CALCULUL GRAFIC AL UNEI BOLȚI PENTRU POD DE ȘOSEA.

Deschiderea bolții 30^{m}00. Săgeata curbei medii a bolții 4,^{m}00. Curba medie a bolții parabolă.

DE

A. TOUSSAINT

INGINER

Șeful serviciului de Poduri și Șosele din județul Tecuciu

Dimensiunile bolții.[1]) S'a luat grosim ea bolțiila chee = 0^m.50. Toate celelalte grosimi sunt date de condiția ca proecțiunile verticale ale rosturilor normale la curba medie să fie 0^m,50.

Unități de măsură. S'a luat peste tot: pentru lungimi, metrul; pentru forțe, tona de 1000 Kg.

Ecuațiunile de condițiune. Tratăm mai întîi cazul unor încărcări simetrice. Presupunem bolta încastrată la naşteri. In ipoteza simetriii absolute și dacă grosimea bolții crește foarte puțin dela chee spre naşteri, ecuațiunile de condițiune sunt:

$$
(1) \quad \begin{cases} -\dfrac{\delta^2}{12} A + \displaystyle\int_0^l y\,dx = z\,l + \dfrac{H'}{H}\int_0^l \eta'\,dx \\ \dfrac{\delta^2}{12} C + \displaystyle\int_0^l y^2\,dx = z\int_0^l y\,dx + \dfrac{H'}{H}\int_0^l y\,\eta'\,dx \end{cases}
$$

Ecuațiunile acestea presupun rosturi verticale.

Axele de coordonate sunt orizontala și verticala trecînd prin naşterea din stînga intradosului, δ este grosimea medie a bolții, l este deschiderea = 30^m.

x este abscisa punctelor.

y este ordonata curbei medii a bolții.

z este ordonata curbei centrelor de presiune pe rostul vertical

1) Bolta este a se construi din beton armat.

delà naştere. (In caz de rosturi verticale, curba centrelor de presiune = curba de presiune.)

η' este ordonata unei curbe de presiune oarecare, socotită în raport cu linia ei de închidere. Polul este arbitrar şi distanţa polară este H' (măsurată pe scara forţelor).

H este împingerea orizontală a bolţii.

Dacă s este lungimea variabilă a arcului mediu al bolţii şi ρ raza lui de curbură, avem:

$$(2)\quad \begin{cases} A = \int_{x=0}^{x=l} \frac{ds}{\rho} \\ C = \int_{x-0}^{x=l} \left(dx - y \frac{ds}{\rho} \right) = l - \int_{x=0}^{x=l} y \frac{ds}{\rho}. \end{cases}$$

Evaluarea grafică a cantităţilor A şi C.

Procedeurile pentru evaluarea grafică a integralelor fiind instituite de mine, va fi nevoe să le demonstrez.

Impart deschiderea de $30^{m.}$ a bolţii în 30 porţiuni de cîte 1^{m} Prin punctele de diviziune duc verticale. Aceste verticale vor servi în tot cursul chestiunii. Ele împart arcul median, suprafeţele, şi toate cantităţile de evaluat, în elemente a căror proecţiune orizontală este constantă şi egală cu $1^{m},00$.

Fie: $s_1, s_2, \qquad , s_{15}$ elementele arcului mediu;
$y_1\ y_2, \qquad , y_{15}$ ordonatele » »
$\rho_1, \rho_2, \qquad , \rho_{15}$ razele de curbură ale arcului mediu.

Ecuaţiile (2) devin atunci:

$$(3)\quad \begin{cases} A = 2\left[\frac{s_1}{\rho_1} + \frac{s_2}{\rho_2} + \dots + \frac{s_{15}}{\rho_{15}}\right] \\ C = l - 2\left(\frac{s_1}{\rho_1} y_1 + \frac{s_2}{\rho_2} y_2 + \dots + \frac{s_{15}}{\rho_{15}} y_{15}\right) \end{cases}$$

Evaluarea grafică a cantităţii A. (Epura 1).[1]

S'a construit parabola curbei medii a arcului la scara:

$$\frac{1}{200} = \frac{0^{m.},005}{1^{m.}}$$

Ecuaţia parabolei raportată la axele $y'Ox'$ este $y'^2 = 2p\,x'$.

