DISCUTIUNI

Calculul grafic al momentelor de inerție

In numărul 8 din anul trecut al *Buletinului Societății Politecnice* (Vol. XXVII pag. 619) d-l Inginer *A. Toussaint* a publicat un articol *„Despre calculul grafic al momentelor de inerție și despre scări în statica grafică"*, articol la care d-l Inginer *N. Profiri* ne-a prezintat o întîmpinare asupra metodei expuse în acel articol pentru calculul grafic al momentelor de inerție. Această întîmpinare a fost comunicată d-lui Inginer *A. Toussaint*, care ne-a trimes răspunsul său, și în scop de a se elucida complect chestiunea, și a închide prin urmare discuțiunea, ne-am adresat d-lui Inginer-șef *I. Ionescu*, profesor la Școala de Poduri și Șosele, care a avut bunavoința a examina chestiunea, și a ne da notița pe care o publicăm în cele ce urmează împreună cu notițele d-lor *N. Profiri* și *A. Toussaint*.

Redacția mulțumește d-lui *I. Ionescu* pentru examinarea ce a făcut-o, și publicînd toate aceste notițe consideră discuțiunea închisă.

Redacția.

*

In numărul 8 (August 1911) al *Buletinului*, Domnul *A. Toussaint* tratează «*Despre calculul grafic al momentelor de inerție și despre scări în statica grafică*». Noutatea procedeului D-sale în determinarea grafică a momentelor de inerție s'ar reduce la construcția simplă ce o propune pentru aflarea direcției pe care se află antipolul unei drepte față de elipsa de inerție a unei suprafețe ce considerăm.

Să mă explic:

Dreptei oy (vezi figura de pe pag. 80) îi corespunde, față de elipsa de inerție a suprafeței A.B.C.D, punctul V ca antipol. Se știe că dacă vrem a afla momentul static al suprafeței A.B.C.D., în raport cu dreapta oy, facem produsul

$$M_1 = \Omega \,.\, d$$

unde Ω înseamnă aria considerată, iar d distanța centrului ei de greutate la oy. Pentru momente de ordinul al doilea însă, trebue a lua momentul static față de aceeaș dreaptă a rezultantei M_1, ce trebue transpusă în antipolul V.

Evident, că pentru această operație e suficient să cunoaștem numai paralela la oy ce ar trece prin V.

