Calculul bolților nearticulate [1]

Generalități.

Ceea ce îmi propun a desvolta în acest articol este calculu, bolților sau arcurilor prin teoria elasticității.

Voi da aci o metodă practică servindu-mă de indicațiile date de *Müller-Breslau* pentru calcularea bolților a căror linie de presiunel sub o încărcare totală uniformă de $1/_2$ p, coincide sensibil cu fibra medie a arcului, p fiind încărcarea pe metru patrat.

De altfel aceste bolți sunt raționale căci sunt economice. Prin urmare înainte de a aplica teoria ce urmează, vom corijà forma bolței ce studiem până când condiția mai sus enunțată e împlinită.

Analiza o vom face pentru încărcarea proprie și o supraîncărcare totală de $1/_2$ p, iar apoi bolta, astfel încărcată, o vom presupune încărcată pe una din jumătăți cu încă $1/_2$ p., iar cealaltă jumătate descărcată cu $1/_2$ p ceia ce revine la a presupune o jumătate boltă încărcată cu p iar cealaltă fără supra încărcare. Acest din urmă caz este și cel mai defavorabil pentru boltă. Pentru pile sau culee ipoteza cea mai defavorabilă este când bolta e încărcată complect cu p. Insă pentru aceasta nu e nevoe de a face un nou calcul prin teoria elasticității, ci o simplă compunere de forțe presupunând că presiunea trece aproximativ prin centrul secțiunei de la naștere și chee; aceasta având în vedere că pentru pile nu avem nevoe de o preciziune prea mare la verificarea dimensiunilor lor.

Să însemnăm cu:

M momentul încovoetor în o secțiune cu abscisa x și ordonata y,

N compresiunea centrală în aceiași secțiune,

I momentul de inerție al secțiunei,

---

[1]) După D. Müller-Breslau.

Ω suprafaţa secţiunei,

E coeficientul de elasticitate al materialului din care e făcut arcul,

s lungimea arcului măsurată pe fibra medie,

Travaliul de deformaţiune al arcului are ca expresie:

$$(1) \quad T = \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \int \frac{N^2 ds}{2E\Omega}$$

neglijând travaliul de deformare datorit puterei tăetoare şi care e foarte mic.

Dacă însemnăm cu μ momentul de incastrare pe un reazim, spre exemplu cel stâng, cu V reacţiunea, cu H înpingerea orizontală şi cu G rezultanta încărcărilor exterioare din stânga secţiunei considerate, vom avea (fig 1).

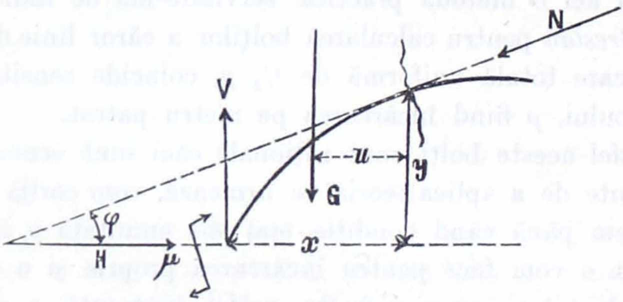

Fig. 1.

$$\left.\begin{aligned} M &= \mu + Vx - Hy - Gu \\ N &= V\sin\varphi + H\cos\varphi - G\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Bolta fiind incastrată, rotaţiunea secţiunei la naştere este nulă; asemenea presupunem pilele destul de solide ca să nu cedeze nici reacţiunei V nici înpingerei orizontale H. Aplicând dar de 3 ori teorema lui *Castigliano*, relaţiunei (1) obţinem:

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = 2\int \frac{M ds}{2EI}\frac{\partial M}{\partial \mu} + 2\int \frac{N ds}{2E\Omega}\frac{\partial N}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial V} = 2\int \frac{M ds}{2EI}\frac{\partial M}{\partial V} + 2\int \frac{N ds}{2E\Omega}\frac{\partial N}{\partial V} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial H} = 2\int \frac{M ds}{2EI}\frac{\partial M}{\partial H} + 2\int \frac{N ds}{2E\Omega}\frac{\partial N}{\partial H} = 0$$