Pentru punctul O, avem $x' = 4^{m.}$ şi $y' = 15^{m.}$ Cu aceste valori de coordonate ecuaţia parabolei dă $\overline{15}^2 = 2p \times 4$. Deci

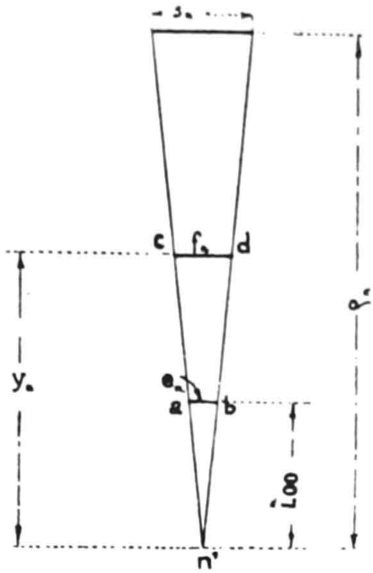
1) A să vedea Epura 1 pe planşa XLV.

$$p = \frac{\overline{15}^2}{2 \times 4} = 28^{m},125.$$

Luînd $O'F = \frac{p}{2}$, avem pnnctul F, focarul parabolei.

S'au construit razele de curbură pentru fiecare din punctele 1,..., 15 ale parabolei. Direcţiile razelor de curbură s'au construit pe baza proprietăţii că subnormala este constantă şi egală cu p. Centrele de curbură 1', 2',..., 15' s'au determinat cu ajutorul proprietăţii

Fig. 1



că proecţiunea pe $O'x'$ a razei de curbură a unui punct al parabolei este egală cu dublul distanţei între punctul parabolei şi focarul. Razele de curbură sunt deci 1 — 1', 2 — 2',..., 15 — 15'.

Urmărim acum determinarea grafică a cantităţilor $\frac{s_n}{\rho_n}$.

Valoarea (3) a lui A devine atunci:

$$A = 2 \sum_1^{15} \frac{s_n}{\rho_n}.$$

Să considerăm (Fig. 1) elementul de arc s_n şi centrul său de curbură n'. Din n' ca centru, cu o rază egală cu unitatea de lungime, să descriem un arc de cerc. Fie e_n lungimea în metri (pe scară) a acestui arc măsurată între cele două raze. Figurile asemenea dau $\frac{e_n}{1^m} = \frac{s_n}{\rho_n}$. Formula de mai sus devine:

(4) $$A = 2\sum_{1}^{15}\frac{\epsilon_n}{1^m}.$$

Avem deci pe $\frac{s_n}{\rho_n}$ măsurînd arcul ab pe scara lungimilor şi luînd valoarea numerică astfel obţinută ca exprimînd simple unităţi numerice. $\left(\frac{s_n}{\rho_n}\right.$ şi A sunt nişte simpli coeficienţi fără dimensiuni$\left.\right)$. In formula (4) ϵ_n este un număr de metri şi împărţit cu 1^m dă pe $\frac{s_n}{\rho_n}$, simplu coeficient.

In cazul din epura **1** arcele ab (Fig. 1) ar fi fost prea mici. Atunci s'a luat ca rază, în loc de 1^m, *20 metri*. Pentru ca rezultatele să fie aceleaşi, se măsoară atunci pe o scară de **20** ori mai mare, adică pe scara $\frac{0^m,1}{1^m}$.

S'a obţinut astfel:

$$A = 2\sum_{1}^{15}\frac{\epsilon_n}{1^m} = 2 \times 0.49 = 0,98.$$

Evaluarea grafică a cantităţii C (Epura 1). [1])

Scara lungimilor (epura 1) $= \frac{0^m.005}{1^m}$

y_n, după cum am spus, sunt ordonatele elementelor de arc parabolic raportate la linia naşterilor intradosului. Parabola este raportată la axele y Q x, Q fiind naşterea stîngă a intradosului bolţii.

Valoarea (3) a lui C dă:

(5) $$C = l - 2\sum_{1}^{15}\frac{s_n y_n}{\rho_n}.$$

Avem de evaluat cantităţile $\frac{s_n y_n}{\rho^n} = f_n$ şi $C = l - 2\sum_{1}^{15} f_n$.

