Calculul unui cadru

Tipul de remize în beton armat, ce se construesc de administrația C. F. R„ e acela al remizei din București.

Ele sânt acoperite cu o dală, ce reazimă pe niște grinzișoare, ce la rândul lor reazimă pe o grindă principală, îndreptată după raza remizei și care e susținută de patru stâlpi.

Această grindă principală se prezinta ca în croquíul alăturat.

Voiu calcula grinda principală împreună cu stâlpii ca un cadru elastic articulat jos.

Aceasta pentru motivele:

1. Stâlpii sânt incastrați în grinda principală așa că unghiul ce-l face grinda cu stâlpul e nedeformabil.

2. Fundația stâlpilor se face în pământ la o adâncime relativ mică așa că nu poate fi vorba de o incastrare a lor în pământ.

Influența sarcinilor verticale

Sistemul fiind static nedeterminat, se aplică pentru determinarea reacțiunilor teorema minimului de travaliu.

Travaliul acumulat de întregul sistem e

$$T = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{E\Omega} ds$$

Termenul al II-lea e neglijabil față de primul pentru că deformațiile principale sânt date de moment, deci

$$T = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI} ds.$$

Reacţiunile necunoscute ca X de exemplu se deduc din condiţia ca derivată parţială a travaliului în raport cu acele necunoscute să fie nule deci

$$\frac{\partial T}{\partial X}=0 \quad . \quad \frac{1}{2E}\int\frac{M}{I}\frac{\partial M}{\partial X}ds=0 \quad sau \quad \int\frac{M}{I}\frac{\partial M}{\partial X}ds=0$$

Asta relativ la întreg sistemul.

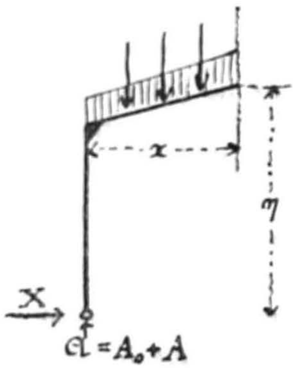
Determinarea momentelor

In o secţie x este după figură

$$M=A_1x-X\eta-Mst$$

Mst e momentul forţelor de pe grindă la stânga secţiunii. Pe A_1 îl descompun:

$$A_1=A_0+A$$



in care A_0 e reacţia grinzii superioare ca şi când ar fi simplu refernată, avem

$$M=A_0n+An-X\eta-Mst$$

Insă A_0x-Mst e momentul ce se produce în grindă în secţia considerată când e socotită ca simplu rezemată deci

$$M=M_0+An-X\eta \text{ în care}$$

$$M_0=A_0\,x-Mst.$$

Stabilirea ecuaţiunilor

Sânt 8 necunoscute: reacţiunile verticale în dreptul fie-cărui stâlp şi împingerile orizontale respective.

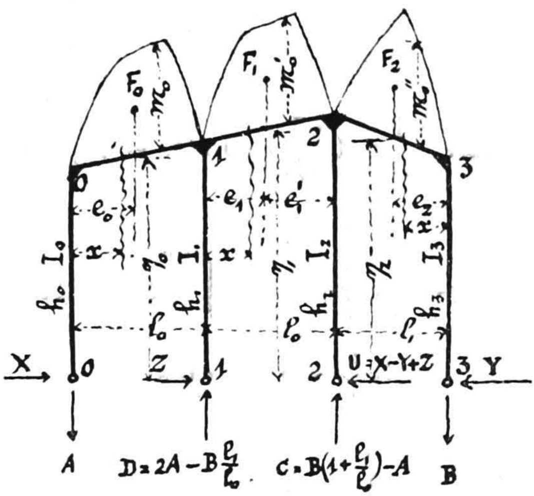
Trebuesc 8 ecuaţiuni. Statica dă 3 anume: proecţia forţelor pe 2 direcţiuni şi ecuaţia momentelor în raport cu un punct, celelalte cinci ni le dă teoria elastică.

Reacţiunile verticale le descompunem aşa:

$$A_1 = A_0 - A$$
$$B_1 = B_0 - B$$
$$C_1 = C_0 + C$$
$$D_1 = D_0 + D$$

A_0 B_0 C_0 şi D_0 le aflu cum am spus.

Aplicând ecuaţiile ce ni le dă statica găsim pe U în funcţie de X, Y, Z şi pe D şi C în funcţie de A şi B. Sensul fortelor îl iau pe acel din figura alăturată.



