BULETINUL
SOCIETĂŢII POLITECNICE

PARTEA TECNICĂ

Calculul elementelor construcţiunilor de beton armat

(Urmare)

(A se vedeà Buletinul Nr. 4, Aprilie 1907, pag. 219).

4. Compresiunea simplă axială.

Am tratat la începutul acestui articol problema generală a încovoerii simple pentru piesele prizmatice drepte, cu aplicaţiune la diferite profile de grinzi mai des întâlnite în practică.

Inainte de a trece la problema mai complexă a eforturilor combinate: *„flexiune şi compresiune sau tensiune, flambaj,“* şi pentru a puteà atinge cu pregătire *„problema grinzilor curbe“*, voi tratà mai întâi *„compresiunea simplă“*, începând cu *„compresiunea simplă centrică sau axială“*.

Dacă o piesă prizmatică de beton, în care se află înecate bare metalice paralele cu axa acesteia, este apăsată de o sarcină P, lucrând axial. (fig. 1, planşa alăturată) secţiunea AB a piesei, situată la depărtarea l de o extremitate, se va deplasà în A′B′, la distanţa l' de aceiaş extremitate, presupusă fixă, aşà că trunchiul ABCD se va scurtà cu o cantitate foarte mică, $(l-l')$.

Admiţând că secţiunea plană înainte de deformaţie a solidului, rămâne tot plană şi după deformaţie şi numind:

σ_o efortul de compresiune specifică desvălită în beton,
σ_e » » » » » în armatură,
Ω suprafaţa totală a secţiunii drepte a piesei,
ω » » » » » a armaturii,
E modulul de elasticitate al armaturii,
e » » » » betonului.

vom puteà scrie următoarele relaţiuni:

$$P=(\Omega-\omega)\ \sigma_o+\omega\sigma_e. \qquad (1)$$

$$\frac{l-l'}{l}=\frac{\sigma_e^{m_e}}{E}=\frac{\sigma_o^{m_o}}{e}. \qquad (2)$$

Relațiunea (2), care exprimă că armatura urmărește betonul în deformația sa, este *„legea proporționalității potențiale“* între deformațiuni și eforturi.

Exponenții m_o și m_e sunt caracteristici materialelor. Astfel, după experiențele lui *Bach*, pentru beton m_o variază între 1,09 și 1,207 și depinde de dozaj, calitatea materialelor din amestec, modul de confecționare, etc.; pentru fer, m_e este aproape egal cu unitatea. Pentru practică se pot considerà ambii acești exponenți ca egali cu unitatea, ceiace revine la aplicarea *„legii de proporționalitate lineară“* între deformațiuni și eforturile specifice, precum am făcut și la problema flexiunii simple.

Cu modul acesta, ținând seamă că am notat $\frac{E}{e}$ prin n, expresiunea (2) devine:

$$\sigma_e=n\sigma_o \qquad (2')$$

iar expresiunea (1) devine:

$$P=[\Omega+(n-1).\omega]\sigma_o=\frac{[\Omega+(n-1).\omega]}{n}.\sigma_e \qquad (1)$$

Dacă mai însemnăm cu p raportul $\frac{\omega}{\Omega}$, ceiace anterior am numit *„procentul armaturii“*, prin simplificare, ajungem la următoarele formule:

$$\Omega=\frac{1}{1+(n-1)p}.\frac{P}{\sigma_o}=\frac{n}{1+(n-1)p}.\frac{P}{\sigma_e}$$

și

$$\omega=\frac{p}{1+(n-1)p.}.\frac{P}{\sigma_o}=\frac{np}{1+(n-1)p.}.\frac{P}{\sigma_e}.$$

Dacă vom pune, pentru prescurtare:

$$\varphi=\frac{1}{p}+(n-1),$$

formulele de mai sus devin:

$$\left.\begin{aligned} &P=\varphi p\Omega\sigma_o=\varphi.\omega.\sigma_o \\ \text{și}\qquad &P=\frac{\varphi.p\Omega\sigma_e}{n}=\frac{\varphi.\omega.\sigma_e}{n}\end{aligned}\right\}(I)$$

