Grinzi în arc, static determinate, cu un număr impar de deschideri egale

(Urmare)

Exemple. 1). Fie $n=0$. In acest caz (fig. 2 din planșa Buletinului No. 3 Martie 1906) avem un arc cu 3 articulații. Aplicând formulele (8) până la (11) găsim :

$$A = \frac{P(l-a)}{l}$$

$$Z = \frac{Pa}{l}$$

$$H_1 = -H_2 = \frac{Pa}{2f}.$$

2). Fie $n=1$. In acest caz (fig. 3) avem o grindă în arc cu 3 deschideri. Aplicând formulele (3) până la (11) găsim :

a). Pentru $a \leqslant \frac{l}{2}$:

$$A = \frac{P(l-a)}{l},\ B = \frac{2Pa}{l},\ C = -\frac{2Pa}{l},\ Z = \frac{Pa}{l},\ H_1 = -H_2 = \frac{Pa}{2f}.$$

b). Pentru $\frac{l}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3l}{2}$:

$$A = Z = \frac{P(l-a)}{l},\ B = P,\ C = -\frac{2P(l-a)}{l},\ H_1 = -H_2 = \frac{P(l-a)}{2f}$$

valori pe care le găsim și direct, considerând o grindă în arc cu 3 deschideri *) de felul fig. 3.

3). Fie $n=2$. Pentru o asemenea grindă (fig. 4) cu 5 deschideri, valorile reacțiunilor sunt date prin tabela următoare :

---

*). Vezi: *Oestereichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst,* No. 39 și 40 din 1902: *«Statisch bestimmte Bogenträger mit drei Oeffnungen»* de *Maximilian Marcus,* unde autorul a tratat problema pentru cazul a trei arcuri. (N. R.)

TABELA I

Reacţiunea	$0 \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}$	$\frac{l}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3l}{2}$	$\frac{3l}{2} \leqslant a \leqslant \frac{5l}{2}$
A	$\frac{P(l-a)}{l}$	$\frac{P(l-a)}{l}$	$\frac{-P(2l-a)}{l}$
B	$\frac{2Pa}{l}$	P	$\frac{2P(2l-a)}{l}$
C	$\frac{-2Pa}{l}$	$\frac{-2P(l-a)}{l}$	P
D	$\frac{2Pa}{l}$	$\frac{+2P(l-a)}{l}$	$\frac{-2P(2l-a)}{l}$
E	$\frac{-2Pa}{l}$	$\frac{-2P(l-a)}{l}$	$\frac{2P(2l-a)}{l}$
Z	$\frac{Pa}{l}$	$\frac{P(l-a)}{l}$	$\frac{-P(2l-a)}{l}$
$H_1 = -H_2$	$\frac{Pa}{2f}$	$\frac{P(l-a)}{2f}$	$\frac{-P(2l-a)}{2f}$

2. SARCINI UNIFORM REPARTIZATE

Pentru a determina reacţiunile în acest caz, e necesar să vedem influenţa a 2 sarcini egale şi simetrice P şi P′. Vom distinge iar două cazuri:

a). Sarcina P se află între primul reazăm şi prima articulaţie la cheie, iar sarcina P′ simetric aşezată între ultima articulaţie la cheie şi ultimul reazăm.

Fie A, B, C,..... X, Y, Z, H_1 şi H_2 reacţiunile care se nasc din cauza lui P; A′, B′, C′,..... X′, Y′, Z′, H_1' şi H_2' reacţiunile produse de P′. Din cauza simetriei poziţiunei sarcinilor egale P şi P′, avem:

$$A = Z', \quad B = Y', \quad C = X' \ldots\ldots X = C', \quad Y = B', \quad Z = A',$$
$$H_1 = -H_2', \quad H_2 = -H_1'.$$

Reacţiunile determinate de influenţa sarcinilor P + P′, vor fi:

$$(12)\quad \begin{cases} A'' = A + A' = A + Z \\ B'' = B + B' = B + Y \\ C'' = C + C' = C + X \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X'' = X + X' = X + C \\ Y'' = Y + Y' = Y + B \\ Z'' = Z + Z' = Z + A \\ H_1'' = H_1 + H_1' = 2H_1 \\ H_2'' = H_2 + H_2' = 2H_2 = -H_1''. \end{cases}$$

Inlocuind pe A, B, C.....Z, H_1, H_2 prin valorile lor date prin formulele (8) până la (11), avem :

$$(13)\quad \begin{cases} A'' = Z'' = P \\ B'' = C'' = D'' = \ldots\ldots = X'' = Y'' = 0. \\ H_1'' = -H_2'' = -\dfrac{Pa}{f}. \end{cases}$$

b). Sarcina P a depășit a *m* articulație la cheie, iar sarcina P' simetric așezată între articulația de rangul $2n-m$ și $2n+1-m$.

