Nr. 6. București, Iunie 1907. Anul XXIII.

BULETINUL
SOCIETAȚII POLITECNICE

PARTEA TECNICĂ

Calculul plăcilor de beton armat.

Imi propun, în cele ce urmează, să transform formulele date în Circulara prusiană pentru calculul pieselor de beton armat, în altele mai ușor de aplicat în practică pentru proectarea construcțiunilor, transformări ale căror rezultate le-am dat elevilor anului III ai Școalei de Poduri și Șosele în cursul lunei Martie trecut.

Se știe că forma supt care sunt date formulele prusiane le face ca ele să nu se preteze bine la facerea proiectelor, căci ele presupun cunoscute dimensiunile secțiunilor betonului și secțiunea armaturilor. Trebuește dar să se admită o anumită secțiune, să se verifice, să o modificăm de mai multe ori, până se ajunge la o soluțiune acceptabilă față de rezistențele admisibile ale betonului și ferului, sau de unele considerațiuni practice. Pentru a se suprimà din încercări, sau a le evità cu totul, s'au dat regule aproximative, sau tabele, dintre care unele au și fost reproduse în noua Circulară prusiană din 24 Mai (stil nou) 1907. Cum această Circulară nouă a modificat unele din principiile și valorile numerice date în vechea Circulară din 16 Aprilie 1904, pe baza cărora s'a făcut și studiul comparativ din numărul de pe luna Mai 1907 al Buletinului Societății Politecnice, voi începe mai întâiu prin a rezumà normele de calcul date de noua Circulară.

Normele de calcul ale Circulării Prusiane. 1) Forțele exterioare, reacțiunile, momentele încovoetoare, puterile tăetoare, se vor determinà ca la solidele omogene cu secțiune constantă.

Pentru calculul greutății proprii a betonului armat se poate luà 2400 klgr/m³, afară dacă nu se face o măsurătoare exactă.

2) Deschiderea teoretică de introdus în calcule se va luà egală cu lumina, sporită cu lungimea unui reazem pentru grinzi, cu grosimea plăcii la mijloc pentru cele simplu rezemate, și cu grosimea reazemelor la cele continue.

3) La grinzi continue se poate lua ca moment încovoetor *aproximativ* 4/5 din momentul grinzii independente de aceiași deschidere. Nu se va admite continuitate pe mai mult de 3 deschideri. Se vor cercetà cu deamănuntul momentele negative și se vor pune armaturi în consecință. Dacă sarcina accidentală trece peste 1000 klgr/m², se vor face și ipoteze de încărcări parțiale. Incastrare nu se va admite, decât dacă ea se realizează de fapt. La grinzi continue reazemele nu trebue să se poată denivelà.

4) La plăcile cu nervuri, se va considerà la calcule ca atașate nervurei o porțiune din placă, de o parte și de alta a axei nervurii, de cel mult o lungime egală cu 1/6 din deschiderea nervurii. Plăcii nu i se va da nici odată o grosime mai mică ca 8 cm., chiar dacă nu ar fi necesară pentru rezistență.

5 La plăcile rezemate pe patru laturi, cu lungime a și lățime b și cu nervuri încrucișate, se va luà ca moment încovoetor $M = \frac{pl^2}{12}$ dacă $b < a < 1{,}5\,b$. De momentele negative se va ține seamă la dispoziția armăturilor.

6) Se va sporì cu cel mult 50% efectele puterilor accidentale, care produc vibrațiuni mari, ca în sălile de întruniri, de dans, în fabrici, depozite, etc.; și cu cel mult 100% când ele produc izbituri, ca la pasage, etc.

7) Ca rezistențe admisibile și alte valori practice se va lua:

Compresiune simplă în beton : 1/10 din rezistența la rupere prin compresiune.

Compresiune în beton provocată de încovoere : 1/6 din rezistența la rupere prin compresiune.

Tensiunea și compresiunea ferului : 1000 kgr/cm² cel mult.

Alunecarea în beton : 4,5 kgr/cm² sau 1/5 din rezistența la rupere prin alunecare.

Aderența betonului de fer: să nu întreacă alunecarea în beton.

Raportul între coeficienții de elasticitate ai ferului și betonului, pe care-l vom însemnà cu μ se va luà egal cu 15.

