

---

# BULETINUL SOCIETĂȚII POLITECNICE

---

## PARTEA TECNICĂ

---

### **Asupra barajelor de zidărie**

---

1. Intrebuințarea curentă a barajelor mari de zidărie la creierea lacurilor artificiale pentru alimentarea orașelor cu apă sau pentru întrebuințări agricole ori industriale, cum și câte-va accidente suferite de unele baraje, au atras atențiunea inginerilor asupra stabilității acestor construcțiuni, asupra cauzelor care pot suprima această stabilitate, cum și asupra măsurilor care trebuiesc luate pentru a pune lucrări de asemenea natură la adăpost de ori-ce pericol.

În prima serie de idei d-l *Maurice Lévy* a prezentat în 5 August 1895 Academiei de științe din Paris un studiu important asupra condițiunilor teoretice și practice de rezistență a barajelor mari. <sup>1)</sup>

În urmă d-l *Barbet* (A. P. et. Ch. 1899 tome 1-er) servindu-se de memoriul d-lui *Lévy*, se ocupă de stabilitatea barajelor pline cu paramentul din amonte vertical și găsește pe o cale, nu tocmai directă, profilul cel mai convenabil care trebuie dat unui baraj din punctul de vedere al stabilității.

Ca un corolar al acestor studii vreau să găsesc, care este profilul unui baraj de zidărie cu paramentul din amonte vertical și cu un coronament de lățime dată, pentru care curba de presiune corespunzătoare nivelului cel mai ridicat al apei trece prin mijlocul tuturor rosturilor orizontale.

Cu alte vorbe, vreau să construiesc un baraj care să nu lucreze la încovoiere când înălțimea de apă reținută e un maximum.

Această problemă se poate rezolva grafic împărțind înălțimea barajului în mai multe părți prin secțiuni orizontale și căutând prin încercări succesive profilul fie-cărei porțiuni începând de la corona-

---

1) D-l *Lévy* s'a mai ocupat ulterior cu această chestiune și a publicat în *Comptes Rendus* (2 Mai, 4 Juillet 1898) un alt memoriu relativ la barajele de zidărie.

ment. Incercările sunt însă numeroase și dificile din cauză că cer compuneri de forțe și determinări de centre de greutate.

Scopul acestei note este de a simplifica chestiunea și de a da o soluțiune mai comodă, un calcul riguros fiind imposibil de făcut.

2) Fie  $H$  înălțimea barajului d'asupra terenului (Fig. 1);  $h$  înălțimea apelor maxime;  $x_0$  lățimea barajului la coronament;  $E'D'E'D_0$  secțiune oare-care orizontală;  $BD_0D$  spatele curb al barajului;  $G$  greu-

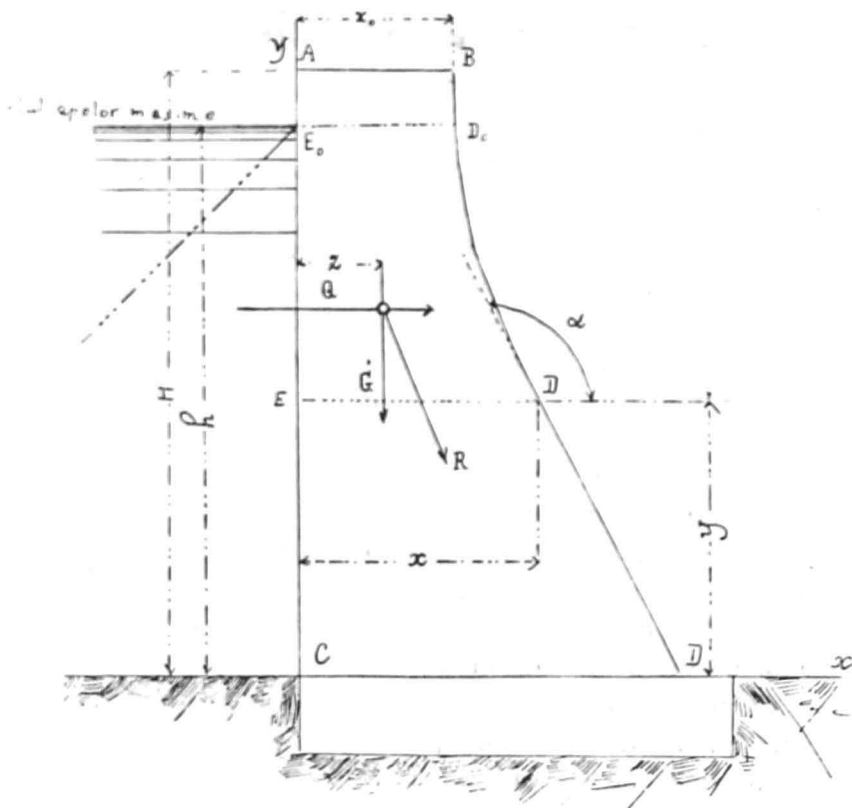


Fig. 1

tatea masivului  $ABE'D'$ ;  $Q$  împingerea corespunzătoare a apei;  $\gamma$  și  $\gamma'$  respectiv densitatea apei și a zidăriei;  $Cx, Cy$  axele de coordonate.

