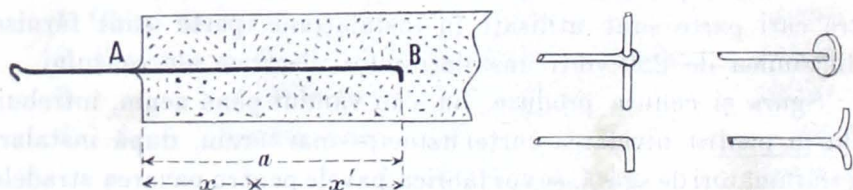


Studiu asupra betonului armat

(Urmare)

Aplicația 2-a. Să presupunem că avem tot o bară de beton cu o tije de fer în mijloc și că efortul de tracțiune sau compresiune e aplicat asemenea numai tijei cu ajutorul unui cârlig, însă în loc ca tija să se termine simplu în beton, să aibă un dispozitiv la capăt care să nu permită extremității B a ferului vre-o mișcare relativă cu betonul. Așa spre exemplu se poate îndoi în unghi drept capătul vergei sau să fie înșurupat în o placă etc. Cu alte cuvinte extremitatea B să fie *ancorată* în beton.



Ast-fel fiind, efortul ferului în secțiunea A va fi egal cu P, însă în secțiunea B nu va fi nul ci finit.

Pe de altă parte în secțiunea B *aderența* tijei va fi nulă căci deplasarea relativă a ferului față de beton este împedecată de ancoraj.

Prin urmare pentru $x=0$, $F=P$ și pentru $x=a$ $z=0$.

Introducând acestea în expresiunile generale ale lui F și α (stabilite în numărul precedent al buletinului) obținem :

$$P = \frac{n}{m} + A + B$$

$$0 = A e^{a\sqrt{m}} - B e^{a'\sqrt{m}}$$

Păstrând notațiunile exemplului precedent, aceste două ecuațiuni dau :

$$A = f' \frac{e^{-ka}}{e^{ka} + e^{-ka}} \quad B = f' \frac{e^{ka}}{e^{ka} + e^{-ka}}$$

înlocuind în expresiile generale ale lui F și α obținem în definitiv :

$$(5) \quad F = f + f' \frac{\cos kx'}{\cos ka} \quad \alpha = - \frac{kf'}{\gamma} \frac{\sin kx'}{\cos ka}$$

aderența crește cu cât ne apropiem de origină și în punctul A are valoarea $\alpha_0 = - \frac{kf'}{\gamma} \operatorname{tg} ka$.

Dacă $a = \infty$ această expresie se reduce la

$$F = f + f' e^{-kx}$$

adică aceeași ca și când ancorajul n'ar exista. Prin urmare dacă tiga este implantată pe o lungime destul de mare, ancorajul numai influențează distribuția eforturilor în mod sensibil.

Valoarea efortului în fer în secțiunea B o obținem făcând în formula (5) $x' = 0$

$$F_1 = f + \frac{f'}{\cos ka}$$

Urmează dar că ancorajul e supus la acest efort și trebuie să-i reziste. Așa spre exemplu dacă ancorajul constă din un singur cârlig îndoit la 90° , cârligul va fi supus la îndoitura unui moment aproximativ egal cu $F_1 \frac{h}{2}$, așa că pentru ca el să nu se rupă în această secțiune trebuie ca :

$$\frac{F_1}{\omega} + \frac{F_1 h}{2W} \leq R_f$$

h este înălțimea cârligului, ω secțiunea ferului la îndoitură, W modulul de rezistență al secțiunii ferului, R_f rezistența admisibilă în fer.

Pentru o tige circulară simplu îndoită, avem aproximativ :

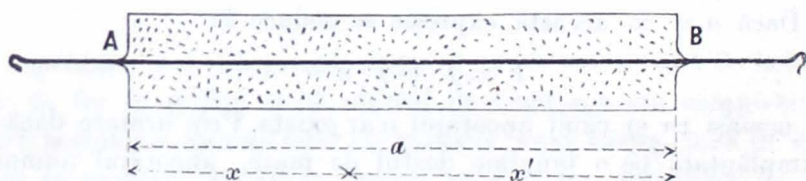
$$R_f \geq 5 \frac{F_1 h}{d^3}$$

d fiind diametrul barei.

Pentru R_f convine a nu se lua mai mult de 300—400 kg/cm^2 având în vedere că aceste cârlige dese-ori sunt făcute la rece și astfel în condiții puțin favorabile rezistenței.

Trebue verificat apoi dacă sub influența efortului F_1 nu cumva betonul nu este strivit de cârlig adică $R_b \geq \frac{F_1}{hd}$, R_b înseamnă rezistența la strivire a betonului. Asemenea pentru R_b trebue să luăm un coeficient de siguranță mai mare căci repartizarea efortului nu e riguros uniformă.

Aplicația 3-a. Tija este trasă de ambele capete.



În acest caz în secțiunile A și B efortul în fer este egal cu P, deci pentru $x=0$ $F=P$

$x=a$ $F=P$. Înlocuind în expresia generală a lui F obținem:

$$P = f + A + B$$

$$P = f + Ae^{ka} + Be^{-ka}$$

deducem

$$A = f' \frac{e^{-ka} - 1}{e^{-ka} - e^{ka}} \quad B = f' \frac{1 - e^{ka}}{e^{-ka} - e^{ka}}$$

iar

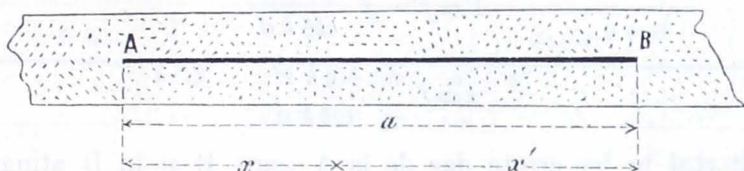
$$F = f + f' \frac{\sin kx + \sin kx'}{\sin ka}$$

$$\alpha = f' \frac{k}{\chi} \frac{\cos kx - \cos kx'}{\sin ka}$$

Aderența e nulă la mijloc și crește spre extremități unde are valoarea

$$\alpha_0 = \pm \frac{f' k}{\chi \operatorname{tg} ka}$$

Aplicația 4-a. Să studiem cazul unei tije de fer de lungime finită îngropată în o bară de beton de lungime nedefinită.



Efortul în fer la ambele capete A, B ale tije este nul, prin urmare vom avea pentru $x=0$ $F=0$ și pentru $x=a$ $F=0$.

Înlocuind ca în aplicațiile precedente obținem :

$$F = f - f \frac{\sin kx + \sin kx'}{\sin ka}$$

$$\alpha = -f \frac{k}{\chi} \frac{\cos kx - \cos kx'}{\sin ka}$$

aderența e nulă la mijloc și crește spre extremități. Chiar la extremități valoarea aderenței este:

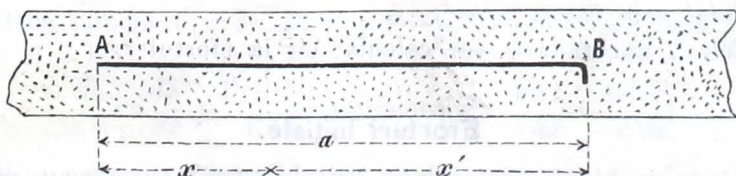
$$\alpha_0 = \pm f \frac{k}{\chi} \frac{1 - \cos ka}{\sin ka}$$

Efortul în fer e maximum la mijlocul barei și are ca valoare

$$F_{max} = f - 2f \frac{\sin \frac{ka}{2}}{\sin ka}$$

Prin urmare efortul este totdeauna mai mic de cât cel calculat cu vechea teorie și tinde către f când a tinde către infinit.