Tensiunile în beton: cel mult 2/3 din rezistența la rupere prin tensiune, sau dacă nu se fac încercări, cel mult 1/10 din rezistența la rupere prin compresiune (pentru cazul indicat la No. 8).

Coeficientul de siguranță pentru flambagiul armaturilor: 5.

8) Ipotezele în care se vor face calculul pieselor încovoiate sunt: a) Lungirile diferitelor fibre sunt proporționale cu distanțele lor la axele neutre și cu coeficienții de elasticitate al materialului acelor fibre; b) Betonul nu ia tensiuni. Pentru construcțiunile expuse la intemperii, umezeală, gazele ce esă pe coșuri etc., spre a nu fi temere de crăpături se va verificà și maximum rezistenții la tensiune în beton, în ipoteza că betonul ia și tensiuni în aceiaș măsură ca și compresiunile.

9) Se va verificà rezistența la alunecare și se vor dispune armaturi speciale când ea nu ar puteà fi luată de beton numai; se va verificà și aderența. Deplasarea barelor în beton trebue să fie împiedicată chiar prin forma armaturelor.

10) Stâlpii sau coloanele se vor verificà la compresiune și la flambaj cu formula lui *Euler*, precum și la acțiunea încărcărilor unilaterale eventuale. Armaturile se vor legà între ele prin legături transversale la distanță egală aproximativ cu cea mai mică secțiune transversală a piesei, însă cel mult la de 30 ori grosimea armaturilor longitudinale. De verificarea la flambaj ne putem dispensà, dacă lungimea piesei e mai mică ca de 18 ori dimensiunea transversală cea mai mică a ei.

Calculul plăcilor fără nervuri. Să însemnăm cu b lățimea plăcii, cu h înălțimea ei până la armaturile întinse, cu μ, după cum am spus, raportul între coeficienții de elasticitate ai ferului și betonului; cu R_b și R_f rezistențele maxime în beton și fer provocate de un moment încovoetor M în o secțiune considerată. Distanța a din axa armaturilor la marginea betonului nu se calculează, ci se fixează prin considerațiuni practice, cam 1/6 h, însă așà fel încât armaturile să fie acoperite cu cel puțin 1 cm. de către beton. Fie x distanța dela axa neutră la fibra cea mai comprimată a betonului, și Ω_f secțiunea armaturilor pe lățimea b.

Procedeul de calcul, pe care îl voiu justificà pe urmă, este următorul:

Calculăm mai întâiu doi coeficienți α, β care rămân aceiași pentru o rezistență admisibilă dată armaturilor :

$$1)\qquad \alpha=\sqrt{\frac{R_f}{2\mu}},\qquad\qquad 2)\qquad \alpha\beta=\frac{1}{6}=0{,}1666.........$$

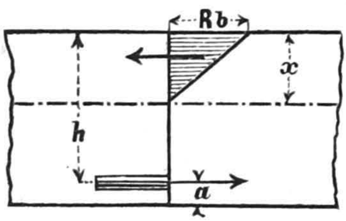
Atunci avem :

$$3)\qquad x=\frac{\sqrt{\frac{M}{b}}}{\alpha+\beta R_b},$$

cu care găsim apoi:

$$4)\qquad h=\frac{x}{3}+\frac{2M}{bxR_b}.$$

$$5)\qquad \Omega_f=\frac{bxR_b}{2R_f}.$$



(Fig. 1)

In particular dacă facem $\mu=15$, $R_f=1000$, după Circulara prusiană, găsim :

$$3')\qquad x=\frac{\sqrt{\frac{M}{b}}}{5{,}773+0{,}029R_b}.$$

Odată ce rezistența betonului cu care voim să facem construcțiunea este fixată, atunci punând $1:(\alpha+\beta R_b)=c$, relația (3) devine :

$$3'')\qquad x=c\sqrt{\frac{M}{b}},$$

formulă care se poate calculà cu o singură mișcare a liniuții unei rigle de calcul. De altfel se vede că și α, β, Ω_f și al doilea termen al lui h se pot calculà logaritmic.

