Cercetări statistice asupra bolţilor joase

Multe formule aproximative cari servesc la calculul sau la examinarea statică a bolţilor, pornesc de la hypoteze nu tocmai juste, şi aceasta pentru a înconjura calculele grele la redactarea sumară a projectelor.

Facem abstracţie aci de formulele nepracticabile cari sunt bazate pe vechea teorie a bolţilor.

Ne propunem a desvolta o metodă pentru calculul bolţilor cu săgeată mică, încărcate cu pietriş sau cu piatră spartă, prin care obţinem ecuaţiuni finale cari ne dau eforturile cele mai defavoravile ale materialelor bolţii şi cari ecuaţiuni, prin simplicitatea şi exactitatea lor, sunt menite nu numai a înlocui formulele aproximative dar încă ne vor cruţa de calculele şi metodele grele prin determinarea liniilor de influenţă şi de presiune.

Presupunem (fig. 1) axa bolţilor şi liniile mărginitoare parabolice, obţinem pentru linia de reducţiune a umpluturei şi a zidăriei încărcătoare, o parabolă foarte întinsă care de ambele părţi se racordează tangential cu linii drepte; acest sistem compus din parabolă şi linii drepte, îl putem considera ca foarte apropiat de o parabolă unică, astfel că înălţimea varabilă y a încărcărei se exprimă prin ecuaţiunea:

$$y = \alpha_1 \; x^2 + \beta_1 \qquad 1)$$

în care x este distanța de la mijlocul bolții.

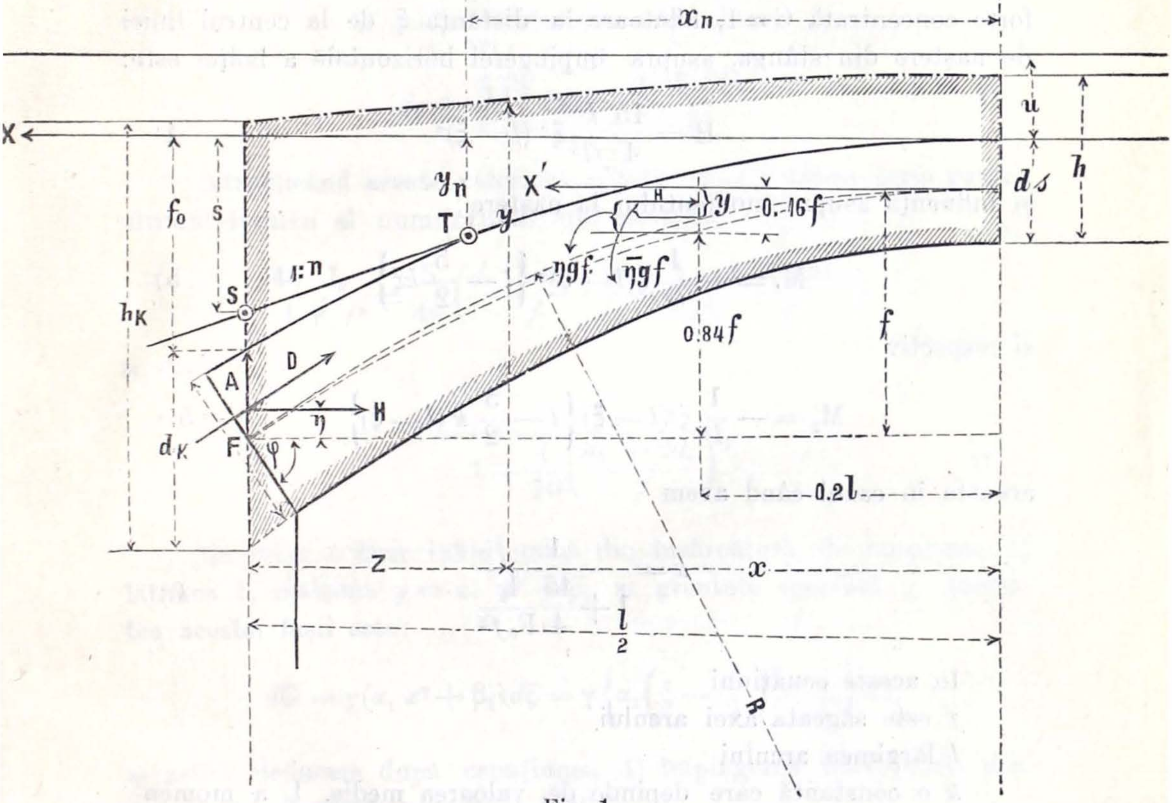

Fig. 1.

Fie h înălțimea la chee, de la linia de reducțiune a greutății proprii, și h_k înălțimea la nașterea bolței de la linia de reducțiune până la intretăerea intradosului cu verticala ce trece prin punctul central al liniei nașterei; în acest caz reese din ecuația 1)

pentru: $$x = 0, \quad y = h = \beta_1 \qquad 2)$$

și pantru: $$x = \frac{l}{2}, y = h_k = \alpha_1 \frac{l^2}{4} + h$$

de unde $$\alpha_1 = \frac{4}{l^2}(h_k - h) = \frac{4ah}{l^2} \qquad 3)$$

unde am pus: $$a = \frac{h_k - h}{r} \qquad \text{I)}$$

După cum se știe (vezi Melan „Handbuch der Ingenieur wissenschaften, 2 Band, Brückenbau, 4 Abt. Seite 85) influența unei forțe concentrată $G = 1$, aflătoare la distanța ξ de la centrul liniei de naștere din stânga, asupra împingerei horizontale a bolței este:

$$H = \frac{15}{4} \frac{k}{fl^3} \xi^2 (l - \xi)^2 \qquad 4)$$

și influența asupra momentului la naștere:

$$M_1 = -\frac{1}{l^3} \xi (l - \xi)^2 \left\{ l - \frac{5}{2} k\xi \right\} \qquad 5)$$

și respectiv

$$M_2 = -\frac{1}{l^3} \xi^2 (l - \xi) \left\{ l - \frac{5}{2} k (l - \xi) \right\} \qquad 5')$$

aceasta în cazul când avem

$$k = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \frac{I_0}{F_0 f^2}} \qquad 6)$$

In aceste ecuațiuni

f este săgeata axei arcului

l lărgimea arcului

k o constantă care depinde de valoarea medie. I_0 a momentului de inerție și F_0 suprafața secției transversale a bolței și în care pentru dreptunghiul de lățime putem pune $\frac{F_0}{I_0} = \frac{d_0^2}{12}$ daca d_0 represintă o valoare medie a grosimei bolței.

