# Calculul elementelor construcțiunilor de beton armat

## 1. Grinzi drepte cu secțiune dreptunghiulară și armatură simplă.

(Urmare)

*Exemplul II;* urmare. (A se vedea Buletinul No. 1, 1906, pag. 54, 55 și 56). — Expresiunea tensiunei de lunecare longitudinală, potrivit relațiunei (3) (pag. 49, Buletinul No. 1 din 1906), este:

$$\tau = \frac{A\,S}{v_o\,I}$$

Introducând valorile lui S și I din egalitățile (16) și (17), vom avea:

$$\tau = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{A}{v_o\,h}.$$

Dar din tablou, pentru $n = 15$ și $r = 30$, avem:

$$\gamma : \mu = \frac{1}{18} : \frac{4}{81} = \frac{9}{8}$$

și cum am găsit anterior;

$$A = 1800 \text{ kgr.}$$

și $h = 24$ cm.,

mai admițând $v_o = 18$ cm.,

vom avea:

$$\tau = \frac{9}{8} \cdot \frac{1800}{18 \times 24} = 4{,}687 \text{ kgr/cm}^2$$

efort, care întrece cu puțin limita de 4,5 kgr/cm², prescrisă în *circulara prusiană.*

Regiunea cea mai de temut, sub raportul lunecărei longitudinale, în exemplul de față, nu este în planul fibrei neutre, ci sub acest plan, în partea cea mai îngustă a secțiunei, adică pentru $v_o = 12$ cm; dar am zis, că pentru partea întinsă a secțiunei, tensiunea totală de lunecare este independentă de depărtarea planului considerat la fibra neutră și egală cu tensiunea totală de lunecare, pe unitatea de lungime a grinzii, socotită în planul fibrei neutre, adică vom putea scrie:

$$\tau'. v'_o = \tau. v_o$$

sau, în cazul de față, având $v'_o = 12$, vom avea:

$$\tau' = \frac{9}{8}. \frac{1800}{12 \times 24} = 7{,}031 \text{ kgr/cm}^2$$

Limita admisibilă fiind întrecută în acest plan, se vor amenaja scări (étriers), cari să suporte o parte a acestui efort.

Să atribuim scărilor 4 kgr/cm² din efortul total de 7,031 kgr/cm²; numind $\omega$ secțiunea scărilor dintr'o secțiune transversală în vecinătatea extremității grinzii și $\delta$ distanța între scări, măsurată în lungul grinzii și admițând ca rezistență la tăere a ferului 800 kgr/cm², vom avea următoarea relație:

$$800.\omega = 5 \times v'_o. \delta.$$

sau:

$$\frac{\omega}{\delta} = \frac{4 \times 12}{800} = 0{,}06 \text{ cm.}$$

Admițând pentru etrieri, feare late de 30/3, mm.

avem:
$$\omega = 2 \times 3 \times 0{,}3 = 1{,}8 \text{ cm}^2$$

și prin urmare:

$$\delta = \frac{1{,}8}{0{,}06} = 30 \text{ cm.}$$

Se vor menține dimensiile etrierilor constante, dar se vor varia distanțele, sporindu-se spre mijlocul grinzii proporțional cu depărtarea de la reazăm.

Cu aceste elemente calculate, grinda poate avea întocmirea care se vede în fig. 6, Planșa I, anexată la finele Buletinului.

După cum se arată în acea figură, capetele etrierilor s'au prelungit în dală, în scopul unei mai bune solidarizări între dală și grindă.

In ceia ce privește dispozițiunile armaturilor și forma de adoptat pentru grinzi, voi reveni la urmă, când voi rezuma considerațiile practice de ordin constructiv și vederile cele mai justificate pentru întocmirea judicioasă a elementelor construcțiunilor.

In exemplul de față am urmărit mai mult scopul de a arăta întrebuințarea formulelor de calcul, sub forma ce le-am dat, precum și aplicarea tabloului cu coeficienți.

Pentru a termina exemplul, să cercetăm *adeziunea*.

Formula (4), tradusă în cifre ne dă:

$$a = \frac{9}{8} \cdot \frac{1800}{3 \times 3{,}14 \times 1{,}5 \times 24} = \text{aprox. } 6 \text{ kgr/cm}^2$$

Deși acest travaliu întrece limita admisibilă, totuși o lunecare între armatură și betonul înconjurător e ușor de evitat prin dispunerea armaturei în dreptul reazemelor așa precum indică fig. 6.

