Grinzi în arc, static determinate, cu un număr impar de deschideri egale

I. INTRODUCERE

Vom considera o grindă continuă în arc, cu un număr impar de deschideri egale, astfel construită, ca reazămile finale să fie fixe și cu articulațiuni, iar reazămile intermediare mobile în sensul longitudinal al grinzei. In fiecare deschidere să se afle câte o articulație la cheie, iar cele două părți de grindă din deschiderile vecine, care au acelaș reazăm intermediar, să fie rigid legate între dânsele, astfel ca să nu se poată învârtì separat ci numai împreună în jurul articulației reazămului. O atare grindă (a se vedeà planșa de la finele *Buletinului,* fig. 1) cu $2n+1$ deschideri (litera n însemnează un număr pozitiv și întreg) este static determinată și putem aflà, prin ajutorul condițiunilor de echilibru, reacțiunile reazămilor și puterile forfecătoare pentru o secțiune oarecare, când cunoaștem încărcarea.

Construcțiuni de acest fel se vor efectuà foarte rar sau de loc când e vorba de poduri, dar sunt la locul lor pentru hale de gări acoperișuri sau pentru astfel de construcțiuni în care influențele dinamice sunt minimale sau exscluse cu desăvârșire.

In calculul acestor grinzi vom cercetà două cazuri, după cum încărcarea e compusă din sarcini izolate sau din sarcini uniform repartizate.

Considerând o secțiune S a unei atari grinzi situată la distanța x de la reazimul A, putem reduce toate forțele, care lucrează de aceaș parte a secțiuni la :

a). O putere verticală V_x trecând prin centrul de gravitate S al secțiunei ;

b). O putere orizontală H_x trecând prin centrul de gravitate S al secțiunei ;

c). Un moment M_r în raport cu S.

Numind φ unghiul ce'l formează tangenta N_x în S la arc cu axa pozitivă a absciselor și descompunând pe V_x și H_x în câte 2 componente: una în direcția N_x, alta perpendiculară pe N_x, obținem rezultanta în direcția tangentei:

$$N_x = V_x \,.\, sin\,\varphi + H_x \,.\, cos\,\varphi$$

și perpendicular pe dânsa:

$$T_x = V_x \,.\, cos\,\varphi - H_x \,.\, sin\,\varphi.$$

In secțiunea S pe lângă puterile N_x, T_x lucrează și momentul M_r. Dacă însemnăm suprafața secțiunei cu F, momentul rezistent al secțiunei cu W, obținem neglijând pe T_x, cu o exactitate suficientă, efortul în fibra superioară, respectiv în fibra inferioară a secțiunei:

$$\sigma_s = \frac{N_x}{F} + \frac{M_r}{W}, \qquad \sigma_i = \frac{N_x}{F} - \frac{M_r}{W}.$$

Deci problema se reduce la a determină pe M_r, H_x și V_x.

De la început vom face ipoteza că toate reazămile A, B, C... X, Y, Z se află situate pe o linie orizontală, pe care o vom consideră în cursul calculului drept axă a absciselor, luând ca axă a ordonatelor o perpendiculară pe această linie dusă prin reazămul A. In raport cu acest sistem de coordonate considerăm ca pozitive pe V_x, A, B, C,... X, Y, Z și P când direcția lor e de jos în sus, pe H_x, H_1 și H_2 când au direcția de la stânga spre dreapta, iar momentele acestor forțe le socotim ca pozitive când au același sens ca și arătătorii unui ceasornic.

II. REACȚIUNILE PUNCTELOR DE REAZAM

1. SARCINI IZOLATE

Considerăm fig. 1 în care o grindă cu $2n + 1$ deschideri egale, întrunind condițiunile enunțate mai sus, e supusă acțiunei unei sarcini izolate verticale P, care se află între articulația cheiei m și a cheiei $m + 1$. Să însemnăm abscisa acestei sarcini cu a, iar m să fie $< n + 1$. Fiecare deschidere să fie $= l$ și să aibă aceiași fleșă $= f$.

Reacțiunile datorite încărcărei P sunt parte verticale: A, B, C..