Presupunând liniile mărginitoare (extradosul și intradosul) parabolice grosimea variabilă a bolței măsurată vertical la distanța x de la centru este:

$$d = \alpha_2 x^2 + \beta_2,$$

iar în ce privește grosimile măsurate vertical la chee și la naștere d_k și d_s avem:

$$d = \frac{4}{l^2}(d_k - d_s)x^2 + d_s$$

și grosimea medie din cauza suprafeței din față a bolței:

$$d_0\, l = 2\int_0^{\frac{l}{2}} d\, d\, x \text{ din care aflăm:}$$

$$d_0 = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} d dx = \frac{d_k + 2d_s}{3} \qquad 7)$$

Introducând aceste valori în ecuațiunea 6) putem scrie pentru ultimul termen al numitorului, mai simplu:

$$\frac{46}{4}\frac{I_0}{F_0 f^2} = \frac{5}{48}\left(\frac{d_k + 2d_s}{f}\right)^2 = \frac{1}{10}\left(\frac{d_k + 2d_s}{f}\right)^2$$

și deci:

$$k = \frac{1}{1 + \frac{1}{10}\left(\frac{d_k + 2d_s}{f}\right)^2} \qquad II)$$

Să luăm o fășie infinit mică din încărcătură, de lungimea $d\xi$ lățimea 1, înălțima $y = \alpha_1 x^2 + \beta_1$ și greutate specifică γ, greutatea acestei fășii este:

$$dG = \gamma(\alpha_1 x^2 + \beta_1)d\xi = \gamma\left\{\alpha_1\left(\xi - \frac{l}{2}\right)^2 + \beta_1\right\}d\xi$$

și astfel deducem după ecuațiunea 4) împingerea horizontală provocată de greutatea proprie a bolței:

$$H_g = \int_0^l H.dG. = \frac{15}{4}\frac{k\gamma}{fl^3}\int_0^l \xi^2(l-\xi)^2\left\{\alpha_1\left(\xi - \frac{l}{2}\right)^2 + \beta_1\right\}d\xi$$

$$= \frac{\gamma k l^2}{8f}\left(\frac{\alpha_1 l^2}{28} + \beta_1\right)$$

sau conform ecuațiunilor 2) și 3)

$$H_g = \frac{\gamma h k l^2}{8f}\left(\frac{a}{7} + 1\right) \qquad III)$$

și ecuațiunea corespunzătoare a momentelor la naștere după ecuațiunea 5):

$$M_g = \int_0^l M_1 dG = \frac{\gamma}{l^3}\int_0^l \xi(l-\xi)^2\left(l-\frac{5}{2}k\xi\right)\left\{\alpha_1\left(\xi-\frac{l}{2}\right)^2+\beta_1\right\}d\xi =$$

$$= \frac{\gamma l^2}{12}\left\{-\left(\frac{\alpha_1 l^2}{20}+\beta_1\right)+k\left(\frac{\alpha_1 l^2}{28}+\beta_1\right)\right\}$$

sau după ecuațiile 2) și 3)

$$M_g = \frac{\gamma h l^2}{12}\left\{k\left(\frac{a}{7}+1\right)-\frac{a}{5}-1\right\} \qquad 8)$$

Presiunea la naștere tae verticala punctului central al liniei nașterei la distanța η_g deasupra acestui punct.

După cum se știe avem $\eta_g = \frac{M_g}{H_g}$ și de aci prin întrebuințarea ecuațiunilor III) și 8:

$$\eta_g = \frac{2}{3}f\left[1-\frac{\frac{a}{5}+1}{\frac{a}{7}+1}\times\frac{1}{k}\right] \qquad IV$$

Tot asemenea aflăm prin adăogirea la încărcarea redusă mobilă p^{t/m^2} ca înălțime, întreaga sarcină înloc de h și h_k, $h+\frac{p}{\gamma}$ și $h_k \frac{p}{\gamma}$, și deci în loc de $a=\frac{h_k-h}{h}$ cantitatea:

$$a' = \frac{h_k-h}{h+\frac{p}{\gamma}} = a\frac{h}{h+\frac{p}{\gamma}} = \frac{a}{1+b} \qquad 9)$$

daca punem:

$$\frac{p}{\gamma h} = b \qquad V$$

De aci resultă folosindune de ecuația III) transformată, că presiunea totală horizontală la încărcare totală este:

$$H_{tot.} = \frac{\gamma h k l^2}{8f}\left(\frac{a}{7}+b+1\right) \qquad VI)$$

și distanța punctului de intersecție a acestei presiuni cu verticale ce trece prin mijlocul liniei naşterei până la mijlocul acestei linii este după cum rezultă din ecuaţia IV):

$$\eta_{tot.} = \frac{2}{3} f \left[1 - \frac{\frac{a}{5} + b + 1}{\frac{a}{7} + b + 1} \times \frac{1}{k} \right] \qquad \text{VII}$$

Incărcarea uniformă a jumătăţei din stînga a bolţei, după cum se vede dîn ecuaţia 4), numai o presiune horizontală:

$$H'_p = \frac{15}{4} \frac{kp}{fl^3} \int_0^{\frac{l}{2}} \xi^2 (l - \xi)^2 d\xi = \frac{kl^2 p}{16 f} \qquad 10)$$

şi câte un moment la naştere, stânga şi dreapta:

$$M'_p = \frac{p}{l^3} \int_0^{\frac{l}{2}} \zeta (l - \xi)^2 \left\{ l - \frac{5}{2} k \xi \right\} d\xi = \frac{p l^2}{192} (8k - 11) \qquad 11)$$

$$M''_p = \frac{p}{l^3} \int_0^{\frac{l}{2}} \xi^2 (l - \xi) \left\{ l - \frac{5}{2} k (l - \xi) \right\} d\xi - \frac{p l^2}{192} (8k - 5) \qquad 11')$$

Prin încărcarea uniform repartizată a jumătăţei deschiderei se nasc deci următoarele eforturi:

$$H_{part.} = H_g + H'_p = \frac{\gamma k l^2}{8 f} \left\{ h \left(\frac{a}{7} + 1 \right) + \frac{p}{2 \gamma} \right\} = \frac{\gamma h k l^2}{8 f} \left\{ \frac{a}{7} + \frac{b}{2} + 1 \right\}$$

