Calculul unui arc de 14^m deschidere[1]

In numărul precedent al buletinului sub titlul „Calculul bolților nearticulate“ am desvoltat o metodă pentru calculul arcelor încastrate. Voi da aci un exemplu numeric ca aplicație a metodei expuse.

Incărcarea accidentală admisă este 450 kgr. pe metru pătrat de proecție orizontală. Arcele ce considerăm sunt 4 pe o travee, și legate transversal din distanță în distanță, formează o boltă care susține prin stâlpi verticali o podeală ; peste aceasta este așternut pietriș ce formează șoseaua propriu zisă iar trotuarele sunt susținute pe console[2]). Șoseaua are 5^m lărgime iar partea trotuarelor pe care se poate circula are 0^m,80 așa că lărgimea totală ce se poate încărca este 6^m,60. Astfel fiecare arc va avea o încărcare liniară de $\frac{450 \times 6{,}6}{4} \sim 740$ kgr.

1. Deschiderea unui arc este 14^m iar săgeata 1^m,95. Incărcările ce transmit stâlpii unui singur arc sunt însemnate în fig. 1 prin săgeți verticale și au valorile 2,33, 2,33, 2,46, 2,54, 2,74 tone. In aceste țifre se coprinde și jumătate din încărcarea accidentală distribuită uniform pe toată deschiderea. Incărcările reprezentate prin săgețile de sub arc sunt greutățile segmentelor de arc și au valorile 0,25, 0,27, 0,29, 0,32, 0,37, 0,42, 0,46 tone.

Cu ajutorul poligonului de forțe ABC s'a tras poligonul funicular OJ.

Acesta coincide sensibil cu fibra medie a arcului care a fost luată după un arc de circomferință.

---

[1]) Vezi Buletinul precedent pag. 336 și planșa de la finele buletinului.

[2]) Acest pod s'a terminat de curând și este construit din beton armat. Se găsește peste râul Doftana și are o lungime de 151 metri.

2. Arcul e împărțit în 7 părți cari nu sunt însă egale. Lungimile respective ale acestor bolțari se găsesc pe tablou în coloana Δs, grosimile lor în coloana δ iar ca grosime arbitrară δ_0 s'a luat $\delta_0 = 0^m,37$.

In coloanele w și w' s'au calculat câtimile

$$w = \Delta s \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^3 \qquad w' = \Delta s \, \frac{\delta^0}{\delta}$$

No.	Δs	δ	w	w'
1	1,00	0,30	0,53	0,81
2	1,01	0,32	0,66	0,88
3	1,02	0,34	0,79	0,94
4	1,03	0,37	1,03	1,03
5	1,05	0,41	1,42	1,16
6	1,10	0,45	1,97	1,34
7	1,14	0,48	2,48	1,48

Din cauză că arcul este foarte turtit, pentru facerea epurei din figura 3-a s'au luat ordonatele de 4 ori mai mari așa că fibra medie transformată a devenit J' O'. Vom lua o scară arbitrară B pentru câtimile w și construim poligonul de forțe E F D considerând w ca forțe orizontale. Distanța polară E D este arbitrară și are 4,50 pe scara B; cu ajutorul acestui poligon construim funicularul O, I, II,... VII.

Ducem o orizontală prin punctul U care este intersecția laturilor extreme ale funicularului și avem astfel axa absciselor.

3. Laturile acestui funicular interceptează pe axa absciselor segmentele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; luăm o distanță polară $c = \text{UZ}$ ($2^m,00$ pe scara lungimilor) și construim funicularul 0', I', II', III',... VII'_1 ale cărui laturi extreme interceptează pe axa absciselor segmentul $c = \text{OS}$ ($5^m,40$ pe scara lungimilor).

Din aceste elemente deducem

$$\int y'^2 dw = abc = 4,5 \times 2,00 \times 5,40 = 48,6$$

y' fiind ordonatele fibrei medii transformate din figura 3-a. Cum aceste ordonate sunt de 4 ori mai mari ca ale arcului nostru, $\int y^2 dw$ pentru arc va fi a 4^2 parte din $\int y'^2 dw$; așa dar

$$\int y^2 dw = \frac{48{,}6}{16} = 3{,}03$$

In figura 2-a s'au pus unul după altul segmentele w' (luate s. e. pe scara lungimilor) înclinate pe orizontală cu unghiurile φ ale fibrei medii din bolțarii respectivi; apoi prin 2 proecțiuni una pe orizontală care dă $w' \cos\varphi$ și aceasta iar pe segment obținem $w' \cos\varphi \cos\varphi = w' \cos^2\varphi$. Punând consecutive pe aceiași dreaptă aceste rezultate obținem