Considerăm iarăşi (Fig. 1) un element s_n de arc şi centrul său de curbură n'. Din n' ca centru, cu raza y_n, descriem arcul cd. Avem:

$$\frac{cd}{y_n} = \frac{s_n}{\rho_n} \quad (6) \quad \text{Sau } cd = \frac{s_n y_n}{\rho_n} = f_n$$

1) A să vedea Epura 1 pe planşa XLV.

f_n, care are dimensiunile unei lungimi, se va citi deci pe scara lungimilor, ca toate cantitățile din proporția (6), și valoarea numerică obținută va exprima metri.

In cazul din epura 1 procedeul acesta ar fi dat lungimi prea mici pentru f_n. De acea arcul cd a fost descris cu raza $10 \times y_n$, în loc de y_n. Pentru ca rezultatele să nu se schimbe, trebue ca arcele cd astfel obținute să le citim pe o scară de 10 ori mai mare,

$$\text{adică: } \frac{0^m,05}{1^m} \text{ în loc de } \frac{0^m,005}{1^m}.$$

S'a evaluat cantitatea $\sum_1^{15} f_n$ și printr'alt procedeu: Epura 2, de pe pagina următoare:

Scara lungimilor $\frac{0^m,01}{1^m}$.

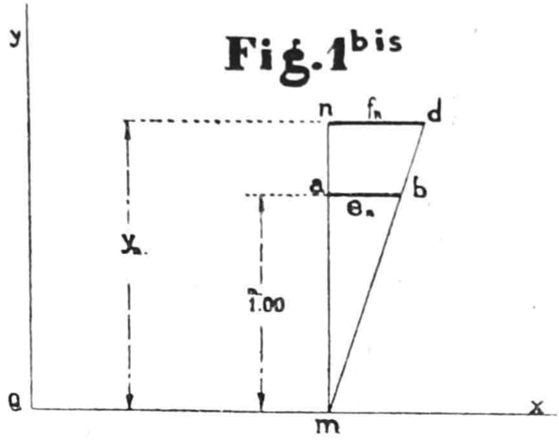
Avem, după cele ce preced:

$$\sum_1^{15} f_n = \sum_1^{15} \frac{s_n}{\rho_n} y_n = \sum_1^{15} \frac{n}{1^m} y_n.$$

Cantitățile e_n le avem în epura 1 pe scara $\frac{0^m,1}{1^m}$.

Fie (Fig. 1^{bis}) $mn = y_n$ (pe scara lungimilor). Luăm, pe scara lungimilor, $ma = 1^m$. Luăm apoi $ab = e_n$, pe scara cuantităților e_n.