Aplicația 5-a. Presupunem că tija la un capăt este ancorată în beton, la cellalt capăt rămânând liberă.



În secțiunea A efortul în fer este zero; în secțiunea B aderența este nulă din cauza ancorajului. Prin urmare pentru $x=0$ $F=0$ și

pentru $x=a$ $\alpha=0$. Urmând ca la aplicațiile precedente, determinăm constantele A și B în mod analog și obținem în definitiv:

$$F=f-f \frac{\cos k x'}{\cos k a}$$

$$\alpha=f \frac{h}{\chi} \frac{\sin k x'}{\cos k a}$$

Efortul în fer crește dar de la A spre B și în B atinge valoarea $F_1=f-\frac{f}{\cos k a}$. Aderența crește de la B spre A și atinge în A valoarea:

$$\alpha_0=f \frac{k}{\chi} \operatorname{tg} k a$$

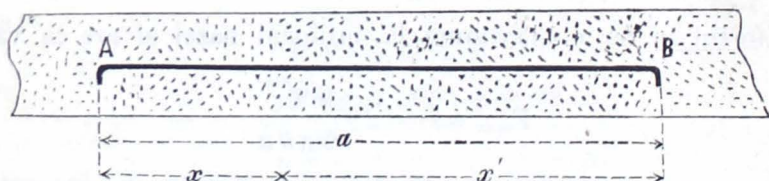
Aplicația 6-a. Tija este ancorată la ambele extremități.

În acest caz aderența este nulă în secțiunile A și B; așa dar pentru $x=0$ $\alpha=0$ și pentru $x=a$ $\alpha=0$.

Înlocuind aceste relații în expresia generală a aderenței obținem :

$$A-B=0$$

$$Ae^{ka}-Be^{-ka}=0$$



de unde $A=B=0$ iar

$$F=f$$

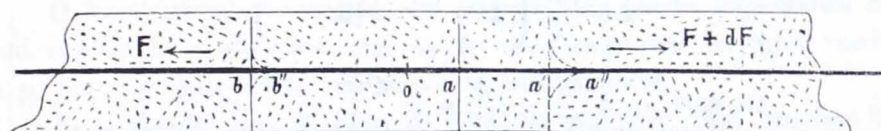
„Efortul în fer este constant pe toată lungimea barei și egal cu cel calculat prin teoria veche“.

Cele 2 ancoraje se vor calcula dar la efortul f .

Eforturi inițiale.

Să ne închipuim că avem o tije de fer întinsă (sau compresată) cu un efort p . Betonăm această tije și lăsăm betonul să facă complet priză, apoi supunem sistemul la un efort P .

Care va fi distribuția eforturilor în fer și beton sub acțiunea efortului P?



Fie bo ceea ce elementul de fer ba ar deveni dacă fierul n'ar fi spus la nici un efort; vom avea după notațiunile precedente

$$e \frac{ba - bo}{bo} = \frac{p}{\omega}$$

Pe de altă parte $e \frac{a'' b'' - bo}{bo} = \frac{F}{\omega}$ deducem din acestea

$$\frac{a'' b''}{ab} = \frac{\frac{F}{e\omega} + 1}{\frac{p}{e\omega} + 1}$$

Însă la pag. 35 No. precedent al buletinului am găsit expresia

$$a'' b'' = dx + dz + \frac{\sigma dx}{E} \text{ prin urmare}$$

$$\frac{a'' b''}{ab} = \frac{\frac{F}{e\omega} + 1}{\frac{p}{e\omega} + 1} = 1 + \frac{dz}{dx} + \frac{\sigma}{E} = 1 + \frac{dz}{dx} + \frac{P - F}{E \Omega}$$

sau

$$\frac{F - p}{\omega} = \left(e + \frac{p}{\omega} \right) \left(\frac{dz}{dx} + \frac{P - F}{E \Omega} \right)$$

Dacă punem $F_1 = F - p$; $P_1 = P - p$; $e_1 = e + \frac{p}{\omega}$ obținem :

$$\frac{F_1}{e_1 \omega} = \frac{dz}{dx} + \frac{P_1 - F_1}{E \Omega} \text{ asemenea } z = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

Prin urmare n'avem de cât să înlocuim în ecuațiunea 3 (de la pag. 36 No. precedent) ca s'avem ecuațiunea în cazul ce ne preocupă; așa dar

$$F - p = \frac{n_1}{m_1} + A e^{x\sqrt{m_1}} + B e^{-x\sqrt{m_1}}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{m_1}}{\chi} \left(A e^{x\sqrt{m_1}} - B e^{-x\sqrt{m_1}} \right)$$

$$\text{în cari } n_1 = \frac{\chi}{\mu} \frac{P - p}{E \Omega}; m_1 = \frac{\chi}{\mu} \left(\frac{1}{p + e \omega} + \frac{1}{E \omega} \right)$$

Rezultă că toate ecuațiunile stabilite pentru cazul când nu avem eforturi inițiale, sunt aplicabile cu condiție de a înlocui F prin $F - p$, P prin $P - p$, și coeficientul de elasticitate al ferului e prin $e + \frac{p}{\omega}$. (De alt-fel putem lua în loc de $e + \frac{p}{\omega}$ tot e , căci termenul $\frac{p}{\omega}$ e neglijabil lângă e .)

Aplicație. Avem o bară de fer supusă la o tensiune p și turnăm beton în jurul ei menținând tensiunea p . După ce betonul a făcut complet priză lăsăm capetele barei libere de efortul p . Să se determine eforturile interioare în beton și fer precum și aderența în fie-ce punct al barei.

Luăm formulele de la aplicația 3-a și înlocuim F cu $F - p$, P cu $P - p$ și neglijând $\frac{p}{\omega}$ lângă e , obținem:

$$F - p = f_1 + f_1' \frac{\sin kx + \sin kx'}{\sin ka}$$

$$\alpha = f_1' \frac{k_1 \cos kx - \cos kx'}{\chi \sin ka}$$

$$\text{în care } f_1 = (P - p) \frac{e \omega}{e \omega + E \Omega}$$

$$f_1' = P - f_1 - p$$

și facem $P = 0$ căci bara fiind lăsată liberă nu e supusă la nici un efort exterior, obținem ast-fel:

$$F = p \frac{E \Omega}{e \omega + E \Omega} \left[1 - \frac{\sin kx + \sin kx'}{\sin ka} \right]$$

acesta e și efortul de compresiune în beton în felurite secțiuni.

Dacă am fi aplicat teoria veche am fi găsit $F = p \frac{E \Omega}{e \omega + E \Omega}$ care se deduce din formula noastră făcând $a = \infty$.