Exemplu. Să presupunem că voim a calculà cu valorile $\mu=15$, $R_f=1000$ o placă al cărui moment încovoetor pentru **1** m. de lățime este 40000 kgrcm. In acest caz $b=1$ m. $=100$ cm și formula (3′) ne dă :

$$x=\frac{\sqrt{40000:100}}{5{,}773+0{,}029\times40}=\frac{20}{6{,}933}=2{,}9 \text{ cm.}$$

de unde cu (4) și (5) găsim:

$$h=\frac{2{,}9}{3}+\frac{2\times 40000}{100\times 2{,}9\times 40}=0{,}97+\frac{20}{2{,}9}=0{,}97+6{,}89=7{,}9 \text{ cm.}$$

$$a={}^1/_6\, h=1{,}3 \text{ cm.}$$

$$\Omega_f=\frac{100\times 2{,}9\times 40}{2\times 1000}=5{,}8 \text{ cm}^2.$$

Să demonstrăm această regulă. Formulele date de circulara prusiană pentru acest caz, cu notațiunile ce le-am ales aci, sunt următoarele:

$$6)\qquad x=\frac{\mu\Omega_f}{b}\left[\sqrt{1+\frac{2bh}{\mu\Omega_f}}-1\right].$$

$$7)\quad R_b=\frac{2M}{bx\left(h-\frac{x}{3}\right)}.\qquad\qquad 8)\quad R_f=\frac{M}{\Omega_f\left(h-\frac{x}{3}\right)}.$$

Dacă rezolvăm pe (7) în raport cu h găsim valoarea lui dată de (4), iar dacă eliminăm pe M din (7) și (8) prin împărțire și rezolvăm rezultatul în raport cu Ω_f dăm peste relațiunea (5). Ne rămâne dar numai a stabili relațiunea (3). Izolăm radicalul din (6), ridicăm la pătrat și obținem:

$$\left(1+\frac{bx}{\mu\Omega_f}\right)^2=1+\frac{2bx}{\mu\Omega_f}+\frac{b^2x^2}{\mu^2\Omega_f^2}=1+\frac{2bh}{\mu\Omega_f},$$

$$\therefore \qquad x+\frac{bx^2}{2\mu\Omega_f}=h.$$

Inlocuim aci pe h și Ω_f cu valorile date de (4) și (5) și avem:

$$x+\frac{xR_f}{\mu R_b}=\frac{x}{3}+\frac{2M}{bxR_b},$$

$$\therefore \qquad x^2\frac{R_f}{2\mu}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{2\mu}{R_f}R_b\right)=\frac{M}{b},$$

$$\therefore \qquad x\sqrt{\frac{R_f}{2\mu}}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{2\mu}{R_f}.R_b\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{M}{b}},$$

și dacă introducem notațiunile (1) și (2) avem:

$$7)\qquad x\alpha\left(1+\frac{R_b}{3\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{M}{b}}.$$

Dezvoltăm parenteza în serie după binomul lui Newton. Putem face acest lucru căci termenul $\frac{1}{3} \cdot \frac{2\mu}{R_f} . R_b$ este în general mai mic cu 1. In adevăr în circulări oficiale μ se ià cel mult 15; (afară de circulara elvețiană, care ià R_b mai mic) R_b cel mult 50. (Tabelele circulării prusiane nu merg de cât până la $R_b = 45$) și cum R_f se ià cel puțin 800, se vede că acel termen este cel mult $\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \times 15 \times 50}{800} = 0{,}625$, In cazurile obișnuite pentru $\mu = 15$, $R_f = 1000$, $R_b = 30$ acel termen este 0,30. Putem apoi oprì în dezvoltare numai primii doi termeni, căci chiar al treilea este neglijabil pe lângă ceilalți doi. In adevăr, pentru cazurile numerice date mai sus avem :

$$(1 + 0{,}625)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} . 0{,}625 = 1{,}31 ; \qquad \sqrt{1{,}625} = 1{,}27$$

$$(1 + 0{,}3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} . 0{,}30 = 1{,}15 ; \qquad \sqrt{1{,}30} = 1{,}14.$$

Insă $1:1{,}31 = 0{,}76$ diferă de $1:1{,}27 = 0{,}79$ nici cu 3%; iar $1:1{,}15 = 0{,}87$ diferă de $1:1{,}14 = 0{,}88$ cam cu 1%. Așà dar din (7) se vede că x s'ar alterà cu 1 până la 4 cm. la metru, ceiace este cu totul admisibil în practică.