X, Y, Z parte orizontale: H_1 și H_2. In total avem $2n+4$ necunoscute și pentru a le determinà ne servim de următoarele $2n+4$ ecuațiuni de gradul I:

1). Suma încărcărilor și ale reacțiunilor verticale să fie egală cu zero adică:

$$A+B+C+\ldots+X+Y+Z-P=0.$$

2). Suma încărcărilor și ale reacțiunilor orizontale să fie egală cu zero, adică:

$$H_1+H_2=0.$$

3). Suma momentelor în raport cu articulația cheiei 1 ale sarcinelor și reacțiunilor situate de aceiași parte a acestei chei să fie egală cu zero.

4). Suma momentelor în raport cu articulația cheiei 2, a sarcinilor și reacțiunilor situate de aceiași parte a acestei chei să fie egală cu zero.

. . . .

. . . .

$2n+3$). Suma momentelor în raport cu articulația cheiei $2n+1$ a sarcinilor și reacțiunilor situate de aceiași parte a acestei chei să fie egală cu zero; și în fine

$2n+4$). Suma momentelor în raport cu articulația Z a sarcinelor și reacțiunilor să fie egală cu zero.

La formarea momentelor vom considerà totdeauna numai sarcinele și reacțiunile situate la stânga cheiei respective.

Din ecuațiunea de supt No. 2) rezultă că $H_2=-H_1$ iar din ecuațiunea de supt No. 1) vom află reacțiunea Z când vom cunoaște pe A, B, C...X și Y, pe câtă vreme cele din urmă $2n+2$ ecuațiuni ale momentelor date de statică ne dau valorile lui A, B, C...X, Y și H_1. Aceste $2n+2$ ecuațiuni sunt:

$$\left|\begin{array}{ll} 1) & A.\frac{l}{2}-H_1.f=0 \\[2ex] 2) & A.\frac{3l}{2}+B.\frac{l}{2}-H_1.f=0 \\[2ex] 3) & A.\frac{5l}{2}+B.\frac{3l}{2}+C.\frac{l}{2}-H_1.f=0 \end{array}\right.$$

(1)

4) $$A.\frac{7l}{2}+B.\frac{5l}{2}+C.\frac{3l}{2}+D.\frac{l}{2}-H_1.f=0$$

. . . .

. . . .

$m-1$) $$A.\frac{2m-3}{2}l+B.\frac{2m-5}{2}l+C.\frac{2m-7}{2}l+D.\frac{2m-9}{2}l+\dots$$
$$+J.\frac{l}{2}-H_1.f=0$$

m) $$A.\frac{2m-1}{2}l+B.\frac{2m-3}{2}l+C.\frac{2m-5}{2}l+D.\frac{2m-7}{2}l+\dots$$
$$+J.\frac{3l}{2}+K.\frac{l}{2}-H_1.f=0$$

$m+1$) $$A.\frac{2m+1}{2}l+B.\frac{2m-1}{2}l+C.\frac{2m-3}{2}l+D.\frac{2m-5}{2}l+\dots$$
$$+J.\frac{5l}{2}+K.\frac{3l}{2}+L.\frac{l}{2}-H_1f=P\left[\frac{2m+1}{2}l-a\right]$$

$m+2$) $$A.\frac{2m+3}{2}l+B.\frac{2m+1}{2}l+C.\frac{2m-1}{2}l+D.\frac{2m-3}{2}l+\dots$$
$$+J.\frac{7l}{2}+K.\frac{5l}{2}+L.\frac{3l}{2}+M.\frac{l}{2}-H_1f=P\left[\frac{2m+3}{2}l-a\right]$$

. . . .

. . . .

$2n-1$) $$A.\frac{4n-3}{2}l+B.\frac{4n-5}{2}l+C.\frac{4n-7}{2}l+D.\frac{4n-9}{2}l+\dots$$
$$+J.\frac{4n-2m+1}{2}l+K.\frac{4n-2m-1}{2}l+L.\frac{4n-2m-3}{2}l$$
$$+M.\frac{4n-2m-5}{2}l+\dots+W.\frac{l}{2}-H_1f=P\left[\frac{4n-3}{2}l-a\right]$$