O bară ast-fel construită are proprietatea foarte importantă că fiind supusă la o tensiune care să fie mai mică sau cel mult egală cu p , betonul este supus totdeauna la compresiune.

Se realizează ast-fel bare de beton armat care deși supuse la tensiune, betonul e totuși comprimat și aceasta fără a fi necesar de a mări câtuși de puțin secțiunea ferului.

Acest principiu îl voi generaliza și utiliza mai în urmă pentru realizarea a construcții de beton armat în cari să nu existe nici o o porțiune de beton supusă la tensiune.

Repartiția eforturilor în secțiunea betonului și determinarea coeficientului μ .

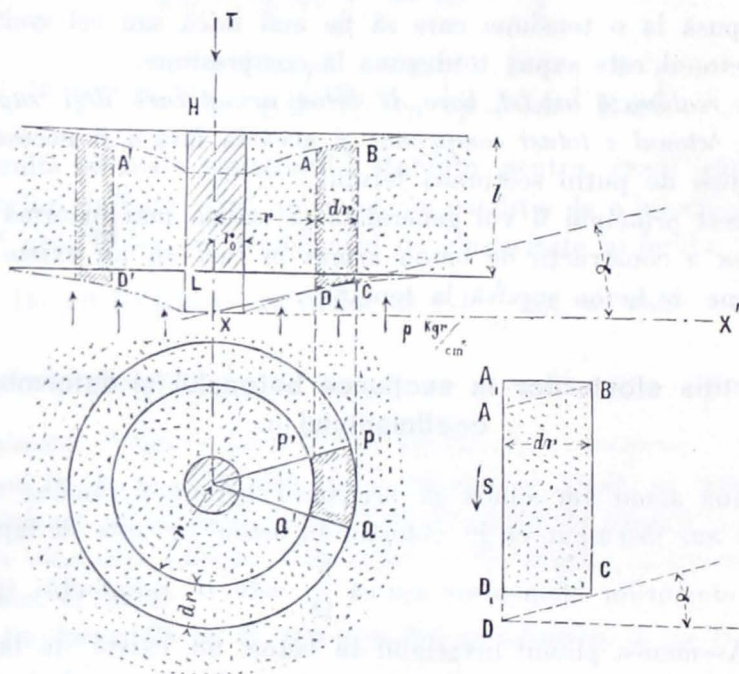
Până acum am admis că secțiunea betonului rămâne sensibil plană și am însemnat cu F' „efortul în beton“; F' este de fapt suma tuturor eforturilor elementare așa că $\frac{F'}{\Omega}$ este o rezistență specifică medie. Asemenea planul invariabil în beton nu există de fapt, căci în realitate betonul ia o suprafață curbă iar planul admis de noi este un plan dus la o distanță medie și susține ast-fel suprafața curbă în mod destul de apropiat căci curbura e foarte puțin pronunțată în general.

Imi propun ca înainte de a trece la studiul flexiunii, să analizez mai de aproape fenomenul lunecării elastice a unei vergele de fier în un solid de beton. Această analiză va confirma prevederea legii expuse în preliminarele acestui studiu și va servi la determinarea coeficientului μ întrebuit în calculele precedente.

Presupun o vergea de fier $H L$ înșurubată în un solid de beton de grosime l . Detașez din solidul de beton în jurul barei de fier o coroană de grosime dr la distanța r . Apoi cu două plane OP , OQ ce trec prin axa fierului, limitez din această coroană o priză cu baza $PQ Q'P'$.

Fie T efortul aplicat barei de fier și pe care o presupunem destul de scurtă.

Insemnez cu p presiunea unitară pe beton în jurul barei de fier. Suprafața cilindrică $A D A' D'$ limitează o porțiune de beton în care e coprinsă bara de fier.



Pentru ca această porțiune să fie în echilibru, trebuie să se desvolte pe suprafața cilindrică o forță tangențială în direcția paralelă a fierului și egală cu

$$T - \int_{r_0}^r p \times 2\pi r dr \quad \text{deci pe unitate de suprafață}$$

$$s = \frac{T - 2\pi \int_{r_0}^r p r dr}{2\pi r l}, \quad l \text{ fiind lungimea firului}$$

Să izolăm prisma elementară $A B C D$. Acest element sub influența efortului unitar s se va deforma: suprafața $A_1 D_1$ vine în $A D$ așa că

$$G \frac{AA_1}{AB} = s. \quad G \text{ fiind coeficientul de elasticitate la forfecare a be-}$$

$$\text{tonului. Înă } \frac{AA_1}{AB} = \operatorname{tg} \alpha$$

Dacă numim cu z ordonatele suprafeței betonului după deformare, vom avea: $tg \alpha = \frac{dz}{dr}$ așa dar

$$G \frac{dz}{dr} = \frac{T - 2\pi \int_{r_0}^r p r dr}{2\pi l r}$$

sau dacă însemnăm cu p_0 o presiune medie

$$\frac{dz}{dr} = \frac{T - 2\pi p_0 \frac{r^2 - r_0^2}{2}}{2\pi l G r} = \frac{T - p_0 \pi (r^2 - r_0^2)}{2\pi l G r}$$

aceasta cu condiție ca p să nu difere mult în diferitele puncte ale betonului.

T și $p_0 \pi (r_1^2 - r_0^2)$ în care r_1 este raza extremă a barei de beton, nu sunt alt-ceva de cât variațiunile ΔF și $-\Delta F'$ ale efortului în fier și beton și de oare-ce $F + F' = P = \text{constant}$, $\Delta F + \Delta F' = 0$; așa dar:

$$T = p_0 \pi (r_1^2 - r_0^2) \text{ de aci}$$

$$p_0 = \frac{T}{\pi(r_1^2 - r_0^2)} \text{ și înlocuind avem}$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{T}{2\pi l G} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \right) = \frac{T}{2\pi l G r} \frac{r_1^2 - r^2}{(r_1^2 - r_0^2)}$$

sau

$$\frac{dz}{dr} = \frac{T}{2\pi l G} \left[\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{r}{r_1^2 - r_0^2} \right]$$

Dacă luăm ca axă a absciselor XX' și integrăm, obținem:

$$z = \frac{T}{2\pi l G} \left[\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} L \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{2(r_1^2 - r_0^2)} \right]$$

Să determinăm distanța medie a unui plan cu care să putem înlocui suprafața curbă născută prin revoluția curbei z , adică:

$$z_m = \frac{\int_{r_0}^{r_1} 2\pi r z dr}{\pi(r_1^2 - r_0^2)},$$

z_m fiind distanța acestui plan de la sec-

țiunea fierului.

Dacă înlocuim z prin valoarea sa și integrăm obținem

$$z_m = \frac{T}{2\pi l G} \left[\left(\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \right)^2 L \frac{r}{r_0} - \frac{3r_1^2 - r_0^2}{4(r_1^2 - r_0^2)} \right]$$

Dacă punem $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \beta$ avem

$$z_m = \frac{T}{4\pi l G} \left[\left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^2 L\beta - \frac{3\beta - 1}{2(\beta - 1)} \right]$$

Identificând această expresie cu aceeași valoare a lui z_m dată în preliminarele acestui studiu, obținem:

$$z_m = \frac{\mu T}{\chi l} = \frac{T}{4\pi l G} \left[\left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^2 L\beta - \frac{3\beta - 1}{2(\beta - 1)} \right]$$

de unde
$$\frac{\mu}{\chi} = \frac{1}{4\pi G} \left[\left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^2 L\beta - \frac{3\beta - 1}{2(\beta - 1)} \right]$$

raportul $\frac{r_1}{r_0}$ nu trebuie să fie prea mare căci atunci formula nu mai este aplicabilă, de oare-ce efortul unitar în beton p diferă prea mult de la un punct la altul.