$$\Sigma w' \cos^2\varphi = 6{,}78 \text{ m.}$$

Adunând coloana w' din tablou obținem

$$\Sigma w' = 7{,}64 \text{ m.}$$

Cu aceste elemente avem

$$\mu = \frac{\Sigma w'}{\dfrac{12\,abc}{\delta_0^2} + \Sigma w' \cos^2\varphi} = \frac{7{,}64}{\dfrac{12 \times 3{,}03}{0^2{,}37} + 6{,}78} = 0{,}028$$

deci

$$\mu = 0{,}028$$

Impingerea H o avem în figura 1; H = AB = 25,5 tone, prin urmare

$$\Delta H = \mu H = 25{,}5 \times 0{,}028 = 0{,}715 \text{ tone}$$

Astfel împingerea reală este

$$H_n = 25{,}5 - 0{,}715 \sim 24{,}8 \text{ tone.}$$

Depărtarea de la chee la axa absciselor este 0,94 m așa că momentul la chee este

$$M_1 = 0{,}94\,\Delta H = 0{,}94 \times 0{,}715 = 0{,}67 \text{ t. m.}$$

Depărtarea de la naștere la axa absciselor este $-1^m{,}01$ așa că momentul la naștere este:

$$M_2 = -1{,}01 \times \Delta H = -1{,}01 \times 0{,}715 = -0{,}723 \text{ t. m.}$$

4. In poligonul de forțe MM'N din fig. 4 s'au pus forțele w verticale și cu o distanță polară MN s'a construit funicularul din partea de sus a figurei. Laturile acestui funicular interceptează pe axa YS segmentele 1, 2, 3,... 7, pe cari le luăm ca forțe și cu o distanță polară $PQ=a$ construim funicularul intermediar; segmentele interceptate de laturile acestui funicular le luăm iar ca forțe și construim ultimul funicular SL.

Pe jumătate deschidere a arcului ca diametru descrim semicirconferința LVY' iar prin punctul T unde dreapta RS întâlnește LY' ridicăm perpendiculara TV.

Segmentul $i=LV$ are $3^m,1$ și avem astfel elemente suficiente pentru a putea construi suprafața momentelor.

Pentru a avea momentele rezultante în cazul încărcărei nesimetrice, trebue să suprapunem momentele (produse de încărcarea permanentă plus $1/2\ p$ uniform distribuit pe toată deschiderea arcului) reprezentate prin formula

$$M = y \Delta H,$$

cu cele reprezentate de figura 5 B. pag. 340.

Cel mai practic mijloc de a face acest lucru, este de a reprezenta grafic și rezultatele formulei $M = y \Delta H$. Aceasta se face lesne observând că M e proporțional cu y, adică cu coordonatele arcului măsurate de la axa absciselor; putem dar considera fibra medie a arcului cu axa absciselor, ca limitând suprafața momentelor date de formula $M = y \Delta H$, cu condiție s'alegem convenabil scara momentelor.

Valoarea numerică a momentului la naștere dat de prima ipoteză de încărcare este $0{,}723^{t\,m.}$ Acest moment e representat prin depărtarea de la naștere la axa alesciselor adică $1^m,01$, o tonă metru va fi reprezentată dar prin $\dfrac{1{,}01}{0{,}723} \backsim 1{,}4$ metri așa că scara momentelor este ast-fel precizată.

Pentru a construi suprafața din figura 5 punem ordonata la naștere care este

$$\frac{1}{4} p i^2 = \frac{1}{4}\, 0{,}740 \times 3^2{,}1 = 1{,}78^{t.m.}$$

asemenea ordonata maximă a parabolei

$$\frac{1}{16}\,740 \times 7^2 = 2{,}27^{\mathrm{t\,m.}}$$

și figura 5 este determinată cu aceste elemente.

Adunând cu semnul lor ordonatele figurei 5 cu cele cari reprezintă formula $M = y\Delta H$, obținem figura 6 care reprezintă momentele în toate secțiunile arcului când arcul este încărcat numai pe o jumătate de deschidere cu 740 kgr. pe metru curent.

Observând figura 6 vedem imediat că această din urmă încărcare dă momentul maximum la naștere. Aci are valoarea 2,51 t.m.

