Calculul Cupolelor

de grosime constantă

Cu privire la calculul cupolelor, autorii recomandă diferite metode, toate aproximative şi aplicabile numai în anumite cazuri.

Ast-fel, una din metodele mai răspândite, cea a d-lui Godard, aplicabilă numai cupolelor sferice uniform încărcate, presupune nule eforturile în sensul paralelelor, ceea-ce este inexact şi determină eforturile în sensul meridianelor considerând nul momentul încovoetor de la naştere şi cheie ceea-ce nu s'ar întâmpla, de cât la cupolele simplu rezemate sau articulate.

Am crezut util de a indica o metodă mai exactă, aplicabilă tuturor cupolelor de grosime constantă, cu ajutorul căreia se poate determina valoarea eforturilor atât in sensul meridianelor cât şi în sensul paralelelor, fără a face nici o ipoteză cu privire la momentele încovoetoare de la naştere şi cheie.

Teorie Generală

Consider elementul de cupolă I II, I′ II′, $a\ a'$, $b\ b'$.

Avem: $a\,o = x$ $\quad a\,b = x\,d\theta$

Aria secţiunei I II $= e\,x\,d\theta$

$$m\,n = d\,s$$

Pentru ca acest prism elementar să fie în echilibru, trebue ca forţele ce acţionează asupra lui să-şi facă equilibru. Aceste forţe sunt:

1. Greutatea proprie:

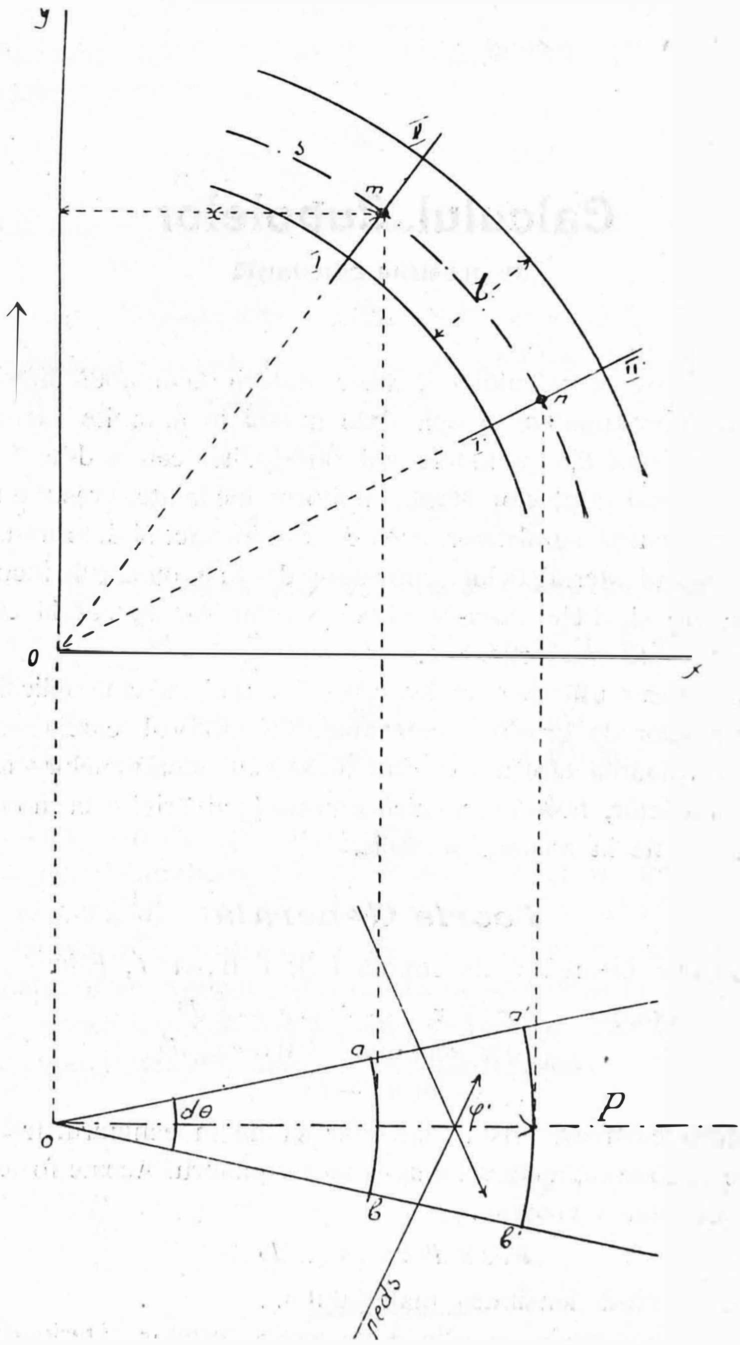
$$e\,ds\,x\,d\theta\,\delta = \delta\,e\,x\,d\theta\,ds$$

