Teoria arcurilor
la cari fibra medie diferă mult de curba de presiune.

Sunt cazuri când nu putem realiza o formă a arcului la care curba de presiune să coincidă cu fibra medie. Asemenea uneori suntem constrânși din causa înălțimei de construcție sau din punct de vedere estetic a adopta o formă oarecare pentru arc.

Imi propun dar de a face teoria arcurilor, a căror formă diferă notabil de curba de presiune a încărcărilor.

Ecuațiunile generale cari definesc un arc, la cari nașterile sunt incastrate și fixe sunt :

$$(1) \qquad \int M \frac{ds}{I} = 0$$

$$(2) \qquad \int \frac{M y ds}{I} - \int \frac{N dx}{\Omega} = 0$$

$$(3) \qquad \int \frac{M x ds}{I} + \int \frac{N dx}{\Omega} = 0$$

Fie y ordonatele arcului și y' ordonatele unei curbe de presiune ce presupunem că trece prin centrul secțiunei la chee și la nașteri. In cazul unei încărcări simetrice a arcului vom avea referindu-ne la figura pag. 344.

$$M = H_n\,(h_n - y) - G\xi$$
$$0 = H\;(h - y') - G\xi$$

M fiind momentul încovoelor în secțiunea considerată.

Equațiunea (1) devine dar punând $\frac{ds}{I} = dw$

$$\int M \frac{ds}{I} = \left(H_n h_n - Hh \right) \int dw + H \int y' dw - H_n \int y dw = 0$$

Să alegem axa absciselor așa ca

$$\int y dw = 0 \quad (4)$$

avem astfel

$$H_n h_n - Hh = -H \frac{\int y' dw}{\int dw}$$

Ecuațiunea (2) devine

$$\left(H_n h_n - Hh \right) \int y dw + H \int y y' dw - H_n \int y^2 dw - \int \frac{N dx}{\Omega} = 0$$

De oarece în cele ce vor urma vom considera numai cazurile când arcul este foarte turtit la partea superioară, putem lua $H_n = N_n$ și ținând seamă de (4) deducem:

$$H_n = H \frac{\int y y' dw}{\int y^2 dw + \int \frac{dx}{\Omega}}$$

așa dar expresia momentului în o secțiune oarecare devine

$$(5) \quad M = H \left[y' - y \frac{\int y y' dw}{\int y^2 dw + \int \frac{dx}{\Omega}} - \frac{\int y' dw}{\int dw} \right]$$

2.—Presupunem bolta fără greutate proprie încărcată pe una din jumătățile sale, spre exemplu stânga, cu $\frac{p}{2}$ acționând de sus în jos iar pe cealaltă jumătate cu $\frac{p}{2}$ acționând de jos în sus

Fie V puterea tăetoare la chee, vom avea pentru o secțiune din jumătatea încărcată

$$M' = Vx - \frac{p}{2}\,\frac{x^2}{2}$$ și pentru cea-l-altă jumătate

$$M'' = -Vx + \frac{p}{2}\,\frac{x^2}{2}$$

Introducând una din aceste valori în ecuațiueea (3) obținem :

$$\int M x\, dw = V \int x^2 dw - \frac{p}{4} \int x^3 dw = o$$

de unde

$$V = \frac{p}{4}\,\frac{\int x^3 dw}{\int x^2 dw} \qquad (6)$$

Cunoscând ast-fel pe V putem calcula M′ și M″.

Dacă cu formula (5) am calculat momentele în cazul unei încărcări de $1/2\ p$ distribuită pe toată bolta, n'avem de cât să adăogăm algebric momentele M′ sau M″ pentru a avea momentele în cazul încărcărei nesimetrice cu p.

Impingerea orizontală a rămas sensibil aceiași iar surplusul de reacțiune este egal cu $\frac{pl}{2} - V$ pe reazămul încărcat și $-\frac{pl}{2} + V$ pe cel neîncărcat.

Aplicație. Presupunem că avem de calculat un pod format din două picioare verticale racordate la partea superioară prin un arc format din o semi-elipsă.

Să însemnăm cu y_o depărtarea de la orizontala ce trece prin baza picioarelor până la axa absciselor definită prin relația $\int y dw = o$.