Cu aceasta, consider exemplul terminat și înainte de a trece la alte tipuri de grinzi, dau alte 2 tablouri ale coeficenților $\alpha$, $\beta$, $p$, $\gamma$, $\mu$ și $\lambda$ și anume:

TABLOUL II

$n = 15$

| $r$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $^2/_5$ | $^1/_3$ | $^2/_7$ | $^1/_4$ | $^2/_9$ | $^1/_5$ | $^2/_{11}$ | $^1/_6$ | $^2/_{13}$ | $^1/_7$ | $^2/_{15}$ | $^1/_8$ | $^2/_{17}$ | $^1/_9$ |
| $\beta$ | $^3/_5$ | $^2/_3$ | $^5/_7$ | $^3/_4$ | $^7/_9$ | $^4/_5$ | $^9/_{11}$ | $^5/_6$ | $^{11}/_{13}$ | $^6/_7$ | $^{13}/_{15}$ | $^7/_8$ | $^{15}/_{17}$ | $^8/_9$ |
| $p$ | $\frac{1}{75}$ | $\frac{1}{120}$ | $\frac{1}{175}$ | $\frac{1}{240}$ | $\frac{1}{315}$ | $\frac{1}{400}$ | $\frac{1}{495}$ | $\frac{1}{600}$ | $\frac{1}{715}$ | $\frac{1}{840}$ | $\frac{1}{975}$ | $\frac{1}{1120}$ | $\frac{1}{1275}$ | $\frac{1}{1440}$ |
| $\gamma$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{2}{49}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{2}{81}$ | $\frac{1}{50}$ | $\frac{2}{121}$ | $\frac{1}{72}$ | $\frac{2}{169}$ | $\frac{1}{98}$ | $\frac{2}{225}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{2}{289}$ | $\frac{1}{162}$ |
| $\mu$ | $\frac{26}{375}$ | $\frac{4}{81}$ | $\frac{38}{1029}$ | $\frac{11}{384}$ | $\frac{50}{2187}$ | $\frac{7}{375}$ | $\frac{62}{3993}$ | $\frac{17}{1296}$ | $\frac{74}{6591}$ | $\frac{10}{1029}$ | $\frac{86}{10125}$ | $\frac{23}{3072}$ | $\frac{98}{14739}$ | $\frac{13}{2187}$ |
| $\lambda$ | $\frac{75}{13}$ | $\frac{27}{4}$ | $\frac{147}{19}$ | $\frac{96}{11}$ | $\frac{243}{25}$ | $\frac{75}{7}$ | $\frac{363}{31}$ | $\frac{216}{17}$ | $\frac{507}{37}$ | $\frac{147}{10}$ | $\frac{675}{43}$ | $\frac{384}{23}$ | $\frac{867}{49}$ | $\frac{243}{13}$ |

## TABLOUL III

$n = 20$

| $r$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $^4/_7$ | $^1/_2$ | $^4/_9$ | $^2/_5$ | $^4/_{11}$ | $^1/_3$ | $^4/_{13}$ | $^2/_7$ | $^4/_{15}$ | $^1/_4$ | $^4/_{17}$ | $^2/_9$ | $^4/_{19}$ | $^1/_5$ |
| $\beta$ | $^3/_7$ | $^1/_2$ | $^5/_9$ | $^3/_5$ | $^7/_{11}$ | $^2/_3$ | $^9/_{13}$ | $^5/_7$ | $^{11}/_{15}$ | $^3/_4$ | $^{13}/_{17}$ | $^7/_9$ | $^{15}/_{19}$ | $^4/_5$ |
| $p$ | $\frac{2}{105}$ | $\frac{1}{80}$ | $\frac{2}{225}$ | $\frac{1}{150}$ | $\frac{2}{385}$ | $\frac{1}{240}$ | $\frac{2}{585}$ | $\frac{1}{350}$ | $\frac{2}{825}$ | $\frac{1}{480}$ | $\frac{2}{1105}$ | $\frac{1}{630}$ | $\frac{2}{1425}$ | $\frac{1}{800}$ |
| $\gamma$ | $\frac{8}{49}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{8}{121}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{8}{169}$ | $\frac{2}{49}$ | $\frac{8}{225}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{8}{289}$ | $\frac{2}{81}$ | $\frac{8}{361}$ | $\frac{1}{50}$ |
| $\mu$ | $\frac{136}{1029}$ | $\frac{5}{48}$ | $\frac{184}{2187}$ | $\frac{26}{375}$ | $\frac{232}{3993}$ | $\frac{4}{81}$ | $\frac{280}{6591}$ | $\frac{38}{1029}$ | $\frac{328}{10125}$ | $\frac{11}{384}$ | $\frac{376}{14739}$ | $\frac{50}{2187}$ | $\frac{424}{20577}$ | $\frac{7}{375}$ |
| $\lambda$ | $\frac{147}{34}$ | $\frac{24}{5}$ | $\frac{243}{46}$ | $\frac{75}{13}$ | $\frac{363}{58}$ | $\frac{27}{4}$ | $\frac{507}{70}$ | $\frac{147}{19}$ | $\frac{675}{82}$ | $\frac{96}{11}$ | $\frac{867}{94}$ | $\frac{243}{25}$ | $\frac{1083}{106}$ | $\frac{75}{7}$ |

