

# DESPRE CALCULUL GRAFIC AL ZIDURILOR DE SPRIJINIRE

DE

ALBERT TOUSSAINT

INGINER

Șeful Serviciului de poduri și sosele al județului Tecuciu.

**Teorema I.** Când fața interioară a zidului este plană și masivul de pământ este limitat la partea de sus printr'un plan, raportul dintre baza  $\sigma$  a dreptunghiului de împingere datorit supraîncărcării și baza  $S$  a triunghiului de împingere datorit masivului singur este egal cu raportul dintre grosimea  $a$  a stratului de pământ echivalent cu supraîncărcarea și grosimea  $h'$  a masivului măsurată pe normala dusă din piciorul zidului până la planul superior al masivului.

(În tot acest studiu tratăm prizme drepte de pământ sau zid avînd ca lungime unitatea, iar ca secțiune dreaptă figura respectivă).

Să considerăm un zid de sprijinire avînd ca față interioară planul  $AB$  (Fig. 1) și un masiv de pământ fără coeziune limitat sus prin planul  $BN$  făcînd unghiul  $\epsilon$  cu orizontul. Masivul este supraîncărcat cu greutatea  $p$  pe unitate de suprafață. Unitatea de suprafață va avea ca proiecțiune orizontală  $1 \times \cos \epsilon$ . Deci sarcina  $p$  lucrează pe suprafața orizontală  $\cos \epsilon$ , și pe unitatea de suprafață orizontală vom avea sarcina  $\frac{p}{\cos \epsilon}$ . Dacă însemnăm prin  $h_r$  înălțimea masivului de pământ echivalent, greutatea prizmei de pământ acționînd unitatea de suprafață orizontală va fi  $\Pi h_r \times 1 \times 1 = \Pi h_r$ ,  $\Pi$  fiind densitatea pământului. Avem deci :

$$(1) \quad \frac{p}{\cos \epsilon} = \Pi h_r$$

$$\text{Trebue să demonstrăm că } \frac{\sigma}{S} = \frac{a}{h'}$$

Știm din teoria generală a zidurilor de sprijinire că  $A'T = \frac{p}{\Pi h'} T R$ ,

$$(2) \quad \text{sau } \sigma = \frac{p}{\Pi h'} S$$



$$\text{sau } \frac{\sigma}{S} = \frac{p}{\Pi h'} = \frac{p}{h'}$$

Inlocuind (formula 1)  $\frac{p}{\Pi} = h_r \cos \varepsilon = a$  (a se vedea figura), avem

$$(3) \quad \frac{\sigma}{S} = \frac{a}{h'}$$

Dacă însemnăm cu  $h''$  distanța verticală de la piciorul interior al zidului pînă la planul de sus al masivului, avem (triunghiuri asemenea):

$$\frac{a}{h'} = \frac{h_r}{h''}$$

Inlocuind în formula (3), avem:

$$(4) \quad \frac{\sigma}{S} = \frac{h_r}{h''}$$

Această formulă, ca și (3), ne dă mijlocul de a construi grafic pe  $\sigma$ . De ex : din A ca centru descriem un arc de cerc cu în raza  $h''$ , care întilnește orizontala  $B B'$  în U. Ducem raza AU și luam intersecția ei V cu arcul descris din A cu raza  $h'' + h_r$ . Punctul V proiectat orizontal pe dreapta RM ne dă punctul O, prin care ducem verticala ce determină pe  $\sigma$ . Demonstrația se face foarte ușor ținînd seamă de asemănarea triunghiurilor  $O B' M$  și  $M T R$ .

Aplicînd acest procedeu la cazul cînd planul BN este orizontal (Fig. 2), vedem că  $a = h_r$  și  $h = h' = h''$ , iar punctul O se găsește la intersecția dreptei RM cu limita superioară a masivului de supraîncărcare. Teorema este dată atunci de formula

$$(5) \quad \frac{\sigma}{S} = \frac{h_r}{h}$$

Ecuția (4) se poate pune sub altă formă :

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{h_r}{h''}, \text{ sau } \frac{S}{\sigma} = \frac{h''}{h_r}, \text{ sau } \frac{S}{\sigma} + 1 = \frac{h''}{h_r} + 1, \text{ sau } \frac{S + \sigma}{\sigma} = \frac{h'' + h_r}{h_r},$$

$$(6) \quad \text{sau } \frac{\sigma}{S + \sigma} = \frac{h_r}{h'' + h_r}$$

Aceasta ne arată că trapezele  $B D K A$  și  $B' M R A'$  (fig.) 1 au bazele proporționale. De aci decurge următoarea teoremă :

**Teorema 2.** Datele fiind aceleași ca la teorema 1 (Fig. 1), orizontala dusă prin centrul de greutate al trapezului  $B'MRA'$  și verticala dusă prin centrul de greutate al trapezului  $BDKA$  întâlnesc fața  $AB$  a zidului în același punct.

