Noile poduri de şosea peste Siret

(Urmare)

---

a) Calculul Arcului

In numărul trecut al Buletinului am arătat că înălţimea arcului în diferite puncte a fost calculată cu ajutorul ecuaţiunii:

1. $$h = h_0 \sec^3 \alpha$$

unde h_0 e înălţimea arcului la cheie şi α unghiul pe care tangenta la fibra mijlocie îl face cu orizontala.

Această relaţiune pe lângă că convine bine direcţiunii către care se tinde astă-zi de a da arcelor secţiuni foarte variabile, pentru a le face pe cât se poate de egală rezistenţă, dă mai totdeauna valori admisibile pentru înălţimea arcului la rosturile de la naşteri (arce propriu zise) sau la rosturile de ruptură (arce în plin centru), prezintă în acelaş timp şi marele avantaj că face integrabili toţi termenii din ecuaţiunile de elasticitate care depind numai de elemente geometrice.

Se evită ast-fel cu această formulă o serie de integrări prin cuadraturi care în general conduc la calcule numerice lungi foarte susceptibile de erori.

Din cauză că metoada de calcul pe care am întrebuinţat-o la construirea curbelor de presiune este în mare parte nouă, cred util a dezvolta această metodă cu toate detaliile pe care le comportă, stabilind ecuaţiunile generale ale arcelor care au înălţimile lor definite de ecuaţiunea (1), în ipoteză că arcul are o lăţime constantă şi că este constituit din un material care are acelaş mod de elasticitate în toate secţiunile lui.

Din formulele generale pe care le vom obţine, vom face apoi ca aplicaţie, calculul arcului de 37.00 m. adoptat la podurile peste Siret, calcul cu care s'au determinat eforturile presupunând că bolta e de beton simplu, aşa că armaturile metalice nu s'au avut în vedere, — propriu zis vorbind, — la calculul elastic al arcului, ci au fost puse numai pentru a lua tensiunile din anumite secţiuni periculoase.

2. Fie AB fibra mijlocie a arcului, $2a$ deschiderea ei, b săgeata, CED curba de presiune, Oxy axele de coordonate, nasterile A şi B fiind de nivel.

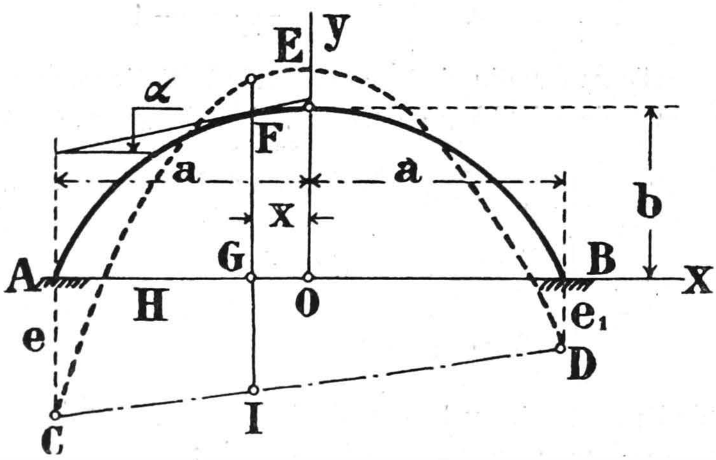
Momentul încovoetor în secţiunea F a arcului este:

(2) $$M = H\,\overline{EF} = \mathcal{M} - (y+y_1)\,H$$

în care H este împingerea orizontală a arcului, $\mathcal{M}$ momentul încovoetor fictiv pe care l'ar da sarcinile care acţionează arcul în punctul G al unei grinzi drepte simplu rezimate AB şi y_1 o lungime definită de ecuaţia:

$$y_1 = \frac{e^1+e}{2} + \frac{e^1-e}{2}\,x$$

Fig. 1



Acestea spuse, travaliul de deformaţie corespunzător arcului întreg este:

(3) $$T = \frac{1}{2E}\left(\int_{(AB)}\frac{M^2 ds}{J} + \int_{(AB)}\frac{N^2 ds}{F}\right)$$

în care E, F, J, N şi ds sunt respectiv modulul de elasticitate, secţiunea, momentul de inerţie, compresiunea normală şi arcul elementar, ambele integrale fiind întinse d'alungul fibrei mijlocii AB,

Dacă negligem cum se face de obicei, efectul puterilor tăietoare, putem scrie:

(4) $$N = H \sec \alpha$$

Ţinând seama de ecuaţiunile (1) şi (4), dacă efectuăm integrala corespunzătoare efortului N, dacă transformăm prima integrală curbilinie în o integrală după axa Ox şi dacă însemnăm cu b' baza constantă a secţiunii arcului, relaţiunea (3) devine:

$$\text{(5)} \qquad T = \frac{1}{b' h_0 E}\left(\frac{6}{h_0^2}\int_{-a}^{+a} M^2 \cos^3 \alpha \, dx + a H^2\right)$$

De asemenea, dacă facem:

$$\frac{e + e_1}{2} H = Y,$$

$$\frac{e_1 - e}{2a} H = X$$

ecuaţia (2) se poate scrie:

$$\text{(6)} \qquad M = \mathcal{M} - Hy - Xx - Y$$

de unde deducem, luând derivatele parţiale:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta H} = -y, \; \frac{\vartheta M}{\vartheta X} = -x, \; \frac{\vartheta M}{\vartheta \cdot Y} = -1$$

Dacă aplicăm ecuaţiunii (5) teorema lui *Castigliano*, anulând derivatele parţiale ale lui T în raport cu H, X şi Y obţinem ecuaţiunile:

$$6 \int_{-a}^{+a} M y \cos^8 \alpha \, dx = a h^2{}_0 H$$

$$\int_{-a}^{+a} M x \cos^8 \alpha \, dx = o$$

$$\int_{-a}^{+a} M \cos^8 \alpha \, dx = o$$

sau înlocuind pe M prin valoarea dată de (6) şi suprimând integralele care sunt nule din motive de simetrie:

$$\text{(7} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-a}^{+a} \mathcal{M} y \cos^8 \alpha \, dx &= \left(\frac{1}{6} a h^2{}_0 + 2\int_o^a y^2 \cos^8 \alpha \, dx\right) H \\ &\quad + 2Y \int_o^a y \cos^8 \alpha \, dx \\ \int_{-a}^{+a} \mathcal{M} x \cos^8 \alpha \, dx &= 2X \int_o^a x^2 \cos^8 \alpha \, dx \\ \int_{-a}^{+a} \mathcal{M} \cos^8 \alpha \, dx &= 2H \int_o^a y \cos^8 \alpha \, dx + 2Y \int_o^a \cos^8 \alpha \, dx \end{aligned} \right.$$

Acestea sunt pentru cazul nostru, ecuaţiunile care definesc necunoscutele problemii H, X şi Y ori care ar fi ecuaţia fibrei mijlocii.

3. Dacă admitem că fibra medie a arcului este parabola:

$$y = \frac{b}{a^2}(a^2 - x^2)$$

căpătăm:

$$tg\,\alpha = -\frac{2bx}{a^2}\quad,\qquad dx = -\frac{a^2}{2b}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

In aceste condiţiuni integralele din ecuaţiunile (7) care nu conţin pe $\mathscr{M}$ se pot efectua şi obţinem:

$$\alpha = \int_0^a \cos^8\alpha\,dx = \frac{a^2}{2b}\int_0^{\alpha_0}\cos^6\alpha\,d\alpha = cotg\,\alpha_0\Big[\sin 2\alpha_0\Big(\cos^4\alpha_0 + \frac{5}{4}\cos^2\alpha_0 + \frac{15}{8}\Big) + \frac{15}{4}\alpha_0\Big]\frac{a}{12}$$

$$\beta = \int_0^a x^2\cos^8\alpha\,dx = \frac{a^6}{8\cdot b^3}\int_0^{\alpha_0}\sin^2\alpha\cos^4\alpha\,ds = cotg^3\alpha_0\Big(\sin^3 2\alpha_0 + 3\sin 2\alpha_0\sin^2\alpha_0 - \frac{3}{2}\sin^2 2\alpha_0 + 3\alpha_0\Big)\frac{a^3}{48}$$

$$\gamma = \int_0^a y\cos^8\alpha\,dx = b\int_0^a\cos^8\alpha\,dx - \frac{b}{a^2}\int_0^a x^2\cos^8\alpha\,dx = \alpha b - \frac{b}{a^2}\beta$$

$$\delta = \int_0^a y^2\cos^8\alpha\,dx = \frac{b^2}{a^4}(a^4\alpha - 2a^2\beta + 2)$$

în care:

$$\eta = \int_0^a x^4\cos^8\alpha\,dx = \frac{a^{10}}{32\,b^5}\int_0^{\alpha_0}\sin^4\alpha\cos^2\alpha\,ds = cotg^5\alpha_0\Big(-\sin^3 2\alpha_0 + 3\sin 2\alpha_0\sin^2\alpha_0 - \frac{3}{2}\sin^2\alpha_0 + 3\alpha_0\Big)\frac{a^5}{48}$$

α_0 fiind unghiul pe care îl face tangenta la naşterea fibrei mijlocii cu orizontala Ox.