Pentru un m. l. de baraj avem:

$$Q = \frac{1}{2} \gamma (h-y)^2$$

$$G = \gamma' \left[ x_0 (-h) H + \int_y^h x dy \right]$$

căci este evident că profilul pe care îl căutăm trebuie să aibă d'asupra apelor maxime forma unui dreptunghi.

Dacă însemnăm cu  $R$  rezultanta forțelor  $(G, Q)$  găsim că punctul ei de aplicațiune pe rostul  $E'D'$  are abscisa:

$$z + \frac{Q}{G} \cdot \frac{h-y}{3}$$

$z$  fiind abscisa centrului de greutate al ariei  $ABE'D'$ .

Condițiunea enunțată în problema de care ne ocupăm este:

$$z + \frac{Q}{G} \cdot \frac{h-y}{3} = \frac{x}{2} \quad (1)$$

și exprimă că în fie-care rost orizontal  $E'D'$  curba de presiune  $(\Gamma)$  trece prin mijlocul rostului.

$S$  fiind momentul static al suprafeței  $ABE'D'$  în raport cu axa  $Cy$ , iar  $\Omega$  aria aceleiași suprafețe avem:

$$z = \frac{S}{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{x_0^2 (H-h) + \int_y^h x^2 dy}{x_0 (H-h) + \int_y^h x dy}$$

Ținând seama de această relațiune și de valorile lui  $G$  și  $Q$  putem scrie ecuațiunea (1) sub forma:

$$x \int_y^h x dy - \int_y^h x^2 dy = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{(h-y)^3}{3} + x_0 (H-h) (x_0 - x)$$

Derivând în raport cu  $y$  obținem:

$$\int_y^h x dy = - \frac{dy}{dx} \frac{\gamma}{\gamma'} (h-y)^2 - x_0 (H-h)$$

sau pe scurt:

$$\gamma' \Omega \cotg \alpha = - 2Q \quad (2)$$

$(\alpha > 90^\circ)$

$\alpha$  fiind unghiul pe care îl face cu axa  $Cx$  tangenta în punctul  $D'(x, y)$  la curba căutată.

Ecuatiunea (2) care definește spatele curb al barajului conduce prin derivare la ecuația diferențială nelineară de ordinul al doilea:

$$(h-y)^2 \frac{d^2 x}{dy^2} + 2(h-y) \frac{dx}{dy} = \frac{\gamma'}{\gamma} x \left( \frac{dx}{dy} \right)^2$$

pe care până în prezent n'am reușit s'o integrez; am găsit însă integrala prin serie, care fiind prea complicată nu se pretează la aplicațiuni.

De aceea, pentru a rezolva problema vom înlocui arcul  $DD_0$  prin un poligon și vom căuta să determinăm profilul barajului cu ajutorul ecuațiunii (2) din aproape în aproape începând de la coronament.