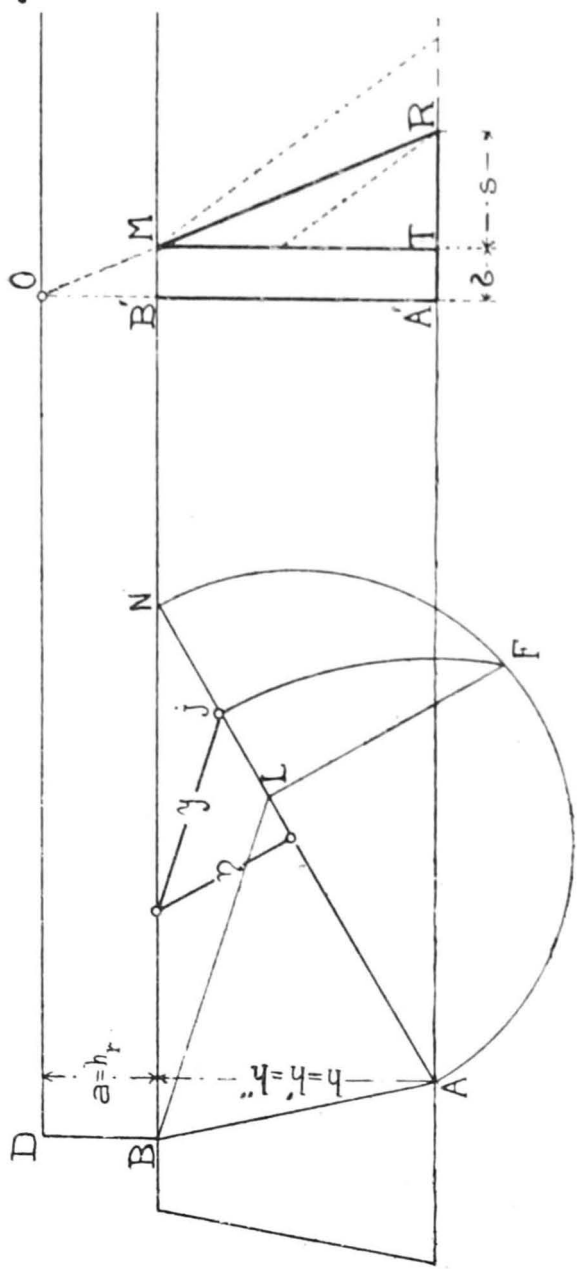


Fig. 2.

În adevăr, să descompunem trapezul  $B'MRA'$  în  $n$  fâșii foarte înguste paralele cu bazele trapezului și având toate aceeași lățime. Să descompunem la fel și tot în  $n$  fâșii și trapezul  $BDKA$ . Luând, la fie-care trapez, separat, momentele tuturor componentelor (fâșiilor) în raport cu una din baze și egalând cu momentul rezultantei în raport cu aceeași bază, vom obține două ecuațiuni din care va fi ușor de tras concluzia că distanțele centrelor de greutate ale trapezului până la bazele cele mari, de ex., sunt proporționale cu înălțimile trapezului. De aici rezultă că proiectând centrele de greutate ale celor două trapeze, paralel cu bazele fiecăruia, pe dreapta  $AB$ , trebuie să obținem

aceleași segmente pe aceasta din urmă, adică să cădem în același punct al dreptei  $AB$

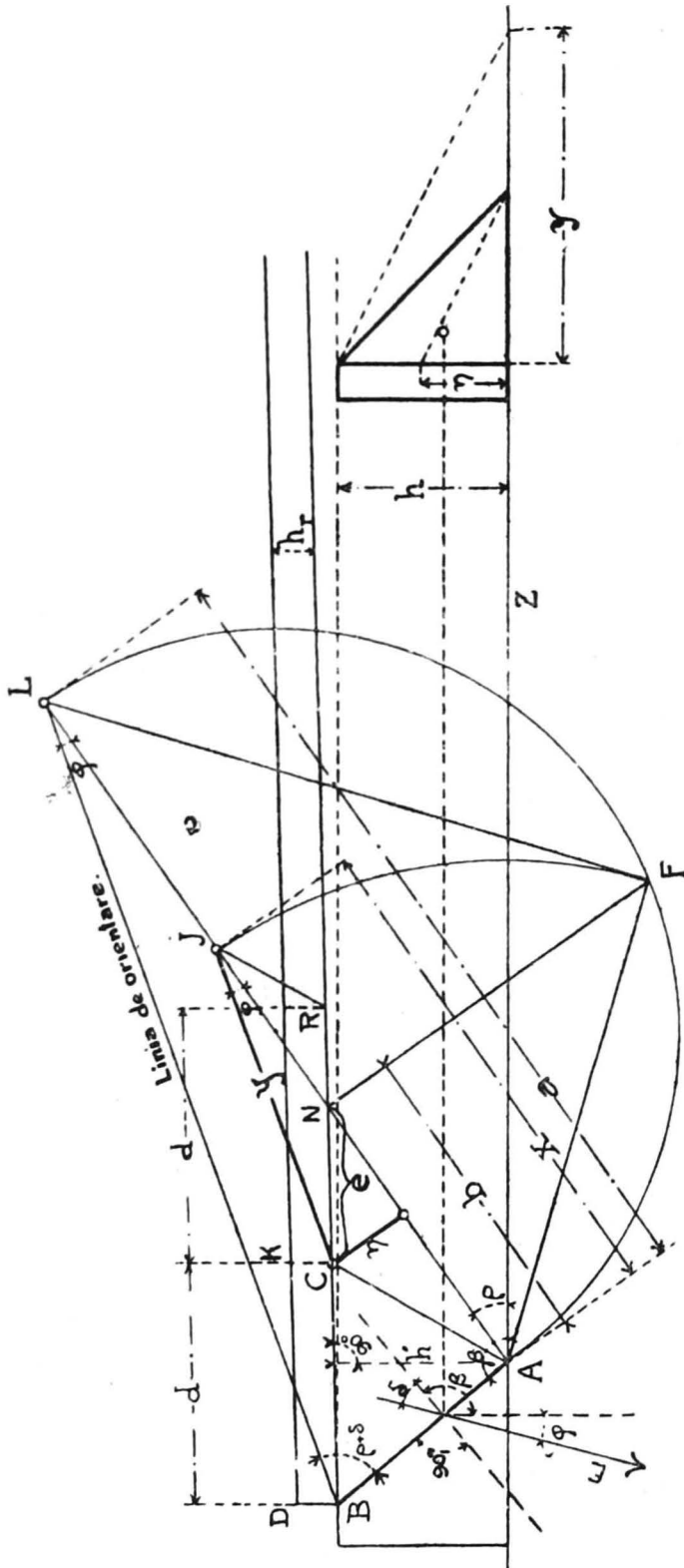


Fig. 3.

## Calculul zidurilor de sprijinire în cazul când linia de orientare se găsește afară din masivul de pământ.

Să considerăm un zid a cărui față interioară este plană, masivul de pământ fiind limitat sus printr'un plan.

În teoria zidurilor de sprijinire se presupune că linia de orientare se găsește în corpul masivului.

Să cercetăm teoria pentru cazul când linia de orientare este afară din masiv.

Aplicînd aceleași procedeeuri și demonstrațiuni, ajungem la a celeași concluziuni. (Fig. 3):

Ori care ar fi supraîncărcarea uniformă, planul de alunecare AC este dat de ecuațiunea:

(7) Suprafața triunghiului ABC = Suprafața triunghiului ACJ, latura CJ fiind paralelă cu linia de orientare, care face cu fața interioară a zidului unghiul  $\rho + \delta$ ,  $\rho$  fiind taluzul natural, iar  $\delta$  unghiul admis ca făcut de împingere cu normala la zid.