$2n$) $$A.\frac{4n-1}{2}l+B.\frac{4n-3}{2}l+C.\frac{4n-5}{2}l+D.\frac{4n-7}{2}l+\dots$$
$$+J.\frac{4n-2m+3}{2}l+K.\frac{4n-2m+1}{2}l$$
$$+L.\frac{4n-2m-1}{2}l+M.\frac{4n-2m-3}{2}l+\dots$$
$$+W.\frac{3l}{2}+X.\frac{l}{2}-H_1f=P\left[\frac{4n-1}{2}l-a\right]$$

$$2n+1)\quad A.\frac{4n+1}{2}l+B.\frac{4n-1}{2}l+C.\frac{4n-3}{2}l+D.\frac{4n-5}{2}l+\ldots$$
$$+J.\frac{4n-2m+5}{2}l+K.\frac{4n-2m+3}{2}l$$
$$+L.\frac{4n-2m+1}{2}l+M\frac{4n-2m-1}{2}l+\ldots$$
$$+W.\frac{5l}{2}+X.\frac{3l}{2}+Y.\frac{l}{2}-H_1f=P\left[\frac{4n+1}{2}l-a\right]$$
$$2n+2)\quad A.(2n+1)l+B.2nl+C.(2n-1)l+D.(2n-2)l+\ldots$$
$$+J.(2n-m+3)l+K.(2n-m+2)l$$
$$+L.(2n-m+1)l+M.(2n-m)l+\ldots$$
$$+W.3l+X.2l+Y.l=P[(2n+1)l-a].$$

Pentru a rezolvà aceste ecuațiuni ne servim de metoda eliminațiunei. Se vede lesne că necunoscuta A se poate eliminà din grupul I dacă înmulțim ecuațiunea întâia din grup pe rând cu numerile 3, 5, 7,... $2m-3$, $2m-1$,... $4n-1$, $4n+1$ și $4n+2$ și scădem rezultatele respectiv din ecuațiunile (2) până la $(2n+2)$. Ca rezultat obținem grupul II compus din $2n+1$ ecuațiuni cu $2n+1$ necunoscute și anume :

$$2)\quad B.\frac{l}{2}+2H_1f=0$$
$$3)\quad B.\frac{3l}{2}+C.\frac{l}{2}+4H_1f=0$$
$$4)\quad B.\frac{5l}{2}+C.\frac{3l}{2}+D.\frac{l}{2}+6H_1f=0$$

. . . .

$$m-1)\quad B.\frac{2m-5}{2}l+C.\frac{2m-7}{2}l+D.\frac{2m-9}{2}l+\ldots$$
$$+J.l+2(m-2)H_1f=0$$
$$m)\quad B.\frac{2m-3}{2}l+C.\frac{2m-5}{2}l+D.\frac{2m-7}{2}l+\ldots$$
$$+J.\frac{3l}{2}l+K.\frac{l}{2}+2(m-1)H_1f=0$$
$$m+1)\quad B.\frac{2m-1}{2}l+C.\frac{2m-3}{2}l+D.\frac{2m-5}{2}l+\ldots+J.\frac{5l}{2}$$
$$+K.\frac{3l}{2}+L.\frac{l}{2}+2mH_1f=P\left[\frac{2m+1}{2}l-a\right]$$

$$
\text{(II)}\left\{
\begin{array}{ll}
m+2) & B.\frac{2m+1}{2}l+C.\frac{2m-1}{2}l+D.\frac{2m-3}{2}l+\ldots+J.\frac{7l}{2} \\
 & +K.\frac{5l}{2}+L.\frac{3l}{2}+M.\frac{l}{2}+2(m+1)H_1f=P\left(\frac{2m+3}{2}l-a\right) \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2n-1) & B.\frac{4n-5}{2}l+C.\frac{4n-7}{2}l+D.\frac{4n-9}{2}l+\ldots \\
 & +J.\frac{4n-2m+1}{2}l+K.\frac{4n-2m-1}{2}l \\
 & +L.\frac{4n-2m-3}{2}l+M.\frac{4n-2m-5}{2}l+\ldots \\
 & +W.\frac{l}{2}+2(2n-2)H_1f=P\left(\frac{4n-3}{2}l-a\right) \\
2n) & B.\frac{4n-3}{2}l+C.\frac{4n-5}{2}l+D.\frac{4n-7}{2}l+\ldots \\
 & +J.\frac{4n-2m+3}{2}l+K.\frac{4n-2m+1}{2}l \\
 & +L.\frac{4n-2m-1}{2}l+M.\frac{4n-2m-3}{2}l+\ldots \\
 & +W.\frac{3l}{2}+X.\frac{l}{2}+2(2n-1)H_1f=P\left(\frac{4n-1}{2}l-a\right) \\
2n+1) & B.\frac{4n-1}{2}l+C.\frac{4n-3}{2}l+D.\frac{4n-5}{2}l+\ldots \\
 & +J.\frac{4n-2m+5}{2}l+K.\frac{4n-2m+3}{2}l \\
 & +L.\frac{4n-2m+1}{2}l+M.\frac{4n-2m-1}{2}l+\ldots \\
 & +W.\frac{5l}{2}+X.\frac{3l}{2}+Y.\frac{l}{2}+2.2nH_1f=P\left(\frac{4n+1}{2}l-a\right) \\
2n+2) & B.2nl+C.(2n-1)l+D(2n-2)l+\ldots \\
 & +J.(2n-m+3)l+K.(2n-m+2)l \\
 & +L.(2n-m+1)l+M.(2n-m)l+\ldots \\
 & +W.3l+X.2l+Y.l+2(2n+1)H_1f=P[(2n+1)l-a].
\end{array}
\right.
$$