Fig. 1^{bis}



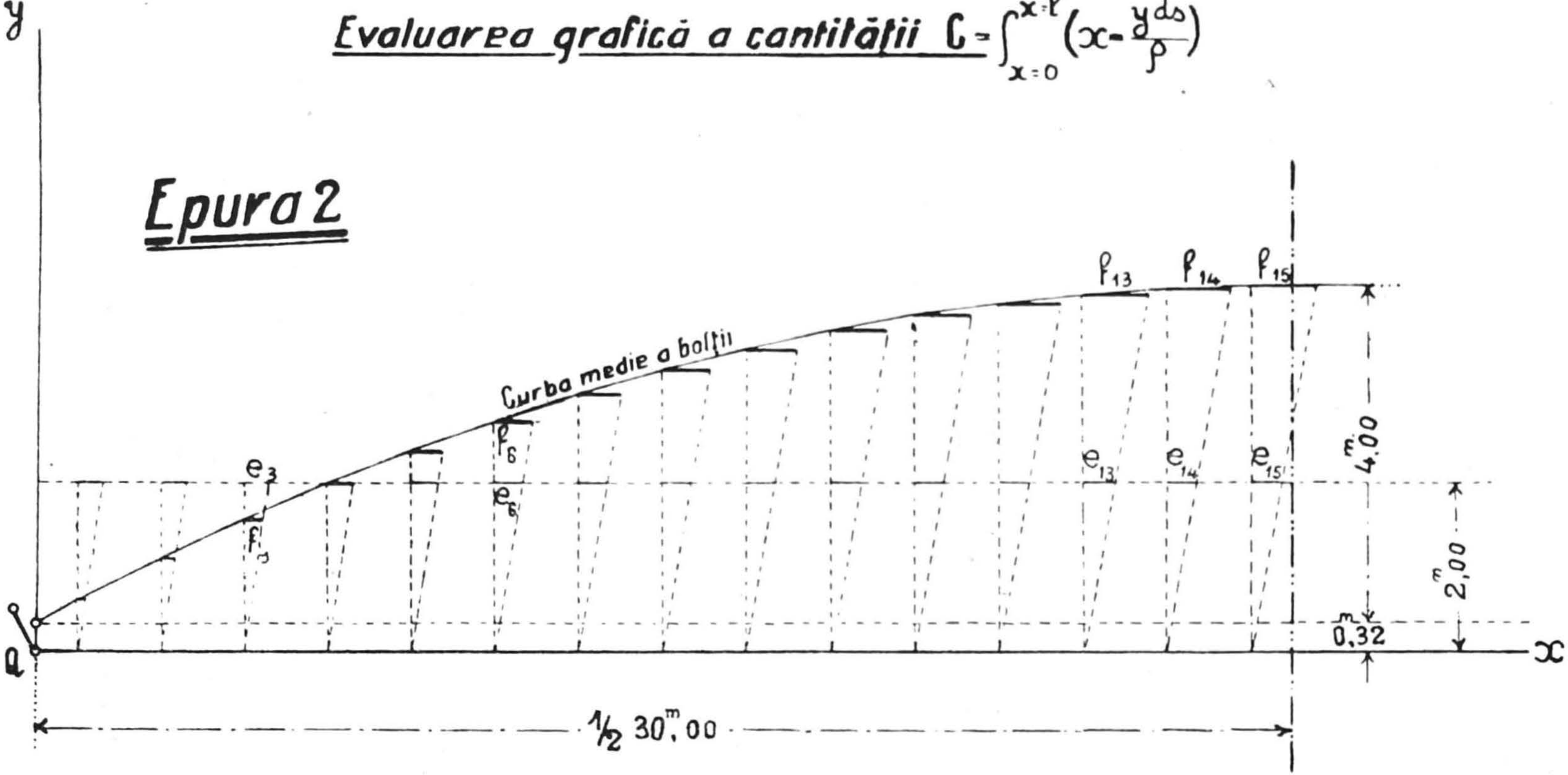
Avem atunci, dacă ducem mb, (Fig. 1^{bis}), $\frac{y_n}{1^m} = \frac{nd}{e_n}$, cu condiție ca să citim pe nd pe aceiași scară ca și ab, adică pe scara lui e_n.

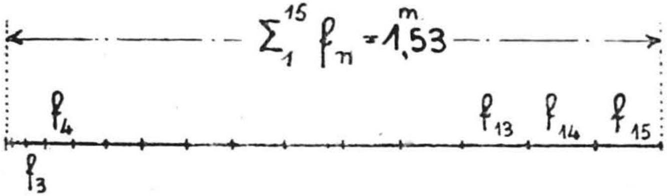
Sau: $$nd = \frac{e_n\, y_n}{1^m} = f_n.$$

Avem deci pe f_n citind pe nd pe scara lui e_n.

Evaluarea grafică a cantităţii $C = \int_{x=0}^{x=l} \left(x - \frac{y\,ds}{\rho}\right)$

Epura 2





Scara lungimilor $= \frac{0^m,01}{1^m}$ Scara cantităţilor $f_n = \frac{0^m,05}{1^m}$

$$C = l - 2\Sigma_1^{15} f_n = 30^m - 2 \times 1^m,53 = 26^m,94$$

720

In epura 2 s'a găsit mai convenabil a lua $ma = 2$ metri, în loc de 1 metru. Atunci se obţin rezultate de 2 ori mai mici şi lungimile nd găsite trebuesc citite pe o scară de 2 ori mai mică, adică pe scara $\frac{0^m,05}{1^m}$, în loc de $\frac{0^m,1}{1^m}$.

Din formula lui f_n vedem că dimensiunea lui este o lungime; tot astfel şi cantitatea C are dimensiunile unei lungimi.

Ecuaţia (5) dă $C = l - 2\sum_1^{15} fn$.

Avem deci:

$$C = 30^m - 2 \times 1^m,53 = 26^m,94$$

Ambele procedeuri pentru evaluarea lui C au dat rezultatele aproape identice.

Calculul cantităţii $K_1 = \int_0^l y\,dx$.