Inlocuind în (12) pe A, B, C..... prin valorile date de formulele (3) până la (7), obținem :

$$(14)\quad \begin{cases} A'' = Z'' = (-1)^{m+1} \times \dfrac{2P(ml-a)}{l} & \text{pentru reazămele finale} \\ I_1'' = (-1)^{m+i} \times \dfrac{4P(ml-a)}{l} & \text{pentru cazul când :} \\ & 2 \leqslant i \leqslant m \quad \text{și} \\ & 2n+3-m \leqslant i \leqslant 2n+1 \\ I_2'' = P - \dfrac{2P(ml-a)}{l} & \text{pentru cazul când} \\ & i = m+1 \ \text{și}\ i = 2n+2-m \\ I_3'' = 0 & \text{pentru cazul când} \\ & m+2 \leqslant i \leqslant 2n+1-m \\ H_1'' = -H_2'' = (-1)^{m+1} \times \dfrac{P(ml-a)}{f}. & \end{cases}$$

Cu ajutorul ecuațiunilor (13) și (14) putem determina reacțiunile pentru cazul sarcinilor uniform repartizate. Considerăm o atare grindă în fig. 5, în care am dus verticale prin articulaţiile la cheie, divizând astfel încărcarea uniform repartizată în secţiunile I, II, III.....$2n+2$. Fiecărui element de sarcină pda din prima jumătate a grinzei i se poate coordona un element simetric pda situat pe cealaltă jumătate a grinzei. Pentru o astfel de pereche de elemente ecuaţiunile (13) şi (14) ne dau valorile reacţiunilor dacă scrim pda în loc de P. Integrând între anumite limite găsim reacţiunile ce sunt produse prin încărcarea întreagă. Avem deci:

$$A=Z=\int_0^{\frac{l}{2}} p\,da+\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}}(-1)^2 p\,da\,\frac{2(l-a)}{l}+\int_{\frac{3l}{2}}^{\frac{5l}{2}}(-1)^3 p\,da\,\frac{2(2l-a)}{l}$$
$$+\int_{\frac{5l}{2}}^{\frac{7l}{2}}(-1)^4 p\,da\,\frac{2(3l-a)}{l}+\ldots\ldots+\int_{\frac{2n-1}{2}l}^{\frac{2n+1}{2}l}(-1)^{n+1} p\,da\,\frac{2(nl-a)}{l}.$$

Valorile integralelor sunt:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} p\,da=p\,\frac{l}{2}$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}}(-1)^2 p\,da\,\frac{2(l-a)}{l}=2p\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}}\frac{l-a}{l}\,da=0$$

$$\int_{\frac{3l}{2}}^{\frac{5l}{2}}(-1)^3 p\,da\,\frac{2(2l-a)}{l}=-2p\int_{\frac{3l}{2}}^{\frac{5l}{2}}\frac{2l-a}{l}\,da=0$$

. . . .

$$\int_{\frac{2n-1}{2}l}^{\frac{2n+1}{2}l}(-1)^{n+1} p\,da\,\frac{2(nl-a)}{l}=(-1)^{n+1}\frac{2p}{l}\int_{\frac{2n-1}{2}l}^{\frac{2n+1}{2}l}(nl-a)\,da=0$$

aşa dar:

$$A=Z=p\,\frac{l}{2}. \tag{15}$$

$$H_1=-H_2=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{pda\,.\,a}{f}+\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}}(-1)^2\frac{p\,da\,(l-a)}{f}$$
$$+\int_{\frac{3l}{2}}^{\frac{5l}{2}}(-1)^3\frac{pda\,(2l-a)}{f}+\ldots\ldots+\int_{\frac{2n-1}{2}l}^{\frac{2n+1}{2}l}(-1)^{n+1}\frac{pda\,(nl-a)}{f}$$

sau :

$$H_1 = - H_2 = \frac{p l^2}{8 f} \tag{16}$$

și în fine pentru reacțiunile intermediare aflăm analog valoarea:

$$I_m = p l. \tag{17}$$

Formulele (15) până la (17) ne arată că reacțiunile nu depind de numărul deschiderilor ci numai de mărimea lor, căci oricare ar fi numărul deschiderilor, reacțiunile intermediare sunt egale între dânsele, reacțiunile finale verticale sunt asemenea egale între dânsele și au jumătatea valorei unei reacțiuni intermediare, iar reacțiunile orizontale sunt egale în valoare absolută dar de semne contrarii.