Pentru găsirea acestei paralele, Domnul *Toussaint* propune o

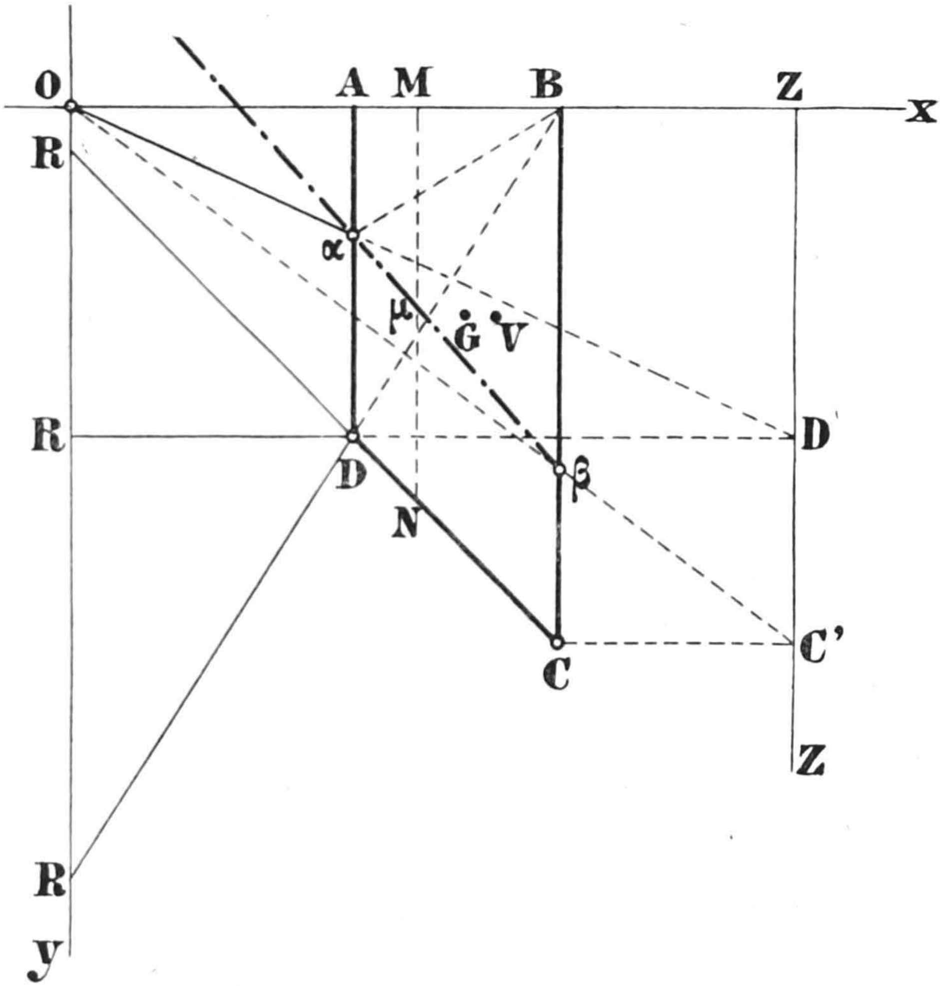

Fig. 1.

construcție ce-i drept simplă. Numai, construcția propusă, teoreticește, e greșită, iar aplicată, nu se poate spune că furnizează ori cînd rezultatele apropiate.

In adevăr, D-sa proiectează un punct, de pildă C, în C′ depe ZZ. Intersecția lui OC′ cu BC determină mărimea Bβ, ce cu drept cuvînt e proporțională cu produsul coordonatelor $x_1 y_1$ ale punctului C.

Să punem :

$$O A = x_0 \qquad A D = y_0 \qquad A\alpha = a_0$$
$$O B = x_1 \qquad B C = y_1 \qquad B\beta = a_1$$
$$O M = x \qquad MN = y \qquad M\mu = a$$

Se repetă operaţia de mai sus pentru punctul D şi ar mai rămîne de aflat centrul de greutate al *trapezului* şi problema e rezolvată.

Numai trebue observat că dacă luăm:

$$A\,\alpha = a_0 = x_0\, y_0 \quad \text{şi} \quad B\,\beta = a_1 = x_1\, y_1$$

nu rezultă că şi:

$$M\,\mu = a = x\, y$$

Căci:

$$a = \frac{1}{x_1 - x_0}\,[x_0\, y_0\,(x_1 - x) + x_1 y_1\,(x - x_0)]$$

Iar:

$$x\,y = \frac{x}{x_1 - x_0}\,[y^0\,(x_1 - x) + y_1\,(x - x_0)]$$

Pentru că $a = x\,y$ rezultă:

$$y_0 = y_1$$

adică, numai cînd suprafaţa A B C D e un dreptunghiu, numai atunci ne e permis a uni α cu β printr'o dreaptă.

Dar de ast-fel, se vede imediat. că dacă repetăm construcţia propusă pentru un punct M, punctul nu va mai cădea pe dreapta $\alpha\,\beta$. Căci ordonatele $M\,\mu = a$ sunt proporţionale *produsului* $x\,y$ şi prin urmare locul lui μ nu poate fi o dreaptă.

Aşa, iată ce rezultate absurde am obţine, dacă concluziile Domnului *Toussaint* ar fi juste.

Pentru ori ce punct de pe Oy, adică pentru un punct de coordonate $x = o$, $y = k$ corespunde în transformarea de mai sus origina O, căci produsul $x\,y$ face zero. Atunci *ori ce dreaptă analoagă cu* $\alpha\,\beta$ ar trebui să treacă prin O, ceeace 'i imposibil.

Mai mult. Dacă ar fi vorba numai de trapezul O A R D, ar urma că oricare ar fi direcţia dreptei R D, am obţine ca loc geometric al lui μ neconterit dreapta O α şi prin urmare antipolurile tuturor acestor trapeze s'ar confunda, ceeace iarăşi e cu neputinţă. Cazul e adevărat numai pentru un dreptunghiu, căci atunci produsul $x\,y$ se reduce la $k\,x$ iar antipolul V e unul din vîrfurile sîmburului dreptunghiului.