Axele de coordonate sunt tot yQx (epura 2, de pe pagina precedentă).

K_1 este suprafaţa cuprinsă între axa absciselor, curba medie a bolţii şi verticalele naşterilor. K_1 se compune din dreptunghiul $30^m.00 \times 0^m.32$ şi din segmentul de parabolă. Valoarea matematică a suprafeţei segmentului este: $\frac{2}{3} \times$ baza $\times$ înălţimea. Nu mai este deci nevoe de integrare grafică şi avem:

$$K_1 = 30^m.00 \times \left(0^m,32 + \frac{2}{3} 4^m,00\right) = 89^{m^2},60$$

Evaluarea grafică a cantităţii $K_2 = \int_0^l y^2\,dx$. (Epura 3, din josul paginei următoare).

Axele de coordonate sunt tot yQx.

Scara lungimilor $= \frac{0,^m01}{1^m}$

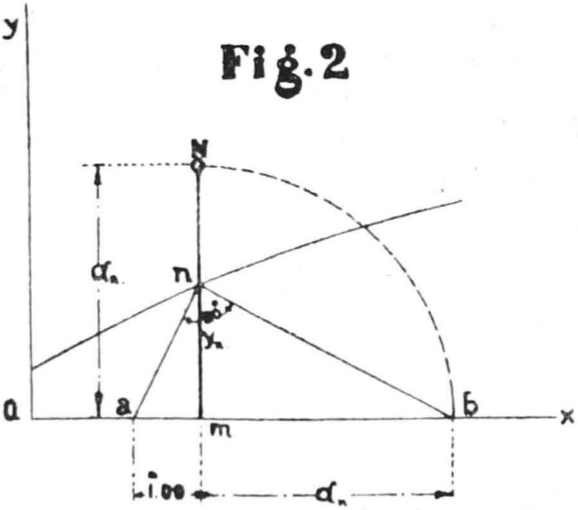
Semideschiderea bolţii este împărţită, precum am spus mai sus, în 15 fîşii verticale de lăţime egală cu $1^m,00$.

Avem:

$$K_2 = \int_0^l y^2\,dx = 2\sum_1^{15} y_n^2 \times 1^m \tag{7}$$

Să considerăm ordonata $mn = y_n$ (Fig. 2) a punctului n al curbei medii a bolţii. Să luăm $ma = 1^m$, pe scara lungimilor. In punctul n să ducem normala pe an. Intr'un triunghiu dreptunghiu înălţimea fiind medie proporţională între segmentele ipotenuzei, avem:

Fig. 2



$$\left.\begin{array}{l} mb \times 1^{m} = y_n^2 \\ \text{sau } \alpha_n \times 1^{m} = y_n^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{cu condiţie de a măsura şi pe} \\ \alpha_n = mb \text{ pe scara lungimiior (metri)} \end{array}$$

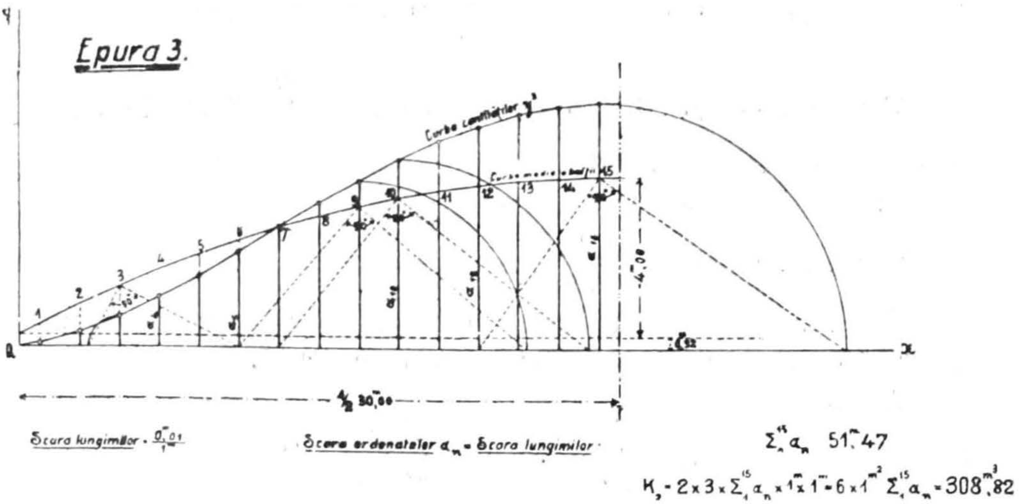
Formula (7) ne dă atunci:

(8) $$K_2 = 2\Sigma_1^{15} \alpha_n \times 1^{m} \times 1^{m}.$$

(K_2 are dimensiunile unui volum).