VIII) sau: $H_{part.} = \dfrac{\gamma c h k l^2}{8 f}$ daca punem $c = \dfrac{a}{7} + \dfrac{b}{2} + 1$ IX)

şi mai departe momentele de la naştere pe partea încărcată şi respectiv ne încărcată, după ecuaţiunile 8), 11) şi 11').

$$\left.\begin{aligned} M'_{part.} = M_g + M'_p &= \frac{\gamma h l^2}{12} \left\{ k \left(\frac{a}{7} + 1 \right) - \frac{a}{5} - 1 + \frac{b}{2} \left(k - \frac{11}{8} \right) \right\} = \\ &= \frac{\gamma h l^2}{12} \left\{ ck - \frac{a}{5} - \frac{11}{16} b - 1 \right\} \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

$$\left.\begin{aligned} M''_{part.} = M_g + M''_p &= \frac{\gamma h l^2}{12} \left\{ k \left(\frac{a}{7} + 1 \right) - \frac{a}{5} - 1 + \frac{b}{2} \left(k - \frac{5}{8} \right) \right\} = \\ &= \frac{\gamma h l^2}{12} \left\{ c k - \frac{a}{5} - \frac{5}{16} b - 1 \right\} \end{aligned}\right\} \quad 12')$$

și astfel aflăm puntul de intersecție al componetelor horizontale ale presiunilor la naștere pe partea încărcată, respectiv neîncărcată, la distanța deasupra jumătății liniei nașterei: $\eta_{part.} = \frac{M_{part.}}{H_{part.}}$;

prin urmare:

$$\eta'_{part.} = -\frac{2f}{3ck}\left(\frac{a}{5} + \frac{11}{16}b - ck + 1\right) \tag{X}$$

$$\eta''_{part.} = -\frac{2f}{3ck}\left(\frac{a}{5} + \frac{5}{16}b - ck + 1\right) \tag{X'}$$

Este de mare importanță studierea secțiunei transversale la chee în cazul acțiunei greutăței proprii combinată cu încărcarea totală.

Cu privire la prima, avem momentul la cheea bolței:

$$M_s = M_g - H_g f + \frac{Gl}{4} - M_F \tag{13}$$

unde G este greutatea bolței împreună cu umplutura, conform ecuațiunilor 1), 2) și 3) avem:

$$G = 2\gamma\int_0^{\frac{l}{2}} y\,dx = \gamma h\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{4a}{l^2}x^2 + 1\right)dx = \frac{\gamma h l}{3}\left(a + 3\right) \tag{14}$$

și M_F momentul static al greutăței proprii din stînga în raport cu cheia este:

$$M_F = \gamma\int_0^{\frac{l}{2}}(\alpha_1 x^2 + \beta_1)\,x\,dx = \frac{\gamma l^2}{64}(\alpha_1 l^2 + 8\beta_1) = \frac{\gamma h l^2}{16}(a+2) \tag{15}$$

Prin mijlocirea valorilor III), 8), 14) și 15) în ecuațiunea 13) aflăm:

$$M_s = \frac{\gamma h l^2}{24}\left\{\frac{a}{10} + 1 - k\left(\frac{a}{7} + 1\right)\right\}$$

și astfel avem înălțimea liniei de presiune de deasupra mijlocului cheei la bolțile neîncărcate:

$$\eta_{sg} = \frac{M_s}{H_g} = \frac{f}{3}\left[\frac{\frac{a}{10} + 1}{\frac{a}{7} + 1} \times \frac{1}{k} - 1\right] \tag{XI}$$

tot astfel conform ecuaţiunei 9) la încărcare totală:

$$\eta_{s,\,tot} = \frac{f}{3}\left[\frac{\frac{a}{10}+b+1}{\frac{a}{7}+b+1} \times \frac{1}{k} - 1\right] \qquad \text{XII)}$$

In cazul încărcărei jumătăţei deschiderei boltei, în afară de profilele transversale studiate, mai sunt două profile periculoase şi anume la distanţa $x_{gf} = 0{,}20\ l$, de la mijloc.

In bolta încărcată pe jumătate din partea $\left\{\begin{matrix}\text{stânga}\\ \text{dreapta}\end{matrix}\right\}$*), în acest caz la o distanţă $\xi = 0.3\ l$ de la naşterea din stânga, adică la profilul periculos intervine un moment:

$$\left\{\begin{aligned} &M'_{gf} = M'_{part.} + A'_{part.}\,0.3l - H_{part.}\,Y_{gf} - M'_F - M''_F &\qquad 16)\\ &M_{gf} = M''_{part.} + A''_{part.}\,0.3l - H_{part.}\,Y_{gf} - M''_F &\qquad 16')\end{aligned}\right.$$

In aceasta $A'_{part.}$ şi $A''_{part.}$ însemnă componentele verticale de ambele părţi ale presiunilor de la naştere şi anume:

$$A'_{part.} = \frac{G}{2} + A'_p \quad A''_{part.} = \frac{G}{2} + A''_p \qquad 17)$$

A'_p şi A''_p se determină din ecuaţia momentului în raport cu punctul opus al naşterei:

$$M''_p = A'_p\,l + M'_p - \frac{3}{8}\,pl^2$$

de unde după ecuaţiile II), II') şi V):

$$A'_p = \frac{13}{32}\,pl = \frac{13}{32}\,\gamma hbl$$

$$\text{şi } A''_p = \frac{pl}{2} - A'_p = \frac{3}{32}\,pl = \frac{3}{32}\,\gamma hbl. \qquad 18)$$