δ fiind densitatea materialului.

2. Componentele pe cele două axe a forţelor exterioare.

Insemnând cu X şi Y valoarea acestor componente pentru unitatea de suprafaţă; pentru întreaga suprafaţă $ds \times d\theta$ vom avea:

$$X \times ds\, d\theta \quad \text{şi} \quad Y \times ds\, d\theta.$$



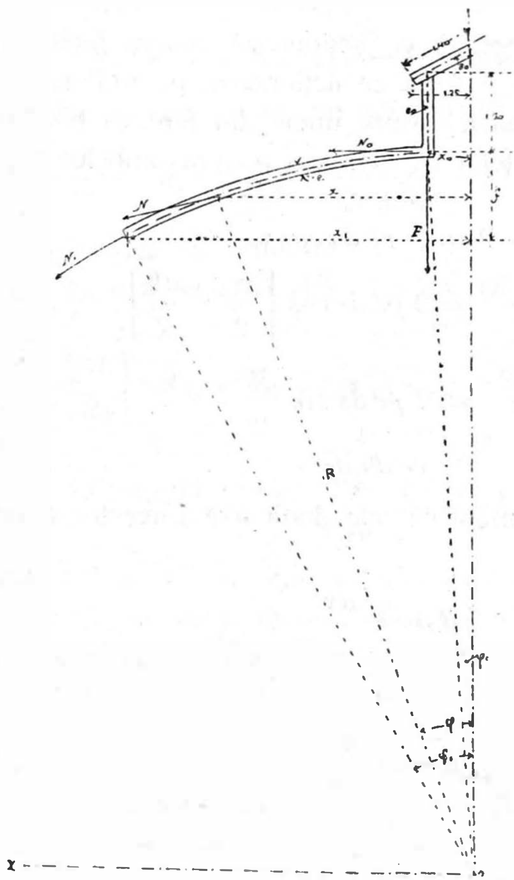
3. Presiunile pe feţele I II şi I′ II′

n fiind presiunea pe unitatea de suprafaţă, pe toată suprafaţa I II vom avea:

$$n\,x\,d\theta\,e$$

şi în proecţiune pe cele două axe dă:

$$n\,e\,x\,d\theta\,\frac{dx}{ds} \quad \text{şi} \quad n\,e\,x\,d\theta\,\frac{dy}{ds}$$



Presiunea pe faţa I′ II′ va fi în proecţie pe cele două axe:

$$-\left[n\,e\,x\,d\theta\,\frac{dx}{ds}+\frac{d\,n\,e\,x\,\frac{dx}{ds}}{ds}\,ds\,d\theta\right]$$

$$-\left[n\,e\,x\,d\theta=\frac{dy}{ds}+\frac{d\,n\,e\,x\,\frac{dy}{ds}}{ds}\,ds\,d\theta\right]$$

Rezultanta presiunilor pe ambele fețe I II și I' II' va fi în proecțiune pe cele două axe:

$$-\frac{d\, n\, e\, x \frac{dx}{ds}}{ds}\, ds\, d\theta$$

$$-\, d\, n\, e\, x \frac{dy}{ds}\, ds\, d\theta$$

4. Forțele orizontale ce acționează asupra fețelor $a\, a'$ și $b\, b'$.

Insemnând cu p forța ce acționează pe unitatea de suprafață, forța totală ce lucrează asupra uneia din fețe va fi $= pe\, ds$.