Aşa fiind ecuaţiunile generale de echilibru elastic ale unui arc parabolic sunt:

$$(8)\qquad\begin{cases}\displaystyle\int_{-a}^{+a}\mathscr{M}\,y\cos^8\alpha\,dx = \Big(\frac{1}{6}a\,h_0^2 + 2\delta\Big)\mathrm{H} + 2\gamma\,\mathrm{Y}\\ \displaystyle\int_{-a}^{+a}\mathscr{M}\,x\cos^8\alpha\,dx = 2\beta\mathrm{X}\\ \displaystyle\int_{-a}^{+a}\mathscr{M}\cos^8\alpha\,dx = 2\gamma\mathrm{H} + 2\alpha\mathrm{Y}\end{cases}$$

4. Integralele din primii membrii ai fiecăreia din ecuaţiunile sistemului (8) sunt imposibil de efectuat în cazul general. Vom proceda

deci la nevoie pentru calculul lor prin una din metoadele grafice cunoscute sau mai bine prin cuadraturi.

Se poate însă rezolva problema în mod complect și absolut riguros în ipoteză că arcul este încărcat cu o sarcină uniform repartizată pe orizontală.

Incărcarea simetrică totală, p fiind sarcina uniform repartizată avem :

$$M = \frac{p\,a^2}{2\,b}\,y$$

Ecuaţiunile (8) devin :

$$\frac{p\,a^2}{b}\int_0^a y^2 \cos^3 \alpha\, dx = \frac{1}{6}\,(a\,h^2{}_0 + 2\delta)\,H + 2\gamma\,Y$$

$$\frac{p\,a^2}{b}\int_0^a y \cos^3 \alpha\, dx = 2\,(\gamma\,H + \alpha\,Y)$$

sau :

$$\frac{p\,a^2}{b}\,\delta = \left(\frac{1}{6}\,\alpha\,h_0{}^2 + 2\delta\right)H + 2\gamma\,Y$$

$$\frac{p\,a^2}{b}\,\gamma = 2\,(\gamma H + \alpha Y)$$

sau rezolvând în raport cu Y și H :

$$(9)\qquad \begin{cases} H = \dfrac{p\,a^2}{2\,b}\,\dfrac{1}{1+\varepsilon} \\[2ex] Y = \dfrac{p\,a^2}{2\,b}\,\dfrac{\gamma}{\alpha}\,\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{cases}$$

în care : $$\varepsilon = \frac{a\,h_0{}^2\,\alpha}{12\,(\alpha\,\delta - \gamma^2)}$$

Ecuaţiile (9) definesc împingerea la chee și momentul de încastrare date de sarcina uniform distribuită p.

Momentele încovoetoare în arc variază după relaţiunea :

$$M = \frac{p\,a^2}{2\,b}\left(y - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Incărcare disimetrică. — Să presupunem acum că încărcăm arcul cu sarcina p disimetric și anume pe o jumătate de arc coprinsă între naștere și chee.

Momentul fictiv $\mathcal{M}_{max}$ este dat de relaţiunea :

$$\mathcal{M}_{max} = \frac{p\,a^2}{4}$$

Se vede uşor că putem înlocui integrala:

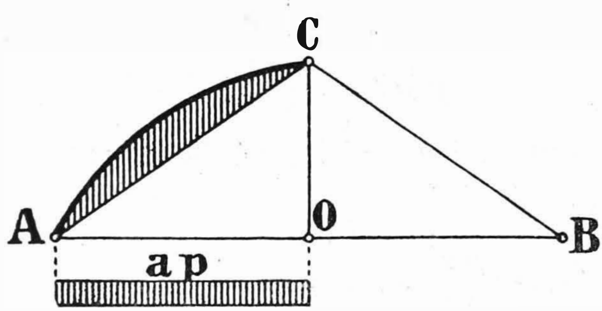
$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{M}\, x \cos^3 \alpha\, dx$$

prin expresiunea:

$$\frac{p}{4}\int_{o}^{a} x^2 (a - x) \cos^8 \alpha\, dx$$

care corespunde integralii întinsă în interiorul ariei cuprinsă între parabola AC şi coarda sa.

