Calculul elementelor construcţiunilor de beton armat

(Urmare)

2. Grinzi drepte cu secţiune dreptunghiulară şi armatură dublă.

Exemplul IV. In exemplele No. I şi II (pag. 52 din No. 1 al Buletinului 1906 şi pag. 79 din No. 2 al Buletinului 1906), am calculat dala şi grinzile secundare ale unui plnşeu.

Acest planşeu poate fi destinat, bunioară, pentru o sală de întruniri publice, de oarece sarcina accidentală admisă în calcul, corespunde cu aceia, pe care o recomandă d-nul *Profesor Ion Ionescu,* la punctul 2 pag. 74 a Buletinului No. 2 din a. c. în articolul său: *„Incărcarea construcţiunilor cu oameni“* [1]) ca rezultând din o aglomeraţie de oameni.

In adevăr, eu am introdus în calculul dalei o încărcare totală de 1000 kgr./m², care se poate închipui socotită astfel:

Greutatea moartă: $1.00 \times 0{,}08 \times 2400 =$. 192 kgr./m²

Greutatea uniformă accidentală, ţinând seamă de efectul acţiunei dinamice:

$p_d = 0{,}8 \times 800 + 180$ . . . . 820 kgr./m²

deci: pentru dală, în total: . . . 1012 kgr./m²

adică aproximativ ceia ce am întrodus şi eu în calcul ca sarcină totală uniformă.

La calculul grinzilor secundare am neglijat greutatea proprie, care'mi era necunoscută la început; valoarea acestei sarcini nu e prea însemnată faţă de sarcina accidentală; ea se ridică la: $0{,}19 \times 0{,}15 \times 2400 =$ rot. 68 kgr./ml; şi faţă de măsurile speciale luate pentru dispunerea armaturei, în dreptul reazemelor grinzilor secundare, astfel că se asigură oarecare *în-*

---

[1]) Acest articol a apărut şi în broşură aparte cu titlul: *Incărcarea construcţiunilor cu oameni, experienţe şi norme de calcul* de *I. Ionescu,* Inginer, Profesor la Şcoala de Poduri şi Şosele.

(N. R.)

țepenire sau *continuitate* a grinzilor secundare, se poate lesne dovedi, că neglijarea acestui surplus de încărcare nu ne poate da motiv de a bănui soliditatea construcțiunei, în felul cum s'a întocmit.

Pentru calculul grinzilor principale, pe care îl voi desvolta parțial sub acest exemplu, voi introduce și această greutate în sarcinele izolate, care solicită grinda principală.

Depărtarea între grinzile principale fiind 3,00 m. și între grinzile secundare 1,20 m.; greutatea totală pe metru patrat de dală fiind 1000 kgr./m², iar greutatea proprie pe metru liniar de grindă secundară 60 kgr./m.l., ca sarcini izolate, directe, asupra grinzii principale vom putea lua:

$$P = 2 \times \frac{3,00}{2} \times 1,20 \times 1000 + 2 \times \frac{3,00}{2} \times 68 = \text{rot. } 3800 \text{ kgr.}$$

Ca sarcină uniformă vom lua greutatea proprie a grinzii principale, a cărei secțiune o admitem constantă, (variind bine înțeles, secțiunile armaturilor), așa că vom avea:

$$g = 0,25 \times 0,42 \times 2400 = \text{rot. } 240 \text{ kgr./ml.}$$

Grinda principală are 3 deschideri: 2 laterale de câte

$$l_o = l_2 = 1,20 \times 4 = 4,80 \text{ m.}$$

și una mijlocie de:

$$l_1 = 1,20 \times 5 = 6,00 \text{ m.}$$

Cu extremitățile sale grinda reazemă în mod simplu pe pereți iar peste stâlpii intermediari trece fără întrerupere; armatura deasupra reazemelor intermediare se va dispune ca să asigure continuitatea.

Mă voi ocupa, în acest exemplu, *a determina elementele secțiunei grinzii principale în dreptul unui reazem intermediar*, spre a putea indica aplicarea formulelor și tabelelor stabilite pentru grinzile cu armatură dublă.