Asemenea împingerea este dată de formula

$$(8) \quad E = \frac{1}{2} \Pi \left( 1 + \frac{2 \rho}{\Pi h'} \right) y \eta$$

y fiind distanța CJ și  $\eta$  proecțiunea ei pe normala la taluzul natural. Construcțiunea grafică a punctului J se așcomodează cazului în modul următor.

Ducem JR paralel cu AC.

CR = BC, căci ele sunt proporționale cu înălțimile egale ale triunghiurilor ABC și ACJ egale și cu bază comună AC. Punem CR = BC = d

Triunghiurile asemenea ACN și JRN dau

$$\frac{x}{b} = \frac{d}{e}$$

Triunghiurile asemenea BLN și CJN dau:

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{d}{e}$$

Prin urmare  $\frac{x}{b} = \frac{a-x}{x-b}$ , sau  $x(x-b) = b(a-x)$ ; și, reducînd,

$$(9) \quad x^2 = ab$$

AJ este deci medie proporțională între AL și AN. Singura



deosebire între acest caz și cel din teoria generală este că  $AL > AN$ . Semicircomferența care dă pe  $AJ$  nu se mai construiește deci pe  $AN$ , ci pe  $AL$ , luat ca diametru. Prin punctul  $N$  ducem normala pe diametru și luăm  $AJ=AF$ : aceasta, ca și în cazul invers, în virtutea teoremei că «Intr'un triunghi dreptunghiu o catetă este medie proporțională între ipotenuza întreagă și segmentul ei pe ipotenuză».

Odată  $y$  și  $\eta$  determinate, restul teorii generale nu mai diferă întru nimic.

Putem trata acest caz în modul următor, cu ajutorul principiului din teoria lui Rankine că «Împingerea pe un plan vertical paralel cu direcția zidului este paralelă cu planul care limitează masivul sus». (Fig. 4).

Considerăm masivul întâi fără supraîncărcare.

Ducem prin piciorul interior  $A$  al zidului planul vertical  $AB_1$ . Fie  $E'_0$  împingerea totală pe acest plan. Ea va fi paralelă cu planul  $BN$ , deci va face cu normala la planul  $AB_1$  același unghi  $\varepsilon$  pe care îl face planul  $BN$  cu orizontul:  $\delta=\varepsilon$ . Masivul fiind neîncărcat, prizma de împingere va avea secțiunea triunghiulară și  $E'_0$  va întâlni linia  $AB_1$  la extremitatea de sus a treimii ei inferioare. Același lucru se petrece la intersecția forței  $E'_0$  cu linia  $AB$ , din cauza paralelismului între această forță și planul  $BN$ .

Considerăm pe  $AB_1$  ca față interioară de zid de sprijinire pentru a construi pe  $y$  și  $\eta$ , care ne dau (după teoria generală):

$$(10) \quad E'_0 = \frac{1}{2} \Pi y \eta$$

Construim triunghiul de împingere aferent la  $E'_0$ . Însă vom vedea că pe noi ne interesează repartizarea acestei împingeri, nu pe planul  $AB_1$ , ci pe planul  $AB$ . Se vede imediat că și pe planul  $AB$  forța  $E'_0$  se va repartiza, ca și pe  $AB_1$ , după un triunghi. Vom transforma, prin urmare, după cum se știe de la teoria generală, triunghiul cu dimensiunile  $y$  și  $\eta$  într'altul echivalent dar cu înălțimea, nu  $h''$ , ci  $h$ . Obținem astfel triunghiul de împingere  $TRV$ . Ordonatele (paralele cu  $AZ$ ) acestui triunghi ne dau (teoria generală), prin înmulțire cu densitatea  $\Pi$ , presiunea de direcția  $E'_0$  pe unitate de suprafață verticală pentru fiecare punct de înălțime.

Să considerăm echilibrul masivului  $AB_1$ . Acesta este supus la trei forțe:  $E'_0$ , greutatea lui proprie  $P_0$ , și reacțiunea zidului



A B egală și direct opusă cu împingerea  $E_0$  pe fața A B. Rezultă din echilibrul acestor trei forțe, că rezultanta lui  $E'_0$  și  $P_0$  ne va da pe  $E_0$  căutat.  $AB B_1$  fiind triunghi, centrul său de greutate este la a treia parte a medianei și paralela  $P_0$  la latura  $AB_1$  întâlnește pe A B în același punct cu  $E'_0$  adică la extremitatea de sus a treimii ei de jos.<sup>1)</sup> Putem zice că masivul  $AB B_1$  dă zidului o împingere verticală. Figura ne arată că această împingere verticală se repartizează asupra lui A B după un triunghi de împingere cu baza în A și cu vârful în B. Facem și asupra împingerii verticale  $P_0$  aceeași operație ca asupra împingerii  $E'_0$ , adică o distribuim pe înălțimea  $h$ . Vom obține un triunghi analog cu T R V, cu înălțimea  $h$  și baza  $C'$ , și ale cărui ordonate paralele cu A Z ne vor da (înmulțite cu  $\Pi$ ) presiunea verticală pe unitate de suprafață verticală<sup>2)</sup> a zidului pentru fiecare punct de înălțime.

$c'$  se construiește grafic în modul următor. Prin  $B_1$  ducem o paralelă la B I, care paralelă întâlnește pe A B în K. Triunghiul  $AB B_1 = A I K = \frac{1}{2} h B_1 K$ : deci  $B_1 K = c'$  căutat.

Zidul se află sub acțiunea a două împingeri: una  $E'_0$  paralelă cu B N și alta  $P_0$  verticală. Baza triunghiului de împingere este pentru prima  $c$  și pentru a doua  $c'$ .

Știm (teoria generală) că baza triunghiului de împingere înmulțită cu densitatea  $\Pi$  a pământului ne dă împingerea unitară la baza zidului; același lucru este de zis pentru ordonatele orizontale la orice înălțime ale triunghiurilor sau trapezelor de împingere. (Împingerea unitară este aci împingerea, de orice direcție, pe unitate de suprafață verticală)

Putem deci trata bazele triunghiurilor de împingere cum am trata împingerile unitare. Împingerea efectivă pe unitate de suprafață verticală, la baza zidului, va fi dată de rezultanta împingerilor unitare reprezentate de  $c$  și  $c'$ . Baza triunghiului de împingere efectiv va fi deci rezultanta lui  $c$  și  $c'$  introduse fiecare cu direcția respectivă. Ducem T m paralel cu  $E'_0$  și m n paralel cu  $P_0$ . Obținem T n = s = baza triunghiului de împingere efectiv. Triunghiul de împingere efectiv va fi deci T M V.