Dacă însemnăm cu y_{gf} ordonatele profilului transversal pericu-

---

*) La încărcarea uniformă în partea $\left\{\begin{matrix}\text{dreaptă}\\ \text{stânga}\end{matrix}\right\}$ se produce la naştere în stânga momentnl $\left\{\begin{matrix}M'_{part.}\\ M''_{part.}\end{matrix}\right\}$ şi la naştere în dreapta momentul $\left\{\begin{matrix}M''_{part.}\\ M'_{part.}\end{matrix}\right\}$

los aflător la distanța $x_{gf} = \pm 0.2\, l$ de la centru, în acest caz reese din ecuațiunea parabolei axei arcului raportată la coardă și axa simetrala ca coordonate:

$$y = f\left(1 - \frac{4}{l^2}x^2\right)$$

în care fiind

$$x_{gf} = \pm 0.2\, l,\ y_{gf} = 0.84 f \qquad 19)$$

M'_F respectiv M''_F este momentul static a greutăței proprie aflătoare la stânga profilului transversal periculos și respectiv a greutăței mobile și dupe ecuațiile 1), 2) și 3):

$$M'_F = \int_{0,2l}^{0,5l} (x - 0.2\, l)\, dG = \gamma \int_{0.2\, l}^{0.5\, l} (\alpha_1 x^2 + \beta_1)(x - 0.2 l) dx =$$

$$= \gamma l^2 (0.0074\, \alpha_1 l^2 + 0.045\, \beta_1) = \gamma h l^2 (0.0279\, a + 0.045) \qquad 20)$$

$$M''_F = p \int_{0.2\, l}^{0.5\, l} (x - 0.2\, l)\, dx = 0.045\, \gamma\, h\, b\, l^2 \qquad 21)$$

Prin substituirea valorilor aflate în ecuațiunea 16) și 16') obținem:

$$\left.\begin{aligned} M'_{gf} = &-\frac{\gamma h l^2}{12}\left(\frac{a}{5} + \frac{11}{16} b - ck + 1\right) + 0.3\, l \left[\frac{\gamma h l}{6}(a+3) + \frac{13}{32}\gamma h b l\right] - \\ &-\frac{\gamma c h k l^2}{8 f} 0.84 f - \gamma h l^2 \left[0.0297\, a + 0.045\, (1 + b)^2\right] = \\ &= \gamma\, h\, l^2 \left[0.0036\, a + 0\ 0196\, b + 0.0217\, (1 - c k)\right] \end{aligned}\right\} 22)$$

$$\left.\begin{aligned} M''_{gf} = &-\frac{\gamma h l^2}{12}\left(\frac{a}{5} + \frac{5}{16} b - ck + 1\right) + 0.3\, l \left[\frac{\gamma h l}{6}(a+3) + \frac{3}{32}\gamma h b l\right] - \\ &-\frac{\gamma c h k l^2}{8 f} 0.84 f - \gamma h l^2 (0.0297\, a + 0.045) = \\ &= \gamma h l^2 \left[0.0036\, a + 0.0021\, b + 0.0217\, (1 - c k)\right] \end{aligned}\right\} 22')$$

Profilul transversal periculos admis vertical va fi tăiat de linia de presiune la distanța η'_{gf} respective η''_{gf} deasupra centrului său.

Avem:

$$\eta'_{gf} = \frac{M'_{gf}}{H_{part}} = \frac{8}{\gamma h l^2} \frac{f}{ck} M'_{gf} \qquad \text{XIII)}$$

$$\eta''_{gf} = \frac{M''_{gf}}{H_{part}} = \frac{8}{\gamma h l^2} \frac{f}{ck} M''_{gf} \qquad \text{XIII')}$$

Grosimea bolţei d_{gf} măsurată vertical în profilul periculos reese din cauza formei parabolice a intradosului şi extradosului din ecuaţiunea :

$$d = \alpha_2 x^2 + \beta_2$$

şi anume prin înlocuirea valorilor pentru d_k şi d (grosimile naturale vertical la naştere şi la chee) şi pentru $x_{gf} = 0{,}2\, l$ cu :

$$\alpha_2 = \frac{4}{l^2}\left(d_k - d_s\right) \text{ şi } \beta_2 = d_s$$

$$d_{gf} = 0.16\, d_r + 0.84\, d_s = \frac{1}{6}(d_r + 5 d_s)^* = \frac{d'}{6} \qquad 23)$$

daca punem $d_r + 5 d_s = d'$

Fiindcă linia de presiune trebue să rămână pe cât posibil în sâmburele central, urmează ca valoarea absolută să fie:

$$\left|\eta_{gf}\right| \frac{\leqq d_{gf}}{6} \text{ sau } \left|36\eta_{gf}\right| \leqq d'$$

Insemnăm în mod generic: $36\eta_{gf} = i$ 24)

din ecuaţiunile 22), XIII), 22') şi XIII') găsim:

$$i' = \frac{6.2f}{ck}\{0.17\, a + 0.9\, b - ck + 1\} \qquad \text{XIV)}$$

$$i'' = \frac{6.2f}{ck}\{0.17\, a + 0.1\, b - ck + 1\} \qquad \text{XIV')}$$

când e îndeplinită condiţiunea: $| i | \leqq d'$, nu avem eforturi de tensiune.

De asemenea cantităţile η din ecuaţiunile IV), VII), X) şi X')

---

*) Această simplificare are loc, fiindcă cantitatea d_r e admisă ca variind între $\frac{3}{2}$ d şi $2\, d_s$ şi astfel eroarea ce comitem e abia 0,6%.

trebue să satisfacă condițiunea: $| 6\eta | \leqq d_k$ și tot așa XI) și XII)

$$| 6\eta | \leqq d_s.$$

Se poate ușor vedea daca linia de presiune rămâne în sâmburele bolței la diferite îucărcări, și aceasta printr'o singură ecuațiune generală daca cunoaștem h și h_k înălțimile încărcărei cu greutate specifică γ^{t/m^3} la chee și la naștere, încărcarea mobilă p^{t/m^2} precum și săgeata f și deschiderea l ale axei arcului.
și anume avem:

$$i = \frac{df}{ck}(\alpha a + \beta b - ck + 1) \qquad \text{XV)}$$

unde
$$a = \frac{h_k}{n} - 1)^{*} \qquad \text{I)}$$

$$b = \frac{p}{\gamma h} \qquad \text{V)}$$

$$c = \frac{a}{7} + \varepsilon b + 1 \qquad \text{XVI)}$$

---

*) Sau în cazul când nu avem pe h și h_k în desemn (fig. I) și trebue să le calculăm prin *date :*

$$a = \frac{1}{h}\left[d_k - d_s\, f_0 \left\{1 - 4v(1-4v)\left(1 - \frac{\gamma'}{\gamma}\right)\right\}\right] \qquad \text{I)}$$

unde γ' este greutatea specifică a umpluturei, n înălțimea umpluturei la chee

$h = u\,\frac{\gamma'}{\gamma} + d_s$ 27), $f_0 = f - \frac{d_k - d_s}{2}$, $v = \frac{l}{8 f_0 n}$ 28)

și I: n este panda zidului complinitor.