Aceste 2 tablouri împreună cu tabloul I de la pagina 52, formează 3 tablouri care vor servi pentru toate felurile de grinzi, și cu ajutorul metodei interpolațiilor, pentru orice valoare a lui $n$ și $r$ întâlnite în practică, deci pentru toată varietatea materialelor întrebuințabile.

Cred necesar, înainte de a trece mai departe, să abordez aci și următoarea chestiune:

### Problema minimului de cost la dalele și grinzile de beton armat cu secțiune dreptunghiulară și armatură simplă [1])

In Numărul precedent am stabilit formulele (15) și (18) pentru determinarea elementelor secțiunilor la dalele și grinzile de beton armat cu secțiuni dreptunghiulare și armaturi simple; aceste formule sunt:

$$F_e = \frac{\alpha}{2r} b h \qquad (15)$$

unde avem:

---

[1]) Vezi Revista „*Beton und Eisen*“, Heft II din 1905, pag. 38—41.

$$\alpha = \frac{n}{r+n}$$

și

$$b\,h^2 = \lambda.\,\frac{M}{\sigma_o} = \lambda.\,r.\,\frac{M}{\sigma_e} \qquad (18)$$

unde avem:

$$\lambda = \frac{6\,(r+n)^2}{n\,(3\,r+2\,n)}$$

mai știind că: $\frac{\sigma_e}{\sigma_o} = r$

Dacă se dă mai dinainte raportul $r$ și unul din travaliurile admisibile $\sigma_o$ sau $\sigma_e$, sau, dacă se prescriu ambele travaliuri admisibile, precum se face prin „*Prescripțiunea prusiană*", atunci este ușor de văzut, că impunând nedeterminărei ce mai rămâne, condiția minimului de cost, găsim soluția practic neadmisibilă:

$$h = \infty,$$

analog ca la grinzile din materiale omogene.

Putem însă să ne rezervăm în alt mod condițiunea unui minimum de cost, admițând succesiv, că numai pentru unul din materiale, limita travaliului admisibil este atinsă și lăsând variabil raportul $r$, deci travaliul admisibil al celui-alt material.

Dacă vom însemna prin:

$c_o$ costul pe unitatea de volum de boton,

$c_e$ costul pe unitatea de volum de fer și

C costul pe unitatea de lungime de dală sau grindă,

vom avea:

$$C = c_o\,b\,h + c_e\,F_e$$

Inlocuind în acestă egalitate, variabilele $h$ și $F_e$ prin egalurile lor din egalitățile de mai sus, vom avea:

$$C = \left[\, c_o + \frac{c_e\,n}{2\,r\,(r+n)} \,\right] \frac{(r+n)}{\sqrt{3\,r+2\,n}} \cdot \sqrt{\frac{6\,b\,M}{n\,\sigma_o}}$$

sau:

$$C = \left[ c_o + \frac{c_e n}{2r(r+n)} \right] \frac{(r+n)\sqrt{r}}{\sqrt{3r+2n}} \cdot \sqrt{\frac{6bM}{n\sigma_e}}$$

Când vom presupune că ni se impune $\sigma_o$ maximum, atunci vom avea în vedere prima egalitate; când ni s'ar impune $\sigma_e$ maximum, vom recurge la cea de a doua.