Fie Y, Y′ ordonatele fibrei medie a podului și unei curbe de presiune ce trece prin centrul cheei și centrul bazei picioarelor. Vom avea:

$$y = Y - y_o$$
$$y' = Y' - y_o$$

deducem că $y\,y' = Y\,Y' = y_o\,Y - y_o\,Y' + y_o^2$ așa dar

$$\int yy'dw = \int YY'dw - y_o \int Y\,dw - y_o \int Y'dw + y_o^2 \int dw$$

însă $$\int Ydw - y_o \int dw = \int (Y - y_o)\,dw = \int ydw = o.$$

$$\text{deci} \quad \int Y\,dw = y_o \int dw$$

așa că avem:

$$\int yy'dw = \int YY'dw - y_o \int Y'dw \qquad (7)$$

Să calculăm acum $\int y^2 dw$; de oare-ce $y^2 = Y^2 + y_o^2 - 2y_o\,Y$

deducem $$\int y^2\,dw = \int Y^2dw + y_o^2 \int dw - 2y_o \int Ydw$$

sau $$\int y^2\,dw = \int Y^2dw - y_o^2 \int dw \qquad (8)$$

Asemenea deducem $\int y'dw = \int Y'dw - y_o \int dw$ (9)

iar $$\int \frac{dx}{\Omega} = \frac{a}{\Omega}$$

Inlocuind expresiile 7, 8, 9 în 5 obținem

$$M = H \left[Y' - (Y - y_o) \frac{\int YY'dw - y_o \int Y'dw}{\int Y^2 dw - y_o^2 \int dw + \frac{a}{\Omega}} - \frac{\int Y'dw}{\int dw} \right]$$

Pentru podul nostru avem

$Y = h + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ a, b, fiind demiaxele elipsei și h înălțimea picioarelor.

rea permanentă s'o presupunem uniform repartizată, astfel curba de presiune va avea forma unei parabole și equațiunea ei va fi:

$$Y' = (b + h)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Să calculăm expresia

$$y_o = \frac{\int Y dw}{\int dw}$$

Integralele le vom despărți în două regiuni: o regiune dealungul arcului și alta dealungul piciorului, aceasta din cauza discontinuității ce există între aceste două elemente.

Dealungul arcului expresia $dw = \frac{ds}{I}$ se poate lua ca foarte aproape de $\frac{dx}{I_a}$, I_a fiind momentul de inerție al secțiunei medii a arcului și presupunând elipsa destul de turtită, condițiune care de altfel trebue împlinită pentru ca și împingerea orizontului să fie mică. Eroarea ce facem prin această substituție e foarte mică și nu poate influența de cât lângă reazim pe o mică porțiune.

Dealungul piciorului $\frac{ds}{I}$ este sensibil egal cu $\frac{dY}{I_e}$ I_c fiind momentul de inerție al piciorului.

Prin urmare pentru arc avem:

$$\int Y_1 dw_1 = \frac{1}{I_a}\int_o \left(h + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) dx = \frac{ah + \frac{\pi}{4}ab}{I_a}$$

pentru picior $\int Y_2 dw_2 = \frac{1}{I_c}\int_o^h Y\, dY = \frac{h^2}{2 I_c}$

așa dar

$$\int Y\, dw = \frac{ah + \frac{\pi}{4}ab}{I_a} + \frac{h^2}{2 I_c}$$

asemenea pentru arc avem $\int dw_1 = \frac{a}{I_a}$

iar pentru picior

$$\int dw_2 = \frac{h}{I_c}$$

deci
$$\int dw = \frac{a}{I_a} + \frac{h}{I_c}$$

$$y_0 = \frac{ah + \frac{\pi}{4}ab + \frac{h^2}{2}\frac{I_a}{I_c}}{a + h\frac{I_a}{I_c}}$$

Să calculăm expresia

$$A = \int YY' \, dw.$$

Pentru arc avem

$$Y_1 Y_1' = (b+h)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(h + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)$$

$$= (b+h)\left[h - \frac{h}{a^2}x^2 + b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

deducem din aceasta

$$\int_o^a Y_1 Y_1' \, dw = \frac{(b+h)}{I_a}\left(\frac{2}{3}ah + \frac{3\pi}{16}ab\right)$$