Analog eliminăm pe B și obținem grupul III compus din $2n$ ecuațiuni cu $2n$ necunoscute :

$$
(\mathrm{III})\left\{
\begin{array}{ll}
3) & \mathrm{C}.\frac{l}{2}-2\mathrm{H}_1 f=0 \\
4) & \mathrm{C}.\frac{3\,l}{2}+\mathrm{D}.\frac{l}{2}-4\mathrm{H}_1 f=0 \\
\ldots & \ldots \\
m-1) & \mathrm{C}.\frac{2m-7}{2}l+\mathrm{D}.\frac{2m-9}{2}l+\ldots+\mathrm{J}.\frac{l}{2}-2(m-3)\mathrm{H}_1 f=0 \\
m) & \mathrm{C}.\frac{2m-5}{2}l+\mathrm{D}.\frac{2m-7}{2}l+\ldots+\mathrm{J}.\frac{3\,l}{2}+\mathrm{K}.\frac{l}{2} \\
 & \quad -2(m-2)\mathrm{H}_1 f=0 \\
m+1) & \mathrm{C}.\frac{2m-3}{2}l+\mathrm{D}.\frac{2m-5}{2}l+\ldots+\mathrm{J}.\frac{5\,l}{2}+\mathrm{K}.\frac{3\,l}{2}+\mathrm{L}.\frac{l}{2} \\
 & \quad -2(m-1)\mathrm{H}_1 f=\mathrm{P}\left(\frac{2m+1}{2}\,l-a\right) \\
m+2) & \mathrm{C}.\frac{2m-1}{2}l+\mathrm{D}.\frac{2m-3}{2}l+\ldots+\mathrm{J}.\frac{7\,l}{2}+\mathrm{K}.\frac{5\,l}{2}+\mathrm{L}.\frac{3\,l}{2} \\
 & \quad +\mathrm{M}.\frac{l}{2}-2m\mathrm{H}_1 f=\mathrm{P}\left(\frac{2m+3}{2}\,l-a\right) \\
\ldots & \ldots \\
2n-1) & \mathrm{C}.\frac{4n-7}{2}l+\mathrm{D}.\frac{4n-9}{2}l+\ldots+\mathrm{J}.\frac{4n-2m+1}{2}l \\
 & \quad +\mathrm{K}.\frac{4n-2m-1}{2}l+\mathrm{L}.\frac{4n-2m-3}{2}l \\
 & \quad +\mathrm{M}.\frac{4n-2m-5}{2}l+\ldots+\mathrm{W}.\frac{l}{2} \\
 & \quad -2(2n-3)\mathrm{H}_1 f=\mathrm{P}\left(\frac{4n-3}{2}\,l-a\right) \\
2n) & \mathrm{C}.\frac{4n-5}{2}l+\mathrm{D}.\frac{4n-7}{2}l+\ldots+\mathrm{J}.\frac{4n-2m+3}{2}l \\
 & \quad +\mathrm{K}.\frac{4n-2m+1}{2}l+\mathrm{L}.\frac{4n-2m-1}{2}l \\
 & \quad +\mathrm{M}.\frac{4n-2m-3}{2}l+\ldots+\mathrm{W}.\frac{3\,l}{2}+\mathrm{X}.\frac{l}{2} \\
 & \quad -2(2n-2)\mathrm{H}_1 f=\mathrm{P}\left(\frac{4n-1}{2}\,l-a\right)
\end{array}\right.
$$

