3,732 d; iar pentru deschideri mai mari cu 3,732 d cu sarini uniforme de P:d pe unitatea de lungime. Cu modul acesta vedem că încercările ce se fac de obiceiu devin inutile, iar calculele se simplifică mult. Formulele ce dau momentele în aceste 4 cazuri sunt pentru grinzi independente:

$$N=1\ ,\quad M=\frac{1}{4}Pl\ ;\quad N=2\ ,\quad M=\frac{1}{8}P\frac{(2l-d)^2}{l}\ ;$$

$$N=3\ ,\quad M=\frac{1}{4}P(3l-4d)\ ;\quad N\geqslant 4\ ,\quad M=\frac{1}{8}P\frac{l^2}{d}.$$

In numărul viitor voiu trata celelalte cazuri.

(Va urma)

I. Ionescu
Inginer
Profesor la Şcoala de Poduri şi Şosele.

Calculul elementelor construcţiunilor de beton armat

PRELIMINARII.

Anul trecut, pe când *„Buletinul Societăţii Politecnice“* publica un studiu teoretic asupra betonului armat, datorit D-lui inginer G. Constantinescu, unii cititori 'şi-au exprimat dorinţa, de a se face, prin „Buletin“, un curs practic de calculul construcţiunilor de beton armat.

De şi, bine înţeles, există atari uvraje, şi de şi prin Revistele streine se găsesc, cu îndestulare, articole instructive, relative la „beton armat“, totuşi, asemenea uvraje, ne fiind la îndemâna tuturor, o expunere condensată a celei mai uzitate metode de calculul teoretic, aplicată la cel mai întrebuinţat sistem de construcţie, *sistemul Hennebique*, cred că va putea folosi.

In cele ce urmează, voi îmbrăţişa problema de construcţiune: *„dânduse calitatea materialelor de întrebuinţat, prin travaliurile admisibile şi prin proprietăţile lor elastice, precum şi sarcinele exterioare şi* *modul de solicitare, să se determine dimensiunile elementelor construcțiunei"*.

Metoda de calcul, ce voi desvolta, nu are nimic comun cu formulele aproximative „Hennebique"; din contra, prin oare care simplificări de formule și prin oare care grupări de coeficienți numerici, voi căuta sa dau o formă cunoscută și ușor de reținut, formulelor teoretice, bazate pe proprietățile cele mai bine studiate ale betonului armat.

Pentru acest scop, mă voi sili să exprim diversele elemente ale unui solid prizmatic de beton armat, în funcție de sarcinele exterioare și de travaliurile admisibile, prin formule de aceiași formă cu cele cunoscute pentru solidele prismatice din materiale omogene, cum ar fi bunioară acele pentru grinzile de lemn.

Mai mult, pentru a ușurà pe cel ce proiectează o construcțiune de beton armat și care se decide a urma metoda de calcul desvoltată aci, voi da valorile coieficienților numerici pentru toate cazurile, ce se pot întâlni în practică, sub formă de table, lăsând totuși nețărmurită latitudinea de a se aranja dimensiile elementelor construcțiunilor în raport cu materialele disponibile.

Formulele fundamentale pentru calculul unei piese prismatice de beton armat solicitată la flexiune simplă.

Să presupunem un solid prismatic de beton armat simetric în raport cu un plan longitudinal, solicitat la flexiune simplă și să însemnăm cu:

F_e secțiunea armaturei întinse;

F'_e „ „ comprimate;

y_o distanța de la centrul de greutate al secțiunei armaturei întinse, la fibra neutră;

y'_o distanța de la centrul de greutate al secțiunei armaturei comprimate, la fibra neutră;

x_o distanța de la fibra neutră până la fibra extremă a părței comprimate;

σ_o compresiunea specifică maximă desvelită în beton;

σ_e tensiunea specifică maximă desvelită în armatura întinsă;

σ'_e compresiunea specifică maximă desvelită în armatura comprimată;

E_e modulul de elasticitate al ferului;
E_o " " " " betonului;
S jumătatea momentului static al secțiunei rezistente în raport cu axa neutră;
I momentul de inerție al secțiunei rezistente în raport cu axa neutră;
v_o lățimea grinzii în dreptul axei neutre;
v " " la distanța x de axa neutră, spre partea comprimată;
U perimetrul armaturei întinse;
τ tensiunea de lunecare longitudinală specifică, la fibra neutră;
a adeziunea specifică între armatura întinsă și beton; în fine,
M momentul încovoetor, într'o secțiune oarecare și
A puterea tăetoare; și să mai însemnăm spre prescurtare prin
$\frac{E_e}{E_o} = n$, raportul modulelor de elasticitate.