III. MOMENTE

1. SARCINI IZOLATE

După situațiunea sarcinii distingem două cazuri principale:

a). Sarcina se află între primul reazăm și prima articulație la cheie.

b). Sarcina a depășit articulația m.

a). Sarcina se află între primul reazăm și prima articulație la cheie, adică:

$$a \leqslant \frac{l}{2}.$$

Insemnând o secțiune oarecare prin abscisa x și ordonata y a cetrului său de gravitate, avem iarăși a distinge 2 cazuri:

aa). $x \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}$. Momentul este dat prin formula:

$$M = A . x - H_1 y$$

și punând pentru A și H_1 valorile găsite pentru acest caz și exprimate prin formulele (8) și (11), avem:

$$M = \frac{P (l - a)}{l} x - \frac{P a y}{2 f} = P . x - P . a \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2 f} \right). \tag{18}$$

bb). $x > a$. Fie r deschiderea în care se află secțiunea considerată, și să presupunem că r e un număr par, atunci avem momentul, în virtutea formulelor (8), (10) și (11), dat prin:

$$M = \frac{P(l-a)x}{l} - \frac{Pa}{2f}y - P(x-a) + (-1)^2\frac{2Pa}{l}(x-l)$$
$$+ (-1)^3\frac{2Pa}{l}(x-2l) + \ldots\ldots + (-1)^r\frac{2Pa}{l}[x-(r-1)l] \qquad (19)$$

sau:

$$M = \frac{P(l-a)}{l}x - \frac{Pa.y}{2f} - P(x-a) + \frac{2Pa}{l}[x - l + 2l - 3l + 4l - \ldots$$
$$+ (r-2)l - (r-1)l] = Pa - Pa\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right) + \frac{2Pa}{l}\left[x - \frac{rl}{2}\right]$$

sau în fine:

$$M = P.a\left[\frac{x}{l} - \frac{y}{2f} - (r-1)\right]. \qquad (20)$$

Dacă r e un număr impar atunci formula (19), devine:

$$M = \frac{P(l-a)x}{l} - \frac{Pa.y}{2f} - P(x-a) + \frac{2Pa}{l}[-l + 2l - 3l + 4l - \ldots$$
$$- (r-2)l + (r-1)l]$$

sau:

$$M = Pa\left(-\frac{x}{l} - \frac{y}{2f} + 1\right) + \frac{2Pa}{l}.\frac{r-1}{2}l$$

deci:

$$M = P.a.r - Pa\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right). \qquad (20')$$

Formulele (18), (20) și (20′) se pot scrie, pentru a fi mai lesne memorizate:

$$\left.\begin{array}{ll} x \leqslant a & M = P.x - P.a\left(\dfrac{x}{l} + \dfrac{y}{2f}\right) \\ x \geqslant a & \left\{\begin{array}{ll} M_r^i = P.a\left[r - \left(\dfrac{x}{l} + \dfrac{y}{2f}\right)\right] & \text{pentru } r \text{ impar} \\ M_r^p = P.a\left[(1-r) + \left(\dfrac{x}{l} - \dfrac{y}{2f}\right)\right] & \text{pentru } r \text{ par} \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (21)$$

b). *Sarcina a depășit articulația* ***m***.

Aci vom distinge următoarele cazuri:

ba). $x \leqslant a \leqslant ml$ adică sarcina se află între secțiunea considerată și reazămul $m+1$ pe care nu l'a depășit încă.