Din teoria elasticității se știe că $G = \frac{E}{2(\varepsilon + 1)}$, E fiind coeficientul de elasticitate iar ε un număr care pentru materialele izotrope e cuprins între 3 și 4. Valoarea medie a lui G este prin urmare

$$G = 0,388 E \text{ vedem dar că}$$

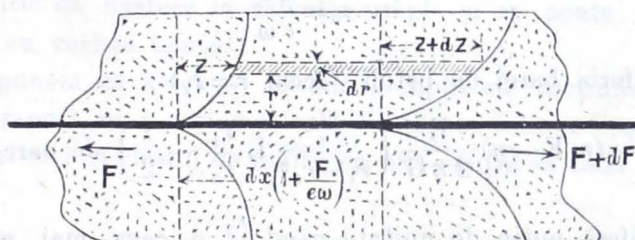
$$\mu = k \frac{\chi}{E} \text{ în care } k \text{ e un coeficient ce depinde de } \frac{r_1}{r_0}$$

$$k = \left[\left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^2 L\beta - \frac{3\beta - 1}{2(\beta - 1)} \right]$$

Am calculat aci valoarea lui k pentru diferite raporturi $\frac{r_1}{r_0}$

$\frac{r_1}{r_0} =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
$k =$	0,131	0,234	0,328	0,398	0,465	0,520	0,567	0,615	0,660	0,731	0,796	0,848	0,902	0,945

Distribuția eforturilor în beton se poate acum calcula după cum urmează :



Fie MN un element de beton la distanța r de axul ferului. Lungimea ferului dx după deformare devine $dx \left(1 + \frac{F}{e\omega}\right)$, F fiind efortul în fer. Dacă σ reprezintă efortul unitar în elementul de beton la distanța r vom avea :

$$\sigma = \frac{dx \left(1 + \frac{F}{e\omega}\right) + dz - dx}{dx} E = \left(\frac{F}{e\omega} + \frac{dz}{dx}\right) E$$

$$\text{Noi am găsit însă } z = \frac{T}{2\pi l G} \left[\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} L \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{2(r_1^2 - r_0^2)} \right]$$

În cazul nostru $T = F - (F + dF) = -dF$ iar $l = dx$ așa dar

$$z = -\frac{dF}{dx} \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} L \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{2(r_1^2 - r_0^2)} \right]$$

Prin urmare

$$\sigma = \frac{EF}{e\omega} - \frac{E}{2\pi G} \left[\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} L \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{2(r_1^2 - r_0^2)} \right] \frac{d^2 F}{dx^2} \quad *)$$

Însă ecuațiunea (2) (de la pag. 36 No. precedent) ne dă

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = m F - n = m (F - f)$$

*) Ca verificare a acestei formule trebuie ca $\int_{r_0}^{r_1} \sigma 2\pi r dr$ să fie egală cu efortul

total în beton. Calculul nu e greu de făcut și se obține în adevăr $\int_{r_0}^{r_1} \sigma 2\pi r dr = P - F$ adică tocmai efortul total în beton.

Aşa că efortul în betonul imediat în contact cu ferul este (facem $r=r_0$)

$$\sigma_0 = \frac{E F}{e \omega}$$

iar la periferia barei de beton (facem $r=r_1$)

$$\sigma_e = \frac{E F}{e \omega} - (m F - n) \frac{E}{2 \pi G} \left(\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} L \frac{r_1}{r_0} - \frac{1}{2} \right) \text{ de oare-ce însă}$$

$\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$ diferă puțin de unitate când $\frac{r_1}{r_0}$ e ceva mai mare, avem

$$\text{destul de apropiat: } \sigma_e = \frac{E F}{e \omega} - \frac{(m F - n) E}{2 \pi G} \left(L \frac{r_1}{r_0} - 0,5 \right).$$

Cum $\frac{E}{e}$ este aproximativ $\frac{1}{10}$ și $G=0,388 E$, avem în definitiv

$$\sigma_e = 0,1 \frac{F}{\omega} - 0,41 m (F - f) \left(L \frac{r_1}{r_0} - 0,5 \right)$$

Se vede din această formulă că dacă $F > f$, efortul în beton la periferie este mai mic de cât în jurul ferului; dacă $F < f$ efortul la periferia betonului e mai mare ca în jurul ferului. Aceste rezultate au fost deja confirmate prin experiență.

Aşa spre exemplu la aplicația 2-a $F = f + f' \frac{\cos kx'}{\cos ka}$, diferența $F - f$ este pozitivă prin urmare efortul la periferia secțiunii de beton este mai mic ca în jurul fierului.

La aplicația 4-a $F = f - f' \frac{\sin kx + \sin kx'}{\sin kx}$, diferența $F - f$ este negativă, efortul în periferia betonului este mai mare ca în jurul ferului.

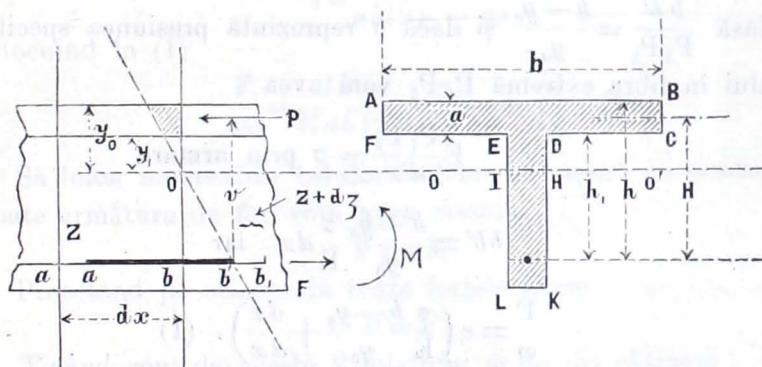
În cazul când $F=f$ efortul unitar în beton este constant pe toată secțiunea betonului.

Flexiune simplă.

Până acum am studiat câte-va cazuri de bare armate supuse la tensiune sau compresiune. Subiectul e departe de a fi epuizat dar intențiunea mea este mai mult ca prin câte-va chestiuni tratate cu oare cari detalii să arăt calea de urmat în cazuri analoage.

Voi trece dar la studiul flexiunii și voi analiza un caz care se întâlnește adese-ori în practică. Aleg acest caz căci din punct de vedere analitic dă naștere la calcule simple și se poate ușor face comparație cu vechea teorie.

Presupunem că avem o grindă dreaptă cu secțiune în T simetrică în raport cu o axă verticală. Secțiunea este aceeași pe toată lungimea grindei și destul de înaltă ca axa neutră să cadă pe inimă.