Secțiunea arcului la naștere are un modul de resistență de 19600 cm³ și o suprafață de 2068 cm² așa că eforturile unitare în secțiune vor fi, ținând seamă că compresiunea centrală în secțiune e aprox. 29 tone

$$R = \frac{29000}{2036} \pm \frac{251000}{19600} = 14{,}2 \pm 12{,}8 = \begin{cases} 27{,}0 \\ 1{,}4 \end{cases} {}^{k}/_{cm^2}$$

Intre secțiunile 3 – 4 în dreptul forței de $2^t{,}46$ avem un moment pozitiv de 1,86 t.m., o compresiune centrală de 26^t și grosimea arcului e de 0,36 m.

In această secțiune modulul de rezistență al secțiunei este 11000 cm³ iar secțiunea arcului 1578 cm² așa că eforturile unitare sunt

$$R' = \frac{26000}{1578} \pm \frac{186000}{11000} = 16{,}5 \pm 16{,}9 = \begin{cases} 33{,}4 \\ -0{,}4 \end{cases} {}^{k}/_{cm^2}$$

La o distanță de 2 m de chee în regiunea încărcată, momentul positiv este maximum și are valoarea 1,95 t.m. Compresiunea în această secțiune este 26 tone iar înălțimea arcului 33 cm. Această secțiune are un modul de rezistență de 88500 cm³ și o suprafață de 1444 cm² așa că eforturile ar fi

$$R = \frac{26000}{1444} \pm \frac{195000}{88500} = \begin{cases} 40{,}0 \\ -4{,}0 \end{cases} {}^{k}/_{cm^2}$$

In realitate aceste țifre nu sunt atinse de oarece în această secțiune arcul se confundă cu planșeul care ajută în mare măsură la rezistența arcului propriu zis.

Pentru a calcula împingerea orizontală maxima, trebue să presupunem toată bolta încărcată cu $450^{k}/_{m^2}$. In cazul încărcărei de $\frac{1}{2}\ 450^{k}/_{m^2}$ am găsit o împingere orizontală pe pilă egală cu 24,8 tone. Surplusul de împingere când presupunem încă $1/2\ p$ distribuit uniform pe toată travea este

$$\frac{1}{8}\ {}^{1}/_{2}\ p\ \frac{l^2}{f} = \frac{1}{8}\ 0^{t},370\ \frac{14^2}{1,95} = 4,65 \text{ tone}$$

iar surplusul de reacțiune verticală pe pilă

$$\frac{1}{2}\ 0,370 \times 14 = 2,59 \text{ tone.}$$

Pentru calculul pilelor vom presupune dar o travee încărcată complect iar cea adiacentă descărcată complect; vom avea astfel o diferență de împingeri orizontale de

$$H_n + 4^{t},65 - (H_n - 4^{t},65) = 9,30 \text{ tone}$$

iar reacțiunea pe pila considerată

$$V_n + 2,59 + (V_n - 2,59) = 2\,V_n$$

Din figura 1 avem $V_n \sim BC = 13,8$ tone așa că

$$2\,V_n = 27,6.$$

Naşterile a 2 bolți adiacente sunt depărtate de $0^{m},70$ așa că din cauza diferenței celor 2 reacțiuni se va naște un cuplu de $0^{m},70 \times 2^{t},59 = 1,81$ tone-metre. Pentru a ține seamă de influența acestui cuplu vom scoborâ punctul de aplicație al împingerei orizontale cu

$$a = \frac{1^{t.m.},81}{9^{t},3} = 0^{m},195.$$

Pilele vor fi supuse dar unei forțe orizontale $4 \times 9,3 = 37,2$

tone aplicată la $0^{m},195$ sub naștere și la o reacțiune verticală în axa pilei egală cu $4 \times 27,6 = 110,4$ tone. [1])

Greutatea pilei inclusiv greutatea stâlpilor pe pilă este aproximativ 60 tone așa că pila este acționată în definitiv de o forță verticală de $110 + 60 = 170$ tone și una orizontală la aprox. $0^{m},20$ sub nașterea fibrei medii a arcurilor și egală cu 37,2 tone.

Gogu Constantinescu.

Inginer

---

[1]) Pentru un calcul mai riguros ar trebui ținut samă și de diferența momentelor de încastrare la cele 2 nașteri adiacente, dar această diferență este în general mică; asemenea prin neglijarea ci ne punem în o ipoteză mai defavorabilă pentru pile.