Momentul va fi dat prin formula:

$$\text{(22)} \qquad M_r = A.x - H_1.y + B(x-l) + C(x-2l) + \ldots + I_r[x-(r-1)l].$$

Punând pentru A, H,, B... valorile găsite prin formulele (3) până la (7), avem:

$$\text{(22')} \left\{ \begin{aligned} M_r = &(-1)^{m+1}\frac{P(ml-a)}{l}x - (-1)^{m+1}\frac{P(ml-a)}{2f}y \\ &+ (-1)^{m+2}\frac{2P(ml-a)}{l}(x-l) + (-1)^{m+3}\frac{2P(ml-a)}{l}(x-2l) + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{m+r}\frac{2P(ml-a)}{l}[x-(r-1)l]. \end{aligned} \right.$$

Ecuațiunea (22') ne dă 2 valori pentru M_r după cum r este un număr par sau impar.

Dacă r e impar, avem:

$$M_r^i = (-1)^{m+1}P(ml-a)\left[\frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right]$$

$$+ (-1)^{m+2}\frac{2P(ml-a)}{l}\{x - l - (x-2l) + (x-3l) - (x-4l) + \ldots - [x-(r-1)l]\}$$

sau:

$$\text{(23)} \qquad M_r^i = (-1)^m P(ml-a)\left[(r-1) - \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right)\right].$$

Dacă r este număr par, avem:

$$M_r^p = (-1)^{m+1}P(ml-a)\left[\frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right]$$

$$+ (-1)^{m+2}\frac{2P(ml-a)}{l}\{(x-l) - (x-2l) + \ldots + [x-(r-1)l]\}$$

sau:

$$\text{(24)} \qquad M_r^p = (-1)^m P(ml-a)\left[\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right) - r\right].$$

bb). $a \leqslant x \leqslant ml$, adică sarcina se găsește în deschiderea m. Secțiunea e între sarcină și reazămul $m+1$.

Momentul este:

$$(25)\qquad M_m = A.x - H_1.y + B(x-l) + C(x-2l) + \ldots + I_m[x-(m-1)l] - P(x-a).$$

Comparând ecuaţiunile (22) şi (25) vedem că ele se deosibesc prin termenul $-P(x-a)$ adăogat la această din urmă şi prin aceia că am schimbat indicele r punând în locu-i m. Putem deci scrie pentru acest caz direct valorile lui M_m şi anume:

$$(26)\begin{cases} M_m^i = P(ml-x) - P(ml-a)\left[m - \left(\dfrac{x}{l} - \dfrac{y}{2f}\right)\right. & \text{pentru } m \text{ impar.} \\ M_m^p = P(ml-x) - P(ml-a)\left[m+1 - \left(\dfrac{x}{l} + \dfrac{y}{2f}\right)\right] & \text{pentru } m \text{ par.} \end{cases}$$

*bc). $a \leqslant ml \leqslant x$ adică sarcina e în deschiderea **m** iar secţiunea se află la dreapta reazămului **m** + 1 într'o deschidere oarecare.*

Momentul e dat prin:

$$(27)\qquad \begin{cases} M_r = A.x - H_1.y + B(x-l) + C(x-2l) + \ldots \\ \quad + I_m[x-(m-1)l] - P(x-a) + P(x-ml) \\ \quad + I_{m+2}[x-(m+1)l] + \ldots + I_r[x-(r-1)l]. \end{cases}$$

Cu ajutorul valorilor (3) până la (7) ecuaţiunea (27) se poate scrie:

$$(27')\begin{cases} M_r = (-1)^{m+1}\dfrac{P(ml-a)x}{l} - (-1)^{m+1}\dfrac{P(ml-a)y}{2f} \\ +(-1)^{m+2}\dfrac{2P(ml-a)}{l}(x-l) + (-1)^{m+3}\dfrac{2P(ml-a)}{l}(x-2l) + \ldots \\ +(-1)^{2m}\dfrac{2P(ml-a)}{l}[x-(m-1)l] - P(ml-a) \\ +(-1)^{2m+1}\dfrac{2P(ml-a)}{l}[x-(m+1)l] + \ldots \\ +(-1)^{m+r-1}\dfrac{2P(ml-a)}{l}[x-(r-1)l]. \end{cases}$$

sau:

$$(27'')\quad \left\{\begin{array}{l} M_r = (-1)^{m+1} P(ml-a)\left[\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right] - P(ml-a) \\ +(-1)^{m+2}\frac{2P(ml-a)}{l}\{(x-l)-(x-2l)+(x-3l)-\dots \\ +(-1)^m[x-(m-1)l]\}+(-1)^{m+1}[x-(m+1)l] \\ +(-1)^{m+2}[x-(m+2)l]+\dots+(-1)^{r-1}[x-(r-1)l]\}. \end{array}\right.$$

Și aci trebue să distingem 2 cazuri, după cum r este par sau impar.