1) Aceasta rezultă și din teorema 2 dacă facem  $h_r = 0$ .

2) Expresiunea prescurtată „Unitate de suprafață verticală de zid” înseamnă suprafață de parament interior de zid a cărei proiecțiune, pe planul vertical paralel cu lungimea zidului, este egală cu unitatea de suprafață.

Am admis că prizma de împingere va fi triunghiulară. În adevăr dacă repetăm epura pentru o înălțime de zid  $x$  (în loc de  $h$ ), fiind în ipoteza masivului nesupraîncărcat, vom obține o figură în totul asemenea cu Fig. 4. Împingerea unitară variază deci ca ordonatele unei linii drepte și figura de împingere este un triunghi.

Față de cele expuse mai sus, vom avea (teoria generală):

$$E'_0 = \frac{1}{2} \Pi h c$$

$$P_0 = \frac{1}{2} \Pi h c'$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \Pi h s$$

Vedem că  $E'_0$  și  $P_0$  sunt proporționale cu  $c$  și  $c'$ ; direcțiile fiind și ele aceleași, rezultă că vom avea pe  $E_0$  ca direcție și poziție ducând prin punctul  $a$  ( $Aa = \frac{1}{3}AB$ ) o paralelă cu  $Tn$  ( $s$ ).

Să considerăm acum masivul încărcat cu sarcina  $p$  pe unitate de suprafață  $BN$ . Înălțimea de pământ  $h_r$  corespunzătoare va fi dată de formula (1).

Împingerea  $E'_0$  devine  $E'$  și  $P_0$  devine  $P$ . Fie  $E$  rezultanta lui  $E'$  și  $P$ . Componentele se schimbă ca mărime și poziție dar își păstrează direcțiile. Împingerea efectivă  $E$  va fi dată de trapezul de împingere obținut adăugînd la triunghiul  $TMV$  un dreptunghi cu

baza  $TT' = \sigma = \frac{p}{\Pi h'} S$  (formula 2). Baza  $TT'$  se poate construi

grafic, ducînd orizontala  $OO'$ , cum s'a arătat la teorema 1. Împingerea  $E$  este deci egală cu greutatea unei prizme de pământ avînd lungimea 1 și secțiunea dreaptă  $T'MVU'$ . Dacă proiectăm orizontal centrul de greutate al acestui trapez pe linia  $AB$ , obținem punctul de aplicație  $i$  al împingerii efective  $E$ .

Dacă rîrelungim  $RV$  pînă la intersecția cu  $OO'$  în  $O$  și ducem prin  $O$  o verticală, obținem trapezul de împingere  $A'RVU$ , care este partea din  $T'MVU'$  aferentă împingerii  $E'$ . Dacă transportăm trapezul  $A'RVU$  în  $T'R'V'U'$ , rămîne  $R'MVV'$  ca trapez de împingere al împingerii verticale  $P$ . Atît trapezele parțiale cit și cel total au centrele de greutate pe aceeași orizontală, din cauză că laturile lor neparalele se'ntîlnesc pe aceeași dreaptă  $OO'$  paralelă la bazele lor (centrul forțelor paralele nu se schimbă cînd forțele rămîn proporționale). Și, fiindcă orizontala  $OO'$  este aceeași ca  $OV$

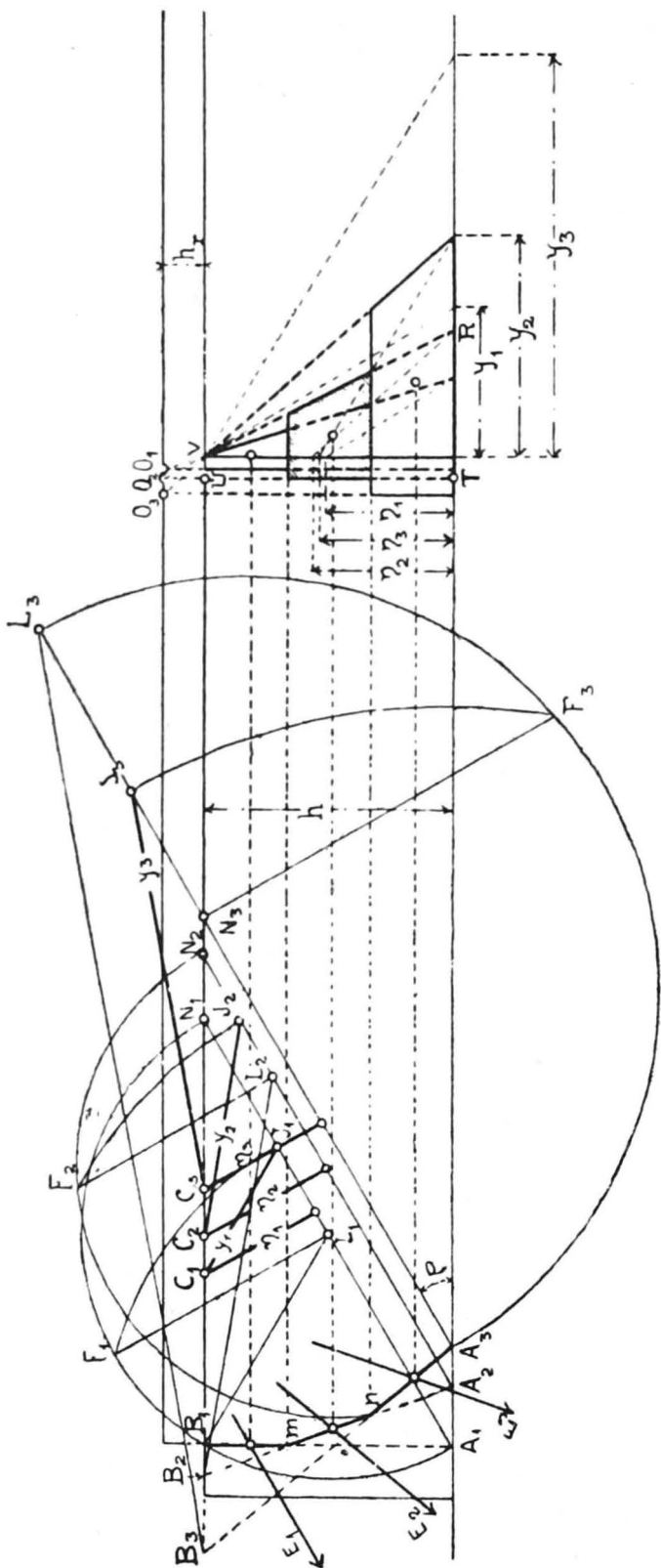


Fig. 5.

din figura 1 (Teorema 1), ținând seamă de teorema 2 vedem că forțele  $E'$ ,  $P$  și  $E$  întilnesc toate linia  $AB$  în același punct  $i$ , care poate fi obținut proiectând vertical centrul de greutate al trapezului  $BB'AB'_1$  (Fig. 4).