In aceste supoziții, termenii $\sqrt{\frac{6bM}{n\sigma_o}}$ și $\sqrt{\frac{6bM}{n\sigma_e}}$ sunt constanți din momentul ce ne-am ales pe $b$ și din momentul ce secțiunea dalei sau grinzii este menținută constantă și egală cu secțiunea în dreptul momentului încovoetor maximum, ceiace se întâlnește în majoritatea cazurilor în practică.

Egalitățile de mai sus se pot scrie, cu aproximația unui coieficient constant, în modul următor:

$$C'_o = \left[ 1 + \frac{\rho n}{2r(r+n)} \right] (r+n)(3r+2n)^{-\frac{1}{2}}. \qquad \text{(I)}$$

și

$$C'_e = \left[ 1 + \frac{\rho n}{2r(r+n)} \right] (r+n)\left(3 + \frac{2n}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad \text{(II)}$$

unde trebue să înțelegem că am însemnat:

$\frac{c_e}{c_o} = \rho$ raportul între costurile unitare ale materialelor;

$\frac{C}{c_o} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{6bM}{n\sigma_o}}} = C'_o$ valoarea costului pe unitatea de lungime de dală sau grindă, îmulțită cu un coeficient constant, *când considerăm pe $\sigma_o$ ca constant, iar pe $\sigma_e$ și deci pe $r$ variabile;*

$\frac{C}{c_o} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{6bM}{n\sigma_e}}} = C'_e$ valoarea costului pe unitatea de lungime de dală sau grindă, îmulțită cu un coeficient constant, *când considerăm pe $\sigma_e$ ca constant, iar pe $\sigma_o$ și deci pe $r$ variabile.*

Desfăcând parantezele mari în egalitățile (I) și (II) acestea devin:

$$C'_o = (r+n)(3r+2n)^{-\frac{1}{2}} + \frac{n\rho}{2}(r)^{-1}.(3r+2n)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(I')}$$

și

$$C'_e = (r+n)\,(r)^{\frac{1}{2}}(3r+2n)^{-\frac{1}{2}} + \frac{n\rho}{2}(r)^{-\frac{1}{2}}(3r+2n)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II')}$$

Pentru a găsi condițiile minimului de cost, să anulăm prima derivată în raport cu $r$, a fiecărei din funcțiunile de mai sus; vom avea :

$$\frac{dC'_o}{dr} = \Big[(3r+2n)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(r+n)(3r+2n)^{-\frac{3}{2}} - \frac{n\rho}{2}(r)^{-2}(3r+2n)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{3}{4}\,n\rho\,(r)^{-1}(3r+2n)^{-\frac{3}{2}}\Big] = o$$

și :

$$\frac{dC'_e}{dr} = \Big[r^{\frac{1}{2}}(3r+2n)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(r+n).r^{-\frac{1}{2}}.(3r+2n)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{3}{2}(r+n)r^{\frac{1}{2}}\;(3r+2n)^{-\frac{3}{2}} - \frac{n\rho}{4}\,r^{-\frac{3}{2}}.(3r+2n)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{3}{4}\,n\rho r^{-\frac{1}{2}}.(3r+2n)^{-\frac{3}{2}}\Big] = o$$

Aceste expresiuni se simplifică imediat reducându-se la :

$$4(3r+2n)r^2 - 6(r+n)r^2 - 2n\rho(3r+2n) - 3n\rho r = o$$

și

$$4(3r+2n)r^2 + 2(r+n)\;(3r+2n)r - 6(r+n)r^2$$

$$-n\rho(3r+2n) - 3n\rho r = o$$

dacă îmulțim prima egalitate cu $4\,(3r+2n)^{\frac{3}{2}}$ și a doua cu $4r^{\frac{3}{2}}(3r+2n)^{\frac{3}{2}}$.

Desvoltând și ordonând termenii în egalitățile de mai sus, avem în definitiv :

$$6r^3 + 2nr^2 - 9n\rho r - 4n^2\rho = o \qquad \text{(I'')}$$

și

$$6r^3 + 6nr^2 - n\,(3\rho - 2n)\,r - n^2\rho = o \qquad \text{(II'')}$$

In loc de a rezolvà aceste ecuații direct, pentru a găsi rapoarturile $r$, care fac costul minimum, vom proceda altfel.