Coeficientul φ se poate luà din tabloul următor, calculat pentru p variind dela 0,01 la 0,05 și pentru cele 3 valori ale lui n: 10, 15 și 20.

$$\varphi = \frac{1}{p} + (n-1)$$

$p = \%$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
$n=10$	109,00	89,00	75,66	66,14	59,00	53,44	49,00	45,36	42,33	39,77	37,57	35,66	34,00	32,52	31,22	30,05	29,00
$n=15$	114,00	94,00	80,66	71,14	64,00	58,44	54,00	50,36	47,33	44,77	42,57	40,66	39,00	37,52	36,22	35,05	34,00
$n=20$	119,00	99,00	85,66	76,14	69,00	63,44	59,00	55,36	52,33	49,77	47,57	45,66	44,00	42,52	41,42	40,05	39,00

Cu ajutorul coeficienților φ, dați în tabloul de mai sus, putem calculà numai decât secțiunea Ω a piesei și secțiunea totală ω a armaturii, dacă cunoaștem sarcina P, căreia trebue să reziste piesa și dacă ne impunem unul din travaliuri precum și procentul de armatură.

Exemplu. Care sunt dimensiunile unei coloane de beton armat, de lungime mică), care trebue să suporte, cu o siguranță de 1/5 din limita de ruptură a materialului celui mai solicitat, o compresiune axială totală de 18000 kgr.?*

Raportul modulelor de elasticitate este 15; betonul se sdrobește sub 200 kgr/cm² presiune, iar pentru fer se poate admite un coeficient de rezistență practică la compresiune de 800 kgr/cm², coeficientul de siguranță fiind tot 5.

Am stabilit că:

$$\sigma_e = n\sigma_o$$

deci,

$$\sigma_e = 15 \times \frac{200}{5} = 600 \text{ kgr/cm}^2$$

*) Pentru piese supuse la compresiune, de lungimi mai mari, se va verifică rezistența la flambaj.

ceiace face un travaliu mai mic decât limita admisibilă pentru fer. Vom luà dar ca normă aceste travaliuri :

$$\sigma_o = 40 \text{ kgr/cm}^2$$

și

$$\sigma_e = 600 \text{ kgr/cm}^2.$$

Să admitem un procent de armatură de 2,5%; coeficientul corespunzător φ, este :

$$\varphi = 54{,}00.$$

Din sistemul (I) tragem imediat :

$$\omega = \frac{P}{\varphi . \sigma_o};$$

adică:

$$\omega = \frac{18000}{54 \times 40} = 8{,}33 \text{ cm}^2$$

iar:

$$\Omega = \frac{\omega}{p},$$

ne dă :

$$\Omega = \frac{8{,}3353}{0{,}0250} = 333 \text{ cm}^2.$$

Dacă secțiunea coloanei este patrată, latura patratului va fi:

$$a = \sqrt{333} = 18{,}5 \text{ cm}.$$

Dacă vom întrebuințà pentru armatură feare rotunde, vom puteà pune 8 feare de 12 mm. diametru.

5. Compresiune simplă excentrică.

Când o piesă prizmatică este solicitată de o putere, ce o apasă normal pe secțiunea ei transversală și lucrând într'un plan de simetrie al piesei, dar fără ca punctul de aplicație al puterii să coincidă cu centrul de greutate al figurii secțiunii transversale, se zice atunci că piesa este supusă la *compresiune excentrică simplă*. Deformația piesei se produce atunci, aproximativ, ca și cum fiecare secțiune transversală a ei ar efectuà o mică rotațiune în jurul unei axe situate în planul respectiv și perpendiculară pe planul de simetrie al piesei, în care lucrează puterea.

După cum punctul de aplicație al acestei puteri e mai aproape ori mai departe de centrul de greutate al secțiunii transversale, știm dela piesele omogene că putem aveà două cazuri de compresiune excentrică :

1) Când întreaga secţiune a piesei e apăsată şi atunci axa de rotaţie cade în exteriorul secţiunii sau cu alte cuvinte, punctul de aplicaţie al puterii solicitatoare este coprins în interiorul sâmburelui central al piesei.

2) Când parte din secţiunea piesei e apăsată şi parte întinsă şi atunci axa de rotaţie cade în exteriorul secţiunii sau cu alte cuvinte, punctul de aplicaţie al puterii solicitatoare iese din coprinsul sâmburelui central al piesei.