Fie $P R, P_1 R_1$ două secțiuni transversale la distanța dx . După deformare sub acțiunea unui moment pozitiv M , secțiunile $P R, P_1 R_1$ se înclină deformându-se și ele. Acestor secțiuni deformate putem substitui două plane ce fac între ele un unghi φ .

Aducem apoi planul ce substitue suprafața deformată $P R$ să coincidă cu poziția sa primitivă $P R$, iar planul ce substitue suprafața deformată $P_1 R_1$ va veni în poziția $P_2 R_2$ urmele $P R$ și $P_2 R_2$ având între ele unghiul φ .

Linia de intersecție a acestor 2 plane este axa neutră și se proiectează în O și toată secțiunea grindei d'asupra ei este comprimată iar dedesubt întinsă.

Capetele ferului $a b$ se vor găsi după deformare în punctele a_1 și b_1 la distanțele $a a_1 = z, b b_1 = z + \frac{dz}{dx} dx$.

Secțiunea grindei o alegem așa ca dreptunghiul $A B C F$ să fie relativ mare iar inima destul de subțire. În aceste condiții efortul de tensiune va fi luat aproape numai de fer; pe deoparte pentru că inima e subțire și pe de alta pentru că rezistența la tensiune a

betonului e relativ mică *). Asemenea în porțiunea comprimată (hașurată pe figură) putem neglija compresiunea pe porțiunea EDHI pentru că este mică lângă dreptunghiul ABCF și pentru că fiind aproape de axa neutră compresiunea pe dânsa e relativ mică.

Dacă însemnăm cu F efortul în fer și ω secțiunea ferului vom avea

$$\frac{F}{\omega} = e \frac{a_1 b_1 - d x}{d x} = e \frac{b b' + z + d z - z}{d x} = e \frac{b b' + d z}{d x}$$

Însă $\frac{b b'}{P_1 P_2} = \frac{h - y_0}{y_0}$ și dacă σ reprezintă presiunea specifică a betonului în fibra extremă $P_1 P_2$ vom avea

$$E \frac{P_1 P_2}{d x} = \sigma \text{ prin urmare}$$

$$b b' = \frac{h - y_0}{y_0} \frac{\sigma}{E} d x \text{ iar}$$

$$\frac{F}{\omega} = e \left(\frac{\sigma}{E} \frac{h - y_0}{y_0} + \frac{d z}{d x} \right). \quad (1)$$

Fie σ_y presiunea specifică în secțiunea comprimată la distanța y de axa neutră. Coeficientul de elasticitate al betonului la compresiune este aproape constant așa că exprimând că presiunile sunt proporționale cu lungimile obținem :

$$\frac{\sigma_y}{\sigma} = \frac{y}{y_0}$$

Numind cu P rezultanta compresiunii pe dreptunghiul ABCF vom avea

$$P = \int_{y_1}^{y_0} \sigma_y b d y = \frac{\sigma b}{y_0} \int_{y_1}^{y_0} y d y = \frac{\sigma b}{y_0} \cdot \frac{y_0^2 - y_1^2}{2} \quad (2)$$

Fie y_2 depărtarea de la axa neutră la centrul de aplicație al

rezultantei P

$$y_2 = \frac{\int_{y_1}^{y_0} \sigma_y b y d y}{\int_{y_1}^{y_0} \sigma_y b d y} = \frac{2}{3} \frac{y_0^3 - y_1^3}{y_0^2 - y_1^2}$$

*) Totuși nu trebuie să se creadă că acest beton fiind supus la lungiri mari va crăpa tot-deauna D-l Considère a demonstrat prin o serie de experiențe devenite celebre că „betonul armat“ este plastic și diferă cu totul în proprietățile sale mecanice de betonul ordinar.

aşa că $v = h - y_0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{y_0^3 - y_1^3}{y_0^2 - y_1^2}$, v fiind depărtarea de la P la axa ferului iar h depărtarea de la axa ferului la marginea de sus a grindei. Din această relație deducem ținând seamă că $y_1 = y_0 - a$

$$y_0 = \frac{3ah - 2a^2 - 3av}{6h - 3a - 6v} \quad (3)$$

din (2) obținem

$$\sigma = \frac{2P y_0}{ab(2y_0 - a)}$$

și înlocuind în (1)

$$\frac{F}{e\omega} = \frac{2P(h - y_0)}{Eab(2y_0 - a)} + \frac{dz}{dx} \quad (4)$$

Să luăm momentele tutulor forțelor în raport cu punctul unde străbate armătura de fer, vom avea simplu

$$Pv = M$$

Proectând pe orizontală toate forțele avem

$$P = F$$

Ținând cont de aceste 2 relațiuni și de (3) obținem :

$$\frac{h - y_0}{2y_0 - a} = \frac{3v(2h - a) - 6h(h - a) - 2a^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} \left[3 \frac{M}{F} (2h - a) - 6h(h - a) - 2a^2 \right]$$

Dacă punem $h - \frac{a}{2} = H$; $\Omega = ab$; $\frac{dz}{dx} = \frac{\mu}{\chi} \frac{d^2 F}{dx^2}$ (pag. 36 No. precedent) ecuația (4) devine

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{\chi}{\mu} \left[\frac{1}{e\omega} + \frac{1}{E\Omega} \left(1 + 12 \frac{H^2}{a^2} \right) \right] F + \frac{\chi}{\mu} \frac{12M}{E\Omega H} \cdot \frac{H^2}{a^2} = 0$$

Această ecuație se poate simplifica neglijând 1 lângă $12 \left(\frac{H}{a} \right)^2$ ceea ce putem face, căci dacă am avea spre exemplu $H = 3a$, $12 \times 3^2 = 98$ și eroarea ce am face e cam 1%. Inșă coeficientul de elasticitate E este cunoscut în genere cu o eroare relativă mult mai mare așa că eroarea ce facem de 1% devine neglijabilă.

Insemnând cantitatea $\Omega \frac{a^2}{12H^2} = \frac{ba^3}{12H^2}$ cu Ω_1 obținem

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{\chi}{\mu} \left(\frac{1}{e\omega} + \frac{1}{E\Omega_1} \right) + \frac{\chi}{\mu} \cdot \frac{M}{H} \cdot \frac{1}{E\Omega_1} = 0$$

E de remarcat analogia acestei ecuațiuni cu cea obținută la barele întinse și comprimate. Siugura diferență este în faptul că M este variabil cu x , iar semnificarea lui Ω_1 alta.

