_1{}^2 + k\mathrm{T}l}{k\mathrm{I}}$$

ele vor lua forma

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = a y + b \theta + g,$$
$$\frac{d^2 \theta}{d t^2} = a' y + b' \theta. \qquad (6)$$

Să căutăm a satisface acestui sistem prin următoarele funcțiuni

$$y = \mathrm{M} + \mathrm{A}_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + \mathrm{A}_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2)$$
$$\theta = \mathrm{N} + \mathrm{B}_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + \mathrm{B}_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2)$$

diferențiind avem

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -\left[\alpha_1{}^2 \mathrm{A}_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + \alpha_2{}^2 \mathrm{A}_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2)\right]$$
$$\frac{d^2 \theta}{d t^2} = -\left[\alpha_1{}^2 \mathrm{B}_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + \alpha_2{}^2 \mathrm{B}_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2)\right] \qquad (7)$$

Dacă substituim în (6) valorile lui y și θ obținem

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a\mathrm{M} + b\mathrm{N} + g + (a\mathrm{A}_1 + b\mathrm{B}_1)\cos(\alpha_1 t + \beta_1) + (a\mathrm{A}_2 + b\mathrm{B}_2)\cos(\alpha_2 t + \beta_2)$$
$$\frac{d^2 \theta}{d t^2} = a'\mathrm{M} + b'\mathrm{N} + (a'\mathrm{A}_1 + b'\mathrm{B}_1)\cos(\alpha_1 t + \beta_1) + (a'\mathrm{A}_2 + b'\mathrm{B}_2)\cos(\alpha_2 t + \beta_2)$$

Identificând cu sistemul (7) obținem

$$a\mathrm{M} + b\mathrm{N} + g = o$$
$$a'\mathrm{M} + b'\mathrm{N} = o$$
$$a\mathrm{A}_1 + b\mathrm{B}_1 = -\alpha_1{}^2\mathrm{A}_1 \qquad a\mathrm{A}_2 + b\mathrm{B}_2 = -\alpha_2{}^2\mathrm{A}_2 \qquad (8)$$
$$a'\mathrm{A}_1 + b'\mathrm{B}_1 = -\alpha_1{}^2\mathrm{B}_1 \qquad a'\mathrm{A}_2 + b'\mathrm{B}_2 = -\alpha_2{}^2\mathrm{B}_2$$

Aceste relațiuni ne dau

$$\mathrm{M} = g\frac{b'}{ba' - ab'}, \quad \mathrm{N} = g\frac{a'}{ba' - ab'},$$

iar prin eliminarea lui A_1, B_1, A_2, B_2

$$\begin{vmatrix} a + \alpha_1{}^2 & b \\ a' & b' + \alpha_1{}^2 \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} a + \alpha_2{}^2 & b \\ a' & b' + \alpha_2{}^2 \end{vmatrix} = o$$

ceea-ce arată că $\alpha_1{}^2$ și $\alpha_2{}^2$ sunt soluțiunile ecuațiunei

$$u^2 + (a + b')u + ab' - ba' = o$$

Luând dar constantele A_1, A_2 arbitrare obținem;

$$\mathrm{B}_1 = -\mathrm{A}_1\frac{a' + \alpha_1{}^2}{b'} \qquad \mathrm{B}_2 = -\mathrm{A}_2\frac{a' + \alpha_2{}^2}{b'}$$

și în definitiv

$$y = g\frac{b'}{ba'-ab'} + A_1\cos(\alpha_1 t + \beta_1) + A_2\cos(\alpha_2 t + \beta_2)$$

$$\theta = g\frac{a'}{ba'-ab'} - \frac{a+\alpha_1^2}{b'}A_1\cos(\alpha_1 t + \beta_1) - \frac{a'+\alpha_2^2}{b'}A_2\cos(\alpha_2 t + \beta_2) \tag{9}$$

Cunoaștem astfel y și θ. Vom deduce acum x și z cu ajutorul celor 2 ecuațiuni din (5) rămase încă neutilizate.