Aceleaşi cazuri distingem şi la piesele excentric apăsate, de beton armat şi formulele cunoscute pentru piesele omogene vor fi şi aci aplicabile, graţie ipotezelor făcute că deformaţia e plană şi linear proporţională cu eforturile, cu condiţie ca, în evaluarea *suprafeţei, momentului static* şi *momentului de inerţie* al secţiunii, să afectăm partea cuvenită armaturii cu coeficientul n, raportul modulelor de elasticitate al ferului şi betonului.

Cazul I. Să considerăm piesa din figura 2 a planşei alăturate, solicitată de puterea P, care lucrează în planul de simetrie XY normal la secţiune, dar al cărei punct de aplicaţie nu cade în punctul G — (centrul puterilor elastice, care ar produce o astfel de deformaţie, că secţiunea să poată fi considerată ca deplasându-se paralel cu ea însăşi) — ci într'un punct aşa că pe toată secţiunea se desvelesc numai eforturi de compresiune.

Este uşor de văzut, că poziţiunea punctului G se obţine din egalitatea :

$$z = \frac{n(F_e . a + F'_e . b) + \int_o^h v . u . du}{n(F_e + F'_e) + \int_o^h v . du.}$$

Numărătorul este momentul static S al secţiunii întregi în raport cu marginea ei inferioară, iar numitorul este aria totală Ω a acestei secţiuni, adică, putem scrie şi aci ceia ce ştiam :

$$S = \Omega . z.$$

precum şi :

$$I_o = I - \Omega z^2$$

fiind I_o momentul de inerţie al secţiunii în raport cu axa ce trece prin G paralel cu marginea inferioară, iar I momentul de inerţie al aceleiaş secţiuni în raport cu marginea inferioară.

Să scriem condițiile de echilibru între presiunea totală și eforturile desvelite:

Suma proiecților ne dă:

$$(1) \qquad \sigma_e F_e + \sigma'_e F'_e + \int_o^h \sigma . v . du = P$$

Teorema momentelor aplicată în raport cu marginea inferioară a secțiunii, ne dă:

$$(2) \qquad \sigma_e . F_e . a + \sigma'_e . F'_c . c + \int_o^h \sigma . v . u . du = P d.$$

Din condiția că deformația e plană, cași cum secțiunea A'B' ar săvârși o rotație în jurui axei proiectate în O, spre a veni în A''B'', așa că fibrele trunchiului AB A'B' se scurtează diferit, precum și din considerația că armatura urmărește betonul în deformația sa, fără alunecare pe suprafața de contact, tragem încă următoarele relațiuni geometrice:

$$(3) \qquad \sigma = \frac{u+w}{h+w} . \sigma_o$$

$$(4) \qquad \sigma_e = n . \frac{a+w}{h+w} . \sigma_o$$

$$(5) \qquad \sigma'_e = n . \frac{c+w}{h+w} . \sigma_o$$

Inlocuind σ, σ_e și σ'_e din primele 2 egalități prin egalurile lor din cele din urmă trei și grupând termenii, vom obține:

$$(1') \left[n(F_e . a + F'_e . c) + \int_o^h v . u . du \right] + w . \left[n(F_e + F'_e) + \int_o^h v . du \right] = \frac{P}{\sigma_o} . (h+w)$$

și

$$(2') \quad \left[n(F_e . a^2 + F'_e . c^2) + \int_o^h v . u^2 . du \right] + w . \left[n(F_e . a + F'_e . c) + \int_o^h v . u . du \right]$$

$$= \frac{P}{\sigma_o} . d . (h+w)$$

expresiuni, care simplificate se pot scrie așa:

$$(1'') \qquad S + w . \Omega = \frac{P}{\sigma_o} . (h+w)$$

$$(2'') \qquad I + w.S = \frac{P}{\sigma_o}.d.(h+w)$$

Luând ca necunoscute pe w și σ_o, vom scoate:

$$w = \frac{I - S.d}{\Omega.d - S} = \frac{I_o}{\Omega.(d-z)} - z.$$

și

$$\sigma_o = \frac{P.(h+w)}{S+w\Omega}$$

sau

$$\sigma_o = \frac{I + \Omega.d.h - S.(d+h)}{I.\Omega - S^2}.P$$

sau încă, înlocuind I și S prin egalurile lor arătate mai înainte; obținem:

$$\sigma_o = \frac{P}{\Omega} + \frac{P.(h-z).(d-z)}{I_o}$$

Dar: $P.(d-z) = M$ este momentul puterii P în raport cu punctul G; iar

$$h - z = x_o$$

este distanța dela axa ce trece prin centrul G la fibra cea mai depărtată; forma expresiunii lui σ_o, este ca și la piesele omogene:

$$\sigma_o = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mx_o}{I_o}.$$

Se poate ușor conchide că forma generală a expresiunii pentru compresiunea specifică într'un punct oarecare al piesei, este:

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \pm \frac{Mx}{I_o}$$

așà că vom aveà:

$$\sigma_e = n\left[\frac{P}{\Omega} + \frac{M(c-z)}{I_o}\right]$$

și

$$\sigma'_e = n\left[\frac{P}{\Omega} - \frac{M.(z-a)}{I_o}\right].$$

Și acì, ca și la piesele omogene, putem avea cazuri, când:

$$w = o$$

și atunci urmează că trebue să avem :

$$d = \frac{I}{S};$$

în care caz axa de rotație coincide cu marginea secțiunii sau este tangentă la aceasta.

Făcând să se învârtească planul care conține puterea P și supunând punctul de aplicație la condiția ca :

$$w = o$$

vom definì sâmburele central al secțiunii piesei eterogene.

Un alt caz mai poate fi, când avem :

$$w = \infty$$

și atunci avem :

$$d = \frac{S}{\Omega} = z,$$

adică cazul presiunii simple centrice.

Exemplu la cazul I. Fie a se calculà presiunile desvelite în beton și în armaturi, într'o piesă de lungime mică și având secțiunea din figura alăturată (fig. 3 din planșă) care e solicitată de o presiune totală P = 31750 kgr., lucrând în planul de simetrie XY, normal la secțiune și al cărei punct de aplicație se află la o distanță de marginea de jos a secțiunii, de 22 cm; se dă $n = 15$; $F_e = 6{,}28$ cm²; $F'_e = 7{,}07$ cm².

Dispunem calculul astfel :

$$\Omega = 15(6{,}28 + 7{,}08) + 50 \times 10 + 20 \times 15 \; . \; . \; . \; . \; = 1000 \text{ cm}^2$$

$$S = 15\,(6{,}28 \times 4 + 7{,}08 \times 26) + \frac{50 \times 30^2}{2} - \frac{35 \times 20^2}{2} = 18638 \text{ cm}^3.$$

$$I = 15(6{,}28 \times 4^2 + 7{,}08 \times 26^2) + \frac{50 \times 30^3}{3} - \frac{35 \times 20^3}{3} = 479965 \text{ cm}^4.$$

Din aceasta deducem:

$$z = \frac{S}{\Omega} = \frac{18638}{1000} = 18{,}64 \text{ cm.}$$

$$I_o = I - \Omega z^2 = 479965 - 347375 = 132590 \text{ cm}^4.$$

De oarece avem $d<\frac{I}{S}$, formulele sunt aplicabile, pe toată secţiunea se desvoltă numai presiuni.

Mai avem: $M=P(d-z)=31750\times3{,}36=106680$ kgrcm.

Aplicând formulele, care ne dau travaliurile dezvoltate în funcţiune de elementele calculate, vom aveà :

$$\sigma_o=\frac{31750}{1000}+\frac{31750\times3{,}36\times11{,}36}{132590}=\text{rot. } 41 \text{ kgr/cm}^2$$

apoi :

$$\sigma_e=15\left(\frac{31750}{1000}-\frac{106680\times14{,}64}{132590}\right)=\text{rot. } 300 \text{ kgr/cm}^2$$

şi :

$$\sigma_e'=15\left(\frac{31750}{1000}+\frac{106680\times7{,}36}{132590}\right)=\text{rot. } 565 \text{ kgr/cm}^2$$

Cazul II. Păstrând condiţiunile din cazul precedent, să presupunem că avem :

$$d>\frac{I}{S}$$

adică, cu alte cuvinte, punctul de aplicaţie al presiunei totale P iese din sâmburele central al piesei eterogene. La piesele omogene şi în special când erà vorba de coloane sau stâlpi de zidărie, precum : coşuri, pile, culee, suporţi, etc., neglijeam rezistenţa materialului la tensiune şi consideram numai o parte a secţiunei totale că suportà această presiune.