Pentru picior avem : $Y' = o$ așa că

$$\int Y_2 Y_2' \, dw = o$$

așa dar
$$A = a\,\frac{(b+h)}{I_a}\left(\frac{2}{3}h + \frac{3\pi}{16}b\right)$$

Prin o cale analoagă obținem

$$B = \int Y' dw = \frac{2}{3}\,\frac{a\,(b+h)}{I_a}$$

$$C = \int Y^2 dw = \frac{1}{I_a}\left[ah^2 + \frac{2}{3}ab^2 + \frac{\pi}{2}abh + \frac{1}{3}h^3\,\frac{I_a}{I_c}\right]$$

$$D = \int dw = \frac{1}{I_a}\left(a + h\frac{I_a}{I_c}\right)$$

După ce am calculat expresiile y_o, A, B, C, D avem momentul prin formula

$$M = H \left[Y' - (Y - y_o) \frac{A - B y_o}{C - D y_o^2 + \frac{a}{\Omega}} - \frac{B}{D} \right]$$

H este împingerea orizontală dată prin curba de presiune ce trece prin centrul cheei și nașterei. Dacă g e greutatea permanentă, când încărcăm tot podul cu $\frac{p}{2}$ vom avea $(b+h) = \left(g + \frac{p}{2}\right)\frac{a^2}{2}$ de unde,

$$H = \left(g + \frac{p}{2}\right)\frac{a^2}{2\,(b+h)}$$

Putem construi acum adevărata curbă de presiune căci putem cunoaște punctele pe unde ea trece prin secțiunea de bază a piciorului și secțiunea la chee.

$$\text{baza piciorului } M_1 = H \left[y_o \frac{A - B y_o}{C - D y_1{}^2 + \frac{a}{\Omega}} - \frac{B}{D} \right]$$

căci $Y = o$, $Y' = o$;

$$\text{la che } M_2 = H \left[b + h - (b + h - y_o) \frac{A - B y_o}{C - D y_o^2 + \frac{a}{\Omega}} - \frac{B}{D} \right]$$

Dacă P este greutatoa piciorului singur, reacțiunea pe bază va fi: $P + a\left(g + \frac{p}{2}\right)$ așa că însemnând cu e_1 depărtarea spre stânga a punctului pe unde trece adevărata curbă de presiune

$$M_1 = \left[P + a\left(g + \frac{p}{2}\right)\right] e_1;$$

asemenea dacă e_2 este depărtarea de la curba de presiune la centrul cheei (măsurată în sus de chee)

$$He_2 = M_2 \text{ așa dar}$$

$$e_1 = \frac{M}{P + a\left(g + \frac{p}{2}\right)}$$

$$e_2 = \frac{2 M_2 (b+h)}{a^2 \left(g + \frac{p}{2}\right)}$$

Cu aceste elemente putem construi curba de presiune la o încărcare totală.

Pentru a calcula surplusul de moment și reacțiune datorit încărcărei nesimetrice va trebui să calculăm încă puterea tăetoare la chee

$$V = \frac{P}{4} \frac{x^3 dw}{\int x^2 dw}$$

pentru arc $\int x^3 dw$ se reduce la $\frac{1}{I_a}\int_o^a x^3\, dx = \frac{a^4}{4 I_a}$

pentru picior această integrală este egală cu

$$\frac{a^3}{I_c}\int_o^h dY = \frac{a^3 h}{I_c}$$

așa dar $\int x^3 dw = \frac{a^4}{4 I_a} + \frac{a^3 h}{I_c}$

Asemenea deducem $\int x^2 dw = \frac{a^3}{3 I_a} + \frac{a^2 h}{I_c}$

deci

$$V = \frac{p}{4} \frac{\frac{a^2}{4} + ah \frac{I_a}{I_c}}{\frac{a}{3} + h \frac{I_a}{I_c}} = \frac{3 pa}{16} \frac{a + 4h \frac{I_a}{I_c}}{a + 3h \frac{I_a}{I_c}}$$

deducem

$$M' = \frac{3 pa}{16} \frac{1 + \frac{4h}{a} \frac{I_a}{I_c}}{1 + \frac{3h}{a} \frac{I_a}{I_c}} x - \frac{px^2}{4}$$

prin urmare pentru $x = a$ avem

$$M_1' = -\frac{p a^2}{16\left(1+3\frac{h}{a}\frac{I_a}{I_c}\right)}$$

la chee $M_2' = o$ așa că curba de presiune trece prin același punct ca la o încărcare totală.