Ne rezultă în acest caz ecuația I', în următorul mod:

Avem din ecuațiunea parabolei extradosului raportată la fața vârfului cheei și axa simetrică ca coordonate $y = \alpha x^2 \ldots$ 25) și derivata ei $\frac{dy}{dx} = 2\alpha x_n = \frac{1}{n}$ de unde $x_n = \frac{1}{2\alpha n}$ și în ecuația 25) $y_n = \frac{1}{4\alpha n^2}$ acestea sunt ordonatele punctului de tangență T al tangenței ST (limita zidului de complinire). Aceasta tae vertical prin mijlocul nașterei la o distanță s de la axa X în punctul S, de unde raportul abciselor la diferința ordonatelor punctelor S și T este $\frac{\frac{1}{2} - x_n}{s - y_n} = n$ și porțiiunea $s = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4\alpha n^2}$ . . . 26) este determinată.

$$k = \frac{1}{1 + \frac{1}{10}\left(\frac{d_k + d_s}{f}\right)^2} \; ^{*)} \qquad \text{II)}$$

şi coeficienţii α, β, δ, ε se pot lua din tabela ce urmează după cum va fi cazul încărcărei şi profitul transversal. **)

No.	Cazul încărcarei	Posiţia secţiunei transversale periculoasă	α	β	δ	ε	ϑ	$\|i\| \leq$
1	Greutate proprie	la naştere	$^1/_5$	0	—4	0	0	d_k
2	Grnutate totală			1		1	1	
3	Greutate proprie	la chee	$^1/_{10}$	0	2	0	—	d_s
4	Greutate totală			1		1	—	
5	Incărcarea jumătăţei deschiderei bolţei	la naştere: partea încărcată	$^1/_5$	$^{11}/_{16}$	—4	$^1/_2$	$^{13}/_{16}$	d_k
6		la naştere: partea neîncărcată		$^5/_{16}$			$^3/_{16}$	
		la coasta bolţei. — (braţul între chee şi naştere): încărcat	0.17	0.9	6.2	$^1/_2$	—	$d_k +$
		neîncărcat		0.1				$+5d_s$

Acum putem exprima pe h_k în forma :

$$h_k = d_k + f_0 - s + (s + u)\,\frac{\gamma'}{\gamma}$$

fiindcă în ecuaţia 25) avem $x = \frac{1}{2}$ şi $y = f_0\,\alpha = \frac{4 f_0}{l^2}$ urmează după figura

$$f_0 = f - \frac{d_k - d_s}{2}$$

şi $$h = n\,\frac{\gamma'}{\gamma} + d_s \qquad 27)$$

obţinem prin înlocuirea valorilor h_k, h, f_0, s şi x în ecuaţia I :

$$v = \frac{l}{8 f_0\, n} \qquad 28)$$

adică ecuaţia de mai sus I').

*) Peniru calcule sumare se poate pune aproximativ k=0,9.

**) După cum uşor se peate vedea prin substituirea valorilor denumite i (XV) nu este altceva de cât valoarea calculată din ecuaţiile IV), VII), X), X') XI), X!I) a lui $6\,\eta$ sau ecuaţiile XIV) şi XIV').

Nu parvin eforturi de tracţiune dacă ultima coloană a tabelei va fi satisfăcută, în cazul dat al încărcăreiî

Cu ajutorul ecuaţiunilor date se pot uşor calcula şi forţele σ la cari lucrează bolta în secţiunile transversale cele mai periculoase, trebue însă să presupunem materiale homogene.

La naşterea boltei, a cărei unghiu de înclinare fie φ, avem următoarea ecuaţie a eforturilor σ:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} \qquad 29)$$

unde forţa normală:

$$N = A\,cos\,\varphi + H\,sin\,\varphi = \left(\frac{4f}{l}A + H\right) sin\,\varphi \qquad 30)$$

fiindcă la parabolă avem $cotg\;\varphi = \frac{4f}{l}$; suprafaţa profilului transversal la naştere este $F = d_k\,sin\,\varphi$ (d_k este grosimea la naştere măsurată vertical), momentul este $M = H\eta = \frac{Hi}{6}$.

Momentul de resistenţă:

$$W = \frac{d_k^2\,sin^2\,\varphi}{6} = \frac{d_k^2}{6(1 + cotg^2\,\varphi)} = \frac{d_k^2}{6\left[1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2\right]}$$

de aci urmează:

$$\sigma_k = \frac{1}{d_k}\left\{\frac{4f}{l}A + H\left(1 \pm \frac{i}{d_k}\left[1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2\right]\right)\right\}$$

unde după ecuaţiunile 14) şi 18) precum şi după tabelă

$$A = \frac{\gamma h.l}{2}\left[\frac{a}{3} + \delta b + 1\right] \qquad XVII)$$

şi în general avem:

$$H = \frac{\gamma h}{f} \cdot \frac{ckl^2}{8} \qquad XVIII)$$

şi deci efortul de presiune la marginea boltei este

$$e = \left(\frac{l}{4f}\right)^2 \qquad XIX)$$

$$\sigma_k = \frac{2\gamma hf}{d_k}\left\{\frac{a}{3} + \delta b + ck\left[e \pm \frac{i}{d_k}(e+1)\right] + 1\right\} \qquad \text{XX}$$

cari formule, având în vedere coeficienții din tabelă, sunt valabile pentru toate cazurile de încărcări tratate.

La secțiunea transversală de la chee, afiăm din ecuația 29) prin $N = H$, $F = d_s$, $M = H\frac{i}{6}$ și $W = \frac{d_s^2}{6}$ după ecuațiunea YVIII) pe

$$\sigma_s = \frac{\gamma h}{f}\frac{ck}{2}(d_s \pm i)\left(\frac{l}{2d_s}\right)^2 \qquad \text{XXI)}$$

acest σ_s este lucrarea la compresiane la chee, bolta fiind total încărcată sau ne încărcată, în care valorile pentru e și i [ecuația XV și XVI] trebuesc luate din rîndul al 3-lea sau al 4-lea al tabelei.