Avem

$$X + Z - U - Y = 0$$
$$-A + D + C - B = 0$$
$$-2 l_0 A + D l_0 + l_1 B = 0$$

Deducem:

$$U = X - Y + Z$$
$$C = B\left[1 + \frac{l_1}{l_0}\right] - A$$
$$D = 2A - B\frac{l_1}{l_0}$$

Avem diagrama alăturată cu cele 5 necunoscute.

Să formăm expresiile M şi $\frac{\partial M}{\partial X}$, $\frac{\partial M}{\partial Y}$ etc. pentru fie-ce porţiune de cadru. Le avem în alăturatul tablou

Bara	Momentul	$\frac{\partial M}{\partial A}$	$\frac{\partial M}{\partial B}$	$\frac{\partial M}{\partial X}$	$\frac{\partial M}{\partial Y}$	$\frac{\partial M}{\partial Z}$
00	$X\eta_1$	—	—	η_1	—	—
11	$Z\eta_1$	—	—	—	—	η_1
22	$(X - Y - Z)\eta_1$	—	—	η_1	$-\eta_1$	η_1
33	$Y\eta_1$			—	η_1	—
01	$M_0 - X\eta_1 - Ax$	$-x$	—	$-\eta_1$	—	—
12	$M'_0 - (X+Z)\eta_1 - A(l_0 - x) - B\frac{l_1}{l_0}x$	$-(l_0 - x)$	$-\frac{l_1}{l_0}x$	$-\eta_1$	—	$-\eta_1$
23	$M''_0 - Y\eta_1 - Bx$	—	$-x$	—	$-\eta_1$	—

Facem succesiv $\frac{\partial T}{\partial A} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial B} = 0$ etc. şi căpătăm 5 ecuaţii cu 5 necunoscute

$$(1)\; -\frac{1}{I}\int_0^{l_0}(M_0 - X\eta_1 - Ax)x\,ds - \frac{1}{I'}\int_0^{l_0}\left[M'_0 - (X+Z)\eta_1 - A(l_0 - x) - B\frac{l_1}{l_0}x\right](l_0 - x)\,ds = 0$$

$$(2)\; -\frac{l_1}{l_0 I'}\int_0^{l_0}\left(M'_0 - (X+Z)\eta_1 - A(l_0 - x) - B\frac{l_1}{l_0}x\right)x\,ds - \frac{1}{I''}\int_0^{l_1}(M''_0 - Y\eta - Bx)\,ds' = 0$$

$$(3)\; \frac{1}{I_0}\int_0^{h_0}X\eta_1^2\,d\eta_1 + \frac{1}{I_2}\int_0^{h_2}(X - Y + Z)\eta_1^2\,d\eta_1 - \frac{1}{I}\int_0^{l_0}(M_0 - X\eta_1 - Ax)\eta_1\,ds - \frac{1}{I'}\int_0^{l_0}\left(M'_0 - (X+Z)\eta_1 - A(l_0 - x) - B\frac{l_1}{l_0}x\right)\eta_1\,ds = 0$$

$$(4)\; -\frac{1}{I_2}\int_0^{h_2}(X - Y + Z)\eta_1^2\,d\eta_1 + \frac{1}{I_3}\int_0^{h_3}Y\eta_1^2\,d\eta_1 - \frac{1}{I''}\int_0^{l_1}(M''_0 - Y\eta_1 - Bx)\eta_1\,ds^1 = 0$$

$$(5)\ \frac{1}{I_1}\int_0^{h_1} Z\eta^2\,d\eta+\frac{1}{I_2}\int_0^{h_2}(X-Y+Z)\eta^2\,d\eta-\frac{1}{I'}\int_0^{l_0}\Big(M'_0-(X+Z)\eta$$

$$-A(l_0-x)-B\frac{l_1}{l_0}x\Big)\eta\,ds=0.$$

Să aplic aceste ecuaţii la remiza ce să construeşte la Ploeşti care e identică cu cea din Bucureşti în ceea-ce priveşte dispoziţia generală însă diferă puţin in dimensii.

In acest caz

$I=1131967 \qquad I'=1151379 \qquad I''=1236349$

$I_0=30459 \quad I_1=24545 \quad I_2=24545 \quad I_3=30459$

Pentru uşurarea calculelor să multiplică toţi membrii ecuaţiilor cu I aşa că vom avea raporturile $\frac{I}{I}$, $\frac{I}{I'}$, $\frac{I}{I_2}$ etc. Insă având în vedere că I chiar pe întinderea aceleiaşi deschideri nu e constant (căci o parte din fiare să ridică în sus) putem înlocui I, I′ şi I″ prin media lor având în vedere valorile lor apropiate. Idem cu I_0, I_1, I_2, I_3. Aceasta să poate vedea ca să poată face, examinând exemplul numeric de grîndă continuă tratat în Beton u. Eisen caet No. 6 din 1906 de Ing. G. Kaufman.

