Asupra unei chestiuni de economie

la piesele de beton armat

Una din problemele ce se pune adesea ori la proiectarea construcţiunilor de beton, armat este ca dându-se momentul încovoietor, la care este supusă o dală de beton armat de o lăţime dată, precum şi maximul rezistenţei la care poate fi supus atât betonul cât şi fierul, să se determine înălţimea acelei dale precum şi secţiunea armaturilor. Un element, care rămâne nedeterminat, este procentul de fier, adică raportul între secţiunea fierului şi aceea a betonului. Insemnând cu p procentul, cu f_e secţiunea totală a armaturilor pe lăţimea b şi referindu-ne la fig. 1 avem $p = \frac{f_e}{bh}$. Formulele arată că

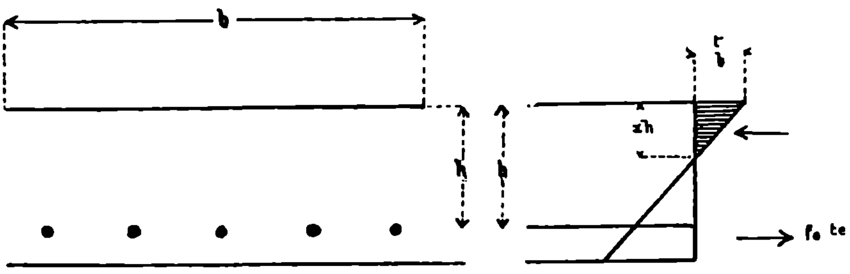

Figura 1.

mărind procentul de fier înălţimea dalei se micşorează şi vice-versa, sau cu alte cuvinte ori-ce adăogire de fier atrage după sine o economie de beton şi vice-versa. Şi atunci se naşte întrebarea: care este procentul de fier ce trebue să admitem pentru ca să obţinem secţiunea cea mai economică?

Considère în expunerea teorii ce a făcut în „Génie Civil“ admite a priori, că procentul cel mai economic este acela, pentru care atât fierul cât şi betonul sânt supuse la maximul rezistenţelor permise şi verifică acest principiu, pentru secţiunile calculate după teoria sa, cu ajutorul curbelor de cost. Pentru secţiunile calculate după alte metode, în special pentru acelea calculate după prescripţiunile circulării prusiene, autorii, după câte ştim, admit ca bun principiul, de care am vorbit, fără a căuta să verifice exactitatea lui. In cele ce urmează vom căuta să facem această verificare şi să vedem întru cât este exact că procentul care dă maximul de economie, este acela pentru care atât fierul cât şi betonul lucrează la maximul rezistenţelor admisibile.

Se ştie, că la un anumit procent p corespunde un anumit raport α între tensiunea la care e supus fierul şi maximul compresiunei betonului, şi reciproc: la o valoare dată a lui α corespunde o anumită valoare a lui p. Şi dacă însemnăm cu α_0 raportul între maximul tensiunei admisibile pentru fier şi maximul compresiunei admisibile la beton şi cu p_0 procentul corespunzător acestei valori a lui α (procent pe care-l vom numi procent limită) dacă $p > p_0$ avem $\alpha < \alpha_0$ şi vice-versa; cu alte cuvinte dacă procentul este mai mare de cât procentul limită, pentru ca betonul să fie supus la maximul compresiunei trebue ca fierul să fie supus la o tensiune mai mică de cât maximul permis şi vice-versa. Şi atunci la calculul dimensiunilor, întru cât procentul admis este mai mare de cât procentul limită, se are în vedere numai rezistenţa betonului, calculându-se înălţimea după formula:

$$(1) \quad h = \sqrt{\frac{2\,M}{\sigma_b\, b\, x\left(1 - \frac{x}{3}\right)}}$$

iar în cazul când procentul admis este mai mic de cât procentul limită se are în vedere numai rezistenţa fierului, întrebuinţând formula:

$$(2) \quad h = \sqrt{\frac{2\,M}{\sigma_e\, f_e\left(1 - \frac{x}{3}\right)}}$$

Pe de altă parte, dacă nu ţinem seamă de costul etrierilor şi al fiarelor de repartiţie, (de fiarele de repartiţie putem să nu ţinem seamă întru cât ele sânt cu totul independente de procent, iar neglijarea costului etrierilor nu va avea influență de cât întru cât h va varia în limite mici; în caz contrar cum o sporire a înălțimei poate atrage o reducere importantă saù chiar o suprimare a etrierilor, rămâne de examinat dacă un procent sub procentul limită nu va fi mai economic) costul pe metru linear de dală C poate fi exprimat prin:

$$C = (bh + ab)\, c_b + f_e\, c_f$$

în care formulă c_b este costul unitar al betonului și c_f costul unitar al fierului. Cantitatea abc_b este de obiceiu aceiași, ori-care ar fi valoarea lui p de oare-ce grosimea de beton sub armatură este independentă de procentul de fier așa în cât rămâne să cătăm minimul funcțiunei

$$(3) \quad C - abc_b = bh\, c_b + f_e\, c_f$$

când variază p.

Cum prin înlocuirea lui h prin valoarea sa în funcțiune de p obținem o funcțiune al cărui studiu e dificil, vom face o schimbare de variabilă, luând ca variabilă cantitatea a.

Avem

$$(4) \quad a = n\,\frac{1 - x}{x}$$

și

$$x = np\left[\sqrt{1 + \frac{2}{np}} - 1\right]$$

în care n este raportul între coeficientul de elasticitate al fierului și acela al betonului. (A se vedea „Buletinul societății Politechnice" No. 5 din Maiu 1908. 1)

Din formula (4) scoatem:

$$(5) \quad x = \frac{n}{a + n}$$

Și obținem:

$$(6) \quad h = \sqrt{\frac{6\,M}{b\,n\,\sigma_b}}\;\frac{a + n}{\sqrt{3a + 2n}} \text{ în cazul când } p > p_0 \text{ deci } a < a_0$$

și

$$(7) \quad h = \sqrt{\frac{6\,M}{b\,n\,\sigma_b}}\,(a + n)\sqrt{\frac{a}{3a + 2n}} \text{ în cazul când } \left\{ \begin{array}{l} p < p_0 \text{ deci} \\ a > a_0 \end{array} \right.$$

Cum pe de altă parte avem:

$$f_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} \frac{b\,h\,x}{2} = \frac{b\,h}{2} \frac{n}{a\,(a+n)}$$

ecuaţia (3) devine:

$$C - a\,b\,c_b = b\,h \left[c_b + \frac{1}{2} c_f \frac{n}{a\,(a+n)}\right]$$

Şi puind $\frac{1}{2} \frac{c_f}{c_b} = r$ şi înlocuind pe h cu valoarea sa dată de (6) şi (7) oţinem pentru

$$a < a_o \quad C - a\,b\,c_b = b\,c_b \sqrt{\frac{6\,M}{b\,n\,\sigma_b}} \frac{a+n}{\sqrt{3\,a+2\,n}} \left[1 + \frac{r\,n}{a(a+n)}\right]$$

şi pentru

$$a > a_o \quad C - a\,b\,c_b = b\,c_b \sqrt{\frac{6\,M}{b\,n\,\sigma_e}} (a+n) \sqrt{\frac{a}{(3\,a+2\,n)}} \left[1 + \frac{r\,n}{a(a+n)}\right]$$

şi ţinând seamă de factorii independenţi de a rămâne să cătăm minimul funcţiunilor

$$y_1 = \frac{a+n}{\sqrt{3\,a+2\,n}} \left[1 + \frac{r\,n}{a\,(a+n)}\right] \text{ pentru } a < a_o$$