Ținând seamă de relațiunile (2) cari dau

$$\frac{\partial M}{\partial \mu}=1;\ \frac{\partial M}{\partial V}=x;\ \frac{\partial M}{\partial H}=-y$$

$$\frac{\partial N}{\partial \mu}=0;\ \frac{\partial M}{\partial V}=sin\varphi;\ \frac{\partial N}{\partial H}=cos\varphi$$

și de relațiunile:

$$ds\, sin\varphi=dy$$
$$ds\, cos\varphi=dx$$

obținem următoarele ecuațiuni:

$$\int\frac{Mds}{I}=0 \qquad (3)$$

$$\int\frac{Myds}{I}-\int\frac{Ndx}{\Omega}=0 \qquad (4)$$

$$\int\frac{Mxds}{I}+\int\frac{Ndy}{\Omega}+=0 \qquad (5)$$

Aceste ecuațiuni păstrează aceași formă dacă schimbăm origina coordonatelor.

Aceasta se vede lesne înlocuind x și y prin $x+a$, $y+b$.

a) *Arcul este uniform încărcat.* Vom lua pentru axă a absciselor o linie intermediară între chee și naștere și fie (fig. 2):

H împingerea la chee dată de curba de presiune care coincide cu fibra medie a arcului.

H_n împingerea reală la chee.

Referindu-ne la figura 2 avem:

$$M=H_n\,(h_n-y)-G\xi$$
$$O=H\,(h-y)-G\xi$$

Scăzând aceste relațiuni și punând

$$H-H_n=\Delta H \text{ obținem}$$
$$M=H_n\,h_n-Hh+y\Delta H \qquad (6)$$

Dacă însemnăm prin I_0 un moment de inerție arbitrar și punem $dw=ds\,\frac{I_0}{I}$ ecuațiunea (3) devine ținând cont de (6)

$$\int M dw = \Delta H \int y dw + (H_n h_n - H h) \int dw = o \quad (7)$$

Axa absciselor o alegem așa ca

$$\int y dw = 0$$

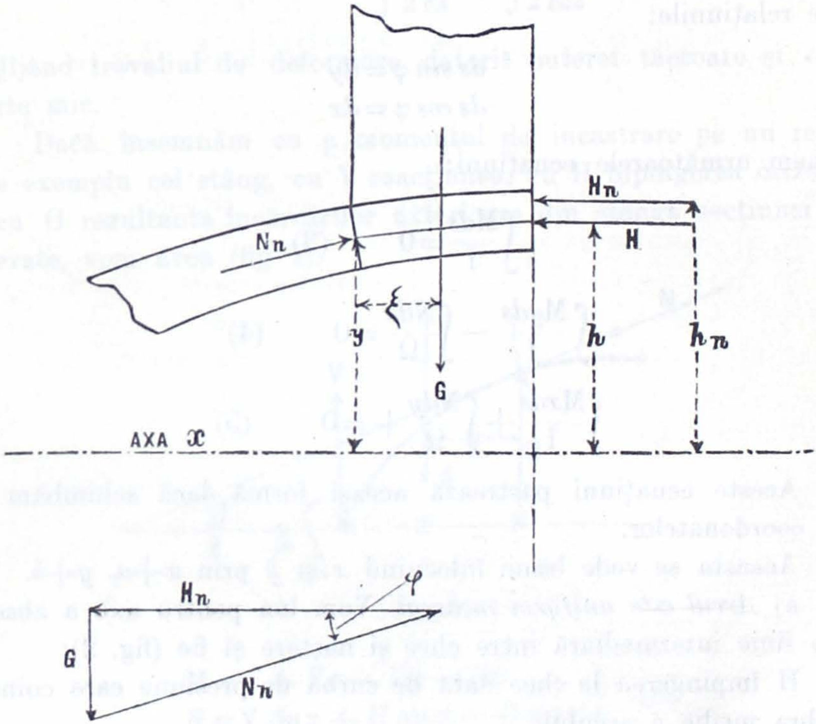

Fig. 2.

ast-fel expresiunea (7) se reduce la :

$$H_n h_n - H h = 0$$

iar (6) la:

$$M = y \Delta H \quad (8)$$

Proectând forțele din secțiunea considerată pe orizontală și pe fibra medie a arcului avem:

$$N = H \sec\varphi$$

$$N = H \cos\varphi + G \sin\varphi$$

$$N_n = H_n \cos\varphi + G \sin\varphi$$

Scăzând între ele ultimele 2 din aceste relațiuni și înlocuind valoarea lui N din prima, obținem

$$N_n = H \sec\varphi - \Delta H \cos\varphi \quad (9)$$

Ecuațiunea (4) se poate scrie

$$\int M y ds \frac{I_0}{I} - \frac{I_0}{\Omega_0}\int N_n ds \cos\varphi \frac{\Omega_0}{\Omega} = 0 \quad (10)$$