Examinând figura triunghiurilor și trapezelor de împingere vedem, în virtutea proprietăților triunghiurilor asemenea, că  $E'$  și  $P$  sunt proporționale cu  $E'_0$  și  $P_0$ . Direcția componentelor corâspunzătoare fiind aceeași, rezultă că rezultantele sunt paralele. Vom obține deci direcția și poziția împingerii efective  $E$  dacă vom duce prin  $i$  o paralelă la  $Tn$ .

Acest procedeu poate servi la controlarea rezultatelor obținute cu teoria generală, care, după cum știm, este bazată pe două ipoteze ce se contrazic (împingere făcând unghiul  $\delta$  cu normala la zid și suprafața de ruptură plană).

### **Ziduri de sprijinire a căror față despre pământ are profil curb.**

Să considerăm un zid al cărui profil are în partea masivului de pământ conturul curb  $B_1 m n A_3$  (Fig. 5). Împărțim acest contur în porțiuni drepte  $B_1 m$ ,  $m n$ ,  $n A_3$ . Tratăm fiecare din porțiunile acestea plane separat, după procedeu general. De ex., pentru elementul  $m n$ , prelungim acest plan pînă în  $A_2$  și  $B_2$ , adică pînă la intersecția cu planul inferior și superior al masivului de pământ, fie că aceasta din urmă ar fi orizontal sau nu. Tratăm atunci pe  $A_2 B_2$  ca față interioară de zid: ducem linia de orientare  $B_2 L_2$  făcînd unghiul  $\varphi + \delta$  cu  $A_2 B_2$ ; aplicăm construcția cu semicirconferința care dă punctul  $J_2$ ; ducem  $J_2 C_2 \parallel B_2 L_2$  și obținem  $\gamma_2$  și  $\eta_2$ ; cu aceste lungimi construim trapezul de împingere  $U V R T$ . Din acest trapez oprim numai partea aferentă lui  $m n$ , adică cuprinsă între horizontalele prin  $m$  și  $n$ , care porțiune are conturul hașurat în figură. Trapezul hașurat ne dă împingerea pe porțiunea  $m n$  a zidului: proiectăm orizontal centrul de greutate al lui pe  $m n$  și prin punctul găsit ducem împingerea  $E_2$  făcînd cu normala la  $m n$  unghiul  $\delta$  fixat de la începutul problemei. Valoarea lui  $E_2$  este greutatea prizmei de pământ avînd ca secție trapezul hașurat. În același mod construim împingerile  $E_1$  și  $E_3$  pe celelalte porțiuni de zid, cum arată figura 5.

Textul de mai sus se aplică neschimbat în cazul cînd planul superior  $AN_3$  al masivului este înclinat. S'a luat  $AN_3$  orizontal numai



pentru a simplifica figura. Dacă  $AN_3$  nu este orizontal, punctele  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  se determină cu procedeul arătat la teorema 1, sau se determină bazele dreptunghiurilor de împingere cu formula (2); evident că  $h'$  este constant, pe cînd înălțimea trapezelor de împingere variază de la element la element.

Procedeul de mai sus presupune că elementul  $m n$  (de ex.), suportă aceeași împingere fie că ar face parte din profilul curb  $A_3B_1$ , fie că ar face parte din profilul plan  $A_2B_2$ , ceea ce nu este exact. Din punctul de vedere practic, însă, aproximația este mai mult decît suficientă.

Cînd masivul de pămînt este limitat sus printr'un plan orizontal, problema se poate trata expeditiv cu teoria lui *Rankine* (Fig. 6)<sup>1)</sup>.

Să ducem planul vertical  $AB_1$ , să-l considerăm ca față interioară de zid și să construim trapezul de presiune respectiv. După teoria lui *Rankine* împingerea pe  $AB_1$  este orizontală, deci  $\delta = 0$  și  $\rho + \delta = \varrho$ . Linia de orientare  $B_1L$  face deci unghiul  $\varrho$  cu  $AB_1$ . Unghiul  $B_1AL$  fiind egal cu  $90^\circ - \rho$ , unghiul  $ALB_1 = 90^\circ$ . Prin urmare  $AB_1$  este media proporțională între  $AL$  și  $AN$ : luăm  $AJ = AB_1$ .  $CJ$ , paralelă cu  $B_1L$ , este normală pe  $AN$ :  $y$  și  $\eta$  se suprapun. Avînd pe  $y$  și  $\eta$ , construim după metoda generală triunghiul și trapezul de împingere  $UVRT$ .

Să descompunem conturul curb  $AB$  în elemente drepte. Prin punctele de despărțire să ducem verticale. Să considerăm unul din elemente, de ex. pe  $m n$  (No. 4 de sus în jos). Să cercetăm echilibrul trapezului de pămînt  $m m_2 n_2 n$ . Fie  $E_4$  împingerea pe porțiunea  $m n$  de zid. Forțele care solicită trapezul de pămînt  $m m_2 n_2 n$  sunt:

1<sup>o</sup>) Greutatea lui,  $P_4$ , (inclusiv supraîncărcarea) aplicată în centrul de greutate al trapezului  $m m' n' n$ .

2<sup>o</sup>) Împingerea pămîntului (orizontală după *Rankine*) pe fețele  $m_2 m$  și  $n_2 n$ . Împingerea pe  $m_2 m$  este egală și direct opusă celei pe  $n_2 m_1$ ; aceste două forțe se echilibrează deci împreună și es din calcul. Rămîne de ținut în seamă atunci numai împingerea  $E'_4$  pe  $m_1 n$ , care e dată de trapezul  $MM'N'N$  și trece prin centrul lui de greutate.