Raportul lor e $\frac{1173232}{27502}=42{,}66=n$

Deci am considerat

$$\frac{I}{I'}=\frac{I}{I''}\sim 1 \text{ şi } \frac{I}{I_0}=\frac{I}{I_1}=\frac{I}{I_2}=\frac{I}{I_4}\sim 42{,}66.$$

Pentru deschiderile l_0 am $ds=\frac{dx}{cos\alpha}$ şi pentru $l_1, ds'=\frac{dx}{cos\alpha'}$

Ecuaţiile devin după ce am scăzut (5) din (3)

$$(1)-\int_0^{l_0}(M_0-X\eta-Ax)x\,dx-\int_0^{l_0}\Big(M'_0-(X+Z)\eta-A(l_0-x)$$

$$-B\frac{i_1}{l_0}x\Big)(l_0-x)\,dx=0$$

$$(2)-\frac{l_1}{l_0\,cos\,\alpha}\int_0^{l_0}\Big(M'_0-(X+Z)\eta-A(l_0-x)-B\frac{l_1}{l_0}x\Big)x\,dx$$

$$-\frac{1}{cos\,\alpha'}\int_0^{l_1}(M''_0-Y\eta-Bx)x\,dx=0$$

$$(3)\quad \int_0^{h_0} X\gamma_1^2\, d\gamma_1 - \int_0^{h_1} Z\gamma_1^2\, d\gamma_1 - \frac{1}{n\cos\alpha}\int_0^{l_0}(M_0 - X\gamma_1 - Ax)\gamma_1\, dx = 0$$

$$(4)\quad -\int_0^{h_1}(X-Y+Z)\gamma_1^2\, d\gamma_1 + \int_0^{h_3} Y\gamma_1^2\, d\gamma_1 - \frac{1}{n\cos\alpha'}\int_0^{l_1}(M''_0 - Y\gamma_1 - Bx)\gamma_1\, dx = 0$$

$$(5)\quad \int_0^{h_1} Z\gamma_1^2\, d\gamma_1 + \int_0^{h_2}(X-Y+Z)\gamma_1^2\, d\gamma_1 - \frac{1}{n\cos\alpha}\int_0^{l_0}\Big(M'_0 - (X+Z)\gamma_1 - A(l_0 - x) + B\frac{l_1}{l_0}x\Big)\gamma_1\, dx = 0.$$

Efectuarea integralelor

$\int_0^{l_0} M_0 x\, dx$ este momentul static al suprafeței momentelor de pe porțiunea 01 în raport cu axul 00; 01 fiind considerată ca simplu rezemată.

$\int_0^{l_0} \gamma_1 x\, dx$ e momentul static al trapezului 0011 în raport cu axul 00.

$\int_0^{l_0} \gamma_1^2\, dx$ e momentul de inerție a dreptei 01 în raport cu un ax orizontal ce trece prin fundații și aflat în planul cadrului.

Așa efectuind toate integralele, după ce am împărțit toți termenii ecuațiilor cu $l_0^2 l_1$, capăt:

$$(1)\quad \frac{2}{3}\frac{l_0}{l_1}A + \frac{1}{6}B + \frac{h_1}{l_1}X + \frac{2h_1 + h_2}{6l_1}Z = \frac{F_0 e_0 + F_1 e'_1}{l_0^2 l_1}$$

$$(2)\quad \frac{1}{6}A + \frac{l_1}{3l_0}\left[1 + \frac{l_1\cos\alpha}{l_0\cos\alpha'}\right]B + \frac{2h_2 + h_1}{6l_1}(X+Z) + \frac{l_1(-h_2 + h_3)}{6l_0^2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}Y$$
$$= \frac{F_1 e_1}{l_0^2} + \frac{F_2 e_2}{l_0^2 l_1}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$$

$$(3)\quad \frac{2h_1 + h_0}{6l_1}A + \frac{1}{3}\left[n\cos\alpha\frac{h_0^3}{l_0^2 l_1} + \frac{h_0^2 + h_0 h_1 + h_1^2}{l_0 l_1}\right]X$$
$$- \frac{n\cos\alpha}{3}\frac{h_1^3}{l_0^2 l_1}Z = \frac{F_0 \gamma_{12}}{l_0^2 l_1}$$

$$(4)\ \frac{l_1(2h_2+h_3)}{6l_0}B-\frac{1}{3}n\cos\alpha'\frac{h^3_2}{l^2_0 l_1}(X+Z)+\frac{1}{3}\left[n\cos\alpha'\frac{h^3_2+h^3_3}{l^2_0 l_1}+\frac{h^2_2+h_2h_3+h^2_3}{l^2_0}\right]Y=\frac{F_2\eta_2}{l^2_0 l_1}$$