Construcţia D-lui *Toussaint* ar da rezultatele apropiate, numai cînd dreptunghiurile şi trapezele ce compun suprafaţa considerată. ar fi nişte fîşii destul de înguste. Dar . . în acest caz, se ştie că nu mai e nevoie de nici o corecţie, aplicîndu-se rezultatele M_1 tot în centrele de greutate G şi nu în antipolurile V. Cînd dreptunghiurile şi trapezele componente sunt relativ mari, sunt încă aplicabile metodele lui *Mohr* sau *Culmann* cu modificările trecute şi în *Hütte*.

N. Profiri
In ,iner

*

Am scris articolul pur şi simplu pentru a arăta că procedeul obişnuit are, teoreticeşte, o lacună despre care se omite în general de a se menţiona: acelaşi motiv pentru care se aplică acţiunea suprafeţelor elementare în centrele de suprafaţă impune a se aplica şi momentele statice elementare în centrele de momente statice; procedeul de aflarea centrelor de acţiune este în ambele cazuri acelaşi bazat identic pe înlocuirea unui element de curbă printr'o dreaptă în trapezele elementare. Acesta este tot adevărul, care nu poate fi contestat.

Acum să dăm rîndul discuţiunilor la care a ţinut autorul întîmpinări să dea loc.

Sunt perfect de acord cu D-sa în concluziunea care trebueşte luată drept esenţa întîmpinării, că procedeul descris de mine nu dă rezultate apropiate de cît în cazul cînd suprafeţele (fîşiile) elementare au fost luate destul de înguste. Nu numai atît, dar nici nu poate fi vorba de metoade de felul acesta în cazul contrariu. Publicarea articolului meu în Buletin am socotit-o adresată binevoitoarei atenţiuni a persoanelor cu cultură tecnică: aşa fiind am omis intenţionat de a menţiona, ca ştiut de toţi, faptul de mai sus. Dar D. Inginer *Profiri* a văzut contrariul în figură! Il rog să mă erte că l-am indus în eroare în acest fel; însă nu puteam să mă servesc de cît de o figură schematică, forţată în raport cu realitatea, deoarece scopul nu era prezentarea unei epure de calcul ci claritatea în expunere.

Poate că întîmpinătorul a fost izbit de faptul că în figura mea primul element de suprafaţă are lăţimea straşnic de mare O*b*. Este adevărat. Insă acest element este dreptunghiular şi am demonstrat în cursul articolului că centrul momentelor statice se află în acest caz, matematiceşte, la $^2/_3$ din O*b*. Dar dacă O'*b*' nu era paralelă cu Ob? Ori-care ar fi fost direcţia lui $O'b'$, determinam numai pe b'' şi obţineam dreapta fixă Ob''? Absolut de loc: atunci descompuneam trapezul în fîşii înguste.

Totuşi, pentru primul element îngust lipit de axa Oy tot aşi fi obţinut o dreaptă fixă Ob'' pentru ori-ce variaţie de direcţie a dreptei $O'b'$. Absolut că da. D. Inginer *Profiri*, ar fi observat că nu rezultă de aci de cît fixitatea primului centru de momente statice, care are să ducă în ori-ce caz la un element de moment de inerţie apropiat de zero, fiindcă y respectiv este foarte mic. Procedeul expus de mine există, pentru că raţionamentul dat, dovedeşte aceasta.

Intîmpinătorul meu expune cu ajutor de formule lungi fapte pe care ori-cine dintre persoanele ce m'au onorat cu citirea articolului le-a văzut direct, ca evidente.

La aliniatul al şeaselea am de răspuns că practiceşte «construcţia propusă» nu poate de cît să amelioreze rezultatele obţinute fără ea. Iar teoreticeşte este o diferenţă de vedere între D. *Profiri* şi subsemnatul: după vederea D-sale construcţia este teoreticeşte greşită; după vederea mea este teoreticeşte neînţeleasă de D-sa. Cînd elementele secţiunii date sunt dreptunghiulare, construcţia propusă dă, în practică chiar, rezultate matematiceşte exacte.

Că α nu poate fi unit cu β printr'o dreaptă de cît cînd ABCD este dreptunghiu (figura din întîmpinare) am demonstrat eu însumi în articolul meu. Faptul că totuşi se ia $\alpha\beta$ ca dreaptă nu este de cît vecinicul procedeu de aproximaţie grafic. Pentru un lucru aşa de evident şi a cărui invocare nu stabileşte nimic era oare nevoe de formule şi locuri geometrice?