Prin urmare, pentru a obţinea $\Sigma_1^{15} y_n^2 \times 1^{m}$, vom măsura cele 15 ordonate α_n pe scara lungimilor, valorile numerice obţinute le

Evaluarea grafică a cantităţii $K_2 = \int_0^l y^2 dx$



Originalul acestei epure era la scara menţionată pe dînsa. Am fost nevoiţi a aplica reducerea la 1/2. Rugăm pe cititori să binevoiască a ţine seamă de aceasta închipuindu-şi epura 3 la scara de un centimetru pe metru, dublul celei produse aci.

vom aduna şi vom lua numărul obţinut la sumă ca exprimând metri cubi.

Aceeaşi valoare numerică se poate obţinea măsurînd cu planimetrul numărul de centimetri pătraţi cuprins între curba cu ordonatele α_n şi axa absciselor (Epura 3 din josul paginei precedente). Zic centimetri pătraţi pentrucă, pe scara aleasă, un centimetru pătrat reprezintă un metru pătrat.

In epura 3 a fost mai convenabil a se lua $ma = 3^m$ (pe scară), în loc de 1^m. Atunci, măsurînd ordonatele α_n tot pe scara lungimilor, formula (8) devine:

$$K_2 = 2\,\Sigma_1^{15} \alpha_n \times 3^m \times 1^m = 2 \times 3\,\Sigma_1^{15} \alpha_n \times 1^m \times 1^m.$$

Măsurînd ordonatele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{15}$ pe scara lungimilor s'au obţinut valorile următoare:

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}
$0^m,12$	$0^m,40$	$0^m,79$	$1^m,28$	$1^m,81$	$2^m,42$	$3^m,08$	$3^m,66$	$4^m,20$	$4^m,75$

α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}
$5^m,21$	$5^m,58$	$5^m,91$	$6^m,08$	$6^m,18$.

$$\sum_1^{15} \alpha_n = 51^m,47$$

$$K_2 = 6 \times 51^m,47 \times 1^m \times 1^m = 308^{m^3},82.$$

Sarcinile bolţii (Epura 4).[1]) **Greutatea moartă.**

Se tratează o porţiune de boltă cuprinsă între două plane verticale paralele cu axa căii şi distanţate de $1^m.00$.

Amintesc că semideschiderea bolţii este împărţită în 15 felii verticale de lăţime $1^m.00$.

Nivelul superior al platelagiului părţii carosabile s'a luat cu $0^m,10$ deasupra extradosului bolţii la chee.

Reprezentăm toate sarcinile prin volume corespunzătoare de beton armat socotit ca avînd densitatea $\Pi = 2,4 \dfrac{\text{tone}}{m^3}$

Ca secţiune transversală a podului s'a admis o lăţime de parte carosabilă de $5^m,00$ şi două trotoare de cîte $1^m,00$ lăţime. Lăţimea bolţii este de 5^m 00.

Platelagiul are grosimea de $0^m,20$ la partea carosabilă şi $0^m,10$ la trotuare. Secţiunea lui transversală totală repartizată la lăţimea de boltă de $5^m,00$ dă grosimea medie $0^m,30$ [2]). Greutatea platela-

1) Epura 4 se află pe planşa XLVI.

2) Tot aci este cuprinsă greutatea parapetului de oţel laminat, care este de 100 kgr. pe metru linear de pod.

giului de beton armat este deci reprezentată în epura 4 printr'un strat de beton armat de grosimea $0^{m},30$.

Platelagiul este legat cu bolta prin pilaştri de beton armat a căror secţiune orizontală are lungimea de $5^{m},00$ (cît ţine bolta) şi grosimea $0^{m},25$. (La fixarea formelor pilaştrilor se va spori grosimea celor mai lungi fără a mări greutatea lor, prin facere de goluri). Pilaştrii sunt distanţaţi între ei cu $2^{m},00$ din axă în axă. Pe metru de lungime de pod ar veni atunci un pilastru gros de $\frac{0^{m},25}{2} = 0^{m},125 = \frac{1}{8}$ metru.