Pentru aceasta, să împărțim (Fig. 2) înălțimea  $h$  în  $n$  părți

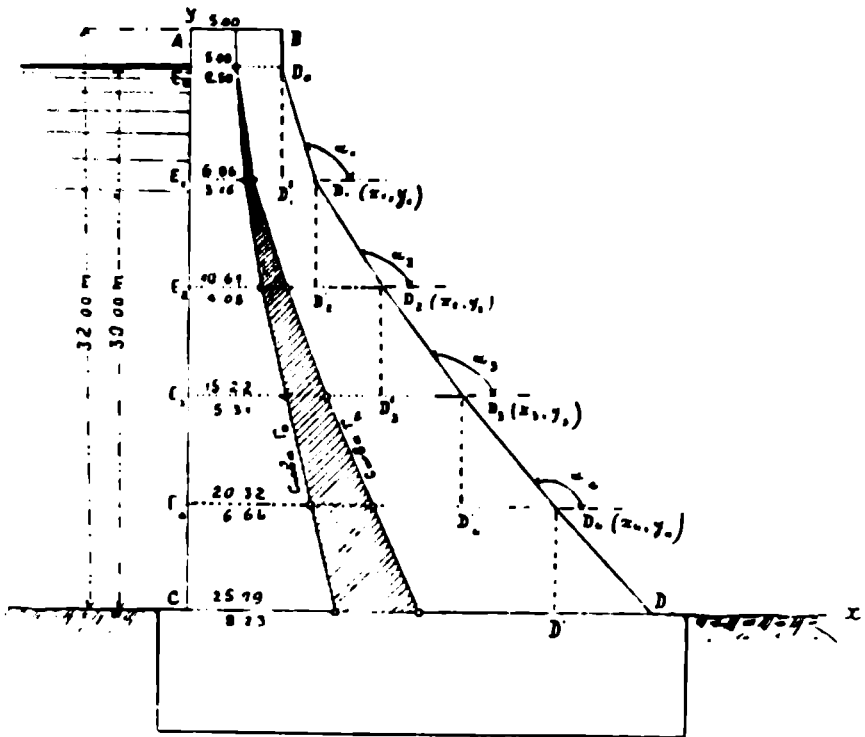


Fig. 2 (scara 3 cm. = 10.00 m.)

egale prin secțiuni orizontale  $E_1D_1, E_2D_2, \dots$  și să însemnăm respectiv cu  $Q_1, Q_2, \dots$  împingerile apei pe înălțimile  $AE_1, A_2,$

Avem:

$$Q_1 = \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cdot 1^2$$

$$Q_2 = \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cdot 2^2$$

$$Q_n = \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cdot n^2$$

și prin urmare:

$$-\Omega_1 \cotg a_1 = \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2$$

$$-\Omega_2 \cotg a_2 = \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$-\Omega_n \cotg a_n = \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot n^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2$$

unde  $a_1, a_2, \dots$  sunt respectiv unghiurile pe care dreptele  $D_0, D_1, D_2, D_3, \dots$  le face cu axa  $Cx$ ; iar  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  respectiv ariile  $ABE_1, D_1, ABE_2, D_2, \dots$

Dacă facem

$$\omega_i = \Omega_i + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cotg a_i$$

în care  $\omega_i$  este aria  $ABE_i D'_i$  obținem sistemul:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cotg^2 a_1 - \omega_1 \cotg a_1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cotg^2 a_2 - \omega_2 \cotg a_2 - \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cotg^2 a_n - \omega_n \cotg a_n - \frac{\gamma}{\gamma'} n^2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 = 0$$

sau dacă însemnăm cu  $x_1, x_2, \dots$  respectiv abscisele punctelor  $D_1, D_2, \dots$  căpătăm

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{2} + \omega_1 (x_1 - x_0) \frac{n}{h} - \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2 = 0$$

$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{2} + \omega_2 (x_2 - x_1) \frac{n}{h} - \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2} + \omega_n (x_n - x_{n-1}) \frac{n}{h} - \frac{\gamma}{\gamma'} n^2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 = 0$$

căci avem relațiunea de recurență:

$$x_i = x_{i-1} + \frac{h}{n} \cotg a_i$$

Dacă facem:

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\ 2 \frac{\gamma}{\gamma'} \left( \frac{h}{n} \right)^i &= k \\ 2 \frac{n}{h} &= \varepsilon\end{aligned}$$

obținem sistemul definitiv:

$$(3) \quad \begin{cases} (\Delta x_1)^2 + \varepsilon \omega_1 (\Delta x_1) - 1^2 \cdot k = 0 \\ (\Delta x_2)^2 + \varepsilon \omega_2 (\Delta x_2) - 2^2 \cdot k = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (\Delta x_n)^2 + \varepsilon \omega_n (\Delta x_n) - n^2 \cdot k = 0 \end{cases}$$

Dacă ne dăm numărul de diviziuni  $n$  sistemul (3) rezolvă problema de care ne ocupăm.

În practică vom constitui un tablou de forma următoare

No. curent	Rost	$\omega_i$ m <sup>2</sup> .	$\Delta x_i$ m.	$x_i$ m.	$Q_i$ m <sup>2</sup>	Observațiuni
	$E_1 D_1$					
	$E_2 D_2$					
	etc.					etc.

și vom calcula elementele tabloului în ordinea:

$$(\omega_1, \Delta x_1, x_1, Q_1), (\omega_2, \Delta x_2, x_2, Q_2), \dots\dots\dots$$

după ce am determinat numericește expresiunile  $\varepsilon$  și  $k$ .