în care Ω_0 e o suprafață arbitrară. Să înlocuim ca mai sus:

$$dw = ds\frac{I_0}{I}, \quad dw' = ds\frac{\Omega_0}{\Omega},$$

M și N_n prin valorile lor din (8) și (9), obținem :

$$\frac{\Omega_0}{I_0}\Delta H \int y^2 dw - H\int dw' + \Delta H \int \cos^2\varphi \, dw' = 0 \quad (11)$$

Dacă b e lățimea arcului și δ grosimea lui avem:

$$\Omega = b\delta$$

$$I = \frac{1}{12} b\delta^3$$

așa dar:

$$dw = ds\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^3 dw' = ds\frac{\delta_0}{\delta}$$

$$\frac{\Omega_0}{I_0} = \frac{12}{\delta_0^2}$$

și să punem $\Delta H = \mu H$; cu aceste relațiuni ecuația (11) devine:

$$\mu = \frac{\int dw'}{\frac{12}{\delta_0^2}\int y^2 dw + \int dw' \cos^2\varphi}$$

Inpingerea H o calculăm lesne cu ajutorul unei curbe de presiune ce trece după cum am spus prin axa arcului. In urmă vom calcula μ și obținem ast-fel pe $\Delta H = \mu H$.

ΔH fiind cunoscut, avem momentele în ori-ce secțiune cu formula

$$M = y\Delta H$$

b) Pentru a ușura calculul în cazul încărcărei nesimetrice vom căuta momentele ce rezultă când ne închipuim bolta fără greutate proprie și încărcată pe o jumătate boltă cu $^1/_2\,p$, ce lucrează de sus în jos, iar pe cea-laltă jumătate cu $^1/_2\,p$, ce lucrează de jos în sus.

Fie V_0 puterea tăetoare la chee, vom avea pentru o secțiune din jumătatea stângă.

$$M' = V_0 x - {^1/_2}\, p \frac{x^2}{2}$$

(12) și pentru jumătatea din dreapta:

$$M'' = - V_0 x - V_0 x + {^1/_2} \frac{px^2}{2}$$

Origina absciselor este pe o axă verticală ce trece prin chee

Dacă introducem una din aceste valori în ecuația (5) obținem punând și aci $\frac{ds}{I} = dw$

$$\int M' x dw = \int V_0 x^2 dw - \frac{1}{4} p \int x^3 dw = 0$$

căci pentru acest fel de încărcare $N = 0$;

de aci $$V_0 = \frac{p}{4} \frac{\int x^3 dw}{\int x^2 dw}.$$

V_0 fiind cunoscut putem lesne calcula M' și M'' cu formulele (12).

Momentele ast-fel obținute le adunăm algebric cu cele date de formula (8) și avem ast-fel momentele rezultante în cazul când bolta este încărcată pe una din jumătățile sale cu p iar cea-laltă jumătate este descărcată.

Aplicarea metodei.

In aplicarea acestei metode drumul cel mai bun este de a calcula grafic cu ajutorul funicularelor diferitele integrale ce intră în formulele de mai sus.

Iată modul de a proceda și în acelaș timp ordinea operațiunilor.

1. — Incărcările verticale și forma aproximativă a bolței ne sunt date, așa că vom începe prin a trage o curbă de presiune pre-

supunând bolta complect încărcată cu $\frac{1}{2}$ p. și presupunând că curba de presiune trece prin centrul secțiunilor la naștere și la chee.

Vom lua această curbă de presiune drept fibră medie a bolței noastre și în consecință vom modifica forma bolței. Dacă noua formă obținută diferă prea mult de forma primitivă vom repeta operația de mai sus până când curba de presiune coincide cu fibra medie a bolței.