In ipoteza încărcărei totale, momentul negativ pe un reazem intermediar, în cazul de față este:

$$M_1 = M_2 = -\frac{1}{(2l_o + 3l_1)}\left[\frac{\Sigma P_o a_o (l_o^2 - a_o^2)}{l_o} + \frac{\Sigma P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{1}{4} g (l_o^3 + l_1^3)\right]$$

unde va trebui să înlocuim:

$l_o = 4 \times 1{,}20 = 16 \times 0{,}30$ m.;
$l_1 = 5 \times 1{,}20 = 20 \times 0{,}30$ m.;
$P_o = P_1 = 3800$ kgr., constant;
a_o variind: 1,20 m, 2,40 m, 3,60 m;
a_1 variind: 1,20 m, 2,40 m, 3,60 m, 4,80 m;
în fine: $g = 240$ kgr/.m l,
ast-fel că expresiunea simplificată a momentului încovoetor pe reazemul intermediar este:

$$M = -\frac{1{,}20}{8+15} \cdot \left[(15+30) \times 3800 + \frac{1{,}20 \times 240}{4} \times (4^3 + 5^3) \right]$$

deci,

$$M = -963130 \text{ kgr.cm.}$$

Momentul de încovoere fiind negativ, partea superioară a grinzii este întinsă, cea inferioară comprimată; deci, aci nu mai putem conta pe dală că ar interveni a ajuta grinda principală, precum am făcut la grinda secundară, căci aci eforturile s'ar aduna; va trebui, prin urmare, să dimensionăm armaturile grinzii principale așa fel, ca un surplus de efort în armatura dalei să nu aibă loc, adică vom face abstracție de armatura dalei, care nu se găsește coprinsă în secțiunea grinzii principale.

Problema se prezintă oare cum *sub o formă de verificare*, de oarece am admis dimensiile principale ale grinzii, și anume am admis:

$$b = 25 \text{ cm.}$$

$$h = 45 \text{ cm.}$$

Să mai admitem:

$$\sigma_o = 40 \text{ kgr/cm}^2$$

$$\sigma_e = 1200 \text{ kgr/cm}^2$$

$$\sigma'_e = 1000 \text{ kgr/cm}^2$$

$$n = 15$$

De aci rezultă:

$$r = \frac{1200}{40} = 30$$

$$r' = \frac{1200}{1000} = 1{,}2$$

Din tabloul I, pentru $n=15$[1]) și $r=30$ găsim:

$$\lambda=\frac{27}{4} \quad \text{și} \quad p=\frac{1}{180}$$

iar din tabloul VII, pentru aceleași valori ale lui n și r găsim:

$$m=\frac{3}{4}.$$

Punând aceste date în formula (18′) găsim:

$$25\times 45^2=\frac{27}{4+3\xi}\cdot\frac{963130}{40},$$

de unde:

$$\xi=\frac{66313}{22500}$$

sau foarte aproape:

$$\xi=\frac{221}{75}$$

Pentru această valoare a lui ξ și pentru $r'=1,2$ deducem, prin interpolare, valoarea lui k din tabloul VI:

$$k=1+0,2.\frac{\left(\frac{55}{6}-\frac{221}{75}\right)}{\left(\frac{55}{6}-\frac{25}{10}\right)}=1,185$$

Cu această valoare a lui k și cu valoarea admisă pentru r' intrând în tabelele IV și V, deducem valorile lui ε' și ε tot prin interpolare lineară:

$$\varepsilon'=\frac{66}{11}-\frac{0,185}{0,200}\cdot\left(\frac{66}{11}-\frac{30}{11}\right)=\frac{327}{110}=2,973$$

$$\varepsilon=\frac{66}{11}-\frac{0,185}{0,200}\cdot\left(\frac{66}{11}-\frac{36}{11}\right)=\frac{153}{44}=3,477.$$

---

[1]) In No. 2 al *Buletinului* din Februarie a. c. s'a strecurat o eroare de tipar la pag. 81 și anume: tabloul II este calculat pentru $n=10$, iar nu pentru $n=15$. (Autorul).

Prin urmare, din relaţiunile (15), putem calcula :

$$F_e = 3{,}477 \times \frac{25 \times 45}{180} = \frac{25}{4} \times 3{,}477 = 21{,}73 \text{ cm}^2$$

$$F'_e = 2{,}973 \times \frac{25 \times 45}{180} = \frac{25}{4} \times 2{,}973 = 18{,}58 \text{ cm}^2$$

Vom alege pentru armatura întinsă 6 feare rotunde de 22 milimetri diametru, adică :

$$F'_e = 6 \times \frac{3{,}14 \times 2{,}2^2}{4} = 22{,}8060 \text{ cm}^2;$$

iar pentru armatura comprimată, vom alege 6 feare rotunde de câte 20 mm. diametru, adică :

$$F'_e = 6 \times \frac{3{,}14 \times 2^2}{4} = 18{,}8490 \text{ cm}^2;$$

prin această alegere nu ne depărtăm prea mult de adevăr.