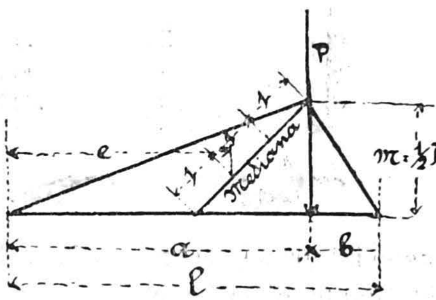
$$(5)\ \frac{2h_1+h_2}{6l_1}A+\frac{2h_2+h_1}{6l_0}B+\frac{1}{3}\left[n\cos\alpha\frac{h^3_2}{l^2_0 l_1}+\frac{h^2_1+h_1h_2+h^2_2}{l_0 l_1}\right]X$$
$$-n\cos\alpha\frac{h^3_2}{3l^2_0 l_1}Y+\frac{1}{3}\left[n\cos\alpha\frac{h^3_1+h^3_2}{l^2_0 l_1}+\frac{h^2_1+h_1h_2+h^2_2}{l_0 l_1}\right]Z=\frac{F_1\eta_1}{l^2_0 l_1}$$

In care F_0, F_1 și F_2 sânt suprafețele momentelor pe porțiunile respective 01, 12, 23 considerate ca simplu rezemate

F_1e_0	este	momentul	static	al	suprafeței	F_0	în	raport	cu	axul	00
F_1e_1	„	„	„	„	„	F_1	„	„	„	„	11
$F_1e'_1$	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	22
F_2e_2	„	„	„	„	„	F_2	„	„	„	„	33

η_0	este	ordonata	grinzii	01	la	distanța	e_0	de axul	00
η_1	„	„	„	12	„	„	e_1	„ „	11
η_2	„	„	„	23	„	„	e_2	„ „	33

Calculul lui F_1 Fe, $F\eta$, etc.



Să vede din figură că pentru o sarcină izolată suprafața momentelor e $\frac{Pab}{2}$. Pentru sarcini uniform distribuite este

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{8}pl^2\times l=\frac{1}{12}pl^3$$

Deci

$$F=\frac{1}{2}\Sigma Pab+\frac{1}{12}pl^3$$

Fe este produsul lui F cu distanţa până la centrul de gravitate al suprafeţei momentelor care din figură să vede că e $\frac{a+l}{3}$, deci

$$Fe = \frac{1}{6}\Sigma Pab(a+l) + \frac{1}{24}pl^4$$

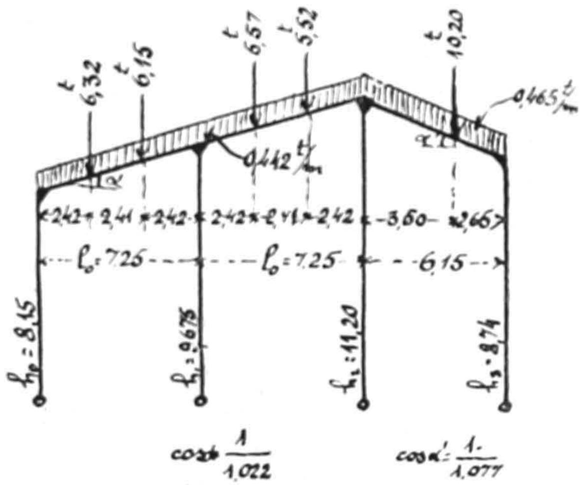
şi

$$F\eta = F(h + e\,tg\,\alpha) = Fh + Fe\,tg\,\alpha.$$

Aplicarea datelor şi rezolvirea ecuaţiunilor

In cazul nostru avem diagrama cu forţele şi dimensiile alăturate, găsim :

$F_0 = 86{,}9148$	$F_0 e_0 = 314{,}6671$		$F_0 \eta_{l0} = 834{,}2225$
$F_1 = 77{,}3886$	$F_1 e_1 = 279{,}8294$	$F'_1 e_1 = 281{,}2380$	$F_1 \eta_{l1} = 860{,}6665$
$F_2 = 56{,}3161$	$F_2 e_2 = 166{,}4707$		$F_2 \eta_{l2} = 527{,}1616$



Toate exprimate în tone şi metri şi derivatele lor.