2. — Impărțim arcul modificat în mai multe părți egale ce el vom numi *„bolțari“*, δ_1, δ_2, δ_3 fiind grosimea lor medie, iar δ_0 o grosime arbitrară; calculăm apoi cătimele:

$$w_1 = \left(\frac{\delta_0}{\delta_1}\right)^3; \quad w_2 = \left(\frac{\delta_0}{\delta_2}\right)^3 \dots$$

$$w'_2 = \frac{\delta_0}{\delta_1} \quad ; \quad w'_2 = \frac{\delta_0}{\delta_2} \dots$$

Luăm o distanță polară arbitrară și construim un funicular luând ca forțe orizontale w_1, w_2, $w_3 \dots$ și aplicate în centrele bolțarilor (fig. 3).

Prin punctul de intersecție al laturilor extreme ale funicularului ducem o orizontală și aceasta va fixa axa absciselor căci măsurând ordonalele y de la dânsa vom avea $\int y dw = \Sigma y_1 w_1 = 0$.

3. — $\int y^2 dw = \Sigma y_n^2 w_n$ este momentul de inerție al forțelor w_n în raport cu axa absciselor, așa că 'l vom determina construind un al 2-lea furnicular la care vom lua ca forțe, segmentele ce interceptează laturile consecutive ale primului funicular pe axa absciselor.

Dacă b este distanță polară a acestui nou funicular și c segmentul cnprins între laturile sale extreme, vom avea

$$\int y^2 dw = abc$$

b și c le măsurăm pe scara lungimilor iar a pe scara pe care au fost luate segmentele w_1, w_2;... obținem ast-fel:

$$\mu = \frac{\Sigma w'}{\frac{12abc}{\delta_0^2} + \Sigma w' cos^2 \varphi}$$

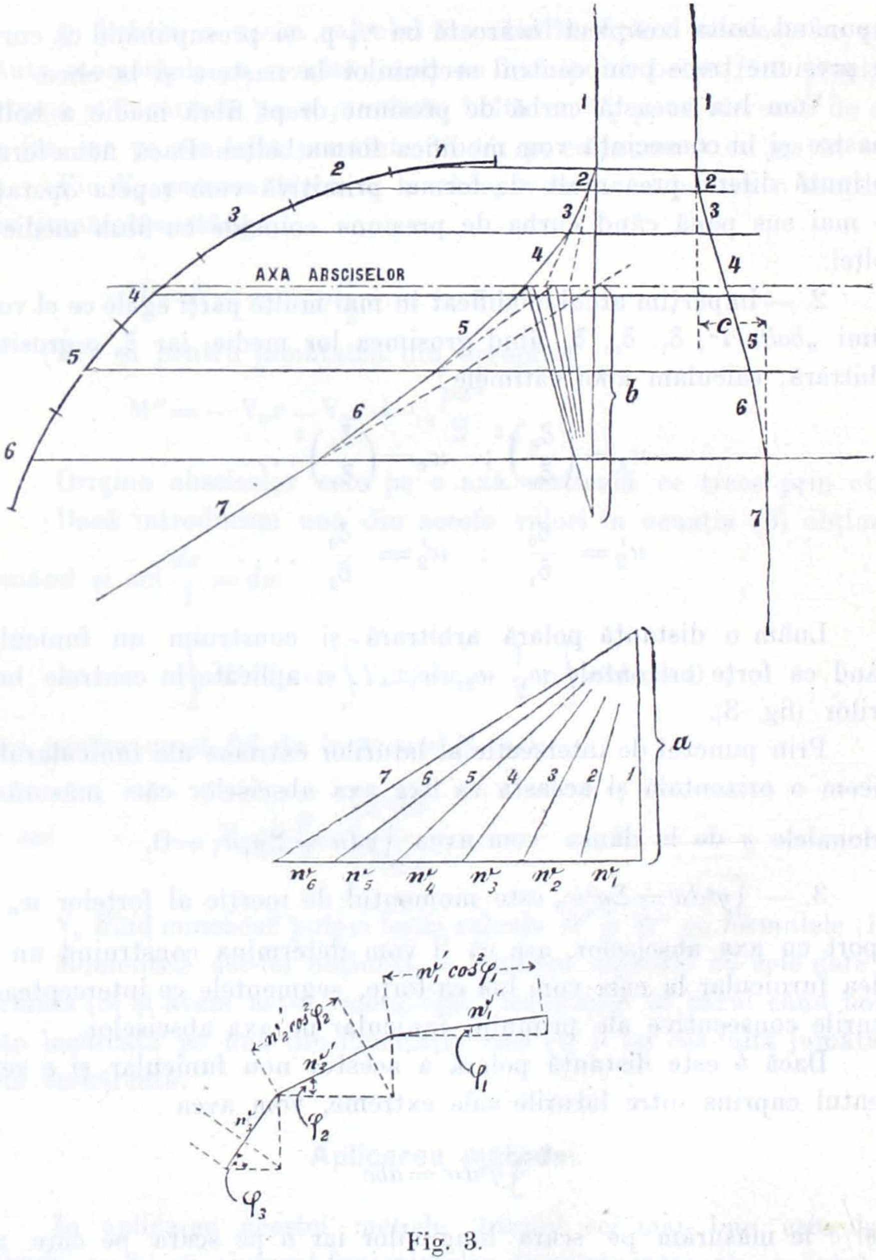

Fig. 3.

Valorile $w' cos^2 \varphi$ se calculculează ușor: punem unul după altul segmentele w' făcând unghiul φ cu orizontala, apoi prin 2 proecțiuni una pe orizontală și e 2-a pe direcția primitivă obținem:

$$w' \cos^2 \varphi$$

4. $\Sigma x^2 w$ și $\Sigma x^3 w$ se vor obține asemenea cu ajutorul funicularelor·

Vom lua dar cătimile w ca forțe verticale și cele 3 funiculare le vom construi cu aceeași distanță polară a. Ast-fel t fiind segmentul interceptat de laturile extreme ale celui de al 3-lea funicular pe o axă verticală ce trece prin chee, iar u segmentul între laturile extreme ale celui de al 2-lea funicular vom avea:

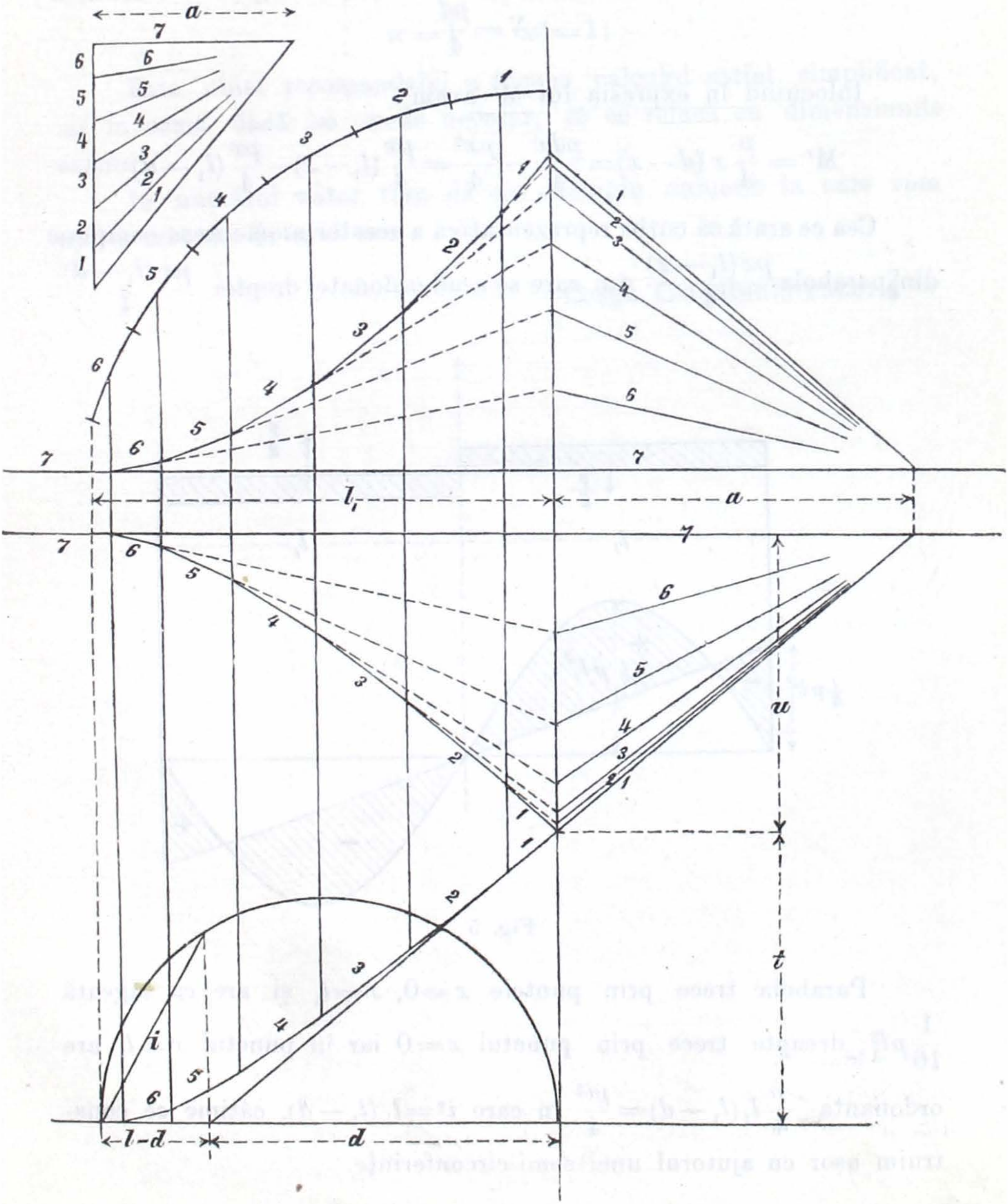

Fig. 4.

$$\Sigma x^3 w = a^3 t$$

$$\Sigma x^2 w = a^2 u$$

de aci $V = \frac{pat}{4u}$; construind $\frac{at}{u} = d$ prin o a 4-a proporțională avem:

$$V = \frac{pd}{4}$$

Inlocuind în expresia lui M′ avem:

$$M' = \frac{p}{4} x (d - x) = \frac{pdx}{4} - \frac{px^2}{4} = \frac{px}{4}(l_1 - x) - \frac{px}{4}(l_1 - d)$$

Cea ce arată că curba reprezentativă a acestor momentese compune din parabola $\frac{px(l_1 - x)}{4}$ din care se scad ordonatel dreptei $\frac{px(l_1 - d)}{4}$.

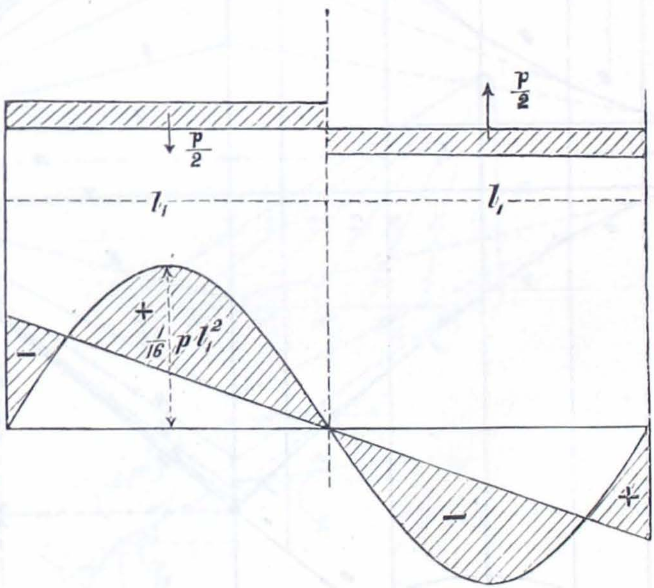

Fig. 5.

Parabola trece prin puntele $x = 0$, $x = l_1$ și are ca săgeată $\frac{1}{16} p l_1^2$; dreapta trece prin punctul $x = 0$ iar în punctul $x = l_1$ are ordonanta $\frac{p}{4} l_1 (l_1 - d) = \frac{pi^2}{4}$ în care $i^2 = l_1 (l_1 - d)$, cătime ce construim ușor cu ajutorul unei semi-circonferințe.

Se vede că momentul la chee pentru încărcarea nesimetrică este acelaşi ca pentru încărcarea simetrică.

Observare. Din causă că variaţiunea secţiunei influenţează prea puţin asupra rezultatului final, putem lua pentru δ_0, grosimea medie a arcului şi să presupunem arcul de secţiune constantă. In acest caz

$$w = 1 \quad w' = 1;$$

Este chiar recomandabil a începe calculul astfel simplificat, iar în urmă dacă se crede necesar, să se refacă cu dimensiunile exacte.

In numărul viitor vom da un exemplu numeric la care vom aplica metoda de mai sus.

Gogu Constantinescu.