Observaţie. Prin acest exemplu am vrut să arăt că metoda de calcul se pretează în mod simplu şi pentru *problema de verificare;* ca *problemă de construcţie,* metoda cu ajutorul tablelor date este şi mai simplă, căci ea suprimă încercările.

In adevăr, să presupunem că ni s'ar fi dat numai:

$$k = 1{,}2; \qquad n = 15;$$
$$r' = 1{,}2; \qquad r = 30;$$
$$\sigma_0 = 40 \text{ kgr./cm}^2; \qquad M = 963130 \text{ kgr. cm.}$$

Tablele respective ne dau, fără osteneală multă:

$$\lambda = \frac{27}{4};$$

$$m = \frac{3}{4};$$

$$\xi = \frac{25}{10};$$

$$\varepsilon' = \frac{30}{11};$$

$$\varepsilon = \frac{36}{11};$$

$$p = \frac{1}{180};$$

și prin urmare, aplicând formulele (15′) și (18′) vom găsi:

$$F_e = \frac{36}{11} \times \frac{b\,h}{180} = \frac{bh}{55};$$

$$F'_e = \frac{30}{11} \times \frac{b\,h}{180} = \frac{bh}{66};$$

$$bh^2 = \frac{27}{40+75} \times \frac{963130}{40} = \frac{27}{4600}.M;$$

calcule foarte ușoare de făcut; se va admite sau una din cele 2 dimensiuni b și h, sau raportul lor și apoi celelalte necunoscute vor rezulta.

De asemenea aplicând relațiunile (16′) și (17′) vom găsi numai decât jumătatea momentului static și momentul de inerție:

$$S = \frac{36}{11} \times \frac{1}{18} \times bh^2 = \frac{2}{11}.bh^2$$

$$I = \frac{4}{81}\left(1 + \frac{25}{10} \times \frac{3}{4}\right) bh^3 = \frac{23}{162}.bh^3$$

așa că formulele pentru tensiunea de lunecare longitudinală și adeziune devin respectiv:

$$\tau = \frac{324}{253}.\frac{A}{b\,h};$$

$$a = \frac{324}{253}.\frac{A}{Uh};$$

toate formulele sunt cât se poate de simple și ușor de aplicat; forma lor, precum am anunțat la început, este aceiași cu aceia a formulelor teoretice pentru grinzile omogene, de lemn bunioară, care au aceiași formă de secțiune.

Mărginesc aci exemplu de față, iar cu întocmirea grinzii principale mă voi ocupa după ce voi fi tratat complect și problema grinzilor în T cu simplă și dublă armatură, de oarece, în regiunea momentelor încovoetoare pozitive, grinda principală poate fi considerată ca o grindă în T *(Plattenbalken)*.

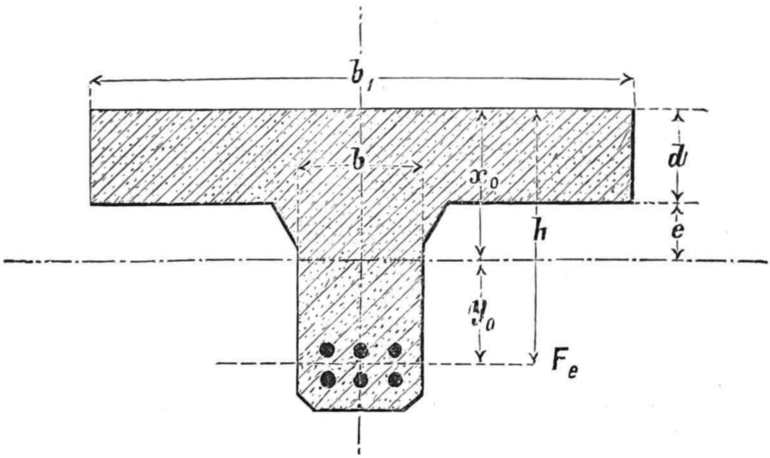
3. Grinzi drepte cu secţiune în T şi armatură simplă

(Plattenbalken)

Trebue să distingem două cazuri printre grinzile în T cu armatură simplă, solicitate la flexiune :

1⁰). Când axa neutră cade pe *talpă;* în acest caz, este uşor de văzut, că putem să le considerăm ca grinzi cu secţiune dreptunghiulară, având o lăţime egală cu lăţimea tălpei, ceiace am şi făcut în *Exemplul II* (pag. 55, Buletinul No. 1, a. c.), când am luat axa neutră chiar în faţa inferioară a dalei.