1) Inșă numai în cazul cînd elementele plane ale feței interioare a zidului fac cu  $A z$  unghiuri  $> 90^\circ$ .

3<sup>o</sup>) Reacțiunea elementului de zid  $m n$  egală și direct opusă cu  $E_4$ .

Cele trei forțe de mai sus se echilibrează : rezultă că  $E_4$  este rezultanta lui  $E'_4$  și  $P_4$ .

Problema este rezolvită, dar mai e susceptibilă de simplificare în aplicațiune. Fie  $\xi_4$  lungimea medie a trapezului  $MM'N'N$  și  $\lambda$  înălțimea lui. Știm că,  $\Pi$  fiind densitatea pământului,

$$(11) \quad E'_4 = \Pi \lambda \xi_4$$

Fie  $\mu'_4$  lungimea medie a trapezului  $mm'n'n$  și  $\lambda'_4$  înălțimea lui. Avem

$$(12) \quad P_4 = \Pi \mu'_4 \lambda'_4$$

Să prelungim pe  $m n$  pînă în  $B' B'_1$  și să însemnăm  $K I = \mu_4$ . Triunghiurile asemenea  $K I_i$  și  $m m_1 n$  dau

$$(13) \quad \frac{\mu_4}{\mu'_4} = \frac{\lambda'_4}{\lambda} \text{ sau } \mu_4 \lambda = \mu'_4 \lambda'_4$$

Înlocuind produsul  $\mu'_4 \lambda'_4$  în ecuația (12), avem

$$(14) \quad P_4 = \Pi \lambda \mu_4$$

Comparația ecuațiilor (11) și (14) ne arată că lungimile  $\xi_4$  și  $\mu_4$  sunt proporționale cu forțele  $E'_4$  și  $P_4$ . Rezultanta lui  $\xi_4$  și  $\mu_4$ , luate fie care cu direcția respectivă, ne va da prin urmare direcția lui  $E_4$ . Dacă luăm  $\alpha \gamma = \mu_4$ ,  $\beta \gamma$  va reprezenta așa dar proporționalicește pe  $E_4$  și va avea direcția forței  $E_4$ ; vom avea

$$(15) \quad E_4 = \Pi \lambda \times \beta \gamma$$

La construcția curbei de presiune în zid vom avea încă de compus pe  $E_4$  cu greutatea  $G_4$  a trapezului de zidărie  $m m'' n'' n$ . Dacă densitatea zidăriei este  $\Pi'$  și  $\nu'_4$  lungimea medie a trapezului, avem

$$G_4 = \Pi' \lambda \nu'_4$$

Să căutăm o lungime  $\nu_4$  astfel în cît  $\lambda \nu_4 \Pi = \lambda \nu'_4 \Pi'$

$$(16) \quad \text{Vom avea } G_4 = \Pi \lambda \nu_4$$

Luăm  $\gamma \delta = \nu_4$  și vom avea  $\Pi \lambda \cdot \beta \delta$  ca forță de introdus, aferent la stratul de zid No. 4, în poligonul forțelor al cărui furnicular ne dă curba de presiune în zid. Lungimile  $\nu_4$  se construiesc grafic ușor luînd pe două axe perpendiculare două distanțe  $BA$  și

BC proporționale cu  $\Pi$  și  $\Pi'$ : unim A cu C și obținem pe  $v_4$  cum arată figura 7.

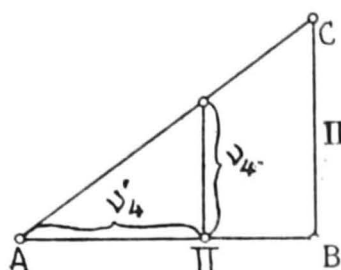


Fig. 7.

Pentru poligonul  $\alpha\beta\gamma\delta$  putem construi o scară cu ajutorul căreia să măsurăm direct forțele pe lungimile respective  $\alpha\beta$ ,  $\alpha\gamma$ ..  $\Pi'$  etc. Să considerăm de exemplu forța  $E'_4 = \Pi \lambda \xi_4$ .

Fie metrul unitatea de lungime (m).

Fie tona unitatea de greutate (t).

$$\text{Fie } \Pi = a \frac{\text{tonă}}{\text{m}^2}.$$

(Ca să nu introducem lungimea  $= 1^m$  a prizmelor de pământ socotim densitatea pe  $\text{m}^2$  de secție).

Fie  $\lambda = b$  metri.

Să presupunem  $\xi_4 = c$  metri.

$$\text{Avem atunci } E'_4 = a \frac{\text{t}}{\text{m}^2} b \text{ m} \cdot c \text{ m} = a b c \cdot \text{t}$$

$$\text{Scara} = \frac{\text{Lungimea}}{\text{Cantitate}} = \frac{\xi_4}{E'_4} = \frac{c \cdot \text{m}}{a b c \cdot \text{t}} = \frac{1}{a b} \text{ m}^1$$

O tonă va fi deci reprezentată prin  $\frac{1}{ab}$  metru.

Procedăm la fel cu toate elementele  $mn$  ale zidului de sprijinire.

Bine înțeles că pentru elementul No. 2 ( $p,q$ ), împingerea pe fața  $p_1q_2$  este echilibrată de reacțiunea feței  $Bp$  a zidului; iar pentru elementul No. 1 ( $Bp$ ) vertical (în cazul din Fig. 6), nu avem decît împingere orizontală și greutate de zid, fără trapez de pământ.

Observăm că scara calculată mai sus nu depinde decît de  $\lambda$  și de  $\Pi$ . Pentru acest motiv am împărțit zidul în elemente care să aibă aceeași proiecțiune verticală  $\lambda$ . Avem atunci o singură scară a forțelor pentru toată epura.

Dacă planul superior al masivului nu este orizontal, se poate trata problema cu teoria lui Rankine în modul următor 2). Descom-

1) A se vedea studiul anterior al subsemnatului: *Despre calculul grafic al momentelor de inerție și despre scări în statistica grafică*, publicat în *Bul. Soc. Polit.* Vol. XXVII pag. 619 — 624.