Să punem

$$a'' = \frac{g}{kp}, \quad b'' = \frac{a_1 g}{pk}, \quad c'' = -\frac{g}{k_1 p}, \text{ obținem:}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a'' y + b'' \theta + c'' x + g \tag{10}$$

Fie: $x = P + C_1\cos(\alpha_1 t + \beta_1) + C_2\cos(\alpha_2 t + \beta_2) + C_3\cos(\alpha_3 t + \beta_3)$ dacă în (10) înlocuim y, θ, x prin valorile lor obținem

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a'' M + b'' N + c'' P + g + (a'' A_1 + b'' B_1 + c'' C_1)\cos(\alpha_1 t + \beta_1) +$$

$$(a'' A_2 + b'' B_2 + c'' C_2)\cos(\alpha_2 t + \beta_2) + c'' A_3\cos(\alpha_3 t + \beta_3)$$

diferențiind (9) obținem

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\left[\alpha_1^2 C_1\cos(\alpha_1 t + \beta_1) + \alpha_2^2 C_2\cos(\alpha_2 t + \beta_2) + \alpha_3^2 A_3\cos(\alpha_3 t + \beta_3)\right]$$

și identificând aceste două equațiuni avem:

$$\begin{aligned} a'' M + b'' N + c'' P + g &= o \\ a'' A_1 + b'' B_1 + c'' C_1 &= -\alpha_1^2 C_1 \\ a'' A_2 + b'' B_2 + c'' C_2 &= -\alpha_2^2 C_2 \\ c'' A_3 &= -\alpha_3^2 A_3 \end{aligned}$$

dacă înlocuim M_1 N_1 B_1, B_2 prin valorile lor găsite mai sus obținem

$$C_1 = A_1\frac{a'' b' - b'' a' - b'' \alpha_1^2}{b'(c'' + \alpha_1^2)}$$

$$C_2 = A_2\frac{a'' b' - b'' a' - b'' \alpha_2^2}{b'(c'' + \alpha_2^2)}$$

$$\alpha_3 = -c''$$

$$P = g\frac{ab' - ba' - a'' b' - b'' a'}{c''(ba' - ab')}$$

$$A_3 = \text{arbitrar}$$

în definitiv

$$x = g\,\frac{ab' - ba' - a''b' - b''a'}{c''(ba' - ab')} + \frac{a''b' - b''a' - b''\alpha_1^2}{b'(c'' + \alpha_1^2)} A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1)$$

$$+ \frac{a''b' - b''a' - b''\alpha_2^2}{b'(c'' + \alpha_2^2)} A_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2) + A_3 \cos(\alpha_3 t + \beta_3)$$

Pentru z avem o expresiune analogă și o obținem din expresia lui x înlocuind b'' prin $-b''$ iar A_3 prin A_4, A_4 fiind iarăși o constantă arbitrară. Aceasta se dovedește prin faptul că cele două din urmă ecuațiuni (5) nu diferă între ele de cât prin semnul termenului în θ, astfel:

$$z = g\,\frac{ab' - ba' - a''b' + b''a'}{c''(ba' - ab')} + \frac{a''b' + b''a' + b''\alpha_1^2}{b'(c'' + \alpha_1^2)} A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1)$$

$$+ \frac{a''b' + b''a' + b''\alpha_2^2}{b'(c'' + \alpha_2^2)} A_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2) + A_4 \cos(\alpha_3 t + \beta_3).$$

O expresiune simplă au aceste formule în cazul când vagonul e simetric încărcat, căci atunci $a_2 = a_1$ și de aci urmează că $a' = o$ $b = o$;

de asemenea ecuațiunea care ne dă α_1^2 și α_2^2 se reduce la

$$u^2 + (a + b')\,u + ab' = o$$

sau $(u + a)(u + b') = o$ de unde

$$\alpha_1^2 = -a = \frac{2\,g}{k\,G}$$

$$\alpha_2^2 = -b' = \frac{2a_1^2 + kTl}{k\,I}$$

Am găsit expresiunile lui x, y, z și θ cari definesc pozițiunea vagonului la un moment dat.