2⁰). Axa neutră cade pe *inimă;* la acest al doilea caz se referă cele ce vor urmà sub acest capitol.



(Fig. 8).

Observând notaţiile din (fig. 8) şi raportându-ne la relaţiunea fundamentală (1) stabilită în „*Preliminarii*", vom putea scrie:

$$S = n F_e . y_0 = \frac{b_1 . x_0^2}{2} - \frac{(b_1 - b) . e^2}{2}.$$

Egalităţile (2) devin:

$$I = n F_e y_0^2 + \frac{b_1 x_0^3}{3} - \frac{(b_1 - b) . e^3}{3} = \frac{M x_0}{\sigma_0} = \frac{n M y_0}{\sigma_e}.$$

Să mai introducem, pentru simplificarea ce urmărim, următoarele raporturi :

$$f = \frac{e}{x_0},$$

şi

$$s = \frac{b_1}{b};$$

înlocuind e și b din primele două egalități prin egalurile lor din cele două din urmă și făcând simplificările posibile, fără a perde din vedere că am notat anterior:

$$\alpha = \frac{n}{r+n};$$

$$\beta = \frac{r}{r+n};$$

$$p = \frac{n}{2r(r+n)};$$

$$\mu = \frac{\alpha^2}{6}(2\alpha + 3\beta); \; *)$$

$$\lambda = \frac{6(r+n)^2}{n(3r+2n)};$$

și

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{2};$$

găsim în cele din urmă că:

1⁰). Pozițiunea axei neutre, când se cunoaște n, r și h, se determină prin una din formulele:

$$x_0 = \alpha . h$$

sau:

$$y_0 = \beta . h$$

2). Secțiunea armaturei este dată de expresiunea:

$$F_e = [s - (s-1).f^2].p.bh$$

unde, însemnând cu η coeficientul $[s-(s-1).f^2]$, vom scrie, simplu:

$$F_e = \eta . p . bh.$$

Coeficientul η s'a consemnat în tabloul VIII (pag. 260) pentru diferite cazuri, mai des întâlnite în practică.

3⁰). Expresiunea jumătății momentului static în raport cu axa neutră, devine:

$$S = \eta . \gamma . bh^2,$$

unde avem necontenit:

$$\eta = s - (s-1).f^2$$

---

*). Din eroare de transcriere la pagina 91 a Buletinului No. 2, formula (16) s'a trecut $I = \alpha^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right) bh^3$ în loc de $I = \alpha^2 \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}\right) bh^3$ cum se găsește deja sub forma justă la pag. 51 a Buletinului No. 1 din a. c.

4⁰). Expresiunea momentului de inerție al secțiunei în raport cu axa neutră devine :

$$I = \mu'' bh^3,$$

unde avem :

$$\mu'' = (\eta + \xi' m) . \mu ;$$

aci, η, m și μ sunt cantitățile deja cunoscute, iar ξ' are valoarea :

$$\xi' = (s-1)(-f) f^2.$$

Coeficienții ξ' se află așezați în tabloul IX (pag. 261).

5⁰). In fine, relațiunea care exprimă, în funcțiune de momentul încovoetor și travaliul desvelit în material, o cantitate analoagă *momentului rezistent* de la grinzile omogene, are forma :

$$bh^2 = \frac{\lambda}{\eta + \xi' m} . \frac{M}{\sigma_o} = \lambda'' . \frac{M}{\sigma_o} = \lambda'' . \frac{r.M}{\sigma_e}$$

Toți coeficienții sunt cunoscuți de mai nainte.

Examinând înfățișarea formulelor, care dau elementele secțiunei unei grinzi în ⊤ cu armatură simplă, în funcțiune de travaliurile admisibile, de modulele de elasticitate ale materialelor și de efectul sarcinelor exterioare, ne vom convinge că ele au, și în cazul de față, forma sub care se prezintă formulele pentru grinzile omogene de secțiune dreptunghiulară, cu deosebirea unor coeficienți, ale căror valori se găsesc în table.