Dezvoltăm dar parenteza din (7), oprim numai primii doi termeni ai dezvoltării și avem :

$$x\alpha\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{Rb}{\alpha^2}\right) = \sqrt{\frac{M}{b}},$$

$$\therefore \qquad x\left(\alpha + \frac{1}{6\alpha} . Rb\right) = \sqrt{\frac{M}{b}},$$

unde înlocuind $1/6\,\alpha$ cu β după (2) și rezolvând în raport cu x dăm peste (3).

Calculul plăcilor cu nervuri. Dacă axa neutră cade pe placă, se aplică aceleași formule ca mai sus, căci betonul de supt axa neutră este ca și cum nu ar existà pentru rezistență. In cazul contrariu, Circulara prescrie ca să se neglijeze rezistența betonului în nervuri. Fie d grosimea plăcii, care se determină prin considerațiuni practice, sau ca să reziste pe distanța între nervuri, și care cum am văzut, nu se face mai mică ca 8 cm.; fie h înălțimea nervurii dela fața plăcii până la armaturi (fig. 2).

Pentru calculul lui h și al lui Ω_f procedăm în modul următor:

Calculăm cantitățile γ și δ prin relațiunile:

$$1) \qquad \gamma = \frac{R_f}{\mu R_b}, \qquad 2) \qquad \delta = \frac{6M}{bd^2 R_b}.$$

Calculăm apoi pe u dat de

$$3) \qquad u = \frac{\delta - 1}{3\gamma + \delta + (4u - 2)},$$

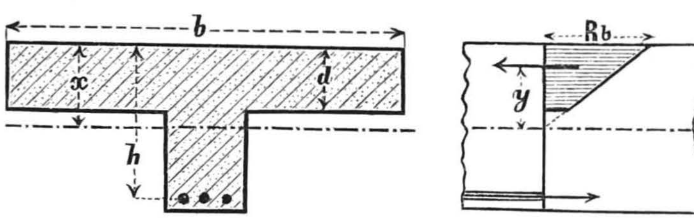
*neglijând mai întâiu parenteza dela numitor, introducând apoi în ea valoarea găsită pentru **u**, apoi noua valoare a lui **u**, până ce două valori consecutive diferă oricât de puțin voim între ele. De regulă două, cel mult trei încercări, ajung. Valorile obținute pentru **u** trebue să fie cel puțin* **0,5** *și să nu întreacă pe* **1**; *altfel ele nu sunt admisibile. Odată **u** găsit, vom calculà pe **h** și Ω_f cu formulele:*

$$4) \qquad h = \frac{d(1+\gamma)}{2(1-u)}$$

$$5) \qquad \Omega = \frac{bdu}{\mu\gamma}$$

*Dacă e necesar a ștì și poziția axei neutre, vom calculà pe **u** cu relațiunea:*

$$6) \qquad x = \frac{d}{2(1-u)}$$



(Fig. 2).

Formulele (1), (2), (4), (5), (6) sunt calculabile cu logaritmi sau cu riglele de calcul.

Exemplu. Fie o placă la care $b = 120$ cm. și $d = 10$ cm. Fie $\mu = 12{,}5$, $R_f = 1000$, $R_b = 40$ kgr/cm². Fie $M = 1600000$ klg. cm. Avem succesiv:

$$\gamma = \frac{1000}{12{,}5 \times 40} = 2,$$

$$\delta = \frac{6 \times 1600000}{120 \times 10^2 \times 40} = 20,$$

$$u = \frac{20-1}{3 \times 2 + 20} = \frac{19}{26} = 0{,}73;\; u = \frac{20-1}{26 + (4 \times 0{,}73 - 2)} = \frac{19}{26{,}92} = 0{,}71$$

$$(0{,}5 < u < 1{,}0).$$

Apoi :

$$h = \frac{10(1+2)}{2(1-0{,}71)} = \frac{30}{0{,}59} = 51 \text{ cm}, \qquad \Omega_f = \frac{120 \times 10 \times 0{,}71}{12{,}5 \times 2} = 34{,}08 \text{ cm}^2$$