Când aceste piese sînt constituite din beton armat, numai putem nesocoti rezistenţa la tensiune a armaturii, dacă vom puteà neglijà pe aceia a betonului.

Observând notaţiunile de pe figură (fig. 4 din planşă) şi urmând un mod identic de raţionament cu acel din cazul precedent, vom puteà scrie următoarele relaţiuni :

$$1)\qquad P+\sigma_e F_e=\sigma_e' F_e'+\int_w^h \sigma.v.du$$

$$2)\qquad P.d+\sigma_e.F_e.a=\sigma_e'.F_e'.c+\int_w^h \sigma.v.u.du$$

$$3)\qquad \sigma=\frac{u-w}{h-w}.\sigma_o$$

4) $$\sigma_e = n . \frac{w - a}{h - w} . \sigma_o$$

5) $$\sigma'_e = n . \frac{c - w}{h - w} . \sigma_o$$

Dacă în primele două relaţiuni, introducem valorile lui σ, σ_e şi σ'_e din ultimele trei şi dacă vom însemnà pentru prescurtare :

$$\int_o^w v . du = \omega_i$$

$$\int_o^w v . u . du = s_i$$

şi $$\int_o^w v . u^2 . du = i_i$$

coordonând şi simplificând vom obţine :

(1′) $$(S - s_i) - w(\Omega - \omega_i) = \frac{P}{\sigma_o} . (h - w)$$

(2′) $$(I - i_i) - w(S - s_i) = \frac{P}{\sigma_o} . (h - w) . d.$$

In aceste formule, ω_i, s_i şi i_i sunt aria, momentul static şi momentul de inerţie al părţii din secţiune, care se află de aceiaş parte a axei de rotaţie cu armatura întinsă şi pentru care neglijăm rezistenţa betonului la tensiune.

Din prima egalitate scoatem :

(6) $$\sigma_o = \frac{P . (h - w)}{(S - s_i) - w(\Omega - \omega_i)}$$

iar din a doua şi prima, după ce s'a eliminat termenul $\frac{P(h - w)}{\sigma_o}$, scoatem :

(7) $$w = \frac{(S - s_i) d - (I - i_i)}{(\Omega - \omega_i) d - (S - s_i)}.$$

Pentru aplicaţiuni, se vor utilizà formulele (7) şi (6), procedând prin încercări succesive, în modul următor :

Se calculează mai întâi Ω, S și I; se formează raportul $\frac{I}{S}$ și dacă vom aveà :

$$\frac{I}{S} \geqslant d$$

vom aplicà formulele de la cazul I; dacă însă vom găsì :

$$\frac{I}{S} < d,$$

vom calculà:
$$w_1 = \frac{Sd - I}{\Omega d - S};$$

cu această valoare a lui w, formăm termenii de corecție ω_i, s_i, i_i, și refacem calculul după formula :

$$w_2 = \frac{(S - s_i) d - (I - i_i)}{(\Omega - \omega_i) d - (S - s_i)}.$$

In genere vom găsì $w_2 \neq w_1$; recalculăm termenii de corecție cu w_2 rotunzit și vom obține un w_3, care ne va indicà limitele, între care se află coprins adevăratul w.

După ce am găsit pe w cu aproximație suficientă, vom puteà să calculăm σ_o din egalitatea (6) iar pe σ_e și σ'_e din egalitățile (4) și (5).

Notă. In multe cazuri, w se poate calculà, căutându-se rădăcina reală a ecuației de gradul III-lea, ce obținem când în egalitatea (7) putem înlocui :

$$\omega_i = g.w$$

$$s_i = \frac{g.w^2}{2}$$

$$i_i = \frac{g.w^3}{3};$$

g fiind grosimea piesei, constantă; totuși, e mai preferabil a se urmà procedeul indicat mai sus și care se va concretizà din exemplul ce urmează.