2) În cazul cînd elementele plane ale feței interioare a zidului fac cu A z unghiuri  $> 90^\circ$ .



punem parentul interior curb AB al zidului în elemente plane

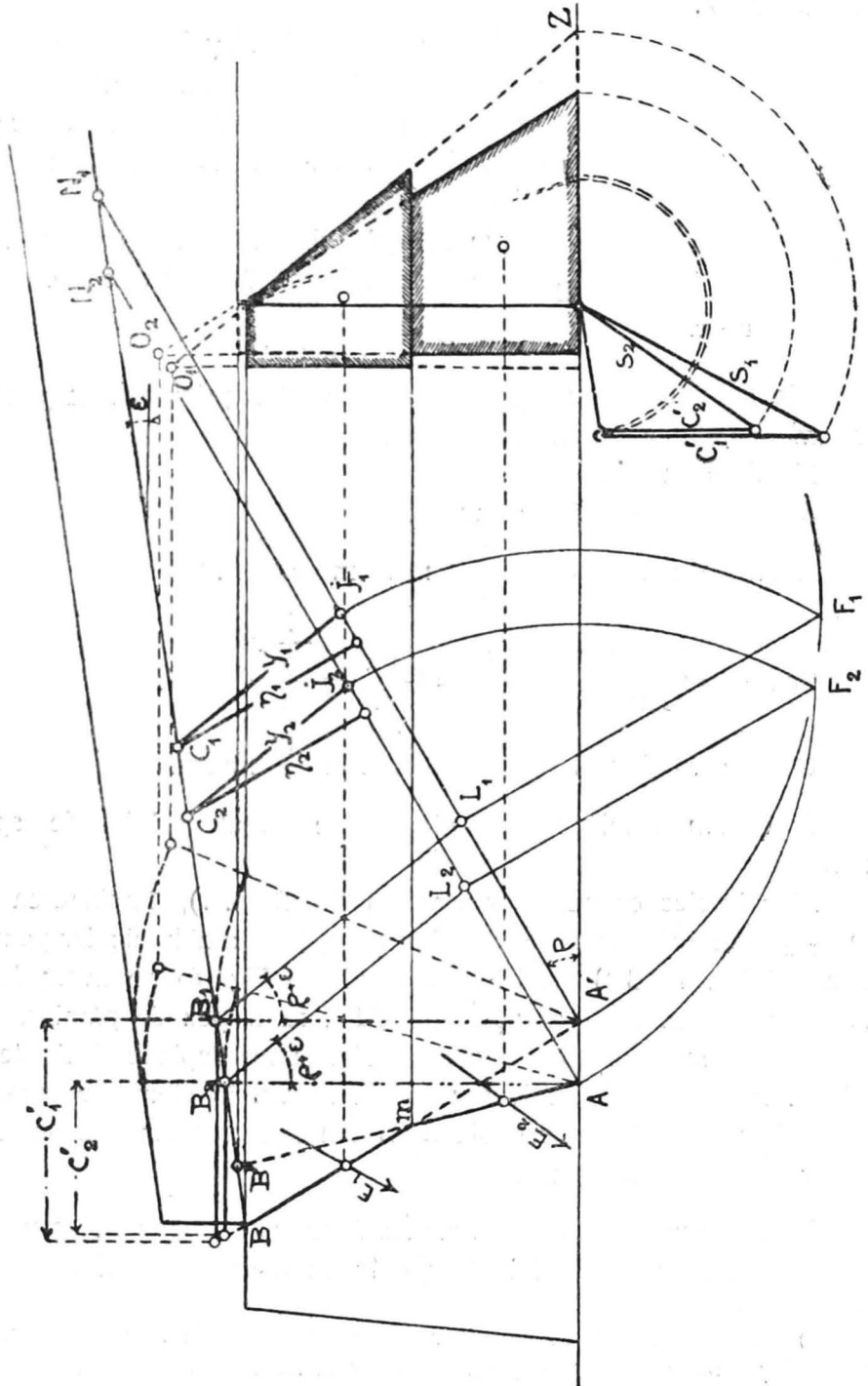


Fig. 8.

Bm, mA..., și aplicăm fiecăruia procedeul arătat în figura 4, după cum se vede în figura 8.

Prelungim elementele drepte ale conturului despre pământ al zidului pînă întilnesc planurile limită ale masivului de pământ. Tratăm pe  $BA'$  și  $B'A$  astfel obținute ca niște fețe interioare de ziduri de sprijinire, aplicînd fiecăruia procedeul din figura 4 întocmai, și construim pentru fiecare separat trapezul de împingere. Din trapezul de împingere al feței  $BA'$  păstrăm numai porțiunea aferentă elementului  $Bm$ , adică porțiunea din trapez cuprinsă între orizontalele duse prin  $B$  și  $m$ . Asemenea din trapezul feței  $B'A$  păstrăm partea cuprinsă între orizontalele duse prin  $A$  și  $m$ . Avem astfel poligonul de presiune efectiv, al cărui contur s'a hașurat. Orizontalele prin centrele de greutate ale trapezelor parțiale ne dau punctele de aplicație ale împingerilor elementare  $E_1, E_2, \dots$ ; iar direcțiile acestor împingeri le cunoaștem dela Figura 4 ( $E_1$  și  $E_2$  sunt paralele cu dreptele  $S_1$  și  $S_2$ ).

La un zid al cărui profil are conturul interior curb, dacă masivul e limitat sus printr'un plan, se poate găsi foarte repede presiunea pe baza zidului cu ajutorul teoriei lui *Rankine*.

În adevăr, atunci nu ne trebuie de cît împingerea totală  $E$ , care se deduce în modul următor (Fig. 9). Porțiunea de masiv  $ABB_1$  este în echilibru sub acțiunea următoarelor forțe :

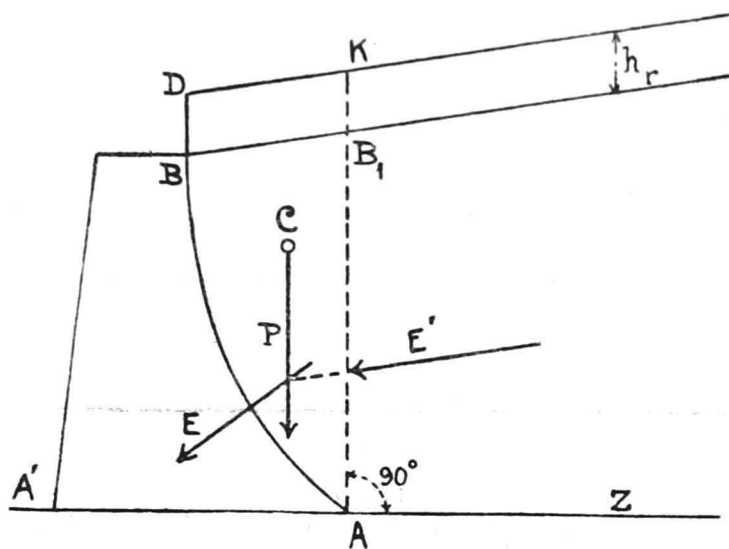


Fig. 9.