*Fie **r** par.* In acest caz avem în paranteza cea mare un număr par de termeni. De oarece semnele sunt alternative, termenii în x vor dispare și vom obține pentru M_r valoarea:

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} M_r^p = (-1)^{m+1} P(ml-a)\left[\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)+(1-r)\right] \\ \qquad = (-1)^m P(ml-a)\left[r-1-\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)\right]. \end{array}\right.$$

Dacă r este impar atunci în paranteza cea mare din formula (27″) ne rămâne încă x și după ce facem reducerile posibile, obținem:

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} M_r^i = (-1)^{m+1} P(ml-a)\left[r-\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)\right] \\ \qquad = (-1)^m P(ml-a)\left[\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)-r\right]. \end{array}\right.$$

*bd). $x \leqslant ml \leqslant a$, adică reazămul **m+1** se află între sarcina și secțiunea considerată, sarcina fiind în deschiderea **m+1**.*

Momentul e dat prin:

$$(22)\quad M_r = A.x - H_1.y + B(x-l) + C(x-2l) + \dots + I_r[x-(r-1)l]$$

care valoare e identică cu cea exprimată prin formula (22). Deci și pentru acest caz vom avea, punând pentru A, H_1, B, C... valorile (3) până la (7), iarăși momentul M_r exprimat prin ecuațiunile:

$$(23)\quad M_r^i = (-1)^m P(ml-a)\left[r-1-\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)\right]$$

$$M_r^p = (-1)^m P(ml - a)\left[\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right) - r\right]. \tag{24}$$

be). $ml \leqslant x \leqslant a$, adică secțiunea și sarcina se află în deschiderea $m+1$, secțiunea aflându-se între reazămul $m+1$ și sarcina.

Momentul este dat prin:

$$\left\{\begin{array}{l} M_{m+1} = A.x - H_1.y + B(x-l) + C(x-2l) + \ldots \\ \qquad + I_m[x-(m-1)l] + P(x-ml). \end{array}\right. \tag{30}$$

Comparând ecuațiunile (30) și (22) între dânsele, vedem că dacă înlocuim în membrul al doilea al ecuațiunei (22) indicele r prin m și adăugăm termenul $P(x-ml)$ găsim ecuațiunea (30). Putem deci scrie direct valorile lui M_{m+1} pentru acest caz și anume introducând oarecare simplificări:

$$\left\{\begin{array}{ll} M_{m+1}^p = P(x-a) - P(ml-a)\left[m - \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right)\right] & \text{pentru } m \text{ impar} \\ M_{m+1}^i = P(x-a) - P(ml-a)\left[m+1 - \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right)\right] & \text{» } m \text{ par.} \end{array}\right. \tag{31}$$

bf). $ml \leqslant a \leqslant x$, adică sarcina se află între reazămul $m+1$ și articulația $m+1$, iar secțiuna e la dreapta sarcinei într'o deschidere oarecare.

Momentul e dat prin:

$$\left\{\begin{array}{l} M_r = A.x - H_1.y + B(x-l) + C(x-2l) + \ldots \\ \qquad + I_m[x-(m-1)l + P(x-ml) - P(x-a) \\ \qquad + I_{m+2}[x-(m+1)l] + \ldots + I_r[x-(r-1)l] \end{array}\right. \tag{27}$$

care ecuațiune e identică cu ecuațiunea (27); deci vom avea iar valorile:

$$M_r^p = (-1)^m P(ml-a)\left[r - 1 - \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right)\right] \quad \text{pentru } r \text{ par} \tag{28}$$

$$M_r^i = (-1)^m P(ml-a)\left[\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right) - r)\right] \quad \text{pentru } r \text{ impar.} \tag{29}$$

Valorile aflate le recapitulăm în tabela următoare:

TABELA II. — MOMENTE

Secţiunea se află în deschiderea de:	$x \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}$	$a \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ sau $a \leqslant \frac{l}{2} \leqslant x$	$x \leqslant a \leqslant m\,l$ sau $x \leqslant m\,l \leqslant a$	$a \leqslant x \leqslant m\,l$	$a \leqslant m\,l \leqslant x$ sau $m\,l \leqslant a \leqslant x$	$m\,l \leqslant x \leqslant a$
Ordin par $M_r^p =$		$P.a\left[(1-r)+\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)\right]$	$(-1)^m P\,[m\,l-a] \times\left[\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)-r\right]$	$P\,(m\,l-x)-P\,(m\,l-a)\left[m+1 \times -\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)\right]$	$(-1)^m P\,(ml-a)\times\left[r-1-\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)\right]$	$P\,(x-a)-P\,(m\,l-a)\left[m-\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)\right]$
Ordin impar $M_r^i =$	$P.x - Pa\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2f}\right)$	$P.a\left[r-\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)\right]$	$(-1)^m P(m\,l-a)\times\left[(r-1)-\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)\right]$	$P\,(m\,l-x)-P\,(m\,l-a)\left[m-\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)\right]$	$(-1)^m P\,(ml-a)\times\left[\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)-r\right]$	$P\,(x-a)-P\,(m\,l-a)\left[m+1-\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)\right]$

Exemple. a). Să considerăm o grindă cu 3 deschideri (fig. 3) adică să facem $n=1$ și să vedem ce valori iau momentele în diferitele secțiuni când o sarcină izolată se mișcă pe grindă de la stânga spre dreapta.

a). Fie o sarcină P între primul reazăm și prima articulație adică $0 \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}$.

Pentru o secțiune în deschiderea întâia avem cu ajutorul tabelei II :

$$x < a, \quad M = P.x - P.a\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right)$$

$$x > a, \quad M = P.a\left[1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right].$$

Pentru o secțiune în deschiderea II, avem :

$$M = P.a\left[(1-2) + \frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right] = -P.a\left[1 - \frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right]$$

și pentru o secțiune în deschiderea III :

$$M = P.a\left[3 - \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right)\right].$$

b). Dacă sarcina a depășit prima articulație, avem :

ba). Pentru cazul când $\frac{l}{2} \leqslant a \leqslant l$:

$$M = \quad P(l-a)\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right) \qquad \text{când } x < a$$

$$M = \quad P(l-x) - P(l-a)\left[1 - \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2f}\right)\right]$$

$$= -\frac{Ply}{2f} + \left(1 - \frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right)Pa \quad \text{când } a \leqslant x \leqslant l$$

$$M = -P(l-a)\left[1 - \frac{x}{l} + \frac{y}{2f}\right] \quad \text{când secțiunea e în deschiderea II}$$

$$M = -P(l-a)\left[\frac{x}{l} + \frac{y}{2f} - 3\right] \quad \text{când secțiunea e în deschiderea III.}$$

bb). Pentru cazul când $l \leqslant a \leqslant \frac{3\,l}{2}$:

$$M = \quad P(l-a)\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right)$$ când secțiunea e în deschiderea I

$$M = \quad P(l-a)\left[\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}-1\right]+P(x-a)$$ când secțiunea e în deschiderea II și $x \leqslant a$

$$M = -P(l-a)\left[1-\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right]$$ când secțiunea e în » II și $x \geqslant a$

$$M = -P(l-a)\left[\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}-3\right]$$ când secțiunea e în deschiderea III

valori pe care le am aflat și la tratarea directă a grinzei cu 3 deschideri. (Vezi *Oesterreichischen Wochenschrift für den offentlichen Baudienst*, No. 39 și 40 din 1902, Wien).

b). Fie $n=0$, adică o grindă cu o singură deschidere (vezi fig. 2).

Pentru o sarcină P avem:

aa). $x \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}$, $\quad M = P.x - P.a\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{2f}\right)$

bb). $x > a \qquad M = P.a\left[1-\frac{x}{l}-\frac{y}{2f}\right]$

valori pe care le cunoaștem din teoria grinzei în arc cu 3 articulații.

(Va urma).

Maximilian Marcus
Inginer diplomat al Școalei
Politecnice din Zürich.

Diverse

Drumurile de fier și boalele molipsitoare.— După fiecare transport de animale, vagoanele de marfă întrebuințate sunt trimese la desinfectare, lipindu-le un afiș cu inscripția: „de desinfectat“. Când turma umană care circulă ziua și noaptea pe