Vom avea următoarele formule de întrebuințat:

$$S = nF_e\, y_o = n\,F'_e\, y'_o + \int_0^{x_o} vx\, dx \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} I = nF'_e y'^2_o + \displaystyle\int_0^{x_o} vx^2\, dx + nF_e\, y_o^2 \\ \qquad\qquad \text{sau} \\ I = \dfrac{Mx_o}{\sigma_o} = \dfrac{nMy_o}{\sigma_e} = \dfrac{n\,My'_o}{\sigma'_e} \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\tau = \frac{A.S}{v_o.I} \tag{3}$$

$$a = \frac{A.S}{U.I} \tag{4}$$

Modul cum se pot stabili aceste formule, precum și ipotezele pe care ele se sprijină, se pot găsi în ori-ce tratat de beton armat*); totuși voi da aci o demonstrațiune succintă a lor, înainte de a trece la partea aplicativă a chestiunei.

---

*) *Centralblatt der Bauverwaltung* No. 38 din 14 Mai 1902; *Koenen*.

Referindu-ne la fig. 1, să aplicăm condiţiile de echilibru între puterile exterioare şi eforturile în secţiunea AB. Din anularea sumei proiecţiilor tuturor puterilor pe fibra neutră avem:

$$D + \sigma'_e F'_e = \sigma_e F_e \qquad (5)$$

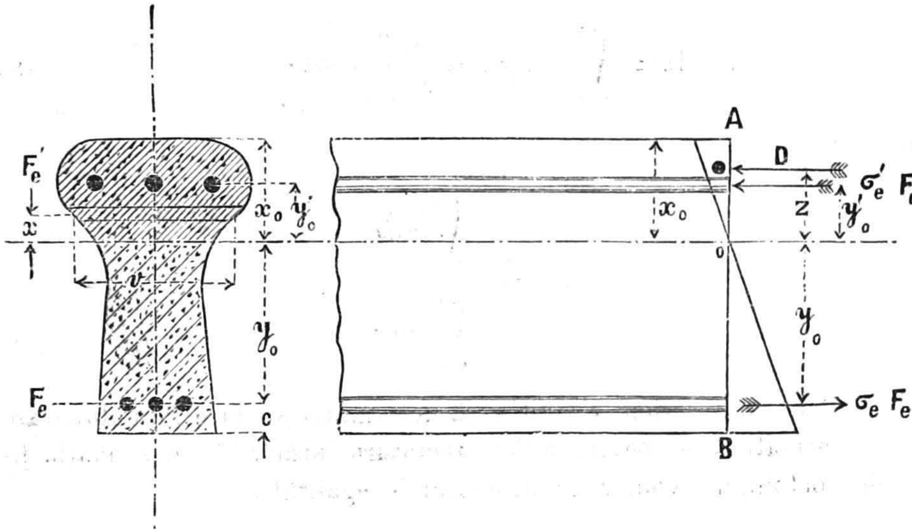

Fig. 1.

Din anularea sumei momentelor tuturor puterilor în raport cu punctul o avem:

$$Dz + \sigma'_e F'_e y'_o + \sigma_e F_e y_o = M \qquad (6)$$

Rezultanta D a compresiunilor în beton se deduce din însumarea presiunilor distribuite proporţional cu depărtarea de la fibra neutră, presupunând deci că după deformaţie, o secţiune plană rămâne tot plană şi că eforturile desvelite sânt linear proporţionale cu deformaţiunile; deci vom avea:

$$D = \int_0^{x_o} v\sigma dx$$

Dar mai avem:

$$\sigma = \frac{\sigma_o}{x_o} \cdot x$$

deci:

$$D = \frac{\sigma_o}{x_o}\int_0^{x_o} v.x.dx \qquad (7)$$

Punctul de aplicație al rezultantei D se obține, luând momentele presiunilor elementare în raport cu axa proiectată în o; **vom avea:**

$$Dz = \int_0^{x_o} v.\sigma.x.dx = \frac{\sigma_o}{x_o}\int_0^{x_o} vx^2dx \qquad (8)$$

de unde

$$z = \frac{\int_0^{x_o} vx^2dx}{\int_0^{x_o} vxdx.}$$

Dacă mai scriem condiția că deformația se face fără alunecare între armatură și beton, adică armatura urmărește deformația fibrelor betonului; vom avea următoarele egalități:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_o} = n\frac{y_o}{x_o} \qquad (9)$$