Afirmaţiunile întîmpinătorului meu merg şi mai departe cînd pretinde că toate dreptele analoage cu $\alpha\beta$ convergează în punctul O. D sa demonstrează că curba trece prin punctul O şi pretinde a fi demonstrat că şi secantele curbei ar trece prin punctul O.

Sunt de acord cu D. *Profiri* asupra faptului că nu este nimic nou în procedeul expus, în afară de construcţia simplă pentru aflarea direcţiilor pe care se află centrele de momente statice. Mai mult, de şi construcţia aceasta a fost dedusă de mine, totuşi cred că a mai fost expusă înainte de alţii; acest lucru mi l a afirmat mai de mult D. Inginer-şef *Ion Ionescu*, şi construcţia e prea uşoară pentru a nu fi fost deja găsită. Dar, de şi se poate să mă înşel, nu sunt de acord cu întîmpinătorul meu în privința că nu ar avea ce căuta în Buletin de cît articole care să poarte sancțiunea noului.

A. Toussaint.
Inginer

Tecuci, 20 Noembre 1911.

*

D-l redactor, dorind să închee discuția născută între d-nii *A. Toussaint* și *N. Profiri*, asupra articolului publicat în August 1911 relativ la calculul momentelor de inerție pe cale grafică, mi-a cerut părerea asupra neînțelegerilor ivite. Din cele spuse în întîmpinare și răspuns, reese că putem grupa în 3 părți chestiunile desbătute, și anume: I) originalitatea metodei; II) exactitatea ei teoretică, III) importanța ei practică. Voi examinà pe rînd aceste trei chestiuni.

I) Chestiunea originalității nu trebue luată în inginerie în mod absolut. S'a și spus chiar că această știință este făcută, dar că ea trebuește necontenit refăcută. Incă din anul 1866. *Culmann* a arătat cum se pot calculà grafic momentele de inerție, și de atunci încoace s'a scris necontenit despre dînsa; eu am notate pînă acuma 9 metode în acest scop. Sunt cîțiva ani de cînd d-l *A. Toussaint* mi-a arătat principiul metodei d-sale, și i-am spus atunci că metoda nu este nouă, întrucît am văzut că ea se compune din combinarea metodei lui *Culmann* cu metoda lui *Nehls*, publicată în 1874 în *Civil-ingenieur*. D-l *A. Toussaint* pornește după metoda lui *Culmann* și găsește momentele statice cu ajutorul unui funicular; de aci înainte *Culmann* pune momentele statice ale fîșiilor ca forțe pe direcțiunea primelor forțe și cu un al doilea funicular obține momentul de inerție, neglijînd astfel momentele minime ale fîșiilor în raport cu axe paralele cu axa momentelor.

Este adevărat, după cum afirmă și d-l *Toussaint*, că se găsesc o mulțime de cărți de statică grafică în care nu se atrage ate. țiunea asupra acestei neglijeri și că pentru a obține rezultate mai apropiate, ar trebui să îndepărtăm puțin liniile de acțiune ale momentelor, mai înainte de construcțiunea celui de al doilea funicular pentru a micșorà sau anulà erorile metoadei lui *Culmann*. De aci a eșit operațiunea zisă a *descentrărei forțelor* pentru al doilea funicular, operațiune pentru care s'a publicat diferite metode.

D-l *A. Toussaint* nu a avut de sigur cunoștință de lucrările publicate în această direcţiune; a văzut însă necesitatea descentrării şi a căutat o metodă pentru a o obţine. In acest scop D-sa transformă conturul C al suprafeţei în altul C', astfel ca un punct cu coordonatele x, y de pe C să vină în altul cu coordonatele $x, y'=kxy$ după C', k fiind o constantă. Insă aceasta nu este decît transformarea şi construcţia lui *Nehls*, care face ca aria lui C' să fie proporţională cu momentul static al suprafeţei C, în raport cu oy, căci:

$$\int xy\,dx = \frac{1}{k}\int (kxy)\,dx = \frac{1}{k}\int y'dx.$$

Nehls transformă curba C' în alta C'', prin aceiaşi metodă a cărei arie este proporţională cu momentul de inerţie al primei suprafeţe în raport cu oy. D-l *A. Toussaint* nu mai face această nouă transformare, ci aplică în centrul de greutate al fîşiilor rămase în C', momentele statice ale primelor fâşii, şi cu un al doilea funicular obţine momentul de inerţie.