Să punem

$$m = \frac{\chi}{\mu} \left(\frac{1}{e\omega} + \frac{1}{e\Omega_1} \right)$$

$$r = \frac{\chi}{\mu E \Omega_1 H}$$

Ecuația devine ast-fel

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - m F + r M = 0 \quad (5)$$

Dacă luăm o variabilă auxiliară U ast-fel ca :

$$U = m(m F - r M) - r \frac{d^2 M}{dx^2}$$

deducem ținând samă de (5)

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = m U - r \frac{d^4 M}{dx^4}$$

prin urmare dacă M este un polinom de gradul al 3-lea ceea ce în practică se întâmplă foarte des

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = m U \quad \text{și soluțiunea acestei ecuațiuni este}$$

$$U = C_1 e^{x\sqrt{m}} + C_2 e^{-x\sqrt{m}} \quad \text{așa dar}$$

$$F = \frac{r}{m} M + \frac{r}{m^2} \frac{d^2 M}{dx^2} + C'_1 e^{x\sqrt{m}} + C'_2 e^{-x\sqrt{m}}$$

să înlocuim exponențialele în funcție de \sin și \cos și punem $\sqrt{m} = k$ ast-fel

$$e^{kx} = \cos kx + \sin kx$$

$$e^{-kx} = \cos kx - \sin kx$$

expresia lui F devine

$$F = \frac{r}{m} M + \frac{r}{m^2} \frac{d^2 M}{dx^2} + A \sin kx + B \cos kx$$

$$\text{iar } \alpha = \frac{1}{\chi} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{\chi} \left[\frac{r}{m} \frac{dM}{dx} + \frac{r}{m^2} \frac{d^3 M}{dx^3} + k(A \cos kx + B \sin kx) \right]$$

$\frac{dM}{dx}$ nu este alt-ceva de cât puterea tăetoare Q în secțiunea considerată iar $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = p$ este încărcarea pe metru curent. Să însemnăm $\frac{dp}{dx} = q$ și formulele devin în definitiv

$$F = \frac{r}{m} M + \frac{r}{m^2} p + A \sin kx + B \cos kx \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{1}{\chi} \left[\frac{r}{m} Q + \frac{r}{m^2} q + k(A \cos kx + B \sin kx) \right] \quad (9)$$

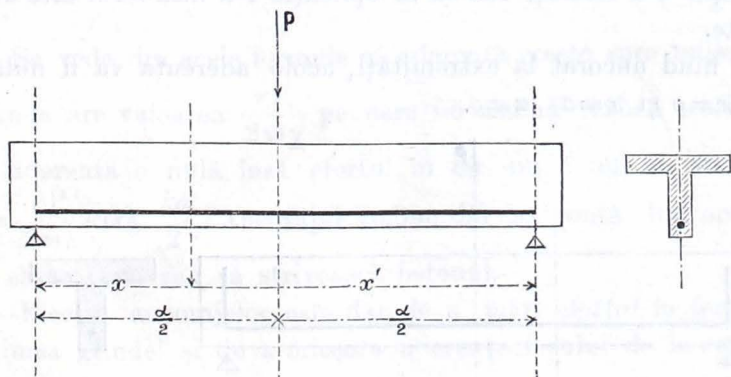
Este interesant de a compara aceste formule cu cele ce am obține aplicând teoria veche care admite că ferul urmărește exact betonul. Pentru aceasta n'avem de cât să facem în formula (1) $z=0$ ceea ce revine la a face în formula (5) $\frac{d^2F}{dx^2} = 0$; obținem ast-fel:

$$F = \frac{r}{m} M$$

$$\text{iar } \alpha = \frac{1}{\chi} \frac{dF}{dx} = \frac{r}{\chi m} Q$$

prin urmare obținem numai primii termeni ai formulelor noastre (8) și (9).

Aplicația 1. Presupunem că avem o grindă simplu rezemată acționată în centru cu o forță P și ne propunem a studia efortul în fer în felurite secțiuni. Ferul este terminat fără ancoraje.



De la $x=0$ până la $x = \frac{a}{2}$ vom avea

$$M = \frac{Px}{2} \quad Q = \frac{P}{2}$$

iar în a doua jumătate a grindei

$$M = \frac{P(a-x)}{2} \quad Q = -\frac{P}{2}$$

Prin urmare în prima jumătate efortul în fer este (vezi formulele generale (8) (9).

$$F = \frac{r}{m} \frac{Px}{2} + A \sin kx + B \cos kx$$

iar în a 2-a jumătate

$$F' = \frac{r}{m} \frac{P(a-x)}{2} + A \sin kx + B \cos kx$$

Însă pentru $x=0$ avem $F=0$ căci ferul nu e ancorat. Asemenea pentru $x=a$ $F'=0$. Formulele de mai sus dau făcând $x=0$; $F=0$ iar în a 2-a $x=a$; $F'=0$

$$B=0$$

$$A \sin ka + B \cos ka = 0 \quad \text{deci}$$

$$A=B=0$$

prin urmare

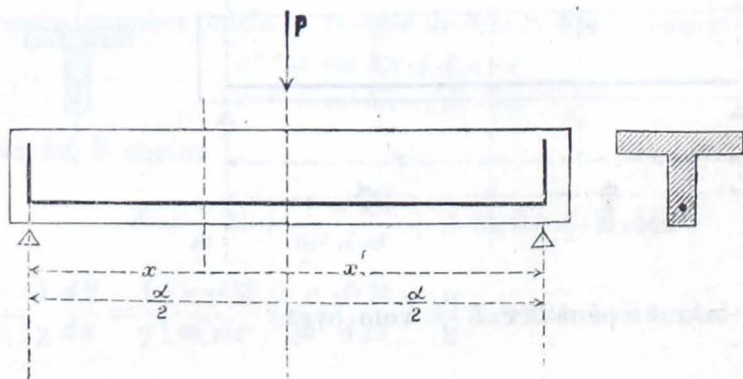
$$F = \frac{r}{m} \frac{Px}{2} \quad F' = \frac{r}{m} \cdot \frac{P(a-2x)}{2}$$

$$\alpha = \frac{r}{\chi m} \cdot \frac{P}{2} \quad \alpha' = -\frac{r}{\chi m} \cdot \frac{P}{2}$$

adică efortul în fer și aderența sunt egale cu cele calculate prin teoria veche.

Aplicația 2-a Același caz ca la aplicația 1-a însă ferul este ancorat la capete.

Ferul fiind ancorat la extremități, acolo aderența va fi nulă deci pentru $x=0$ și $x=a$ $\alpha=0$.



În prima jumătate $\alpha = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{r}{m} \frac{P}{2} + k (A \cos kx + B \sin kx) \right]$
 pentru $x=0$ avem dar

$$0 = \frac{r}{m} \frac{P}{2} + k A$$

aşa dar
$$A = - \frac{r P}{2 m k}$$

În a doua jumătate $Q = - \frac{P}{2}$ deci făcând $x = a$

$$0 = - \frac{r}{m} \frac{P}{2} + k (A \cos ka + B \sin ka)$$

de unde

$$B = \frac{r P}{2 m k} \frac{1 + \cos ka}{\sin ka}$$

Înlocuind dar A şi B în expresia generală a lui F (formula 8) şi punând $x' = a - x$ obţinem

$$F = \frac{r P}{2 m} \left[x + \frac{\cos kx + \cos kx'}{k \sin ka} \right] = \frac{r P}{2 m} \left[x + \frac{\cos k \left(\frac{a}{2} - x \right)}{k \sin \frac{ka}{2}} \right]$$

$$\alpha = \frac{r P}{2 m \gamma} \left[1 + \frac{\sin kx - \sin kx'}{\sin ka} \right] = \frac{r P}{2 m \gamma} \left[1 - \frac{\sin \left(\frac{a}{2} - x \right)}{\sin \frac{ka}{2}} \right]$$

Se vede din acele formule că aderenţa creşte spre mijlocul grinzii unde are valoarea $\frac{r P}{2 m \gamma}$ pe care i-o asumă vechea teorie. La capete aderenţa e nulă însă efortul în fer nu e nul ci are valoarea $F_0 = \frac{r P}{2 m k} \cotg \frac{ka}{2}$. Ancorajul trebuie dar să poată lua acest efort fără să se rupă sau să strivească betonul.

