EFECTELE TEMPERATUREI

IN

Arcele de beton încastrate la naşteri

1°) Chestiunea efectului temperaturii la arcele podurilor boltite de zidărie este în general neglijată din cauză că sporul de eforturi datorite temperaturii este mic la podurile de piatră sau de cărămidă: acest spor trebue însă luat în considerare la podurile de beton simplu sau de beton armat, din cauza marelui coeficient de dilatare lineară θ al betonului.

In diferite cursuri de rezistenţă şi de poduri se găseşte împingerea orizontală datorită unei variaţiuni de temperatură t pentru arce turtite de secţiune şi moment de inerţie constant.

Această împingere H_t este definită de formula:

$$H_t = \frac{E F \theta t}{1 + \frac{4}{45} \frac{f^2}{r^2}}$$

care corectează o formulă neexactă pe care o stabilise *Résal* in tratatul său de poduri metalice (pag. 453) şi în care E, F, f şi r sunt respectiv: modulul de elasticitate, secţiunea, săgeata fibrei mijlocii şi raza de giraţie a secţiunii.

In cele ce urmează vreau să găsesc care este împingerea orizontală şi curba de momente într'un arc încastrat parabolic de beton a cărui înălţime h măsurată normal pe fibra mijlocie, variază după ecuaţia:

$$h = h_0 \sec^3 \varphi$$

unde φ este unghiul pe care tangenta la fibra mijlocie îl face cu orizontala şi h_0 înălţimea arcului la cheie.

2°) Fie Ox, Oy axele de coordonate (fig. 1) şi :

$$y = \frac{f}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

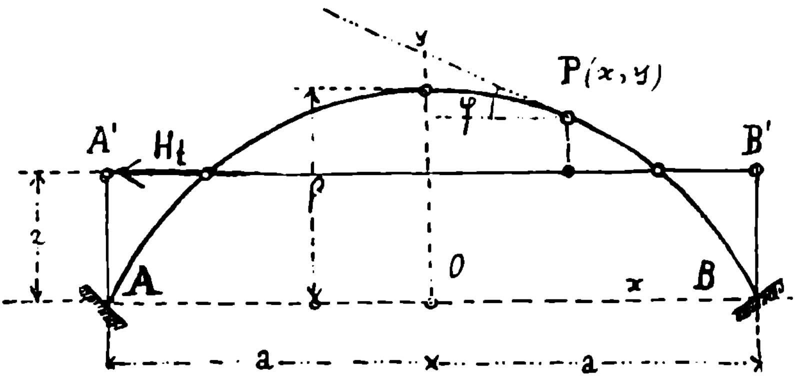
ecuaţia fibrei mijlocii A B a arcului. Făcând abstracţie de efectul încărcărilor verticale şi al reacţiunilor corespunzătoare, găsim că momentul încovoietor în secţiunea P (x, y) al arcului datorat *numai* efectului temperaturii este :

$$(1) \qquad M = y\, H_t - Y_t$$

în care :

$$Y_t = z\, H_t,$$

z fiind excentricitatea verticală a împingerii H_t.



Dacă însemnăm cu N compresiunea normală şi cu J, ds şi dx respectiv momentul de inerţie, arcul elementar şi elementul de dreaptă Ox, putem scrie (Résistance des matériaux par *A. Flamant*, page 518) ecuaţiunile generale ale arcului sub forma :

$$\int_{(AB)} \frac{M\, y\, ds}{E\, I} - \int_{-a}^{+a} \frac{N\, dx}{E F} + a\, \theta\, t = o$$

$$\int_{(AB)} \frac{M\, ds}{E\, I} = o$$

$\int_{(AB)}$ arătând că sumarea se face d'alungul arcului fibrei mijlocii.