Se vede că ele sunt funcțiuni circulare cu condițiune ca α_1 și α_2 să fie câtimi reale.

Să analizăm dar mai d'aproape ecuațiunea care ne dă α_1^2 și α_2^2.

$$u^2 + (a + b')\,u + ab' - ba' = o$$

care ne dă

$$u = \frac{1}{2}\left[-(a + b') \pm \sqrt{(a - b')^2 + 4\,ba'}\right]$$

vedem că u este real de oare-ce

$$a'b = \frac{(a_2 - a_1)^2}{k^2\,G\,I}\,g > 0$$

Insă trebue ca u să fie și pozitiv; a și b' sunt negativi așa că $a + b' < 0$, deci pentru ca u să fie pozitiv e suficient dar ca

$$(a + b')^2 > (a - b')^2 + 4\,a'\,b$$

sau
$$a\,b' > b\,a'$$

Dacă înlocuim a, a', b, b', prin valorile lor obținem condiția

$$(a_1 + a_2)^2 + k\,\mathrm{T}\,l > o,$$

aceasta se împlinește totdeauna căci k, T, l sunt câtimi pozitive.

Prin urmare mișcarea vagonului nu poate fi de cât oscilatoare și anume mișcarea centrului de greutate pe verticală și tangajul măsurat prin θ sunt compuse din superpunerea a 2 mișcări sinusoidale simple, iar mișcarea osiilor compusă din 3 mișcări sinusoidale.

Ceea-ce ne interesează mai mult este mișcarea cutiei vagonului. Aceasta cuprinde suprapunerea a 2 mișcări sinusoidale simple ale căror perioade τ_1, τ_2 sunt date prin formulele

$$\alpha_1 = \frac{2\,\pi}{\tau_1} \qquad \alpha_2 = \frac{2\,\pi}{\tau_2}$$

Amplitudinea acestor mișcări definită prin constantele arbitrare A_1 A_2 A_3, depinde de impulsiunea inițială dată cutiei vagonului. Această impulsiune poate fi provocată prin multiple cauze; cele accidentale nu vor avea de cât un efect trecător, căci în timpul mersului se vor amortiza din cauza frecărilor cari contrariază mișcarea oscilatoare a vagonului. Așa spre exemplu trecerea peste un podeț care nu este perfect de nivel cu calea, o schimbare de profil în cale, etc., vor produce un tangaj, dar acesta nu se poate menține mult timp căci oscilațiunile vor descrește continuu.

Este însă o cauză care dă o serie de impulsiuni periodice cutiei vagonului, aceasta este trecerea pe rosturile șinelor. La trecerea roatelor pe un rost se produce totdeauna o impulsiune, mică ce e drept, dar care se repetă foarte des. Aceste impulsiuni în majoritatea cazurilor nu acumulează efectul lor, căci ele în general nu sunt sincrone cu începutul unei oscilațiuni complecte a cutiei vagonului, așa că în general el își neutralizează în parte efectul.

Așa spre exemplu, trecerea pe un rost a produs o mărire a amplitudinei uneia din mișcări sinusoidale, trecerea pe rostul următor poate provoca o micşorare a aceleiaşi amplitudini căci timpul după care se produce această nouă impulsiune, nu coincide în general cu timpul necesar ca mişcarea ondulatoare considerată să treacă prin aceiaşi fază ca în momentul trecerei pe primul rost.