și

$$\frac{\sigma'_e}{\sigma_o} = n\frac{y'_o}{x_o} \qquad (10)$$

Folosindu-ne de egalitățile (7), (8), (9) și (10), egalitățile (5) și (6) devin:

$$nF'_e y'_o + \int_0^{x_o} v.x.dx = nF_e\, y_o \qquad (11)$$

$$nF'_e y'^2_o + \int_0^{x_o} v.x^2.dx + nF_e\, y^2_o = \frac{Mx_o}{\sigma_o} = \frac{nMy_o}{\sigma_e} = \frac{nMy'_o}{\sigma'_e} \qquad (12)$$

Relația (11) exprimă egalitatea între momentul static al părței comprimate și acela al părței întinse în raport cu fibra neutră, secțiunea ferului fiind amplificată în raportul modulelor de elasticitate al ferului și betonului.

Relațiunea (12), exprimă egalitatea între momentul de inerție al secțiunei rezistente, travaliurile desvelite în elementele secțiunei și momentul încovoetor, secțiunile armaturilor fiind amplificate în același raport $\frac{E_e}{E_o} = n$, față de beton.

Ținând seamă de notațiile admise, putem scrie prin urmare:

$$S = nF_e\, y_o + nF'_e y'_o + \int_o^{x_o} v.x.dx$$

$$I = nF_e\, y_o^2 + nF'_e y_c'^2 + \int_o^{x_o} v.x^2.dx$$

Formulele (1) și (2) fiind stabilite, să trecem la demonstrațiunea formulelor (3) și (4).

Să considerăm două secțiuni transversale AB și A′B′ foarte apropiate și din trunchiul de grindă coprins între aceste secțiuni, să detașăm prisma $aa'\,bb'\,cc'\,dd'$, de o grosime foarte mică Δx.

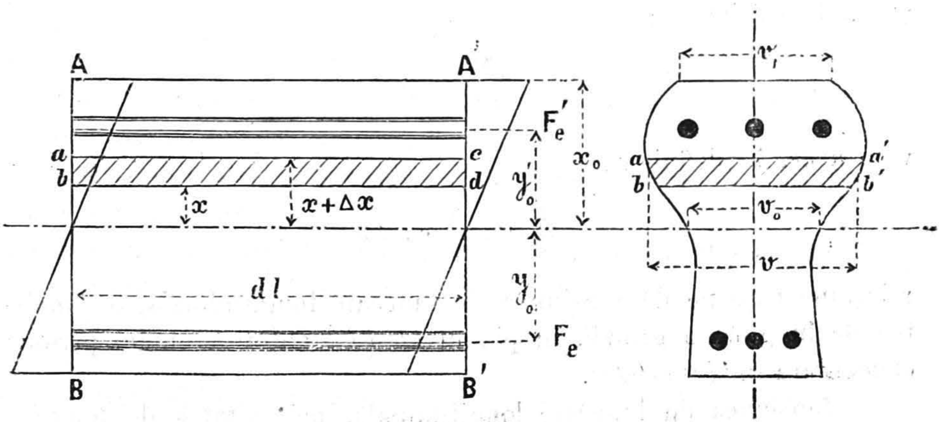

Fig. 2.

Fie σ și σ' presiunile specifice desvelite respectiv pe fețele $aba'b'$, și $cdc'd'$ și să mai fie θ și θ' tensiunile de lunecare longitudinală pe unitatea de lungime de grindă, desvelite respectiv pe fețele $bb'\,dd'$ și $aa'cc'$.

Dacă izolăm prisma, ea va trebui să se găsească în echilibru sub efectul următoarelor puteri paralele totale:

presiunea totală $\sigma v \Delta x$, pe fața $aa'bb'$;
" " $\sigma' v \Delta x$, " " $cc'dd'$;
tensiunea de lunecare $\theta \Delta l$, " " $bb'dd'$;
" " " $\theta' \Delta l$, " " $aa'cc'$.

Anulând suma proiecțiilor acestor puteri pe direcția comună, avem :

$$(\sigma' - \sigma) v \Delta x = (\theta - \theta') \Delta l$$

de unde tragem :

$$\Delta \theta = v \frac{\Delta \sigma}{\Delta l}$$

și trecând la limită, avem :

$$d\theta = v \frac{d\sigma}{dl}.$$

Dar din egalitatea (2) tragem :

$$\frac{d\sigma}{dl} = \frac{dM}{dl} \cdot \frac{x}{I}$$

și fiind că știm că :

$$\frac{dM}{dl} = A$$

vom avea, în definitiv :

$$d\theta = \frac{A}{I} . v x dx$$

relațiune care ne dă tensiunea de lunecare longitudinală, pe unitatea de lungime a grinzii, în planul $bb'dd'$, datorită numai prismei elementare $aa'bb'cc'dd'$.