Dacă însemnăm cu b baza secţiunii arcului, avem :

$$J = \frac{1}{12}\, b h_o^3 \sec^3\varphi, \qquad F = b\, h_o \sec^3\varphi$$

$$N = H_t \sec\varphi, \qquad dx = ds \cos\varphi$$

Putem deci scrie sistemul precedent sub forma:

$$\frac{12}{h_o^2}\int_{-a}^{+a} M y\, cos^3 \varphi\, dx - H_t \int_{-a}^{+a} cos^2 \varphi\, dx + a\theta t b h_o E = o$$

$$\int_{-a}^{+a} M\, cos^3 \varphi\, dx = o$$

sau dacă ţinem seama de ecuaţia (1) şi de simetria integralelor:

$$2 H t\left(\frac{12}{h_o^2}\int_o^a y^2\, cos^3 \varphi\, dx - \int_o^a cos^2 \varphi\, dx\right) - \frac{24}{h_o^2} Y_t \int_o^a y\, cos^3 \varphi\, dx +$$
$$a\theta t b h_o E = o$$

$$H_t \int_o^a y\, cos^3 \varphi\, dx - Y_t \int_o^a cos^3 \varphi\, dx = o$$

Cu altă ocazie[1]) am calculat integralele care intră în sistemul precedent şi am găsit:

$$(1)\begin{cases} \alpha = \int_o^a cos^3 \varphi\, dx = cotg\, \varphi_o \left[sin\, 2\varphi_o\left(cos^4 \varphi_o + \frac{5}{4} cos^2 \varphi_o + \frac{15}{8}\right) + \frac{15}{4}\varphi_o\right]\frac{a}{12}, \\ \gamma = \int_o^a y\, cos^3 \varphi\, dx = \left(\alpha - \frac{\beta}{a^2}\right) f, \\ \delta = \int_o^a y^2\, cos^3 \varphi\, dx = \frac{f^2}{a^4}\left(a^4 \alpha - 2 a^2 \beta + \eta\right) \end{cases}$$

în care:

$$\beta = cotg^3 \varphi_o \left(sin^3\, 2\varphi_o - \frac{3}{4} sin\, 4\varphi_o + 3\varphi_o\right)\frac{a^3}{48},$$

$$\eta = cotg^5 \varphi_o \left(- sin^3\, 2\varphi_o - \frac{3}{4} sin\, 4\varphi_o + 3\varphi_o\right)\frac{a^5}{48};$$

φ_o fiind unghiul pe care tangenta la naşterea fibrei mijlocii îl face cu axa Ox.

De asemenea se găseşte uşor că avem:

$$\int_o^a cos^2 \varphi\, dx = \frac{a^2}{f}\frac{\varphi_o}{2}$$

1) Buletinul Societăţi politecnice an. XXIV No. 9 pag. 313.

Equaţiunile generale ale arcului sunt deci:

$$2\,H_t\left(12\frac{\delta}{h_o^2}-\frac{a^3}{f}\,\frac{\varphi_o}{2}\right)-24\;Y_t\,\frac{\gamma}{h_o^2}+a\,\theta\, t\, b\, h_o\, E=o,$$

$$H_t\,\gamma-Y_t\,\alpha=o,$$

sau rezolvând în raport cu $H_t,\ Y_t$:

$$(2)\left\{\begin{aligned} H_t &= 12\,\frac{\theta\, t\, J_o\, E}{k\,a^2-k^1\,h_o^2}\\ Y_t &= 12\,\frac{\gamma}{a}\,\frac{\theta\, t\, J_o\, E}{k\,a^2-k^1\,h_o^2}\end{aligned}\right.$$

unde:

$$(3)\quad J_o=\frac{1}{12}\,b\,h_o^3,\qquad k=12\,\frac{\alpha\,\delta-\gamma^2}{\alpha\; a^3},\qquad k^1=\frac{a}{f}\,\frac{\varphi_o}{2}\,;$$

k şi k^1 fiind nişte coeficienţi care nu depind de cât de turtirea aerului:

$$\tau=\frac{f}{2\,a}\,;$$

In practică pentru a rezolva chestiunea vom începe prin a calcula expresiunile α, φ şi δ cu ajutorul ecuaţiilor (1); în urmă din sistemul (3) vom deduce pe J_o, k şi k^1. Relaţiunile (2) ne dau ast-fel necunoscutele problemei H_t şi Y_t

Excentricitatea z a împingerii arcului rămâne, după cum am văzut, definită de relaţiunea simplă:

$$z=\frac{\gamma}{\alpha}\;.$$

ŞTEFAN N. MIREA
Inginer în serviciul de poduri şi şosele.
Licenţiat în Matematici.