2

Aceste ecuații fiind de gradul al treilea în raport cu $r$ prezintă fiecare câte o variație între $r=o$ și $r=+\infty$ și deci suntem siguri că fiecare din ele va avea câte o rădăcină pozitivă. Această rădăcină depinde de valorile parametrilor $n$ și $\rho$; vom procedà în mod indirect: dându-ne diferite valori a lui $r$, vom calculà apoi respectiv pe $\rho$. Pentru aceasta să tragem din ambele egalități valorile lui $\rho$ și spre deosebire să însemnăm cu $\rho_o$ pe cel extras din prima și cu $\rho_e$ pe cel extras din a doua egalitate; vom avea :

$$(a). \qquad \rho_o = \frac{3r+n}{9r+4n} \cdot \frac{2r^2}{n}$$

și

$$(b). \qquad \rho_e = \frac{3r^2+3nr+n^2}{3r+n} \cdot \frac{2r}{n}.$$

Dând lui $n$ și $r$ valorile care se întâlnesc în practică și ținând seamă de limitele, între care raportul $\rho$ al costurilor unitare se află coprins, ajungem la rezultatele consemnate în următoarele două tablouri :

## TABLOUL *a*

Raporturile $\rho_o$.

| $r=$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=10$ | 14,14 | 25,46 | 40,09 | 58,07 | 79,37 | 104,00 | 131,97 | 163,27 | 197,90 | 235,86 | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . |
| $n=15$ | . . . | 16,67 | 26,32 | 38,18 | 52,27 | 68,57 | 87,10 | 107,84 | 130,81 | 156,00 | 183,41 | 213,04 | . . . . | . . . . |
| $n=20$ | . . . | . . . | 19,47 | 28,29 | 38,77 | 50,91 | 64,72 | 80,19 | 97,33 | 116,13 | 136,60 | 158,73 | 182,53 | 208,00 |

## TABLOUL *b*

### Raporturile $\rho_e$.

| $r$ | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=10$ | 35,00 | 66,82 | 108,57 | 160,29 | 222,00 | 293,70 | 375,40 | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $n=15$ | 28,89 | 52,50 | 82,67 | 119,44 | 162,86 | 212,92 | 269,63 | 333,00 | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $n=20$ | 26,00 | 45,58 | 70,00 | 99,34 | 133,64 | 172,90 | 217,14 | 266,37 | 320,59 | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

Pentru valorile lui $r$ intermediare celor pentru care s'au calculat tablourile *(a)* și *(b)*, se pot obține valorile corespunzătoare ale lui $\rho$, și vice-versa, prin interpolații lineare, sau servindu-ne de diagrame, construite în acest scop, ca acelea ce se pot vedeà în *Planșa I* anexată la finele *Buletinului*.

In următorul exemplu voi arătà cum se pot folosi cele două Tablouri *(a)* și *(b)* sau diagramele din Planșa I, și cum am înțeles că tablourile I, II, și III pot servi pentru comparații de cost.

*Exemplul III. — Să se construiască, în condițiuni de minimum de cost, dale și grinzi de beton armat, cu secțiuni dreptunghiulare și armaturi simple, materialele de întrebuințat fiind caracterizate prin următoarele calități.*

*Ferul:*

$$\sigma_e \text{ max.} = 1200 \text{ kgr/cm}^2$$

$$c_e = 600 \times 7{,}850 = 4710 \text{ lei/m}^3$$

și

$$E_e = 2150000 \text{ kgr/cm}^2$$

*Betonul de ciment Portland:*

$$\sigma_o \text{ max.} = 40 \text{ kgr/cm}^2$$
$$c_o = 60 \text{ lei/m}^3$$

și
$$n = \frac{2150000}{E_o} = 15$$

deci
$$E_o = 143330 \text{ kgr/cm}^2$$

In aceste condițiuni avem imediat:

$$\rho = \frac{c_e}{c_o} = 78{,}5.$$

*a)* Să presupunem că voim să atingem *limita de travaliu admisibil în beton*, sau, cu alte cuvinte, menținem $\sigma_o$ constant și considerăm ca variabilă pe $\sigma_e$; căutând în Tabloul *(a)* raportul $r$, care corespunde lui $\rho_o = 78{,}5$ și anume, făcând o interpolație lineară între mărginașele acestei valori a lui $r$, vom avea:

$$r = 40 + \frac{5.(78{,}50 - 68{,}57)}{(87{,}10 - 68{,}57)} = \text{rot. } 43.$$