Tensiunea de lunecare longitudinală, pe unitatea de lungime de grindă, datorită unei prisme de grosime finită, $(x' - x)$, va fi prin urmare :

$$\int_{\theta'}^{\theta} d\theta = \frac{A}{I} \int_{x}^{x'} v x dx$$

unde bine înțeles, $\int_{x}^{x'} v x dx$ se întinde și asupra secțiunei armaturei comprimate, care, în baza adeziunei, conlucrează solidar cu betonul dimprejur.

Se vede ușor, că expresiunea de mai sus este maximă odată cu integrala; deci, numind θ_o valoarea lui $\int d\theta$, pentru fibra neutră, vom avea :

$$\theta_o = \left(n F'_e y'_o + \int_o^{x_o} v x d x \right) \frac{A}{I}$$

sau conform notațiunilor admise,

$$\theta_o = \frac{A S}{I}$$

Am presupus implicit, că pe grosimea grinzii, distribuția tensiunei de lunecare se face uniform; dacă v_o este grosimea grinzii în dreptul fibrei neutre, vom avea prin urmare:

$$\tau = \frac{A S}{v_o I} \qquad (3)$$

formulă, care dă tensiunea maximă specifică de lunecare longitudinală.

Este ușor de văzut, că această tensiune rămâne constantă pentru toată partea întinsă a secțiunei grinzii.

Pentru a stabili și formula (4), ne vom raporta tot la fig. (2) și la notațiile admise, și vom scrie, pentru armatura întinsă, condiția de echilibru între tensiunile desvelite în cele două secțiuni vecine și adesiunea totală pe lungimea Δl :

$$A.U.\Delta l = (\sigma_{e'} - \sigma_e) F_e$$

de unde trecând la limită și urmând raționamentul de mai sus, avem în cele din urmă :

$$a = \frac{A.S}{U.I} \qquad (4)$$

formulă, care ne dă adeziunea specifică între beton și armatura întînsă, efort totdeauna mai important de cât acela, care se desvoltă între beton și armatura comprimată.

O dată stabilite formulele fundamentale pentru calculul pieselor de beton armat solicitate la flexiune, să trecem la partea aplicativă a chestiunei.

1. Grinzi drepte cu secțiune dreptunghiulară și armatură simplă.

Să considerăm grinzile și dalele cu armatură simplă la tensiune și cu secțiuni dreptunghiulare.

In cazul de față formulele fundamentale devin:

$$S = n\,F_e\,y_o = \frac{b x_o^2}{2} \tag{11'}$$

$$I = n\,F_e\,y_o^2 + \frac{b x_o^3}{3} = \frac{M x_o}{\sigma_o} = \frac{n\,M\,y_o}{\sigma_o} \tag{12'}$$

Ele sunt deduse din egalitățile (1) și (2) sau (11) și (12) făcând

$$F'_e = o \quad \text{și} \quad v = b = const.$$

Să punem în aceste formule:

$$F_e = p.bh,$$

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_o} = r;$$

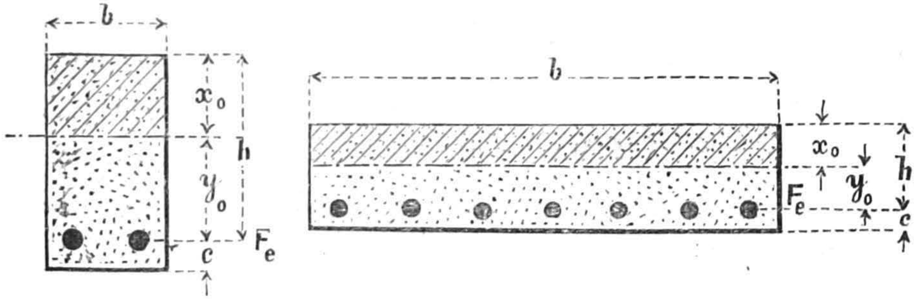

Fig. 3.

apoi, observând în figura (3) că avem

$$h = x_o + y_o\,,$$

printr'o ușoară transformare a formulelor de mai sus, ajungem la următoarele rezultate:

1⁰) Pozițiunea axei neutre se determină prin una din formulele:

$$x_o = \frac{n}{r+n} \cdot h = \alpha \cdot h, \tag{13}$$

sau

$$y_o = \frac{r}{r+n} \cdot h = \beta \cdot h. \tag{14}$$

2⁰) Coeficentul p, pe care'l vom numi *„procentul armaturei"* *(pourcentage)* când el s'ar exprima în părți de sută din secțiunea utilă a grinzii, se exprimă prin următoarea relație:

$$p = \frac{n}{2r(r+n)} = \frac{\alpha}{2r}$$

așa că, o dată cunoscute b și h, secțiunea armaturii va fi dată de relația:

$$F_e = \frac{\alpha}{2r} \cdot b \cdot h \tag{15}$$

3⁰) Expresiunea momentului static pe jumătate devine:

$$S = \frac{n^2}{2(r+n)^2} b h^2 = \frac{\alpha^2}{2} b h^2$$

sau

$$S = \gamma \cdot b \cdot h^2 \tag{16}$$

4⁰) Expresiunea momentului de inerție al secțiunei, în raport cu axa neutră ia forma:

$$I = \alpha^2 \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} \right) b h^3 = \mu \cdot b h^3 \tag{17}$$

5⁰) In fine mai avem o relațiune, care exprimă, în funcțiune de momentul încovoetor și travaliurile admisibile, o cantitate analoagă cu momentul rezistent al grinzii, și anume:

$$b h^2 = \lambda \cdot \frac{M}{\sigma_o} = \lambda \cdot r \frac{M}{\sigma_e} \tag{18}$$

unde coeficentul λ are următoarea valoare:

$$\lambda = \frac{6\,(r+n)^2}{n\,(3r+2n)}.$$

Din cele ce preced, se vede că problema grinzilor și dalelor de beton armat, cu secțiune dreptunghiulară și armate numai la tensiune, este redusă la problema grinzilor omogene, din momentul ce se pot avea la îndemână, calculați gata, coeficenții: α, β, p, γ, μ și λ.

In tabloul alăturat, am consemnat valorile acestor coeficenți, pentru raportul $\frac{E_e}{E_o} = n = 15$, prescris de *Circulara prusiană**), și pentru r variind din 5 în 5 de la 15 la 80.

Importanța acestui tablou, pe lângă ușurarea calculelor, va fi și aceia de a ne putea ușura comparațiile în vederea economiei de cost, ceia ce'mi propun a desvolta mai târziu.

TABLOUL I

$n = 15$

r	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
α	$^1/_2$	$^3/_7$	$^3/_8$	$^1/_3$	$^3/_{10}$	$^3/_{11}$	$^1/_4$	$^3/_{13}$	$^3/_{14}$	$^1/_5$	$^3/_{16}$	$^3/_{17}$	$^1/_6$	$^3/_{19}$
β	$^1/_2$	$^4/_7$	$^5/_8$	$^2/_3$	$^7/_{10}$	$^8/_{11}$	$^3/_4$	$^{10}/_{13}$	$^{11}/_{14}$	$^4/_5$	$^{13}/_{16}$	$^{14}/_{17}$	$^5/_6$	$^{16}/_{19}$
p	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{280}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{1}{180}$	$\frac{3}{700}$	$\frac{3}{880}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{3}{1300}$	$\frac{3}{1540}$	$\frac{1}{600}$	$\frac{3}{2080}$	$\frac{3}{2380}$	$\frac{1}{900}$	$\frac{3}{3040}$
γ	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{98}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{200}$	$\frac{9}{242}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{9}{338}$	$\frac{9}{392}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{9}{512}$	$\frac{9}{578}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{9}{722}$
μ	$\frac{5}{48}$	$\frac{27}{343}$	$\frac{63}{1024}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{81}{2000}$	$\frac{45}{1331}$	$\frac{11}{384}$	$\frac{54}{2197}$	$\frac{117}{5488}$	$\frac{7}{375}$	$\frac{135}{8192}$	$\frac{72}{4913}$	$\frac{17}{1296}$	$\frac{81}{6859}$
λ	$\frac{24}{5}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{128}{21}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{200}{27}$	$\frac{121}{15}$	$\frac{96}{11}$	$\frac{169}{18}$	$\frac{392}{39}$	$\frac{75}{7}$	$\frac{512}{45}$	$\frac{289}{24}$	$\frac{216}{17}$	$\frac{361}{27}$

Exemplul I. — Să calculăm dala unui planșeu, care trebue să suporte o sarcină totală uniformă de 1000 kgr./m^2; distanța între axele grinzilor secundare, pe care presupunem dala simplu rezemată, fiind 1,^{m}20.

Momentul încovoetor maximum, pentru 1^{m},00 lățime de dală va fi:

*) *Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten, 1904.*