Inlocuind toate cantităţile prin valorile lor capăt :

(1) $0{,}7859\ A + 0{,}1667\ B + 1{,}5732\ X + 0{,}8279\ Z = 1{,}8434$

(2) $0{,}1667\ A + 0{,}5355\ B + 0{,}7374\,(X + Z) + 0{,}6399\ Y = 1{,}2770$

(3) $0{,}7453\ A + 25{,}0866\ X - 38{,}9808\ Z = 2{,}5807$

(4) $0{,}6072\ B + 57{,}3835\,(X + Z) + 86{,}5530\ Y = 1{,}6308$

(5) $0{,}8279\ A + 0{,}7374\ B + 62{,}9193\ X - 60{,}4716\ Y + 101{,}9001\ Z = 2{,}6625$

Rezolvind găsim

$A = 1{,}924$ tone $\qquad B = 1{,}728$ tone

$X = 0{,}032\ t \qquad Y = 0{,}022\ t \qquad Z = -0{,}009\ t$

De unde deducem

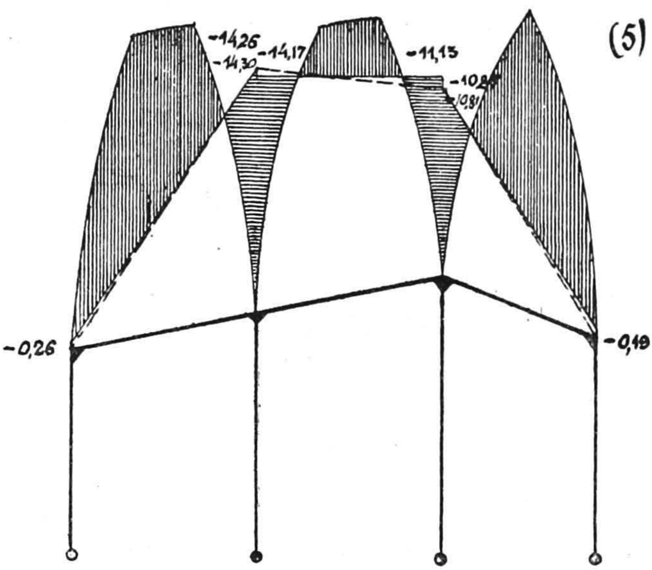
$$U = 0{,}001\ t \qquad C = 1^t{,}270\,t \qquad D = 2{,}382\ t$$

cu aceste rezultate construind curba momentelor negative capăt liniile trase plin.

Comparația cu o grindă continuă

Să presupun că grinda 0 1 2 3 e o grindă continuă pe reazime de nivel (adică la acelaş nivel).

Ca să utilizăm calcule deja făcute urmărind formulele precedente vedem că trebue să facem $\cos\alpha = \cos\alpha' = 1$ și în expresia momentelor $X = Y = Z = U = 0$.



(5)

Capăt

$$(1) \qquad 0{,}7859\ A + 0{,}1667\ B = 1{,}8434$$

$$(2) \qquad 0{,}1667\ A + 0{,}5226\ B = 1{,}2473$$

Deduc $A = 1{,}973 \qquad B = 1{,}758$

și $C = 1{,}276 \qquad D = 2{,}455$

Momentele negative sânt după curba punctată.

Să vede că momentele negative sânt foarte apropiate de cele găsite prin calculul exact.

In cât putem spune că:

în cazuri analoage putem foarte bine să ne scutim de calculul exact care e anevoios şi să considerăm grinda de sus ca o grindă continuă aşezată pe reazime la acelaş nivel, de şi la prima vedere pare că aceasta nu e o ipoteză justă reazimile fiind denivelate.

Aceasta'i ipoteza admisă la remiza din Bucureşti.

Să poate imputa acestei ipoteze ca şi calculului exact faptul că o mică deplasare a unui stâlp modifică mult distribuţia eforturilor şi că ipoteza grinzilor simplu rezemate ar fi mai bună.

Insă :

a) O mică deplasare a stâlpului 22 dă împingeri horizontale însămnate în stâlpi de cari în asemenea ipoteză nici nu să ţine cont, deci nu remediază inconvenientul ipotezelor precedente.

b) din modul cum se execută lucrarea rezultă continuitate şi deci momente negative şi e preferabil să facem ipotezele cele mai apropiate şi a adopta apoi după caz coeficientul de siguranţă convenabil.

GH. EM. FILIPESCU
Inginer sub-şef de secţie C. F. R.