In cazul încărcărei jumătății bolței vom afla lucrarea la compresiune σ_{gf} pentru profilul transversal pe riculos de pe coasta bolței în următorul mod:

Fie înclinarea acestui profil către horizontala φ' și suprafața F în ecuațiunea eforturllor 29):

$$N = \frac{H_{part}}{sin\varphi'},\ F = d_{gf}\,sin\,\varphi',\ M = H_{part}\,\eta_{gf} = H_{part}\frac{i}{36} \text{ (după ecuația 24)}$$

$$W = \frac{F^2}{6} = \frac{d_{gf}^2\,sin^2\varphi'}{6}, \text{ și în consecință}$$

$$\sigma_{gf} = \frac{H_{part}}{d_{gf}\,sin^2\varphi'} \pm \frac{6\,H\frac{i}{36}}{d_{gf}^2 sin^2\varphi'} = \frac{H}{d_{gf}^2 sin^2\varphi'}\left(d_{gf} \pm \frac{i}{6}\right) = \frac{6\,H}{d^2 sin^2\varphi'}(d' \pm i)$$

daca punem $\qquad d' = d_k + 5\,d_s \qquad$ XXII)

Determinarea lui $sin^2\varphi'$ se face cu ajutorul ecuațiunei parabolei raportată la coarda arcului și axa simetrală ca coordonate:

$$y = f\left(1 - \frac{4}{l^2}x^2\right)$$

in care coordonatelor ecuațiunei 19): $x_{gf} = 0.2\,l$ și $y_{gf} = 0.84\,l$ corespunde unghiul φ' al normalei astfel că aflăm:

$$tg\,\varphi' = -\frac{dx}{dy} = \frac{l^2}{8fx_{gf}} = \frac{1}{1{,}6\,f}$$

mai departe avem:

$$\frac{1}{sin^2 \varphi'} = 1 + cotg^2 \varphi = 1 + \left(\frac{1{,}6\,f}{l}\right)^2 = 1 + 2{,}6\,\frac{f^2}{l^2}$$

ceiace ne dă considerând ecuaţiunea XIX) şi pe cea de mai sus:

$$\sigma_{gf} = \frac{3}{4}\,\frac{\gamma\,h}{f}\,\frac{c\,k}{d'^2}\,(l^2 + 2{,}6\,f^2)\,(d' \pm i) \qquad \text{XXIII)}$$

adică lucrarea la compresiune în profilul periculos de pe coasta bolţei la încărcarea jumătăţei deschiderei.

Dacă pentru simplicitate calculăm bolta ca parabolică dnschisă însă o executăm cu intradosul şi extradosul în arcuri de cerc, în acest caz se schimbă esenţial numai σ_{gf} în raport cu bolta parabolică, fiindcă pentru ambele forme posiţia liniei de presiune în raport cu sistemul coordonatelor poate fi considerată ca neschimbată şi numai centrul profilului transversal periculos de pe coasta boltei în cazul arcului de cerc ia o poziţie mai sus de cât în cazul arcului parabolic.

Fie y ordonata primului profil în raport cu tangenta la chee dusă la arcul mijlociu pe care o considerăm ca axa X′, şi ordonata celui de al doilea conform ecuaţiunilor 19) (fig. 1) $f - 0{,}84 f = 0{,}16 f$; în acest caz avem distanţa liniei de presiune de la punctul arcului de cerc corespunzător:

$$\overline{\eta}_{gf} = \eta_{gf} - (0{,}16\,f - y) \qquad 31)$$

din cauza raportului foarte mic al săgeţei arcului de cerc $\frac{f}{l}$ avem ecuaţiunea lui desvoltată după teoria binomului:

$$Y = R - \sqrt{R^2 - x^2} = x\left\{\frac{x}{2\,R} + \left(\frac{x}{2\,R}\right)^3\right\} \text{ ceia ce pentru } x_{gf} \colon \frac{1}{5} \text{ ne da } \frac{1}{10} R = w \qquad 32)$$

$$Y = \frac{l\,w}{5}\,(1 + w^2) \qquad 33)$$

Pentru $x = \frac{l}{2}$ şi $y = f$ aflăm din ecuaţiunea generală:

$$\frac{R}{l} = \frac{1 + \left(\frac{2f}{l}\right)^2}{8\frac{f}{l}}$$

și apoi după ecuațiunea 32)

$$w = \frac{0{,}8\frac{f}{l}}{1+\left(\frac{2f}{l}\right)^2} \qquad \text{XXIV)}$$

In ecuațiunea eforturilor 29) avem de înlocuit pentru $M = H.\overline{\eta}_{gf}$ și toate celelalte va mai nainte.

In ecuația 31) este:

$$\eta_{gf} = \frac{i}{36} \text{ și apoi}$$

$$\overline{\eta}_{gf} = \frac{i}{36} - \left\{0{,}16f - \frac{lw}{5}(1+w^2)\right\}$$

urmează de aci:

$$\overline{\sigma}_{gf} = \frac{H}{d_{gf}^2 \sin^2 \varphi'}(d_{gf} \pm 6\,\overline{\eta}_{gf}),$$

$$\overline{\sigma}_{gf} = \frac{3}{4}\frac{\gamma h}{f}\frac{ck}{d'^2}(l^2+2{,}6f^2)\left\{d' \pm \left[i - 0{,}72\{8f - 10lw(1+w)^2\}\right]\right\} \qquad \text{XXV)}$$

ceiace reprezintă lucrarea la compresiune în profilul periculos de pe coasta bolței în cazul arcului de cerc întins, considerând materialul omogen și încărcătura uniform repartizată pe jumătatea deschiderei bolței.

Dacă însă vom avea de considerat materiale eterogene cum e cazul la construcțiile de beton armat în cari presupunem ferărie așezată simetric în raport cu axa arcului, atunci trebue să stabilim ecuațiunile corespuuzătoare ale eforturilor cu considerația profilelor transversale și momentelor de inerție ideale pentru fiecare profil transversal periculos și avem de luat H în general din ecuațiunea XVIII), pentru naștere se ia N din ecuațiunea 30) combinată cu XVI), pentru chee luăm $N = H$ și pentru coasta bolței luăm $N = H\sqrt{1+\left(\frac{1.6f}{l}\right)^2}$;

mai departe pentru momentul la naștere și la chee avem $M = \frac{i}{6}$ și pentru momentul în profilul transversal periculos de pe coasta $M = \frac{i}{36}$.

Pentru determinarea lui i vom întrebuinţa în ordinea următoare ecuaţiunile XV), I), V), XVI) şi 6) unde în ultima, J_0 şi F_0 reprezintă valori medii pentru momentul de inerţie ideal şi suprafaţa ideală.