$$x = \frac{10}{2(1-0{,}71)} = 17 \text{ cm}.$$

Să demonstrăm formulele date mai sus. Pentru cazul de față, Circulara prusiană dă formulele următoare, în care y este distanța de la axa neutră la centrul de presiune al părții comprimate a betonului (fig. 2):

$$7) \qquad x = \frac{\mu h \Omega_f + \frac{1}{2} b d^2}{b d + \mu \Omega_f}.$$

$$8) \qquad y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{6(2x-d)} = \frac{2}{3}\left[x + \frac{(x-d^2)}{(2x-d)}\right]$$

$$9) \qquad R_f = \frac{M}{\Omega_f(h-x+y)}.$$

$$10) \qquad R_b = R_f \frac{x}{\mu(h-x)}.$$

Să punem pe x supt forma dată de (6), cu alte cuvinte să facem o schimbare de variabilă, înlocuind x prin u. Cnm $x > d$, (căci am presupus că axa neutră întâlnește nervura), trebue să avem :

$$d < \frac{d}{2(1-u)}, \qquad \therefore \qquad 2 < \frac{1}{1-u}.$$

Se vede de acì că $u < 1$, căci altfel membrul al doilea ar fi negativ, și neegalitatea imposibilă. Putem înmulțì astfel cu $(1-u)$ și avem :

$$2 - 2u < 1, \qquad \therefore \qquad u > 0{,}5.$$

Așa dar $0{,}5 < u < 1$, după cum am spus în regula dată. Dacă găsim $u < 0{,}5$ atunci axa neutră cade pe placă și se aplică formulele date la cazul precedent. Dacă $u = 0{,}5$ axa neutră cade la baza plăcii și se poate întrebuință indiferent metodă dată aci sau cea precedentă.

Din (10) scoatem :

$$h = x + \frac{R_f}{\mu R_b} x = x\left(1 + \frac{R_f}{\mu R_b}\right)$$

Inlocuind pe $R_f/\mu R_b$ prin γ după (1) și pe x cu valoarea lui dată de (6) avem pe h dat supt forma (4).

Gonind numitorul în (7) și înlocuind pe x și h cu valorile lor date de (6) și (4) găsim :

$$\frac{d}{2(1-u)}(bd + \mu\Omega_f) = \mu\frac{d(1+\gamma)}{2(1-u)}\Omega_f + \frac{1}{2}bd^2,$$

$$\therefore \quad bd + \mu\Omega_f = \mu\Omega_f(1+\gamma) + bd(1-u),$$

$$\therefore \quad bdu = \mu\Omega_f\gamma,$$

de unde scoatem imediat relațiunea (5).

Din (8) și (9) scoatem acum :

$$y - x = -\frac{d}{2} + \frac{d^2}{2(2x-d)}, \qquad h - x + y = \frac{M}{R_f\Omega_f},$$

de unde prin scădere :

$$h = \frac{d}{2} + \frac{M}{R_f\Omega_f} - \frac{d^2}{6(2x-d)}.$$

Inlocuim aci pe h, Ω_f și x prin valorile lor date de (4), (5), (6) și avem :

$$\frac{d}{2}\cdot\frac{1+\gamma}{1-u} = \frac{d}{2} + \frac{\mu\gamma M}{bduR_f} - \frac{d^2}{6\left(\frac{d}{1-u} - d\right)},$$

$$\therefore \quad \frac{1+\gamma}{1-u} = 1 + \frac{2\mu\gamma M}{bd^2uR_f} - \frac{1-u}{3u},$$

$$\therefore \quad 3u(1+\gamma) = 3u(1-u) + \frac{6\mu\gamma M}{bd^2R_f}(1-u) - (1-u)^2$$

$$\therefore \quad 4u^2 + \left(3\gamma + \frac{6\mu\gamma M}{bd^2R_f} - 2\right)u - \left(\frac{6\mu\gamma M}{bd^2R_f} - 1\right) = o.$$