Efectul ancorajelor este dar de a mări efortul în fer pe toată lungimea grindei şi de a micşora aderenţa ferului de la centru spre tremităţi. Efortul maximum în fer este mărit în raportul $1 + \frac{1}{\frac{ka}{2} \sin \frac{ka}{2}}$.

Se vede de aci că pentru aceeași secțiune de grindă cu cât deschiderea a e mai mare cu atât ancorajele influențează mai puțin asupra efortului maximum din fer.

Aplicația 3-a. Presupunem că grinda noastră este încărcată cu o încărcare p pe metru curent iar ferul e terminat fără cârlige la capete.

În cazul unei încărcări uniforme avem pentru expresia momentului $M = \frac{p x x'}{2}$. Așa dar formula generală (8) devine pentru acest caz :

$$F = \frac{r}{m} \frac{p x x'}{2} + \frac{r p}{m^2} + A \sin kx + B \cos kx$$

Ferul nefiind ancorat vom avea pentru $x=0$ și $x=a$, $F=0$
prin urmare

$$0 = \frac{r p}{m^2} + B$$

$$0 = \frac{r p}{m^2} + A \sin ka + B \cos ka$$

de aci deducem

$$B = -\frac{r p}{m^2}$$

$$A = -\frac{r p (1 - \cos ka)}{m^2 \sin ka}$$

Înlocuind în formula generală obținem

$$F = \frac{r p x x'}{2 m} + \frac{r p}{m^2} \left(1 - \frac{\sin kx - \sin kx \cos ka + \cos kx \sin ka}{\sin ka} \right)$$

și simplificând

$$F = \frac{r p x x'}{2 m} + \frac{r p}{m^2} \left[1 - \frac{\cos k \left(\frac{a}{2} - x \right)}{\cos \frac{ka}{2}} \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{\chi} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{\chi} \left[\frac{r p (x' - x)}{2 m} + \frac{r p k \sin k \frac{x' - x}{2}}{m^2 \cos \frac{ka}{2}} \right]$$

Se vede din aceste formule că efortul în fer și aderența sunt mai mari de cât cele calculate pe teoria obicinuită azi.

Maximum efortului în fer are loc pentru $\alpha=0$ adică pentru $x=x'$ ceea ce corespunde mijlocului grindei. Valoarea acestui efort este

$$F_{max} = \frac{r}{m} \frac{pa^2}{8} + \frac{rp}{m^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{ka}{2}} \right)$$

Aderența maximă e la extremități și are ca valoare

$$\alpha_{max} = \frac{1}{\chi} \left[\frac{r}{m} \frac{p(x'-x)}{2} + \frac{rp}{m^2} \operatorname{tg} \frac{ka}{2} \right]$$

Aplicația 4-a. Presupunem iarăși o încărcare uniformă, însă ferul să fie ancorat la ambele extremități.

Avem formulele generale

$$F = \frac{rpxx'}{2m} + \frac{rp}{m^2} + A \sin kx + B \cos kx$$

$$\alpha = \frac{1}{\chi} \left[\frac{rp(x'-x)}{2m} + k(A \cos kx + B \sin kx) \right]$$

Din cauza ancorajelor aderența la extremitățile ferului este nulă și avem pentru $x=0$ și $x'=0$, $\alpha=0$. Deducem dar

$$0 = \frac{rpa}{2m} + kA$$

$$0 = -\frac{rpa}{2mk} + k(A \cos ka + B \sin ko)$$

de aci

$$A = -\frac{rpa}{2mk}$$

$$B = -\frac{rpa}{2mk} \left(\frac{1 + \cos ka}{\sin ka} \right) \text{ și înlocuind în expresia lui } F$$

Obținem în definitiv

$$F = \frac{rpxx'}{2m} + \frac{rp}{m^2} \left(1 + \frac{ka \cos k \frac{x'-x}{2}}{\sin \frac{ka}{2}} \right)$$

$$\alpha = \frac{rp}{2m\chi} \left(x' - x - a \frac{\sin k \frac{x'-x}{2}}{\sin \frac{ka}{2}} \right)$$

Efortul în fer este dar mai mare de cât cel calculat prin teoria obișnuită și valoarea sa maximă sau minimă este pentru $\alpha=0$ adică pentru $x=x'$ punct ce corespunde mijlocului grindei. În acest punct

$$F_1 = \frac{r}{m} \frac{pa^2}{8} + \frac{rp}{m^2} \left(1 + \frac{\frac{ka}{2}}{\sin \frac{ka}{2}} \right)$$

Însă aderența mai este nulă pentru $x=0$ și $x'=0$ adică la capetele grindei. În punctele aceste avem

$$F_2 = \frac{rp}{m^2} \left(1 + \frac{\frac{ka}{2}}{\operatorname{tg} \frac{ka}{2}} \right)$$

Pentru ca să vedem acum dacă F_1 și F_2 sunt maxime sau minime să luăm derivata 2-a a lui F care este

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{rp}{m} \left[\frac{ka}{2} \frac{\cos k \frac{x'-x}{2}}{\sin \frac{ka}{2}} - 1 \right]$$

Pentru $x=x'$

$$\left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right)_1 = \frac{rp}{m} \left(\frac{\frac{ka}{2}}{\sin \frac{ka}{2}} - 1 \right)$$

Prin urmare F_1 este un maximum dacă $\frac{ka}{2} < \sin \frac{ka}{2}$ ori această condiție este împlinită căci dezvoltând în serie $\sin y$ avem pentru $y > 0$

$$y < \sin y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Așa dar F_1 este un maximum totdeauna.

Pentru $x=0$ sau $x'=0$ avem

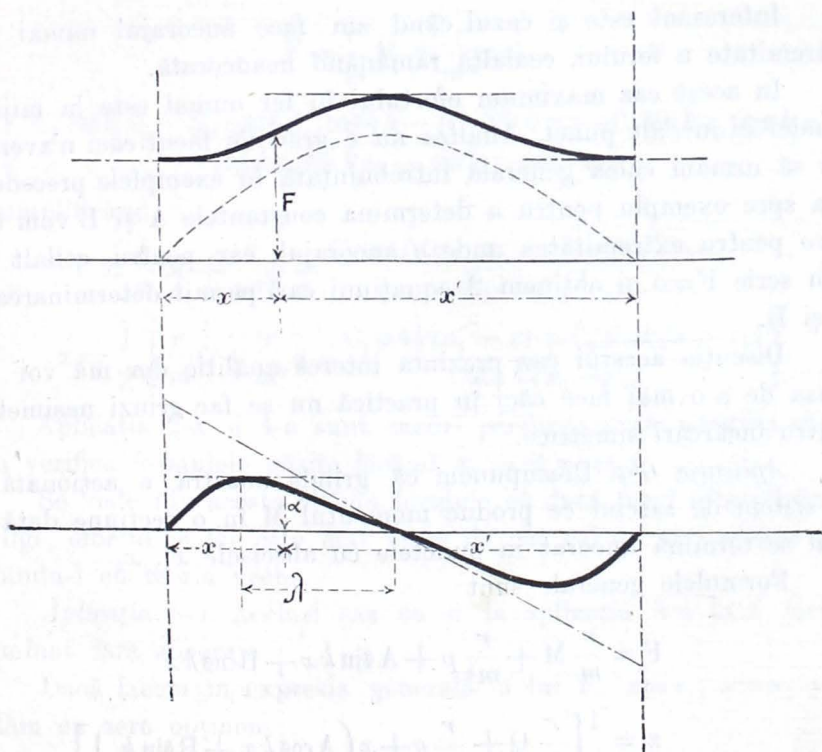
$$\left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right)_2 = \frac{rp}{m} \left(\frac{\frac{ka}{2}}{\operatorname{tg} \frac{ka}{2}} - 1 \right)$$