Fig. 2



Cea d'a doua ecuaţie din (8) se poate scrie sub forma:

$$\frac{p}{4}\int_{o}^{a} x^2 (a - x) \cos^3 \alpha\, dx = 2\, \beta\, X_{dis}$$

sau:

$$a\int_{o}^{a} x^2 \cos^8 \alpha\, dx - \int_{o}^{a} x^3 \cos^8 \alpha\, dx = \frac{8\, \beta}{p} X_{dis}$$

sau:

(10) $$a\, \beta - z = \frac{8\, \beta}{p} X_{dis}$$

în care:

$$z = \int_{o}^{a} x^3 \cos^8 \alpha\, dx = \frac{a^8}{16\, b^4}\int_{o}^{\alpha_0} \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha\, d\alpha - \cos^4 \alpha_0 \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \alpha_0\right)\frac{a^4}{6}$$

De asemenea avem:

$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{M} \cos^8 \alpha\, dx = \int_{o}^{a} \mathcal{M}_1 \cos^8 \alpha\, dx + \int_{o}^{a} \mathcal{M}_2 \cos^3 \alpha\, dx$$

unde:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{p\, a^2}{4\, b}\, y\,, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{p\, a}{4}(a - x)$$

şi prin urmare:

$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{M} \cos^3 \alpha \, dx = \frac{p a^2}{4 b} \gamma + \frac{p a}{4} \left(a \alpha - \theta \right)$$

unde:

$$\theta = \int_{o}^{a} x \cos^3 \alpha \, dx = \frac{a^4}{4 b^2} \int_{o}^{\alpha_0} \sin \alpha \cos^5 \alpha \, d\alpha = \operatorname{cotg}^2 \alpha_0 \left(1 - \cos^6 \alpha_0\right) \frac{a^2}{6}.$$

Putem deci scrie:

$$a p \left(\frac{a}{b} \gamma + a \alpha - \theta \right) = 8 \left(\gamma \, H_{dis} + \alpha \, Y_{dis} \right)$$

Ecuaţiunile problemii sunt:

$$H_{dis} = \frac{1}{2} H_{sim}$$

$$p \left(a \beta - z \right) = 8 \beta X_{dis}$$

$$ap \left(\frac{a}{b} \gamma + a \alpha - \theta \right) = 8 \left(\gamma \, H_{dis} + \alpha \, Y_{dis} \right)$$

sau rezolvind:

$$(11) \qquad \begin{cases} H_{dis} = \dfrac{p a^2}{4 b} \cdot \dfrac{1}{1 + \varepsilon} \\ X_{dis} = \dfrac{p}{8} \left(a - \dfrac{z}{\beta} \right) \\ Y_{dis} = \dfrac{a^2 p}{8 b} \dfrac{1}{\alpha} \left[b \left(\alpha - \dfrac{\theta}{a} \right) + \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \gamma \right] \end{cases}$$

Momentele de încastrare sunt respectiv pentru naşterea din partea încărcată:

$$M_i = - a X_{dis} - Y_{dis}$$

pentru naşterea din partea descărcată:

$$M_d = a X_{dis} - Y_{dis}$$

X_{dis} şi Y_{dis} fiind definiţi de ecuaţiile (11).

5. Acestea fiind stabilite să procedăm la calculul numeric al arcului de care ne interesăm. Vom face o problemă de verificare. Am arătat că grosimea arcului la chee este:

$$h_0 = 0.70 \text{ m.}$$

De asemenea avem: $a = 18.95$ m.

$b = 6.85$ m.

Unghiul α_0 e definit de ecuaţia:

$$tg \, \alpha_0 = \frac{2b}{a} = \frac{13.70}{18.95} = 0.723$$

și deci :

$$\sin \alpha_0 = 0.585 \; ; \; \sin 2\alpha_0 = 0.949 \; ; \; \cos \alpha_0 = 0.811 \; ; \; \cotg \alpha_0 = 1.385$$

$$\alpha_0 = 0.625$$

Inălțimea arcului la nașteri este :

$$h_4 = \frac{h_0}{\cos^3 \alpha} \quad \frac{0.700}{0.5334} \cong 1{,}30 \text{ m.}$$