Iată s. ex formulele care definesc elementele din prima paranteză:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= x_0 \left( H + \frac{1-n}{n} h \right) \\ \Delta x_1^2 + \varepsilon \omega_1 \Delta x_1 - 1^2 \cdot k &= 0 \\ x_1 &= x_0 + \Delta x_1 \\ Q_1 &= \omega_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{n} \right) \Delta x_1\end{aligned}$$

Elementele din parentezele următoare se vor determina prin ecuațiuni de forma:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \Omega_1 + \frac{h}{n} x_1 \\ \triangle x_2^2 + \varepsilon \omega_2 &= \triangle x_1^2 - 2^2 k = 0 \\ x_2 &= x_1 + \triangle x_2 \\ \Omega_2 &= \omega_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{n} \right) \triangle x_2.\end{aligned}$$

3. Pentru a concretiza mai bine teoria stabilită în cele ce preced, vom lua un exemplu și anume vom trata cazul unui baraj pentru care:

$$h = 30.00 \text{ m}; \quad H = 32.00 \text{ m}; \quad x_0 = 5.00 \text{ m}; \quad \gamma' = 2,4 \text{ t/m}^3$$

Dividem înălțimea  $h$  în 5 părți egale și găsim:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2 \frac{n}{h} = \frac{1}{3}. \\ k &= 2 \frac{y}{y'} \left( \frac{h}{n} \right)^2 = 2 \frac{1}{2,4} \left( \frac{30}{5} \right)^2 = 30.\end{aligned}$$

Făcând calculele indicate de formule putem constitui următorul tablou care definește lățimea  $x$  care trebuie dată fie-cărui rost ori-

No. curent	Rost	$\omega_i$ m <sup>2</sup>	$\triangle x_i$ m.	$x_i$ m.	$\Omega_1$ m <sup>2</sup>	Observațiuni
1	E <sub>1</sub> D <sub>1</sub>	40.—	1.96	6.96	45.88	
2	E <sub>2</sub> D <sub>2</sub>	87.64	3.65	10.61	98.59	
3	E <sub>3</sub> D <sub>3</sub>	162.25	4.61	15.22	176.08	
4	E <sub>4</sub> D <sub>4</sub>	267.40	5.10	20.32	272.70	
5	E <sub>5</sub> D <sub>5</sub> (CD)	394.62	5.47	25.79	411,03	

zontal al barajului (Fig. 2, cotele superioare ale crochiului).

4. Profilul barajului fiind determinat este necesar să vedem cum se mișcă în planul profilului curba de presiune ( $\Gamma$ ) când înălțimea de apă reținută descrește și în particular să vedem cum se prezintă profilul găsit din punctul de vedere al rezistenței în caz când înălțimea de apă reținută e nulă.

Pentru aceasta ne vom servi de formula:

$$z_i = \frac{x_i}{2} - \frac{Q_i}{G_i} \frac{h - y_i}{3} \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

care definește abscisa centrului de greutate a ariei  $\omega_i$ .

În tabloul următor se văd valorile  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ , cum și elementele auxiliare de care am avut nevoie pentru acest calcul:

No. curent	Rost	$\frac{x_i}{2}$ m.	$Q_i$ t.	$G_i$ t.	$\frac{h - y_i}{3}$ m.	$\frac{Q_i}{G_i} \frac{h - y_i}{3}$	$z_i$	Observațiuni
1	E <sub>1</sub> D <sub>1</sub>	3.48	18.	110.11	2.-	0.32	3.16	
2	E <sub>2</sub> D <sub>2</sub>	5.30	72.-	236.62	4.-	1.22	4.08	
3	E <sub>3</sub> D <sub>3</sub>	7.61	162.	422.59	6.-	2.30	5.31	
4	E <sub>4</sub> D <sub>4</sub>	10.16	288.	654.48	8.	3.52	6.64	
5	CD.	12.89	450.	986.40	10.-	4.66	8.23	

Dacă observăm că curba care are abscisele  $z_i$  1) în rosturile corespunzătoare E<sub>i</sub> D<sub>i</sub> este curba  $\Gamma_0$  de presiune în baraj când în spatele barajului n'avem apă conchidem imediat că locul curbelor de presiune când  $h$  variază este aria cuprinsă între curba  $\Gamma_0$  și curba de presiune  $\Gamma_h$  data în baraj de coloana maxima de apă  $h$ .

5. Profilul pe care l'am indicat în fig. 2 este cu 5% mai mare de cât profilul găsit de d-l *Barbet* în memoriul pe care l'am citat, pentru un baraj luat în aceleași condițiuni ca barajul studiat în cele ce preced 1).

În ceea-ce privește însă eforturile de tensiune, când nivelul apei în amontele barajului este nul, profilul determinat de noi se găsește în condițiuni de superioritate, pentru că dă eforturi de tensiuni mai mici:

În adevăr la baza barajului determinat de d-l *Barbet* avem în aval o tensiune de 0.88 kgr/cm<sup>2</sup>, pe câtă vreme în profilul determinat de noi n'avem de cât o tensiune de 0.36 kgr/cm<sup>2</sup>.

**ȘTEFAN N. MIREA**

Inginer în serv. de poduri și șosele  
Licențiat în matematici.

1) Cotele inferioare ale crochiului, Fig. 2.

2) Singura diferență e că d-l *Barbet* ia nivelul coronamentului la înălțimea apelor maxima, ( $H = h = 30.000$  m.)