şi $$y_2 = (a+n) \sqrt{\frac{a}{3\,a+2\,n}} \left[1 + \frac{n\,r}{a\,(a+n)}\right] \text{ pentru } a > a_o$$

sau $$(8) \quad y_1 = \frac{a^2 + n\,a + r\,n}{\sqrt{3\,a^3 + 2\,n\,a^2}}$$

şi $$(9) \quad y_2 = \frac{a^2 + n\,a + r\,n}{\sqrt{3\,a^2 + 2\,n\,a}}$$

Vom începe prin studiul funcţiunii y_1. Avem:

$$\frac{d\,y_1}{d\,a} = \frac{(2\,a+n)\sqrt{3\,a^3 + 2\,n\,a^2} - \frac{9\,a^2 + 4\,n\,a}{2\,\sqrt{3\,a^3 + 2\,n\,a^2}} \left(a^2 + n\,a + r\,n\right)}{3\,a^3 + 2\,n\,a^2}$$

sau

$$\frac{d\,y_1}{d\,a} = \frac{2\,(2\,a+n)\,(3\,a^3 + 2\,n\,a^2) - (9\,a^2 + 4\,n\,a)\,(a^2 + n\,a + r\,n)}{2\,(3\,a^3 + 2\,n\,a^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d\,y_1}{d\,a} = \frac{a}{2\,(3\,a^3 + 2\,n\,a^2)^{3/2}} \left[3\,a^3 + n\,a^2 - 9\,r\,n\,a - 4\,r\,n^2)\right]$$

De oare-ce a nu poate avea valori negative, factorul:
$\frac{a}{2(3a^3+2na^2)^{3/2}}$ este pozitiv, aşa în cât rămâne să vedem variaţiunile de semn ale factorului.

$$\varphi(a) = 3a^3 + na^2 - 9rna - 4rn^2$$

Ecuaţiunea

$$(10) \quad 3a^3 + na^2 - 9rna - 4rn^2 = 0$$

prezentând o singură variaţiune, are conform teoremei lui Descartes o rădăcină pozitivă, pe care o vom însemna cu a_1. Cum pe de altă parte pentru $a=0$ $\varphi(a)<0$, urmează că dacă a creşte, funcţiunea y_1 descreşte până la $a=a_1$, când y_1 prezintă un minimum; iar pentru valori ale lui a mai mari ca a_1, y_1, creşte. Şi atunci dacă $a_1 > a_0$ adică dacă minimul funcţiunii y_1 (care corespunde cu minimul de cost) se întâmplă pentru o valoare a lui a mai mare de cât valoarea până la care formula, de la care am plecat, e aplicabilă, urmează că atâta vreme cât avem în vedere rezistenţa betonului, maximul de economie se obţine atuni când $a=a_0$ cu alte cuvinte când admitem procentul limită (rămânând bine înţeles să vedem dacă în aceste condiţiuni avem maximul de economie şi in cazul când avem în vedere rezistenţa ferului). Iar dacă $a < a_0$ minimul de cost nu se obţine în cazul când atât fierul cât şi betonul lucrează la maximul rezistenţelor admisibile, ci când betonul lucrează la maximum, iar fierul e supus la o rezistenţă mai mică de cât maximul permis. Şi cum a_1 depinde de valorile lui n şi r se vede că nu este exact principiul stabilit à priori că maximul de economie se obţine (ori care ar fi costul relativ al fierului şi betonului) atunci când ambele materiale lucrează la maximul rezistenţelor admisibile.

Puind în ecuaţia (10) $n = 15$ obţinem:

$$(11) \quad a^3 + 5a^2 - 45ra - 300r = 0$$

In ceea-ce priveşte coeficientul r, valoarea lui depinde de împrejurările locale cari decid asupra costului betonului şi al fierului. In mod aproximativ la noi în ţară putem socoti că 1 kgr. fier aşezat în operă poate costa între 0.30 lei şi 0.50 lei; iar 1 m^3 de beton cu dozaj variind între 250—350 kgr. ciment la m^3 beton poate costa între 30.0 — 45.0 lei (fără a ţine seamă de cofrage, al căror cost se poate considera că e independent de p); urmează că r poate varia între 26 şi 65. Puind aceste valori în (11) obţinem

$$\text{pentru } r=26 \quad (12) \quad \alpha^3+5\alpha^2-1170\alpha-7800=0$$
$$\text{şi pentru } r=65 \quad (13) \quad \alpha^3+5\alpha^2-2925\alpha-19500=0$$

Ecuaţiunea (12) are o rădăcină coprinsă între 34 şi 35 iar ecuaţiunea (13) are o rădăcină coprinsă între 52 şi 53.