Grosimea stratului de beton armat corespunzător pilaştrilor va fi deci în fiecare punct $\frac{1}{8}$ din înălţimea liberă dintre boltă şi platelagiu. Aceste optimi au fost măsurată direct cu compasul reductor şi s'a obţinut astfel stratul de beton armat corespunzător greutăţii pilaştrilor, care strat se vede desenat în epura 4.

Ca greutate moartă mai avem de considerat numai şapa de asfalt şi pietrişul aşternut pe partea corosabilă. Pentru reprezentarea acestora s'a luat un strat de beton armat de $0^{m},20$ grosime, ceeace este puţin deasupra realităţii.

Greutatea mobilă. Podul are de suportat:

1°) O încărcare cu oameni de $0,5 \frac{\text{tone}}{m^2}$ pe trotoare.

2°) Compresorul de 23 tone şi încărcare cu oameni de $0,4 \frac{\text{tone}}{m^2}$ (simultan) pe partea carosabilă.

La aceste sarcini ar răspunde o sarcină uniform repartizată de $0.85 \frac{\text{tone}}{\text{metru pătrat}}$. Am considerat pentru studiu un metru de lăţime de pod şi am avea sarcina uniformă de $0,85 \frac{\text{tone}}{\text{metru liniar}}$. Dat fiind că acest rezultat nu răspunde întocmai cu forţele concentrate reale (compresor) şi că încărcarea cu oameni ar putea întrece cifra de $0,4 \frac{\text{tone}}{m^2}$, s'a luat $1 \frac{\text{tonă}}{\text{metru liniar}}$ ca sarcină mobilă.

$$p = 1 \frac{\text{tonă}}{\text{metru liniar}}$$

Inălţimea v a stratului de beton armat corespunzător sarcinii p va fi dat de formula $\Pi \times v \times 1^{m} \times 1^{m} = 1^{t.}$ Avem deci:

$$v = \frac{1}{2.4} \text{ metri} = 0^{m},42$$

p fiind luat $= 1$ în loc de 0,85, pot rotunji fără teamă pe v. Iau atunci:

(9) $$v = 0^{m},40$$

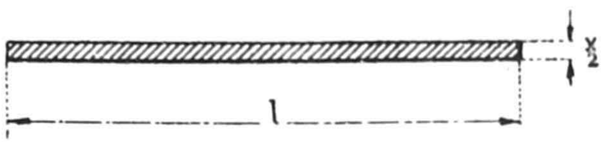
La acest v corespunde:

(10) $$p = 0.96 \frac{\text{tonă}}{\text{metru liniar}}$$

Metoda întrebuinţată pentru determinarea stabilităţii, adică determinarea curbei de presiune şi a reacţiunilor rezultante ale rosturilor.

Admitem (ceeace, practic vorbind, corespunde cu realitatea) că rezultatele cele mai defavorabile se obţin aplicînd sarcina mobilă pe jumătatea deschiderii, cea din stînga de exemplu.

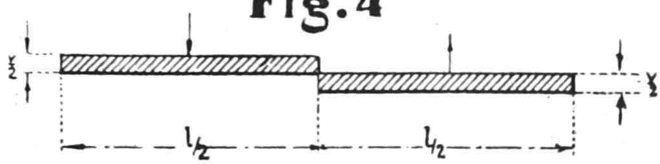
Fig. 3



1°) Studiăm întîi stabilitatea bolţii sub acţiunea greutăţii permanente totale şi a unei sarcini uniforme generale egală cu jumătatea sarcinii mobile (Fig. 3). Pentru aceasta mărim grosimile stratului total de beton armat ce dă greutatea permanentă totală cu $\frac{v}{2}$.

2°) După aceea studiăm efectele unei sarcini uniforme date

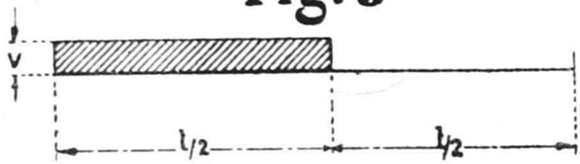
Fig. 4



tot de înălţimea $\frac{v}{2}$ dar care să fie pozitivă în jumătatea din stînga a deschiderii şi negativă în jumătatea din dreapta a ei (Fig. 4). Rezultanta celor două sarcini date de figurile 3 şi 4 evident că va fi sarcina din figura 5.