Rezultanta forțelor ce lucrează asupra ambelor fețe $a\, a'$ și $b\, b$ **va** fi:

$$\begin{aligned} P &= 2\; pe\, ds\, cos\, \varphi \\ &= 2\, pe\, ds\, cos \left[\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2}\right] \\ &= 2\, pe\, ds\, sin\, \frac{d\theta}{2} \\ &= pe\, d\theta\, ds \end{aligned}$$

Suma proecțiunilor pe cele două axe á acestor 4 forțe trebuind să fie nulă avem:

$$(1)\quad \frac{d\, n\, e\, x\, \frac{dx}{ds}}{ds} = X\, x + p\, e$$

$$(2)\quad \frac{d\, n\, e\, x\, \frac{dy}{ds}}{ds} = [y - \delta\, e]\, x$$

Ecvațiuni ce ne dau pe n și p.

Cazul unei cupole sferice cu lanternou

greutatea accidentală uniform repartizată

Considerăm greutatea accidentală ca cuprinsă în greutatea proprie a cupolei și sporim valoarea lui δ în consecință. Avem însă:

$$X = o \quad \text{și} \quad Y = o$$

Dar: $\qquad x = R\, sin\, \varphi, \; y = R\, cos\, \varphi, \; ds = R\, d\varphi$

Introducând aceste valori în equaţiunile generale (1) şi (2), ele devin :

$$(1') \quad \frac{d\, n \sin\varphi \cos\varphi}{d\varphi} = p$$

$$(2') \quad \frac{d\, n \sin^2\varphi}{d\varphi} = \delta R \sin\varphi$$

Integrând ecuaţia (2′) obţinem:

$$(2'') \quad n \sin^2\varphi - n_0 \sin^2\varphi_0 = \delta R [\cos\varphi_0 - \cos\varphi]$$

Valoarea lui n_0 o obţinem din ecuaţia de equilibru:

$$n_0 \sin\varphi_0 = \frac{P}{2\pi x_0 e}$$

în care P = greutatea lanternoului.

Inlocuind pe n în ecuaţia (1′) cu valoarea sa dată de ecuaţia (2″) obţinem :

$$(1'') \quad p = \frac{d}{d\varphi} \left[\delta R [\cos\varphi_0 - \cos\varphi] + N_0 \sin^2\varphi_0 \right] \cot\varphi$$

şi derivând:

$$(1''') \quad p = \frac{\delta R \cos\varphi [1 + \sin^2\varphi] - \delta R \cos\varphi_0 - N_0 \sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi}$$

Ecuaţiile (2″) şi (1‴) ne dau valorile lui n şi p în ori-ce punct al cupolei. Din (2″) se vede imediat că n este în tot-deauna pozitiv, ceea-ce înseamnă că vom avea peste tot eforturi de compresiune în sensul meridianelor. Din (1‴) se vede însă că semnul valorei lui p poate varia, pentru diferitele valori date lui φ şi deci în sensul paralelelor vom putea avea şi eforturi de compresiune şi eforturi de tensiune.

Impingerea orizontală la naştere este :

$$n_1\, 2\pi x_1 e \cos\varphi_1$$

Efortul de tensiune pe care ea îl provoacă în centură este după formula lui Lamé :

$$\frac{n_1\, 2\pi x_1 e \cos\varphi_1}{2\pi x_1} x_1 = e\, n_1 x_1 \cos\varphi_1$$

Exemplu numeric. Extras din calculul unui rezervor de beton armat 800 m.[3] capacitate, studiat pentru alimentarea cu apă a oraşului Bacău de d-l Inginer-Şef Tancred Constantinescu.