1<sup>o</sup>) Împingerea  $E'$  pe peretele vertical  $AB_1$ . Aceasta se determină ușor în mărime direcție și poziție cu teoria lui *Rankine*, ca în exemplele de mai sus.

2<sup>o</sup>) Greutatea  $P$  a masivului  $ABDKB_1A$ , aplicată în centrul de greutate al acestui masiv și a cărei valoare este greutatea prizmei de pământ  $ABDKB_1A$  avînd lungimea = 1.

3<sup>o</sup>) Reacțiunea zidului asupra masivului de pământ, egală și direct opusă cu împingerea  $E$  căutată.

Rezultă de aci că  $E$  este rezultanta lui  $E'$  și  $P$ .

**Notă.** Cînd aplicăm teoria lui *Rankine*, trebuie să ne asigurăm dacă împingerea găsită nu face cumva cu normala la zid un unghi mai mare ca unghiul de frecare admisibil. În acest din urmă caz, rezultatele găsite nu sunt realizabile, componenta tangențială a împingerii neputîndu-se realiza. În general aceasta nu se întîmple.

**Generalizarea teoremei 1.** Teorema 1 a fost demonstrată pentru figura 1 în care unghiul  $\beta$ , făcut de parementul interior plan cu linia pămîntului  $Az$ , este  $> 90^\circ$ .

Să cercetăm cazul cînd  $\beta < 90^\circ$  (Fig. 10). Fie  $AB$  fața interioară plană a zidului.

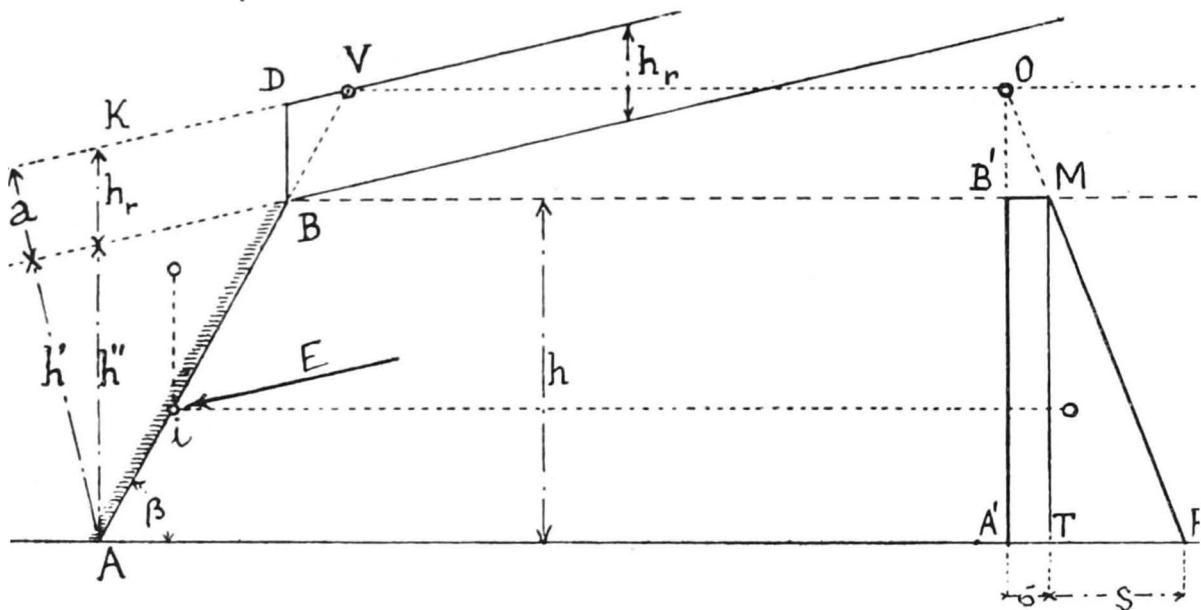


Fig. 10.

Aceeași demonstrație conduce la aceleași rezultate :

$$(3) \quad \frac{\sigma}{S} = \frac{a}{h'}$$

$$(4) \quad \frac{\sigma}{S} = \frac{h_r}{h''}$$

Vedem că  $\sigma$  se deduce din  $s$  tot prin proporționalitate cu aceleași lungimi ca în cazul precedent. Construcția grafică a lui  $\sigma$  trebuie adaptată, cum arată figura 10: prelungim AB până în V. Luăm intersecția O a lui RM cu orizontala dusă prin V, prin O ducem verticala OA'; în acest mod am obținut, din triunghiul de împingere MTR, trapezul de împingere B'MRA'.

Mai departe, aceeași demonstrație ca în cazul precedent ne conduce la aceeași formulă:

$$(6) \quad \frac{\sigma}{S + \sigma} = \frac{h_r}{h'' + h_r}$$

Rezultă prin urmare:

**Generalizarea teoremei 2.** (Fig. 10). *Orizontala centrului de greutate al trapezului B'MRA' (trapezul de împingere) și verticala centrului de greutate al trapezului BDKA întilnesc fața interioară a zidului în același punct i, care este punctul de aplicație al împingerii pământului.*

### **Aflarea centrului de împingere fără ajutorul trapezului de împingere.**

N'avem decît să proiectăm, prin verticală, în **i** (Fig. 10) centrul de greutate al trapezului BDKA. Dacă uzul acestui trapez nu este convenabil, ne servim de centrul de greutate al oricărui trapez ale cărui laturi neparalele să treacă printr'un punct al orizontalei duse prin V și care să aibă bazele pe liniile BB' și AA'. Am spus mai sus că toate aceste trapeze au centrele egal depărtate de bazele de sus sau de jos.