$$\left|\begin{array}{ll} 2n+1) & C.\frac{4n-3}{2}l+D.\frac{4n-5}{2}l+\ldots+J.\frac{4n-2m+5}{2}l \\ & +K.\frac{4n-2m+3}{2}l+L.\frac{4n-2m+1}{2}l \\ & +M.\frac{4n-2m-1}{2}l+\ldots+W.\frac{5l}{2}+X.\frac{3l}{2}+Y.\frac{l}{2} \\ & -2(2n-1)H_1 f=P\left[\frac{4n+1}{2}l-a\right] \\ 2n+2) & C.(2n-1)l+D.(2n-2)l+\ldots+J.(2n-m+3)l \\ & +K.(2n-m+2)l+L.(2n-m+1)l \\ & +M.(2n-m)l+\ldots+W.3l+X.2l+Y.l \\ & -2(2n-1)H_1 f=P[(2n+1)l-a]. \end{array}\right.$$

Considerând grupurile II și III putem deduce regula pentru a scrie direct grupul ce s'ar formà dacă am eliminà cele dintâi m necunoscute A, B, C . . . J, K, căci un grup se deosibește de precedentul prin următoarele:

a). Semnul termenului în H_1 se schimbă și anume este pozitiv în grupul II, adică după ce am eliminat un număr impar de necunoscute și negativ în cazul când am eliminat un număr par de necunoscute, ca în cazul grupului III.

b). Fiecare grup conține o ecuațiune și o necunoscută mai puțin ca grupul precedent, iar termenul liber de necunoscută are o valoare $\neq 0$ abia în ecuațiunea $(m+1)$.

c). Termenii în H_1 din ultimele 2 ecuațiuni ale grupului sunt egali când am eliminat un număr par de necunoscute. Valarea acestui termen este $-2(2n+1-w)H_1 f$. Când numărul necunoscutelor eliminate este impar, acești termeni diferă între dânșii prin $2H_1 f$ și în ecuația finală acest termen are valoarea $2(2n+2-w)H_1 f$ unde w însemnează numărul necunoscutelor eliminate.

Putem deci scrie grupul $m+1$ care ar rezultà după eliminațiunea a m necunoscute. Trebue însă să distingem două cazuri după cum m e par sau impar.

aa). Cazul când m este un număr par

Grupul $(m+1)$ conține $2n+2-m$ necunscute. De oarece am eliminat un număr par de necunoscute acest grup va puteà fi scris:

$$
(m+1)\left\{
\begin{array}{ll}
m+1) & L.\frac{l}{2} - 2.H_1 f = P\left[\frac{2m+1}{2}\, l - a\right] \\
m+2) & L.\frac{3\,l}{2} + M.\frac{l}{2} - 4.H_1 f = P\left[\frac{2m+3}{2}\, l - a\right] \\
m+3) & L.\frac{5\,l}{2} + M.\frac{3\,l}{2} + N.\frac{l}{2} - 6.H_1 f = P\left[\frac{2m+5}{2}\, l - a\right] \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2n-1) & L.\frac{4n-2m-3}{2}\, l + M.\frac{4n-2m-5}{2}\, l + \ldots + W.\frac{l}{2} \\
 & -2(2n-m-1)H_1 f = P\left[\frac{4\,n-3}{2}\, l - a\right] \\
2n) & L.\frac{4n-2m-1}{2}\, l + M.\frac{4n-2m-3}{2}\, l + \ldots + W.\frac{3\,l}{2} \\
 & + X.\frac{l}{2} - 2(2n-m)H_1 f = P\left[\frac{4\,n-1}{2}\, l - a\right] \\
2n+1) & L.\frac{4n-2m+1}{2}\, l + M.\frac{4n-2m-1}{2}\, l + \ldots + W.\frac{5\,l}{2} \\
 & + X.\frac{3\,l}{2} + Y.\frac{l}{2} - 2(2n-m+1)H_1 f \\
 & = P\left[\frac{4\,n+1}{2}\, l - a\right] \\
2n+2) & L.(2n-m+1)l + M.(2n-m) + \ldots + W.3l + X.2l + \\
 & Y.l - 2(2n-m+1)H_1 f = P[(2n+1)l - a].
\end{array}
\right.
$$