Dar ce s'ar întâmpla dacă această coincidenţă ar avea loc? Este evident că impulsiunile succesive vor provoca mărirea indefinită a amplitudinei mişcărei ondulatoare considerate. Mărirea aceasta însă nu poate trece anume limită căci prin creşterea nedefinită a oscilaţiunilor vagonului se modifică întru cât-va şi perioadele mişcărei sinusoidale, prin faptul că rezoartele nu sunt perfect elastice cum le-a presupus în teorie; asemenea sunt şi alte fenomene secundare ce intervin când aplitudinile devin mari şi cari complică oscilarea cutiei. Ast-fel coincidenţa menţionată dispare şi oscilaţiunile cutiei încep să se liniştească pentru a reîncepe dacă viteza trenului e conservată.

Să însemnăm cu λ lungimea unei şine cu v viteza trenului; timpul de trecere de la un rost la altul va fi $\frac{\lambda}{v} = \tau$.

Pentru ca sincronizmul să existe între trecerea pe rosturi şi una din oscilaţiunile simple ale vagonului, e suficient ca τ să fie egal sau în raport foarte simplu cu una din periodele τ, τ_2.

Roţile vagonului sunt supuse la o a treia mişcare sinusoidală simplă reprezentată prin perioada $\tau_3 = \frac{2\pi}{\alpha_3}$, aşa că s'ar putea întâmpla sincronizmul $\tau = m\tau_3$, m fiind o fracţie simplă ca $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, etc. In acest caz roţile vor fi supuse la o vibraţiune particulară de sus în jos la care cutia vagonului nu va lua parte căci în expresia lui y şi θ nu figurează al 3-lea termen sinusoidal din expresile lui x şi z.

E de observat că impulsiunile având loc succesiv în 2 punte diferite ale vagonului (în dreptul fie-cărei perechi de rezoarte), există un raport al distanţei între osii către lungimea şinei aşa că deşi ar există sincronism între τ şi una din perioadele τ_1 şi τ_2, totuşi efectul asupra cutiei vagonului să fie micşorat sau chiar anulat.

In rezumat: Se poate întâmpla la vehicule ce circulă pe o cale ferată un anume sincronizm între oscilarea lor elastică şi trecerea pe rosturile şinelor, care să provoace un tangaj particular care n'are loc de cât pentru anumit viteze. Acest sincronizm are loc dacă

$\tau = m\tau$, sau $\tau = m'\tau_2$; se poate asemenea întâmpla ca roțile să ia o mișcare vibratoare de sus în jos (împreună cu șina bine înțeles) dacă $\tau = m''\tau_3$, $m m' m''$ fiind rapoarte simple. Fenomenul e cu atât mai accentuat cu cât $m m' m''$ sunt rapoarte mai simple.

Chestiunea am tratat-o într'un caz particular pentru a nu complica calculul prea mult, dar fără nici o dificultate se poate trata complect ținând seamă și de alte mișcări ce poate lua vagonul, cum ar fi de exemplu o mișcare de dute-vino în sensul căei provocată de elasticitatea rezoartelor la tampoane și modul de suspensiune articulată pe rezoartele ce susțin cutia vagonului.

Rezultatele vor fi în linii generale aceleași: fie-care din mișcările atribuite cutiei vagonului sunt compuse din suma mai multor mișcări sinusoidale simple în număr egal cu mișcările atribuite vagonului. Perioadele acestor sinusoide sunt soluțiunile unei aceleași ecuațiuni de grad egal cu numărul lor. Amplitudinile sinusoidelor de aceeași perioadă din diferitele mișcări, sunt proporționale cu factori ce nu depind de impulsiunile exterioare, ci numai de elementele vagonului, ceea ce arată că diferitele mișcări *nu sunt independente*. Așa spre exemplu impulsiuni verticale asupra cutiei pot produce perturbațiuni orizontale ale cutiei vagonului.

E suficient ca să existe sincronizm între trecerea pe rosturile șinelor și una din mișcările sinusoidale componente pentru ca amplitudinile mișcărilor vagonului să crească mereu, până când sincronizmul este distrus chiar prin mărimea auplitudinilor acelor mișcări din cauză că s'au provocat fenomene secundare ca lovituri, jocuri la încheeturi etc.

Gogu Constantinescu
Inginer