La baza piciorului vom avea :

$$e_1' = \frac{M + M_1'}{P + a\left(g+\frac{p}{2}\right) + \frac{ap}{2} - V} = \frac{M_1 + M_1'}{P + a\,(g+p) - V}$$

iar la celalt picior

$$e_1'' = \frac{M_1 - M_1'}{P + a\left(g+\frac{p}{2}\right) - \frac{ap}{2} + V} = \frac{M_1 - M_1'}{P + ag + V}$$

2.— Pentru un arc de formă parabolică vom avea :

$$Y = h + b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

b fiind săgeata arcului. Ecuațiunea curbei de presiune va fi și în acest caz

$$Y' = (b+h)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Să calculăm expresia

$$I_o = \frac{\int Y\,dw}{\int Y\,dw}$$

Dealungul arcului expresia $dw = \frac{ds}{I}$ se poate socoti foarte aproape de $\frac{dx}{I_a}$, I_a fiind momentul de inerție al secțiunei medii a arcului.

Dealungul piciorului $\frac{dw}{I}$ este sensibil egal cu $\frac{dY}{I_c}$, I_c fiind momentul de inerție al secțiunei medii a piciorului.

Pentru arc vom avea dar

$$\int Y_1\,dw_1=\frac{1}{I_a}\int_o^a\left[h+b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\,dx=\frac{ah+\frac{2}{3}\,ab}{I_a}$$

Pentru picior avem: $\int Y_2\,dw=\frac{1}{I_c}\int_o^h Y\,d\,Y=\frac{h^2}{2I_c}$

așa dar

$$\int Y\,dw=\frac{ah+\frac{2}{3}\,ab}{I_a}+\frac{h^2}{2\,I_c}$$

Asemenea mai avem pentru arc

$$\int dw_1=\frac{a}{I_a}$$

iar pentru picior $\int dw_2=\frac{h}{I_c}$

deci $\int dw=\frac{a}{I_a}+\frac{h}{I_c}$

și în definitiv

$$y_0=\frac{ah+\frac{2}{3}\,ab+\frac{h^2}{2}\,\frac{I_a}{I_c}}{a+h\,\frac{I_a}{I_c}}$$

Să calculăm acum expresia

$$A=\int YY'\,dw$$

Pentru arc avem

$$Y_1Y_1'=\left(b+h\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left[h+b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]$$

$$=\left(b+h\right)^2-\left(b+h\right)\left(h-2\,b\right)\frac{x^2}{a^2}+b\left(b+h\right)\frac{x^4}{a^4}$$

$$\int^a Y_1Y_1'\,dw=\frac{\left(b+h\right)\;a\left(\frac{2}{3}\,h+\frac{8}{15}\,b\right)}{I_a}$$

Pentru picior avem $Y' = 0$ deci $\int Y_2 Y'_2 \, dw = 0$

așa dar $$A = a\frac{(b+h)}{I_a}\left(\frac{2}{3}h + \frac{8}{15}b\right)$$

Prin un calcul analog obținem

$$B = \int Y' dw = \frac{2a(b+h)}{3\,I_a}$$

$$C = \int Y^2 dw = \frac{1}{I_a}\left[ah^2 + \frac{8}{15}ab^2 + \frac{4}{3}abh + \frac{1}{3}h^3\frac{I_a}{I_c}\right]$$

$$D = \int dw = \frac{1}{I_a}\left[a + h\frac{I_a}{I_c}\right].$$

După ce am calculat dar coeficienții I_o, A, B, C, D, avem momentul în o secțiune oare-care prin formula

$$M = H\left[Y' - (Y - Y_o)\frac{A - By_o}{C - Dy_o^2 + \frac{a}{\Omega}} - \frac{B}{D}\right]$$

în care avem ca și în cazul arcelor eliptice

$$H = \left(g + \frac{p}{2}\right)\frac{a^2}{2(b+h)}.$$

De aci înainte calculul este identic ca și cel pentru bolțile cu formă eliptică.

Așa spre exemplu momentul la baza piciorului este

$$M_1 = H\left[y_o\frac{A - By_o}{C - Dy_o^2 + \frac{a}{\Omega}} - \frac{B}{D}\right]$$

iar la chee $$M_2 = H\left[b + h - (b + h - y_o)\frac{A - By_o}{C - Dy_o^2 + \frac{a}{\Omega}} - \frac{B}{D}\right]$$

Gogu Constantinescu
Inginer.