Eliminând necunoscuta L obținem grupul următor:

$$
(m+2)\left\{
\begin{array}{ll}
m+2) & M.\frac{l}{2} + 2H_1 f = -2P(ml - a) \\
m+3) & M.\frac{3\,l}{2} + N.\frac{l}{2} + 4H_1 f = -4P(ml - a) \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2n-1) & M.\frac{4n-2m-5}{2}\, l + \ldots + W.\frac{l}{2} + 2(2n-m-2)H_1 f = \\
 & -2(2n-m-2)P(ml - a) \\
2n) & M.\frac{4n-2m-3}{2}\, l + \ldots + W.\frac{3\,l}{3} + X.\frac{l}{2} \\
 & +2(2n-m-1)H_1 f = -2(2n-m-1)P(ml - a)
\end{array}
\right.
$$

$$\left|\begin{array}{ll} 2n+1) & M.\dfrac{4n-2m-1}{2}l+\ldots+W.\dfrac{5l}{2}+X.\dfrac{3l}{2}+Y.\dfrac{l}{2} \\ & \quad +2(2n-m)H_1f=-2(2n-m)P(ml-a) \\ 2n+2) & M.(2n-m)l+\ldots+W.3l+X.2l+Y.l \\ & \quad +2(2n-m+1)H_1f=-2(2n-m+\tfrac{1}{2})P(ml-a). \end{array}\right.$$

Continuând astfel găsim după ce am eliminat $2n$ necunoscute grupul:

$$(2n+1)\left\{\begin{array}{l} Y\dfrac{l}{2}-2H_1f=2P(ml-a) \\ Yl-2H_1f=3P(ml-a) \end{array}\right.$$

pe care rezolvându-l, găsim:

$$Y=\frac{2P(ml-a)}{l} \tag{1}$$

$$H_1=-\frac{P(ml-a)}{2f}. \tag{2}$$

Substituind valoarea lui H_1 pe rând în prima ecuaţiune din grupurile I, II, III..., găsim:

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{ll} 1) & A=-\dfrac{P(ml-a)}{l} \\ 2) & B=\dfrac{2P(ml-a)}{l} \\ 3) & C=-\dfrac{2P(ml-a)}{l} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ m-1) & J=-\dfrac{2P(ml-a)}{l} \\ m) & K=\dfrac{2P(ml-a)}{l} \\ m+1) & L=P \\ m+2) & M=-\dfrac{2P(ml-a)}{l} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 2n) & X=-\dfrac{2P(ml-a)}{l} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ll} 2n+1) & Y = \dfrac{2P(ml-a)}{l} \\ \text{și prin urmare:} & \\ 2n+2) & Z = -\dfrac{P(ml-a)}{l} \\ \text{pe lângă care se mai adaogă:} & \\ H_1 = -H_2 = -\dfrac{P(ml-a)}{2f}. & \end{array}\right.$$

Vedem deci că valorile de mai sus ne arată că :

$$A = Z = (-1)^{m+1} \cdot \frac{P(ml-a)}{l} \tag{3}$$

$$I_1 = (-1)^{m+i} \times \frac{2P(ml-a)}{l} \quad \text{când } 2 \leqslant i \leqslant m \tag{4}$$

$$I_2 = P \quad \text{când } i = m+1 \tag{5}$$

$$I_3 = (-1)^{m+i-1} \times \frac{2P(ml-a)}{l} \quad \text{când } m+2 \leqslant i \leqslant 2n+1 \tag{6}$$

$$H_1 = -H_2 = (-1)^{m+1} \frac{P(ml-a)}{2f}, \tag{7}$$

unde i însemnează numărul de ordine al punctelor de reazăm numărate de la stânga spre dreapta, A și Z reacțiunile verticale ale reazămilor finale, I_1, I_2 și I_3 reacțiunile reazămilor intermediare iar H_1 și H_2 reacțiunile (împingerile) orizontale ale reazămilor finale.