Travaliul, ce ar rezultà pentru armatură, ar fi:

$$\sigma_e = 43 \times 40 = 1720 \text{ kgr/cm}^2.$$

*b)* Să presupunem că vroim să atingem *limita de travaliu admisibil în fer*, sau, cu alte cuvinte, menținem $\sigma_e$ constant și considerăm ca variabilă pe $\sigma_o$; prin un procedeu analog cu cel de sub (*a*) și folosindu-ne de Tabloul (*b*), găsim:

$$r = \text{rot. } 19.$$

Travaliul, ce ar urma să admitem pentru beton, rezultă din:

$$\sigma_o = \frac{1200}{19} = 62{,}6 \text{ kgr/cm}^2.$$

Atât travaliul de 1720 kgr/cm³, rezultat din condiția (*a*) pentru fer, cât și acela de 62,6 kgr/cm², rezultat din condiția (*b*) pentru beton, nefiind admisibile, va trebui să renunțăm la realizarea unui minimum absolut de cost, în cazul de față; vom alege însă din următoarele trei cazuri, pe acela pentru care costul este cel mai mic:

*a'*) Menținând $r = 43$, cum s'a găsit prin condițiunea (*a*), vom supune *ferul* nu la travaliul de 1720 kgr/cm², ci la travaliul maxim, ce putem admite, de 1200 kgr/cm², adică vom cerceta costul pentru:

$$\sigma_e = 1200 \text{ kgr/cm}^2$$

$$\sigma_o = \frac{1200}{43} = \text{rot. } 28 \text{ kgr/cm}^2$$

fiind $r = 43.$

*b'*) Menținând $r = 19$, cum s'a găsit prin condițiunea (*b*), vom supune *betonul* nu la travaliul de 62,6 kgr/cm², ci la travaliul maxim, ce putem admite, de 40 kgr/cm². adică vom cerceta costul pentru:

$$\sigma_o = 40 \text{ kgr/cm}^2$$

$$\sigma_e = 40 \times 19 = 760 \text{ kgr/cm}^2$$

fiind $r = 19.$

*c)* In fine, vom considera cazul, când întrebuințăm *ambele materiale* sub maximul travaliurilor admisibile, adică:

$$\sigma_e = 1200 \text{ kgr/cm}^2$$

$$\sigma_o = 40 \text{ kgr/cm}^2$$

deci $r = \frac{1200}{40} = 30.$

Să comparăm costurile rezultate în cele 3 ipoteze.

Expresiunea generală a costului se poate aduce ușor la forma:

$$k = (1 + p\,\rho) \sqrt{\frac{\lambda}{\sigma_o}}$$

Coeficientul $\rho$ are valoarea constantă 78,5.

Coeficienții $p$ și $\lambda$ se obțin din tablele I, II, III (în cazul de față din tabla I, fiind $n = 15$), pentru fiecare caz, fie direct, fie prin interpolații lineare; astfel am găsit:

Cazul *a'*):

$$p = \frac{1}{330}$$

$$\lambda = \frac{6982}{825}$$

prin interpolare;

Cazul $b'$):

$$p = \frac{1}{85}$$

$$\lambda = \frac{1196}{225}$$

prin interpolare;

Cazul $c$):

$$p = \frac{1}{180}$$

$$\lambda = \frac{27}{4}$$

înscrise în tablou.

Substituind valorile numerice ale lui $\rho$, $p$, $\lambda$ și $\sigma_o$, pentru fiecare caz, în expresiunea costului, și făcând raporturile rezultatelor, vom avea:

$$\frac{k_{b'}}{k_{a'}} = \frac{\left(1 + \frac{78{,}5}{85}\right)\sqrt{\frac{1196}{40 \times 225}}}{\left(1 + \frac{78{,}5}{330}\right)\sqrt{\frac{6982}{28 \times 825}}} = 1{,}026$$

și

$$\frac{k_{b'}}{k_c} = \frac{\left(1 + \frac{78{,}5}{85}\right)\sqrt{\frac{1196}{40 \times 225}}}{\left(1 + \frac{78{,}5}{180}\right)\sqrt{\frac{27}{40 \times 4}}} = 1{,}188$$

deci:

$$\frac{k_{a'}}{k_c} = \frac{1{,}188}{1{,}026} = 1{,}138$$

Se vede imediat, din această comparație, *că cel mai mic cost se obține, în cazul prezentat, când întrebuințăm ambele materiale sub maximul de travaliuri admisibile* [1]).