Mărimea şi direcţiunea presiunei la naştere sunt date prin două componente A (ec. XVII) şi H (ec. XVIII), posiţiunea presiunei e dată rin înălţimea $\frac{i}{6}$ (ec. XV) deasupra jumătăţei naşterei a împingerei horizontale, deci este posibil a face cercetarea statică sau dimensionarea *) directă a culeei sau a picioarelor podului.

Calculele efectuate sunt valabile şi pentru cercetarea bolţilor întinse cu tabliere continue, fiindcă şi în acest caz linia mărginitoare a încărcărei redusă este o parabolă, căreia îi lipseşte numai la chee un mic segment, a cărui săgeată este egală cu grosimea plăcei de acoperire (fig. 2).

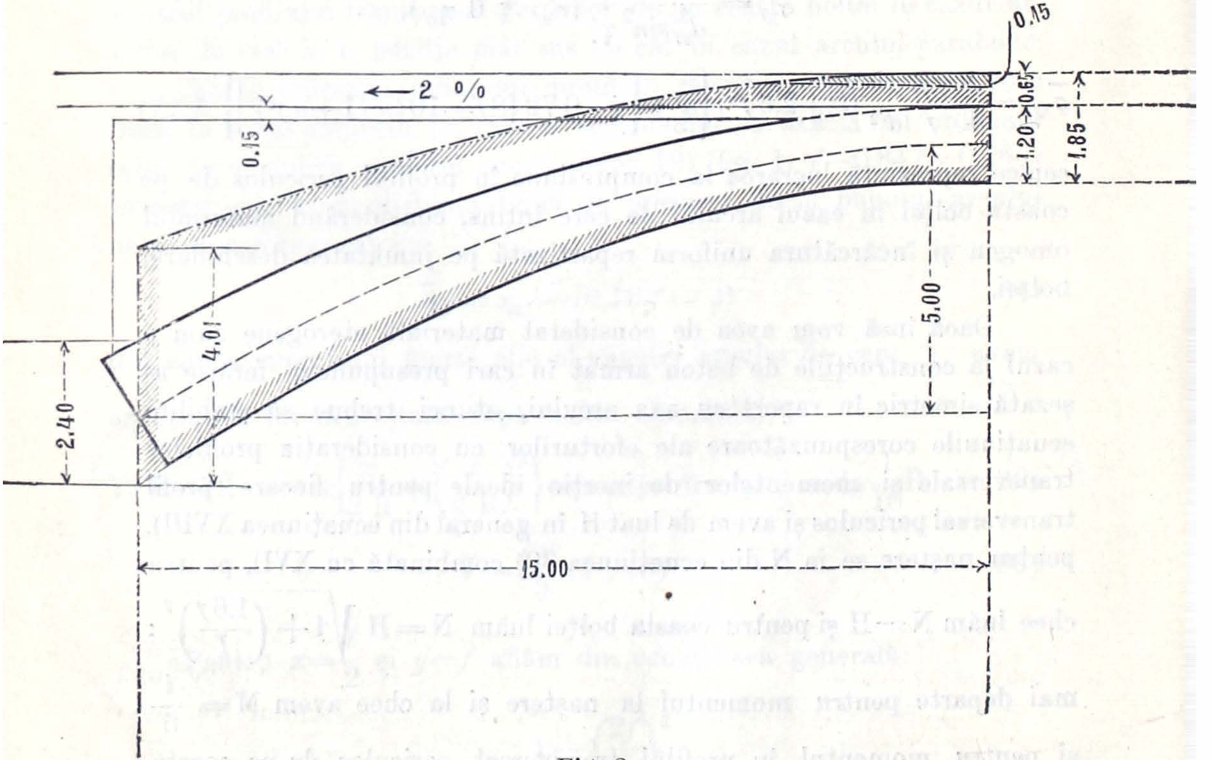

Fig. 2.

*) A se vedea metoda Grafostatică a autorului pentru directa dimensionare a zidurilor de sprijin şi a zidurilor de baraj, a culeelor şi a pilelor c suprafeţe plane sau curbe publicată în: Zeitschrift 1902 No. 17.

In acest caz la calculul bolților cu ziduri îngroșate, h însemnează înălțimea greutății proprii la chee mărită cu grosimea plăcei acoperitoare: toate celelalte cantități se mențin ca mai nainte, și cu grosimea ce revine din repartisarea cubului pilaștrilor pe suprafața bolței.

Să luăm ca exemplu de calculat un pod boltit pentru șosea (fig. 2); fie axa arcului $l = 30^m$ și săgeata $f = 5^m$ grosimea bolței măsurată vertical fie la chee: $d_s = 1^m.2$ și la naștere (la prelungirea intradosului) $d_k = 2^m.4$. Să presupunem podul esecutat din piatră spartă (greutatea specifică $\gamma = 2.2\ t/m^3$) cu pilaștri de cărămidă (greutate specifică $\gamma''1.6\ t/m^3$) de $0^m.45$ grosime și lumina depărtărei între ele de $0^m.90$, deasupra fie plăcei de acoperire de $0^m.15$ grosime. Inălțimea umpluturei (greutatea specifică $\gamma' = 1.8\ t/m^3$) fie $0^m.60$ iar partea părței carosabile și a acoperișului spre naștere $2^0/_0$. Greutatea mobilă uniform repartizată o admitem $p = 0{,}56\ t/m^2$. Prin calcul s'au prin construcție aflăm după reducțiunea greutăților permanente de la naștere și de la chee, înălțimile reduse: $h_k = 4^m.01$ și h $1^m.85$ (în h intră și grosimea plăcei acoperitoare).