Sub această formă, după cîte ştiu, nu s'a publicat nici o metodă pentru calculul grafic al momentelor de inerţie; şi din acest punct de vedere prin urmare nu se poate spune că articolul nu are nimic original, şi că nu făceà să se publice în Buletin, cu toate că prin *Hütte* sau alte cărţi se indică diverse metode pentru descentrare.

II) în ce priveşte exactitatea metoadei d-l *N. Profiri* spune că « *onstrucţia propusă, teoreticeşte este greşită*».

Cum că metoda nu este absolut exactă, şi nu duce momentele în antipoluri, se vede imediat; nu e nevoe nici de calcule, nici de reduceri la absurd. E destul să presupunem că o fâşie se reduce la un triunghiu, căci în transformare el rămîne tot triungiu, că centrele lor de greutate sunt pe aceiaşi paralelă la oy, şi că prin urmare metoda nu dă nici o descentrare pentru triunghiuri, cînd de fapt ar trebuì să dea. Pentru dreptunghiuri, descentrarea este complectă; pentru trapeze ea este ceva mai mică decît ar trebuì. Faptul că o linie dreaptă înclinată faţă de ox se transformă în o conică iar nu într'o dreaptă, nu are nici o importanţă acì, de oarece şi conturul curbiliniu C' trebue să-l înlocuim cu un poligon apropiat, după cum am făcut cu conturul C la început, şi cînd voim să menţinem liniile de separaţiune ale fîşiilor de la început, lucru admisibil cînd fîşiile nu sunt prea late. Din acest punct de vedere, metoda d-lui *A. Toussaint* este tot atît de exactă şi tot atît de greşită ca şi toate celelalte metode cunoscute, în cari se înlocuesc arce de curbă cu linii drepte.

III) Relativ la partea practică a metodei, d-l *N. Profiri* spune că: «*nu se poate spune că furnizează oricînd rezultate apropiate*». Acì este partea slabă a criticei D-sale. Cînd cineva este convins că o construcţie este: «*ce-i drept, simplă*» şi nu-şi dă bine seama ce anume aproximaţiune oferă acea construcţiune, nu trebue să se grăbească a o criticà. Sunt sigur că dacă D-sa studià complect această chestiune, ar fi înlocuit critica prin o complectare la metoda d-lui *A. Toussaint*; şi cum ştiu că D-sa ar fì fost în stare să facă acest lucru, nu pot decît să regret că nu l'a făcut.

Să presupunem dar că construcţia este simplă, cum o crede d-l *N. Profiri*, adică erorile de trasare suplimentară sunt neglijabile faţă de exactitatea pe care o aduce metoda pe altă cale şi să vedem ce ameliorare aduce metoda d-lui *A. Toussaint*, găsirii grafice a momentelor de inerţie. In acest scop să luăm trapezul din figura d-lui *N. Profiri*, şi să i calculăm analitic momentul de inerţie exact I şi momentul I′ la care ar duce metoda d-lui *A. Toussaint*, şi să vedem ce diferenţă obţinem între dînsele. Descompunem trapezul în triunghiurile ADC, ABC, punem $h = x_1 - x_0 = AB$ şi avem:

$$I = \frac{1}{36} y_0 h^3 + \frac{1}{2} y_0 h\left(x_0 + \frac{h}{3}\right)^2 + \frac{1}{36} y_1 h^3 + \frac{1}{2} y_1 h\left(x_1 - \frac{h}{3}\right)^2,$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{36} h\left[h^2\left(y_0 + y_1\right) + 2 y_0\left(3x_0 + h\right)^2 + 2 y_1\left(3x_1 - h\right)^2\right].$$

Pentru a găsì pe I′ calculăm momentul static M al trapezului în raport cu oy şi avem:

$$M = \frac{1}{2} y_0 h\left(x_0 + \frac{h}{3}\right) + \frac{1}{2} y_1\left(x_1 - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{6} h[y_0(3x_0 + h') + y_1(3x_1 - h)].$$