Inlocuind în cele două fracțiuni pe γ cu valoarea sa dată de (1), și observând că acele fracțiuni devin atunci ceiace am însemnat la (2) cu δ, găsim :

$$11) \qquad 4u^2+(3\gamma+\delta-2)u-(\delta-1)=o.$$

Vom găsì pe u rezolvând această ecuație. Cum ea are două rădăcini, să vedem care este admisibilă. In acest scop vom arătà că $\delta>1$ și că prin urmare avem o rădăcină negativă, care nu este acceptabilă, u trebuind se fie coprins între 0,5 și 1. Condițiunea $\delta>1$ ne conduce la :

$$6M>bd^2R_b$$

$$\therefore \qquad M>\frac{dR_b}{2}.b.\frac{d}{3}$$

Pusă sub această formă neegalitatea este evidentă, căci dacă axa neutră cade pe nervură atunci compresiunea în beton e mai mare ca $\frac{dR_b}{2}.b$ (valoare corespondentă cazului când axa cade la baza plăcii) iar depărtarea centrului de presiune în beton de la armaturi este mai mare ca $\frac{d}{3}$, acel centru fiind la mai mult de $\frac{d}{2}$ de la baza plăcii. Membrul al doilea este dar mult mai mic ca momentul eforturilor interioare în beton și armaturi, care este egal cu momentul încovoetor M.

Ecuația (11) are deci totdeauna o rădăcină negativă, neacceptabilă.

Această ecuație s'ar puteà deslegà direct; este mai ușor însă a o deslegà prin încercări succesive în modul următor. Din (11) scoatem :

$$u(4u+3\gamma+\delta-2)=\delta-1$$

$$\therefore \qquad u=\frac{\delta-1}{3\gamma+\delta+(4u-2)}$$

Cum $\delta>1$ și $u>0{,}5$ se vede că numărătorul și numitorul sunt pozitivi, deci și u. Expresiunea precedentă ne dă dar pe u care ne trebue. Știm că minimum lui u este 0,5 pentru care parenteza dela numitor se anulează. Deci $(\delta-1):(3\gamma+\delta)$ este o primă valoare apropiată a lui u. Pe u găsit îl introducem în parenteză și după câteva încercări vom găsì pe u exact cu ori câte zecimale voim. Regula dată este astfel justificată.

Pentru calculul plăcilor cu nervuri, circulara nu dă nici o simplificare, nici tabele.

Observare. Calculele indicate până aci presupun bine înţeles, ca şi în circulara prusiană, că armaturile se fac din vergele sau fiare profilate de secţiuni mici, aşa ca să se poată admite că repartizarea eforturilor să se facă uniform pe toată secţiunea armaturilor. In cazul contrariu, trebue să ţinem seamă şi de repartizarea eforturilor în armatură. In acest caz, sau când avem armaturi duble, pare dificil a se ajunge la rezultate simple practice, aşa în cât rezolvarea prin încercări se impune. Acelaş lucru se întâmplă şi când betonul are alte secţiuni decât dreptunghiulară sau în T. Intr'un număr viitor voi dà câteva exemple numerice de acest fel se calcule, precum şi modul de procedare în cazul construcţiunilor la care circulara cere a se luà în considerare şi tensiunile în beton.

I. Ionescu
Inginer-Şef.
Profesor la Şcoala de Poduri şi Şosele.

† BENJAMIN BAKER

La 6/19 Mai 1907 a încetat din viaţă, pe neaşteptate, *Benjamin Baker*, unul din cei mai mari, — şi după unii cel mai mare, — inginer al timpurilor moderne, celebrul autor al podului peste *Firth of Forth* din Scoţia, pod care susţine prin două deschideri de câte 521 metri, doă linii de cale ferată peste un golf al Mării Nordului.

Baker s'a născut la Tondu (Irlanda) la 19/31 Martie 1840. La etatea de 16 ani a intrat ca ucenic în o uzină metalurgică din Galia de Sud, unde s'a familiarizat cu fabricaţiunea ferului, cu proprietăţile şi calităţile lui, lucruri care i-au servit ulterior în practica lui de inginer. La 1860 trece ca asistent al lui *W. Wilson*, cu care a lucrat până la 1862 la gara Victoria din Londra şi la podul Grosvenor. De atunci încoace a lucrat aproape în continuu cu marele inginer englez *John Fowler*, afară de mici întreruperi, mai întâi la Metropolitanul Londrei, lucrare de o deo-