Acestea admise, avem după ecuațiunea I)

$$a = \frac{4.01}{1.85} - 1 = 1.17$$

după ecuațiunea V): $\gamma h = 2{,}2 \times 1.85 = 4.07$

$$b = \frac{0.56}{4.07} = 0.14$$

și după ecuațiunea II)

$$k = \frac{1}{1 + \frac{1}{10}\left(\frac{2{,}4 + 2 \times 1{,}2}{5}\right)^2} = 0.92$$

a) Pentru a determina de exemplu, efortul σ_k de la naștere în partea încărcată, când încărcăm jumătatea deschiderei, calculăm după ecuațiunile XVI), XV), XIX) și 20 precum și după rândul No. 5 al tabelei și obținem :

$$c = \frac{1.17}{7} + \frac{0.14}{2} + 1 = 1.24$$

$$ck = 1.24 \times 0.92 = 1.14$$

$$i = \frac{-4.5}{1.14}\left(\frac{1.17}{5} + \frac{11}{16} \times 0.14 - 1.14 + 1\right) = -3.33$$

$$e = \left(\frac{l}{4f}\right)^2 = \left(\frac{30}{4 \times 5}\right)^2 = 2.25$$

$$\sigma_k = \frac{2 \times 4{,}07 \times 5}{2{,}4}\left\{\frac{1{,}17}{3} + \frac{13}{16} 0{,}14 + 1{,}14\left[2{,}25 \pm \frac{-3{,}33}{2{,}4}(2{,}25 + 1)\right] + 1\right\}$$

$$= \begin{cases} \sigma_1 = 156\, t/m^2 = 15{,}6\, k/cm^2 \\ \sigma_2 = -18\, t/m^2 = -1{,}8\, k/cm^2 \text{ *)}. \end{cases}$$

b) La acelaș mod de încărcare aflam eforturile la marginea nașterei pe partea neîncărcată, după ecuațiunea XX) și rândul No. 6 din tabelă. Acestea sunt mai mici ca cele de pe partea încărcată.

c) Pentru calculul eforturilor de la naștere la încărcare totală servesc ecuațiunile XVI), XV) și XX) și rândul No. 2 al t avem:

$$c = \frac{1.17}{7} + 0{,}14 + 1 = 1{,}31, \qquad ck = 1{,}31 \times 0{,}92 = 1{,}20.$$

$$i = \frac{4 \times 5}{1.2}\left(\frac{1.17}{5} + 0.14 - 1.2 + 1\right) = -2.83$$

$e = 2.25$ (vezi sub *a*).

$$\sigma_k = \frac{2 \times 4.07 \times 5}{2.4}\left\{\frac{1.17}{3} + 0.14 + 1.2\left[2.25 \pm \frac{-2.83}{2.4}(2.25 + 1)\right] + 1\right\} = \begin{matrix} -6\, t/m^2 \\ 150\, t/m^2 \end{matrix}$$

d) In cazul încărcărei totale, eforturile la chee se calculează din ecuațiunile XVI), XV) și XXI) cu ajutorul rândului din tabela No. 4, precum urmează:

Analog cu exemplul *c)* avem: $ck = 1{,}2$

---

*) Dacă reese o valoare negativă (τ_2) care ar fi în valoare absolută mai mare ca $2k/cm^2$ atunci întrebuințăm formula dată în manualul „Hütte" (1902. pag. 306).

Avem neglijând eforturile de tracțiune, cu întrebuințarea valorilor de mai sus

$$\sigma_{max} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}$$

și apoi $i = \frac{2\times5}{1,2}\left(\frac{1,17}{10}+0,14-1,2+1\right)=0.50<1,2$ (grosimea la chee după tabela din urmă).

Prin urmare nu avem eforturi de tensiune.

După ecuația XXI) avem:

$$\sigma_s = \frac{4,07}{5}\,\frac{1,2}{2}\,(1,2\pm05)\left(\frac{30}{2\times1,2}\right)^2=\begin{cases}129\ t/m^2\\ 53\ t/m^2\end{cases}$$

e) In cazul încărcărei jumătăței deschiderei bolței putem afla eforturile maximale σ_{gf} pe coasta boltei parabolice a părței încărcate, din ecuațiunile XVI), XV), XXII) și XXIII) cu ajutorul rîndului din tabela No. 7 și anume:

$$c\,k = 1,14 \text{ (vezi exemplul } a)$$

$$i=\frac{6.2\times5}{1,14}\,(0,17\times1.17+0,9\times0.14-1,14+1)=5,03$$

$$d' = 2,4+5\times1,2=8,4$$

fiindcă $5,03<8,4$ urmează $i<d_k+5\,d_s$ deci nu avem eforturi de tensiune pe coasta bolței.

Mai departe obținem:

$$\sigma_{gf}=\frac{3}{4}\,\frac{4,07}{5}\,\frac{1,14}{(8,4)^2}(\overline{30}^2+2,6\times5^2)\,(8,4\pm5,03)=\begin{matrix}128\ t/m^2\\ 32\ t/m^2\end{matrix}$$

f) Eforturile cari se desvoltă pe soasta ne încărcată a bolței se află între cele două valori ale lui τ_{gf} aflate mai sus, fiindcă după tabelă rândul No. 8, pentru β mai mic și ceilalți coeficienți egali, i în ecuațiunea XXIII) va fi mai mic însă nu *negativ*.

g) Dacă bolta e formată dintr'un arc de cerc întins, atunci se calculează eforturile pe coasta bolței cu ajutorul cantităților determinate sub *e*) și anume:

$$c\,k=1,14,\quad d'=8,4,\quad i=5,03$$

și din ecuațiunile XXIV și XXV:

$$\frac{f}{l}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

$$w = \frac{0,8 \times \frac{1}{6}}{1 + \left(\frac{2}{6}\right)^2} = 0,12$$

$$\overline{\sigma_{gf}} = \frac{3}{4}\,\frac{4.07}{5}\,\frac{1.14}{8,4^2}\left(30^2 + 2,6 \times 5^2\right)\left\{8,4 \pm \left[5.03 - 0.72\left\{8 \times 5 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - 10 \times 30 \times 0,12\left(1 + 0,12^{-2}\right)\right\}\right]\right\} = \begin{cases} 104\ t/m^2 \\ 56\ t/m^2 \end{cases}$$

h) In privința jumătăței neîncărcată a bolței se procedează asemenea ca la *f)*.

Studiul static al bolților întinse se bazează pe hipoteza că lungimea unui element al arcului se poate înlocui cu projecția sa horizontală și grosimea variabilă a bolței se poate înlocui cu o grosime medie la bolțile parabolice întinse. Aceasta însă este admisibil numai până la raportul: $\frac{f}{l} = \frac{1}{6}$.

Peste această limită, e mai avantagios a se construi bolta în arc de cerc sau în „anse de panier."

In acest caz teoria presentă nu mai este suficientă ci se recomandă un studiu grafostatic ca pentru bolți elastice, în care să se ia în considerație variațiunea grosimilor bolței.

Această cestiune a fost tratată de autor în No. 6 al „Zeitschrif" 1903.

Tradusă după Dr. Iosef Schreier.

Zeitschrif 1905.