Acesta îl aplicăm ca forţă în centrul de greutate al trapezului AB $\beta\alpha$, care are $A\alpha = kx_0 y_0$. $B\beta = kx_1 y_1$. Momentul acestui trapez în raport cu oy se va obţine din M înlocuind pe y_0 şi y_1 cu $kx_0 y_0$ şi $k x_1 y_1$. Impărţind acest moment cu aria trapezului care este $\frac{1}{2}(kx_0 y_0 + kx_1 y_1)h'$ avem distanţa d a centrului de greutate la oy, pe care înmulţind-o cu M vom găsì pe I′. Deci:

$$I' = \frac{\frac{1}{6} b [k x_0 y_0 (3x_0 + b) + k x_1 y_1 (3x_1 - b)]}{\frac{1}{2}(k x_0 y_0 + k x_1 y_1) b'} \times \frac{1}{6} b [y_0(3x_0 + b) + y_0(3x_1 - b)],$$

$$\therefore I' = \frac{2}{36} b \frac{[x_0 y_0 (3x_0 + b) + x_1 y_1 (3x_1 - b)][y_0 (3x_0 + b) + y_1 (3x_1 - b)]}{x_0 y_0 + x_1 y_1}.$$

Găsim astfel:

$$I - I' = \frac{1}{36}(y_1 - y_0) b^3 . \frac{x_1 y_1 - x_0 y_0}{x_1 y_1 + x_0 y_0} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} T,$$

în care T este momentul minimum de inerţie al triunghiului DCK în raport cu axe paralele la oy, iar $\alpha = x_1 y_1 / x_0 y_0$.

Această relaţiune simplă ne dă multe lucruri interesante. Mai întîi $\alpha \geqslant 1$, şi deci $I - I' \leqslant T$. Aşa dar prin metoda D-lui *A. Toussaint* eroarea care se face la fie-care fîşie nu este de cît o *fracţiune* din momentul minimum al colţişoarelor de pe la margine în raport cu axe paralele cu *a* sau *oy*. Numai dacă $\alpha = \infty$, adică dacă $x_0 = O$ sau $y_0 = O$, atunci $I - I' = T$, adică cînd triunghiul este lîngă axa momentelor *oy*, sau lîngă axa de transformare *ox*, metoda nu dă nici o ameliorare pentru colţişoare. Cu cît fîşiile sunt mai departe de Oy cu atît ameliorarea este mai bună, şi cu cît axa de transformare este luată mai departe, cu atît se obţin rezultate mai bune.

Reese de aci că metoda dă o ameliorare sensibilă faţă de metoda lui *Culmann* din punct de vedere teoretic, cu condiţiune ca construcţiunea să fie simplă. Aci însă nu sunt nici de părerea D-lui *A. Toussaint* nici de părerea D-lui *N. Profiri*, căci metoda cere toate construcţiunile metodei lui *Culmann,* cere o transformare a lui *Nehls* şi cere găsirea centrului de gravitate a unei noi serii de fîşii. Găsirea unei centru de gravitate prin metoda obişnuită, cere numai 28 operaţiuni grafice elementare printre care 4 drepte şi 6 arce de cerc. De aceea metoda ar trebuì simplificată, şi această simplificare reese în mod clar din cele ce am spus pînă acì: să se facă la început transformarea lui *Nehls* şi apoi să se caute prin metoda lui *Culmann* momentul static al suprafeţei transformate. Se economiseşte ast-fel construcţiunile necesare pentru primul funicular, şi căutarea unei serii întregi de centre de greutate. Pe de altă parte cu modul acesta, descentrarea este perfectă. E de observat apoi că fîşiile se pot alege în mod mai convenabil faţă de conturul suprafeţei transformate, pe cînd în metoda D lui Inginer *A. Toussaint* se poate întîmplà ca fîşiile primitive să nu mai fie convenabile pentru conturul transformat.

Trebue însă observat că metoda lui *Nehls* prezintă dificultăţi şi erori grafice, fapte pentru care ea nici nu a putut intrà în uz ca metoda lui *Culmann*; aceasta se poate ameliorà prin îngustarea fîşiilor.

Sper că prin cele expuse pînă acì am lămurit totul şi că nu va mai fi nevoie să se revină asupra chestiunii.

I. Ionescu.
Inginer-Şef
Profesor la Şcoala de Poduri şi Sosele.