Exemplu la cazul II. Să se calculeze presiunile și tensiunile specifice desvălite în secțiunea unei piese prismatice în T, care este solicitată de o presiune totală de 26000 kgr. aplicată excentric, in punctul O (vezi fig. 5 din planșa alăturată).

După dimensiunile din figură, avem :

$$\Omega = 15 \times 6{,}78 + 50 \times 40 - 35 \times 30 = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1052 \text{ cm}^2$$

$$S = 15 \times 6{,}78 \times 5 + \frac{50 \times 40^2}{2} - \frac{35 \times 30^2}{2} = \quad . \; . \; . \; . \quad 24759 \text{ cm}^3$$

$$I = 15 \times 6{,}78 \times 5^2 + \frac{50 \times 40^3}{3} - \frac{35 \times 30^3}{3} = \quad . \; . \; . \; . \; 774209 \text{ cm}^4$$

Calculăm apoi imediat :

$$\frac{I}{S} = \frac{774209}{24759} = 31{,}27 \text{ cm}$$

$$\frac{S}{\Omega} = \frac{24759}{1052} = 23{,}53 \text{ cm}$$

Insă avem :

$$d = 35 \text{ cm}$$

deci :

$$d > \frac{I}{S}$$

Plecând dela ipoteza că termenii de corecție ω_i, s_i, i_i, sunt mici, calculăm pe w din formula :

$$w = \frac{S.d - I}{\Omega.d - S}$$

și avem :

$$w_1 = \frac{24759 \times 35 - 774209}{1052 \times 35 - 24759} = 7{,}77 \text{ cm.}$$

Cu acest w calculăm termenii de corecție :

$$\omega_i = 15 \times 7{,}77 = 117 \text{ cm}^2$$

$$s_i = \frac{15 \times 7{,}77^2}{2} = 453 \text{ cm}^3$$

$$i_i = \frac{15 \times 7{,}77^3}{3} = 2346 \text{ cm}^4$$

și atunci avem :

$$\Omega - \omega_i = 935 \text{ cm}^2$$

$$S - s_i = 24306 \text{ cm}^3$$

$$I - i_i = 771863 \text{ cm}^4$$

După aceia recalculăm pe w şi avem :

$$w_2 = \frac{24306 \times 35 - 771863}{935 \times 35 - 24306} = 9{,}48 \text{ cm.}$$

Dacă calculăm termenii de corecţie cu $w = 9{,}5$ cm, vom găsi:

$$w_3 = 9{,}43 \text{ cm.}$$

Aceasta dovedeşte că adevărata valoare a lui w se află coprinsă între 9,48 şi 9,50 cm.

Admitem ca bună valoarea :

$$w = 9{,}5 \text{ cm}$$

pentru care avem :

$$S - s_i = 24082 \text{ cm}^3$$

$$\Omega - \omega_i = 909 \text{ cm}^2$$

şi

$$I - i = 769955 \text{ cm}^4$$

Aplicând formula (6) găsim:

$$\sigma_o = \frac{(40 - 9{,}5).2\,000}{24082 - 9{,}5 \times 909} = +51{,}33 \text{ kgr/cm}^2 \text{ (presiune)}$$

iar din formula (4) găsim :

$$\sigma_e = -15 \times \frac{9{,}5 - 5}{40 - 9{,}5} \times 51{,}33 = -113{,}6 \text{ kgr/cm}^2 \text{ (tensiune).}$$

Observaţiune. Deşi la începutul acestui articol anunţasem că voi tratà *problema de construcţiune,* totuşi, pentru compresiunea excentrică, m'am mărginit a expune *problema de verificare,* de oarece va fi mai simplu a dimensionà piesa, pe baza unor travaliuri admisibile reduse şi presupunând presiunea centrică şi apoi a face verificarea în cazul real al presiunii excentrice, de cât a se căutà să se rezolve direct *problema de construcţie* în cazul presiunii excentrice.

(Va urma)

Ion M. Ionescu

Inginer

Serviciul de întreţinere C. F. R.

Turnu-Severin.