Ecuaţiunea (12) este aplicabilă atunci când betonul este scump şi fierul eften, iar ecuaţiunea (13) în cazul contrar. Cum se poate presupune până la oare-care punct, că şi rezistenţele ce se dau materialelor sânt în raport direct cu preţurile lor, urmează că în primul caz α_0 va avea o valoare sub medie, iar în cel d'al doilea caz α_0 va fi mai mare de cât media. Pentru dozajurile ce le-am presupus, betonul poate fi supus la 30—40 kgr./cm² iar fierul la 800—1000 kgr./cm²; urmează deci că α_0 poate varia între 20 şi 33, valori cari sânt mai mici de cât valorile 34 şi 52 ce am găsit mai sus.

Rămâne să examinăm cazul când $\alpha > \alpha_0$ adică funcţiunea y_2. avem:

$$\frac{dy_2}{d\alpha}=\frac{(2\alpha+n)\sqrt{3\alpha^2+2n\alpha}-\dfrac{6\alpha+2n}{2\sqrt{3\alpha^2+2n\alpha}}\left(\alpha^2+\alpha n+rn\right)}{\alpha(3\alpha+2n)}$$

sau

$$\frac{dy_2}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha(3\alpha+2n)^{3/2}}\left(3\alpha^3+3n\alpha^2-n(3r-n)\alpha-rn^2\right)$$

Urmează că trebue să vedem variaţiile de semn ale factorului

$$\varphi(\alpha)=3\alpha^3+3n\alpha^2-n(3r-n)\alpha-rn^2$$

Ca şi în cazul precedent ecuaţia $\varphi(\alpha)=0$ are o rădăcină pozitivă şi $\varphi(0)<0$; prin urmare daca α'_1 este acea rădăcină, întru cât $\alpha'_1 \leqslant \alpha_0$ şi în acest caz maximul de economie se obţine când $\alpha=0$; iar dacă $\alpha'_1 > \alpha_0$ maximul de economie se obţine pentru $\alpha=\alpha'_1$ pentru care valoare y_2 prezentă un minimum.
Puind $n=15$ ecuaţiunea de mai sus devine

$$\alpha^3+15\alpha^2-5(3r-15)\alpha-75r=0$$

Şi înlocuind pe r cu valorile de mai sus: 26 şi 65 obţinem ecuaţiile

$$\text{pentru } r=26 \quad (14) \quad \alpha^3+15\alpha^2-315\alpha-1950=0$$
$$\text{pentru } r=65 \quad (15) \quad \alpha^3+15\alpha^2-900\alpha-4875=0.$$

Ecuaţiunea (14) are o rădăcină coprinsă între 14 şi 15, iar ecuaţiunea (15) are o rădăcină coprinsă între 26 şi 27. Ecuaţiunea (14) este aplicabilă când betonul este scump şi fierul eften, adică aproximativ când α_0 este sub medie şi se apropie de 20; iar ecuaţiunea (15) este aplicabilă când α_0 se spropie de 33. Rezultă că şi în cazul când α_0 maximul de economie se obţine în general când $\alpha = \alpha_0$.

In rezumat, pentru valorile obicinuite ale diferiţilor coeficienţi, funcţiunea y scade când α creşte de la 0 la α_0 iar funcţiunea y_1 creşte când α creşte de la α_0 la ∞. Rezultă că secţiunea cea mai economică se obţine când $\alpha = \alpha_0$ ceia ce cere $p = p_0$. Este bine înţeles că dacă din diferite împrejurări coeficienţii n, r, a_0 ar căpăta alte valori de cât cele pe cari le-am presupus, s'ar putea prea bine întâmpla fie ca $\alpha_1 < \alpha_0$ fie ca $\alpha_1 > \alpha_0$ şi atunci secţiunea cea mai economică s'ar obţine pentru $\alpha = \alpha_1$ respectiv $\alpha = \alpha'_1$.

Nu ştim decă timpul şi mijloacele ne vor permite să continuăm acest studiu şi la grinzile în formă de T; ţinem însă să atragem atenţiunea colegilor noştri că acolo secţiunea cea mai economică nu se obţine când se întrebuinţează procentul limită.

CRISTEA NICULESCU
inginer şef de secţiune la C. F. R.