Aceste formule se rezumă în grupa de mai jos :

$$x_o = \alpha . h \qquad (13'')$$

$$y_o = \beta . h \qquad (14'')$$

$$F_e = \eta . p . bh \qquad (15'')$$

$$S = \eta . \gamma . bh^2 \qquad (16'')$$

$$I = (\eta + \xi' m) \mu . bh^3 \qquad (17'')$$

$$bh^2 = \frac{\lambda}{\eta + \xi' m} . \frac{M}{\sigma_o} = \text{etc.} \qquad (18'')$$

$$\tau = \frac{A.S}{b.I} \qquad (3)$$

$$a = \frac{A.S}{U.I} \qquad (4).$$

TABLOUL VIII

Coeficienții $\eta = s - (s-1) \cdot f^2$

$f=$	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,08	0,06	0,05
s=1,5	1,180	1,255	1,320	1,375	1,420	1,455	1,480	1,495	1,497	1,498	1,499
2,0	1,360	1,510	1,640	1,750	1,840	1,910	1,960	1,990	1,994	1,996	1,998
2,5	1,540	1,765	1,960	2,125	2,260	2,365	2,440	2,485	2,490	2,494	2,497
3,0	1,720	2,020	2,280	2,500	2,680	2,820	2,920	2,980	2,987	2,992	2,996
3,5	1,900	2,275	2,600	2,875	3,100	3,275	3,400	3,475	3,484	3,491	3,494
4,0	2,080	2,530	2,920	3,250	3,520	3,730	3,880	3,970	3,981	3,989	3,993
4,5	2,260	2,785	3,240	3,625	3,940	4,185	4,360	4,465	4,478	4,487	4,492
5,0	2,440	3,040	3,560	4,000	4,360	4,640	4,840	4,960	4,975	4,985	4,991
5,5	2,620	3,295	3,880	4,375	4,780	5,095	5,320	5,455	5,471	5,483	5,490
6,0	2,800	3,550	4,200	4,750	5,200	5,550	5,800	5,950	5,968	5,981	5,989
6,5	2,980	3,805	4,520	5,125	5,620	6,005	6,280	6,445	6,465	6,479	6,488
7,0	3,160	4,060	4,840	5,500	6,040	6,460	6,760	6,940	6,962	6,977	6,985
7,5	3,340	4,315	5,160	5,875	6,460	6,915	7,240	7,435	7,459	7,475	7,484
8,0	3,520	4,570	5,480	6,250	6,880	7,370	7,720	7,930	7,956	7,973	7,983

TABLOUL IX.

$$\xi' = (s-1).(1-f).f^2$$

$f=$	0,8	0,7	0.6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,08	0,06	0,05
s=1,5	0,064	0,074	0,072	0,063	0,048	0,032	0,016	0,005	0,003	0,002	0,001
2,0	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009	0,006	0,003	0,002
2,5	0,192	0,221	0,216	0,187	0,144	0,095	0,048	0,014	0,009	0,005	0,004
3,0	0,256	0,294	0,288	0,250	0,192	0,126	0,064	0,018	0,012	0,007	0,005
3,5	0,320	0,368	0,360	0,313	0,240	0,158	0,080	0,023	0,015	0,008	0,006
4,0	0,384	0,441	0,432	0,375	0,288	0,189	0,096	0,027	0,018	0,010	0,007
4,5	0,448	0,515	0,504	0,438	0,336	0,221	0,112	0,032	0,021	0,012	0,008
5,0	0,512	0,588	0,576	0,500	0,384	0,252	0,128	0,036	0,024	0,013	0,010
5,5	0,576	0,622	0,648	0,563	0,432	0,284	0,144	0,041	0,026	0,015	0,011
6,0	0,640	0,735	0,720	0,625	0,480	0,315	0,160	0,045	0,029	0,017	0,012
6,5	0,704	0,809	0,792	0,688	0,528	0,347	0,176	0,050	0,032	0,018	0,013
7,0	0,768	0,882	0,864	0,750	0,576	0,378	0,192	0,054	0,035	0,020	0,014
7,5	0,832	0,956	0,936	0.813	0,624	0,410	0,208	0,059	0,038	0,022	0,015
8,0	0,896	1,029	1,008	0,876	0,672	0,441	0,224	0,063	0,041	0,024	0,017

In No. viitor voi face o aplicație a formulelor date, precedată de o explicație a aplicărei tablourilor.

(Va urma)

Ion M. Ionescu
Inginer în Serviciul central de
Intreținere C. F. R.