Aşa dar dacă $\frac{ka}{2} > \operatorname{tg} \frac{ka}{2}$, F_2 este un minimum, această condiție este împlinită căci

$$\operatorname{tg} y = y \frac{1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \dots}{1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots} \quad \text{deci}$$

$$\operatorname{tg} y < y$$

asa dar F_2 este un minimum tot-deauna



$$\lambda = \frac{1}{k} \quad \arccos \frac{\sin \frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}}$$

Se poate arăta că între extremitatea și mijlocul grindei efortul numai trece prin alte maxime și minime căci ar trebui pentru

aceasta ca aderența să se mai anuleze odată, aderența însă e proporțională cu produsul

$$\sin k \frac{x' - x}{2} \left(\frac{k \frac{x' - x}{2}}{\sin k \frac{x' - x}{2}} - \frac{k \frac{a}{2}}{\sin k \frac{a}{2}} \right)$$

Acesta e compus din 2 factori cari nu se pot anula de cât o dată fie-care pentru valori reale ale diferenței $x' - x$. Deci produsul nu se poate anula de cât pentru $x = x'$ și pentru $x' - x = \pm a$ ceea ce am găsit și mai sus.

Interesant este și cazul când am face ancorajul numai la o extremitate a ferului, cealaltă rămânând neancorată.

În acest caz maximum efortului în fer numai este la mijlocul grindei ci într'alt punct. Analiza nu e greu de făcut căci n'avem de cât să urmărim calea generală întrebuintată în exemplele precedente. Așa spre exemplu pentru a determina constantele A și B vom scrie $\alpha = 0$ pentru extremitatea unde e ancorajul, iar pentru cellalt cap vom scrie $F = 0$ și obținem 2 ecuațiuni cari permit determinarea lui A și B.

Discuția acestui caz prezintă interes analitic dar mă voi dispensa de a o mai face căci în practică nu se fac grinzi nesimetrice pentru încărcări simetrice.

Aplicația 6-a. Presupunem că grinda noastră e acționată de un sistem de sarcini ce produc momentul M în o secțiune dată iar ferul se termină ancorat în punctele cu abscisele x_1, x_2

Formulele generale sunt

$$F = \frac{r}{m} M + \frac{r}{m^2} p + A \sin kx + B \cos kx$$

$$\alpha = \frac{1}{\chi} \left[\frac{r}{m} Q + \frac{r}{m^2} q + x (A \cos kx + B \sin kx) \right]$$

Din cauza ancorajelor pentru $x = x_1$ și $x = x_2$ vom avea $\alpha = 0$ așa dar

$$\frac{r}{m} Q_1 + \frac{r}{m^2} q_1 + k (A \cos kx_1 + B \sin kx_1) = 0$$

$$\frac{r}{m} Q_2 + \frac{r}{m^2} q_2 + k (A \cos kx_2 + B \sin kx_2) = 0$$

dacă punem

$$C_1 = \frac{r}{m} Q_1 + \frac{r}{m^2} q_1$$

$$C_2 = \frac{r}{m} Q_2 + \frac{r}{m^2} q_2$$

obținem

$$A = -\frac{1}{k} \frac{C_1 \sin k x_2 - C_2 \sin k x_1}{\cos k x_1 \sin k x_2 - \sin k x_1 \cos k x_2}$$

$$B = \frac{1}{k} \frac{C_1 \cos k x_2 - C_2 \cos k x_1}{\cos k x_1 \sin k x_2 - \sin k x_1 \cos k x_2}$$

și înlocuind în expresia lui F

$$F = \frac{r}{m} M + \frac{r}{m^2} p +$$

$$\frac{1}{k} \frac{(C_1 \cos k x_2 - C_2 \cos k x_1) \cos k x - (C_1 \sin k x_2 - C_2 \sin k x_1) \sin k x}{\cos k x_1 \sin k x_2 - \sin k x_1 \cos k x_2}$$

și simplificând

$$F = \frac{r}{m} M + \frac{r}{m^2} p + \frac{C_1 \cos k(x - x_2) - C_2 \cos k(x - x_1)}{\sin k(x_2 - x_1)}$$

iar
$$z = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{r}{m} Q + \frac{r}{m^2} q - \frac{C_1 \sin k(x_2 - x) + C_2 \sin k(x - x_1)}{\sin k(x_2 - x_1)} \right]$$

Aplicația 2-a și 4-a sunt cazuri particulare ale acestora și putem verifica formulele găsite făcând $x_1 = 0$ $x_2 = a$.

Se vede din aceste ultime formule că dacă ferul e terminat cu cârlige, efortul în fer este mai mare de cât cel ce am obține calculându-l cu teoria veche.

Aplicația 6-a. Același caz ca și la aplicația 5-a însă ferul e terminat fără ancoraje.

Dacă facem în expresia generală a lui F, $x = x_1$, $x = x_2$ și egalăm cu zero obținem :

$$\frac{r}{m} M_1 + \frac{r}{m^2} p_1 + A \sin k x_1 + B \cos k x_1 = 0$$

$$\frac{r}{m} M_2 + \frac{r}{m^2} p_2 + A \sin k x_2 + B \cos k x_2 = 0$$

punând și aci

$$\frac{r}{m} M_1 + \frac{r}{m^2} p_1 = D_1$$

$$\frac{r}{m} M_2 + \frac{r}{m^2} p_1 = D_3$$

obținem

$$F = \frac{r}{m} M + \frac{r}{m^2} p - \frac{D_1 \sin k(x_2 - x) + D_2 \sin k(x - x_1)}{\sin k(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha = \frac{1}{\chi} \left[\frac{r}{m} Q + \frac{r}{m^2} q + k \frac{D_1 \cos k(x_2 - x) - D_2 \cos k(x - x_1)}{\sin k(x_2 - x_1)} \right]$$

În formulele de mai sus să nu se confunde coeficientul μ din expresia lui $m = \frac{\chi}{\mu} \left(\frac{1}{e\omega} + \frac{1}{E\Omega_1} \right)$ cu cel stabilit la piesele întinse sau comprimate, căci în cazul grinzilor supuse la flexiune are altă valoare. Despre aceasta voi trata în numărul viitor.

(Va urma)

Gogu Constantinescu

Inginer