Se găsește :

$$\alpha = 11.618 \; ; \; \beta = 858.707 \; ; \; \gamma = 63.202 \; ; \; \delta = 374.501$$

$$\varepsilon = 0.0252 \; ; \; z = 10.746{,}217 \; ; \; \theta = 82.199 \; ;$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} = 0{,}9754 \; ; \; \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = 0.1337 \; ; \; \frac{z}{\beta} = 12.514$$

$$\frac{1}{\alpha}\left[b\left(\alpha - \frac{\theta}{a}\right) + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\gamma\right] = -0.880$$

Ecuațiunile (9) și (11) devin :

$$(9') \quad \begin{cases} H_{sin} = 0.9754 \dfrac{p\,a^2}{2\,b} \\ Y_{sin} = 0.1337 \dfrac{p\,a^2}{2\,b} \end{cases}$$

și :

$$(11') \quad \begin{cases} H_{dis} = 0.4877 \dfrac{p\,a^2}{2\,b} \\ X_{dis} = 0.8045\, p \\ Y_{dis} = -0.2200 \dfrac{p\,a^2}{2\,b} \end{cases}$$

Putem prin urmare cu ajutorul acestor ecuațiuni să determinăm, împingerile orizontale și momentele de încastrare date de încărcarea accidentală uniform distribuită, în ipoteza că arcul e complect încărcat (Sistemul 9′) sau în ipoteză că arcul e disimetric încărcat (sistemul 11′).

Să ne ocupăm acum de sarcinile permanente. Dividem arcul în bolțari prin rosturi verticale așa ca greutatea lor să vie aplicată pe mediana stâlpilor care susțin platelagiul și determinăm ast-fel sarcinile permanente în tone :

$$P_2 = 10.2 \;\; P_3 = 8.9 \;\; P_4 = 7.8 \;\; P_5 = 6.8 \;\; P_6 = 6.4 \;\; P_7 = 6.0$$

$$P_8 = 5.8 \;\; P_9 = 5.2$$

care revin din fiecare bolțar și zid transversal unui metru de lățime de arc, P_2 fiind zidul cel mai apropiat de nașteri ; sarcinile :

$$P_1 = 2{,}1 \; t \qquad P_{10} = 2{,}8 \; t$$

provin respectiv din un bolţar de lângă naştere şi din o jumătate bolţar de lângă chee. In determinarea acestor sarcini greutatea trotoarului a fost repartizată pe întreagă lăţimea bolţii. S'a admis ca densitate: pentru betonul bolţii 2.2 t/m^3 pentru împietruire 2.0 t/m^3 şi pentru beton armat 2.4 t/m^3.

Incărcarea permanentă fiind simetrică de o parte şi de alta a cheii, ecuaţiunile (8) devin:

$$\int_0^a \mathcal{M}\, y \cos^8 \alpha\, dx = \left(\frac{1}{12} a\, h_0^2 + \delta\right) H + \gamma\, Y$$

$$\int_0^a \mathcal{M} \cos^8 \alpha\, dx = \gamma\, H = \alpha\, Y$$

iar dacă rezolvim în raport cu H şi Y obţinem:

$$(8') \quad \begin{cases} H = \dfrac{\alpha \int_0^a \mathcal{M}\, y \cos^8 \alpha\, dx - \gamma \int_0^a \mathcal{M} \cos^3 \alpha\, dx}{\frac{a}{12}\, \alpha\, h_0^2 + \alpha\, \delta - \gamma^2} \\[2ex] Y = \dfrac{\left(\frac{a}{12} h_0^2 + \delta\right) \int_0^a \mathcal{M} \cos^8 \alpha\, dx - \gamma \int_0^a \mathcal{M}\, y \cos^8 \alpha\, dx}{\frac{a}{12}\, \alpha\, h_0^2 + \alpha\, \delta - \gamma^2} \end{cases}$$

sau efectuând calculele numerice şi înlocuind integralele prin sume:

$$(8'') \quad \begin{cases} H = 0.03179 \sum_0^a \mathcal{M}\, y \cos^3 \alpha\, \triangle x - 0.17294 \sum_0^a \mathcal{M} \cos^3 \alpha\, \triangle x \\ Y = 1.02689 \sum_0^a \mathcal{M} \cos^8 \alpha\, \triangle x - 0.17294 \sum_0^a \mathcal{M}\, y \cos^8 \alpha\, \triangle x \end{cases}$$

Rămâne acum, pentru a determina pe H şi Y să calculăm sumele din membrul al doilea.

ŞTEFAN N. MIREA

(Va urma)