Luăm :

$$x_1 = 7.50 \qquad f = \frac{1}{4} x_1 = 1.875 \qquad e = 0.10 \text{ m.}$$

$$R = \frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{f} + f\right] = 15.99\text{m.}$$

$$x_0 = 1.00 \qquad \sin\varphi_0 = \frac{x_0}{R} = 0.0625 \qquad \varphi = 3^0.35'$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{x_1}{R} = 0.47 \qquad \varphi = 28^0$$

greutatea lanternoului :

$P = \pi \times 1.25 \times 0.10 \times 1.40 \times 2500 + \pi \times 2.10 \times 1.50 \times 0.10 \times 2500 = 3830$ kgr.

δ pentru beton armat $= 2, 5$, de oare-ce am considerat însă şi greutatea accidentală ca fiind coprinsă în greutatea proprie a cupolei vom lua $\delta = 5$.

Avem :

$$n_0 = \frac{P}{2\pi x_0 e \sin\varphi_0} = \frac{3.83}{2 \times 3.14 \times 1.00 \times 0.10 \sin 3^0\ 35'}$$

$$n_0 = 97.53 \frac{\text{Tone}}{\text{m}^2} \text{ sau } 9.753 \text{ kgr./cm.}^2$$

Ecuaţia (2″) dă :

$$n_1 = \frac{n_0 \sin^2\varphi_0 \times \delta R [\cos\varphi_0\ \cos\varphi_1]}{\sin^2\varphi_1}$$

$$n_1 = \frac{97.53 \sin^2 3^0\ 35' + 5 \times 15.99 [\cos 3^0\ 35' - \cos 28^0]}{\sin^2 28^0}$$

$$n_1 = 43.6 \frac{\text{Tone}}{\text{m}^2} \text{ sau } 4.36 \text{ kgr./cm.}^2$$

Ecuaţiunea (1‴) dă pentru $\varphi = 4^0$.

$$p = \frac{\delta R \cos\varphi [1 + \sin^2\varphi] - \delta R \cos\varphi_0 - N_0 \sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi_0}$$

$$p = \frac{5 \times 15.99 \cos 4^0 [1 + \sin^2 4^0] - 5 \times 15.99 \cos 3^0 35' - 97.53 \sin^2 3^0 35'}{\sin^2 4^0}$$

Deci pentru $\varphi < 4^0$ vom avea eforturi de compresiune în sensul paralelelor.

Pentru $\varphi > 4^0$ vom avea eforturi de tensiune care cresc cu cât φ creşte.

Pentru $\varphi = 28$

$$p = \frac{5 \times 15.99 \cos 28^0 \, [1 + \sin^2 28^0] - 5 \times 15.99 \cos 3^0 35^1 - 97.53 \sin^2 3^0 35}{\sin^2 28^0}$$

$$p = 27.09 \frac{\text{Tone}}{\text{m}^2} \text{ sau } 2.71 \text{ kgr./cm.}^2$$

Intrebuinţând bare de 8 mm. diametru puse la 200 mm. distanţă avem:

Suprafaţa aferentă unui fer $S = 20 \times 10 = 200$ cm.²

Secţiunea unui fer $\omega = \frac{\pi \, 0.8^2}{4} = 0.5026$ cm.²

Travaliul în fer va fi:

$$\sigma = \frac{pS}{\omega} = \frac{2.709 \times 200}{0.5026} = 1078 \text{ kgr./cm.}^2$$

Impingerea la naştere dă în centură un efort de tensiune:

$e \, n_1 \, x_1 \cos \varphi_1 = 10 \times 2.709 \times 750 \cos 28^0 = 17.941$ kgr.

Admiţând pentru fer un travaliu la tensiune de 1000 kgr./cm.²

Secţiunea de fer necesară centurei va fi:

$$\omega = \frac{17.941}{1000} = 17.941 \text{ cm.}^2$$

deci vor fi suficiente 4 feare de 24 mm. diametru.

Emil Niţescu
inginer