bb). **Cazul când *m* este un număr impar**

Grupul $(m+1)'$ se va puteà scrie în virtutea celor zise mai sus:

$$\left|\begin{array}{ll} m+1) & L.\dfrac{l}{2} + 2H_1 f = P\left(\dfrac{2m+1}{2}l - a\right) \\ m+2) & L.\dfrac{3l}{2} + M.\dfrac{l}{2} + 4H_1 f = P\left(\dfrac{2m+3}{2}l - a\right) \\ m+3) & L.\dfrac{5l}{2} + M.\dfrac{3l}{2} + N.\dfrac{l}{2} = P\left(\dfrac{2m+5}{2}l - a\right) \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

$$
(m+1)' \left\{
\begin{array}{ll}
2n-1) & L.\frac{4n-2m-3}{2}l+M.\frac{4n-2m-5}{2}l+\ldots+W.\frac{l}{2} \\
& +2(2n-m-1)H_1f=P\left(\frac{4n-3}{2}l-a\right) \\
2n) & L.\frac{4n-2m-1}{2}l+M.\frac{4n-2m-3}{2}l+\ldots+W.\frac{3l}{2} \\
& +X.\frac{l}{2}+2(2n-m)H_1f=P\left(\frac{4n-1}{2}l-a\right) \\
2n+1) & L.\frac{4n-2m+1}{2}l+M.\frac{4n-2m-1}{2}l+\ldots+W.\frac{5l}{2} \\
& +X.\frac{3l}{2}+Y.\frac{l}{2}+2(2n-m+1)H_1f \\
& =P\left(\frac{4n+1}{2}l-a\right) \\
2n+2) & L.(2n-m+1)l+M.(2n-m)l+\ldots+W.3l+ \\
& X.2l+Y.l+2(2n-m+2)H_1f=P[(2n+1)l-a].
\end{array}
\right.
$$

Eliminând pe L găsim grupul următor:

$$
(m+2)' \left\{
\begin{array}{ll}
m+2) & M.\frac{l}{2}-2H_1f=-2P(ml-a) \\
m+3) & M.\frac{3l}{2}+N.\frac{l}{2}-4H_1f=-4P(ml-a) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
2n-1) & M.\frac{4n-2m-5}{2}l+N.\frac{4n-2m-7}{2}l+\ldots+W.\frac{l}{2} \\
& -2(2n-m-2)H_1f=-2(2n-m-2)P(ml-a) \\
2n) & M.\frac{4n-2m-3}{2}l+N.\frac{4n-2m-5}{2}l+\ldots+W.\frac{3l}{2} \\
& +X.\frac{l}{2}-2(2n-m-1)H_1f \\
& =-2(2n-m-1)P(ml-a) \\
2n+1) & M.\frac{4n-2m-1}{2}l+N.\frac{4n-2m-3}{2}l+\ldots+W.\frac{5l}{2} \\
& +X.\frac{3l}{2}+Y.\frac{l}{2}-2(2n-m)H_1f \\
& =-2(2n-m)P(ml-a) \\
2n+2) & M.(2n-m)l+N.(2n-m-1)l+\ldots+W.3l+X.2l+ \\
& Y.l-2(2n-m)H_1f=-2(2n-m+\frac{1}{2})P(ml-a).
\end{array}
\right.
$$

Și continuând tot astfel dăm peste grupul:

$$(2n+1)' \left\{ \begin{array}{l} Y\frac{l}{2} - 2H_1 f = -2P(ml-a) \\ Yl - 2H_1 f = -3P(ml-a) \end{array} \right.$$

de unde:

$$Y = -\frac{2P(ml-a)}{2} \tag{1'}$$

$$H_1 = \frac{P(ml-a)}{2f}. \tag{2'}$$

Substituind aceste valori pe rând în primele ecuațiuni ale diferitelor grupuri obținem, de oarece Y și H_1 în acest caz au aceleași valori absolute ca și pentru cazul când *m* este par:

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{ll} 1) & A = \frac{P(ml-a)}{l} \\ 2) & B = -\frac{2P(ml-a)}{l} \\ 3) & C = \frac{2P(ml-a)}{l} \\ 4) & D = -\frac{2P(ml-a)}{l} \\ \ldots & \ldots \\ m-1) & J = -\frac{2P(ml-a)}{l} \\ m) & K = \frac{2P(ml-a)}{l} \\ m+1) & L = P \\ m+2) & M = -\frac{2P(ml-a)}{l} \\ \ldots & \ldots \\ 2n) & X = \frac{2P(ml-a)}{l} \\ 2n+1) & Y = -\frac{2P(ml-a)}{l} \end{array} \right.$$