Deci, soluția problemei de minim de cost, cu materialele admise

[1]) Voiu arăta mai la urmă, că aceasta nu se întâmplă în totdeauna, precizând cazurile, în care suntem nevoiți a ne mulțumi să întrebuințăm ambele materiale sub limitele de travaliuri admisibile.

și sub condiția de a nu se întrece nici unul din travaliurile maxime admisibile, este, de a se supune materialele să lucreze la limite.

Pentru a putea trece mai repede la celelalte tipuri de grinzi, las în această stare chestiunea minimului de cost, cu obligația de a o complecta la urmă.

De altfel elementele date pot servi cu destul succes pentru atingerea unei soluțiuni practice a chestiunei, urmându-se calea indicată prin exemplul dat.

Și acum să rezumez problema de construcțiune a grinzilor și dalelor de beton armat cu secțiune dreptunghiulară și armatură simplă.

Vom avea de făcut următoarele calcule:

1⁰) Determinarea raportului $\rho$ al costurilor unitare, pentru materialele ce ne hotărâm a întrebuință, puse gata în operă.

2⁰) Stabilirea travaliurilor maxime admisibile ale acelor materiale, — fie-că s'ar determină direct prin încercări, fie-că s'ar luà prin analogie cu cele admise în lucrări executate, — precum și a modulelor de elasticitate $E_e$ și $E_o$.

3⁰) Vom face calculul de minim de cost, în modul arătat la exemplul III, în urma căruia ne vom putea fixà, dacă trebue să utilizăm ambele materiale sub limita de travaliu admisibil, sau numai pe unul și anume pe care; vom avea stabilite, în urma acestui calcul, cantitățile $r$, $\sigma_e$ și $\sigma_o$.

4⁰) Vom determinà elementele secțiunilor, cu ajutorul tablourilor I, II sau III și al formulelor:

$$x_o = \frac{n}{r+n} h = \alpha h \tag{13}$$

$$y_o = \frac{r}{r+n} h = \beta h \tag{14}$$

$$F_e = \frac{\alpha}{2r} b h = p b h \tag{15}$$

$$S = \frac{\alpha^2}{2} b h^2 = \gamma b h^2 \tag{16}$$

$$I = \alpha^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} \right) b h^3 = \mu b h^3 \tag{17}$$

$$bh^2 = \lambda \frac{M}{\sigma_o} = \lambda r \frac{M}{\sigma_e} \qquad (18)$$

unde $$\lambda = \frac{6(r+n)^2}{n(3r+2n)},$$

$$\tau = \frac{A\,S}{v_o\,I} \qquad (3)$$

$$a = \frac{A\,S}{U\,I} \qquad (4)$$

procedând în modul arătat la exemplele 1 și 2.

București, 22 Februarie 1906.
(Va urma)

**Ion M. Ionescu**
Inginer în Serviciul central de întreținere C. F. R.

---

## NECONCORDANȚA FORMULELOR FUNDAMENTALE ALE HIDRAULICIEI CU REZULTATELE CERCETARILOR FACUTE PE DIFERITE RIURI

Sunt de toți cunoscute însemnatele lucrări făcute în hidraulică de D-l *Bazin*, căruia se datorește putem zice, baza hidraulicei relativ la scurgerea lichidelor.

Insemnatele lucrări ale acestui savant hidraulician au fost complectate prin alte nenumărate cercetări, emițându-se o mulțime de formule relativ la chestiunile în studiu.

Toate cercetările însă relativ la această parte a hidraulicei nu au putut îmbrățișà diversitatea fenomenelor și legile fizice ale scurgerei tuturor apelor diferitelor râuri și dacă formulele rezultate, sunt monumente științifice pentru experiențele de laboratoriu, ele nu pot înfățișà inginerului o siguranță absolută pentru calculele ce este chemat a face relativ la stabilirea regimului unui fluviu, pe baza căruia să poată proiecta lucrările necesare.