și prin urmare:

$$\left|\begin{array}{ll} 2n+2) & Z=\dfrac{P(ml-a)}{l} \\ \text{la care se adaugă :} & \\ H_1=-H_2=\dfrac{P(ml-a)}{2f} & \end{array}\right.$$

sau valorile grupului (β) se pot iar scrie :

$$(3') \quad A=Z=(-1)^{m+1}\times\frac{P(ml-a)}{l}$$

$$(4') \quad I_1=(-1)^{m+i}\times\frac{2P(ml-a)}{l} \quad \text{pentru } 2\leqslant i\leqslant m$$

$$(5') \quad I_2=P \quad \text{pentru } i=m+1$$

$$(6') \quad I_3=(-1)^{m+i-1}\times\frac{2P(ml-a)}{l} \quad \text{pentru } m+2\leqslant i\leqslant 2n+1$$

$$(7') \quad H_1=-H_2=(-1)^{m+1}\times\frac{P(ml-a)}{2f}.$$

Din comparaţiunea formulelor (3′) până la (7′) cu formulele (3) până la (7) rezultă că valorile sunt date prin aceleaşi formule atât pentru cazul când m este par, cât şi când m este impar. Formulele (3) până la (7) ne determină reacţiunile cerute.

Valorile aflate servesc numai pentru cazul când $1\leqslant m\leqslant n+1$.

Când $m>n+1$ se poate deduce cu uşurinţă din cauza simetriei valorile reacţiunilor tot cu ajutorul formulelor (3) până la (7).

Când $m=0$ adică când forţa P se află între primul reazăm şi prima articulaţie la cheie aflăm, dacă procedăm analog ca până acì, că:

$$A=\frac{P(l-a)}{l} \tag{8}$$

$$Z=\frac{Pa}{l} \tag{9}$$

$$I=(-1)^i\frac{2Pa}{l} \tag{10}$$

$$H_1=-H_2=\frac{Pa}{2f}. \tag{11}$$

Din consideraţiunea formulelor (3) până la (11) vedem că :

1). Reacţiunile sunt independente de numărul deschiderilor şi depind numai de poziţiunea forţei şi de mărimea unei deschideri.

2). Reacțiunile reazămilor acelei deschideri în care se află forța sunt pozitive, celealte alternând în semn.

3). Când forța P se mișcă într'o deschidere de ordin par de la un reazăm la celalt, reacțiunile reazămilor trec prin aceleași valori, orcare ar fi deshiderea ce o parcurge forța.

Când forța P se mișcă într'o deschidere de ordin impar—afară de deschiderile extreme—de la un reazăm la celalt, reacțiunile reazămilor trec prin aceleași valori oricare ar fi deschiderea parcursă.

O excepție formează acel reazăm care se află între acele 2 articulații la cheie între care se află și P, care păstrează valoarea P în tot timpul cât P parcurge distanța de la o cheie la cealaltă.

Maximilian Marcus
Inginer diplomat al Școalei
Politecnice din Zürich.

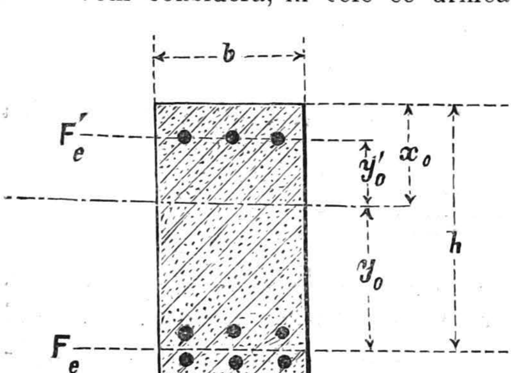
(Va urma.)

Calculul elementelor construcțiunilor de beton armat

(Urmare)

2. Grinzi drepte cu secțiune dreptunghiulară și armatură dublă.

Vom considerà, în cele ce urmează, grinzile drepte, cu secțiuni dreptunghiulare, solicitate la flexiune simplă și pe care le vom armà cu feare rotunde, de grosimi relativ mici, atât în regiunea tensiunilor cât și în aceia a compresiunilor.



(Fig. 7)

Reamintindu-ne notațiunile admise în *„Preliminarii"* (a se vedeà pag. 43 și 44 a *Buletinului* No. 1 din 1906), figura 7 ne arată că:

$$v = b = const.$$