Combinînd rezultatele obţinute la aliniatul 1⁰) cu cele obţinute la aliniatul 2⁰), obţinem curba de presiune şi rezultantele rosturilor pentru cazul cînd jumătatea deschiderii este sub acţiunea greutăţii mobile.

Fig. 5



Determinarea sarcinilor totale ale bolţarilor cu rosturi verticale încărcate cu greutatea permanentă totală şi cu sarcina uniformă generală dată de înălţimea $^1/_2\ v$.

In epura 4 [1]) avem desenate suprapus straturile de beton armat aferente tutulor acestor sarcini.

Vom înţelege de aci înainte prin Π densitatea betonului armat pe metru pătrat de secţiune (mărime naturală) paralelă cu planul epurei, pentru a nu mai tîrî peste tot, fără nevoe, dimensiunea perpendiculară pe planul epurei, egală cu $1^m,00$.

Dacă P_n este sarcina bolţarului n, avem:

(11) $$P_n = \Pi \times w_n \times 1^m.$$

w_n fiind ordonata diagramei sarcinilor totale. (Epura 4).

Pentru a avea pe P_n ar fi deci deajuns a măsura pe w_n pe scara lungimilor, a înmulţi numărul obţinut cu 2, 4 şi a lua rezultatul ca exprimînd tone; sau am putea să măsurăm numai ordonatele w_n pe o scară de 2,4 ori mai mică decît a lungimilor.

Dar, fiindcă ar trebui în general să schimbăm scara pentru poligonul forţelor, preferăm procedeul următor:

Fie (Fig. 6) $ic = w_n$. Luăm $ia = B$, B fiind *o lungime* convenabil aleasă (un număr de metri) şi pusă în ia pe scara lungimilor. Să luăm $ab = 1^m,00$, pe scară. Ducînd orizontala cd şi măsurînd-o pe scara lungimilor obţinem w'_n. Toate cantităţile din fig. 6 fiind lungimi raportate pe scara lungimilor, avem:

---

1) Epura IV să află pe planşa XLVI.

$$\frac{w'_n}{1^m} = \frac{u_n}{B} \quad \text{sau} \quad u_n \times 1^m = w'_n\, B$$

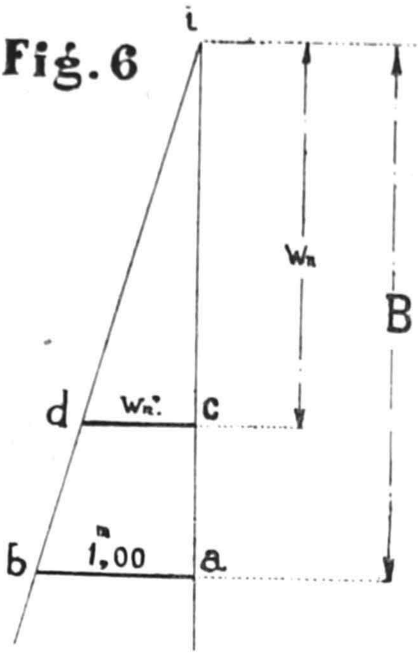
Formula (11) dă atunci:

(12) $$P_n = \Pi\, w'_n\, B = w'_n \times \Pi\, B$$

Vedem că P_n se obţine înmulţind lungimea w'_n găsită cu cantitatea Π B.

Mai convenabil este să măsurăm pe w'_n pe o scară de Π B

Fig. 6



ori mai mică de cît a lungimilor şi să luăm valoarea numerică obţinută ca exprimînd tone. Aşa am şi făcut (Epura 4).

Lungimile w'_n vor fi duse direct cu compasul în poligonul forţelor şi într'aceasta stă alegerea convenabilă a lui B.

Am ales B $= 2^m,78$.

Valoarea numerică a lui Π B este $2{,}4 \times 2.78 = 6.67$.

Unitatea de lungime find reprezentată prin $0^m,02$, unitatea de forţă va fi reprezentată prin $\dfrac{0^m,02}{6{,}67} = 0^m,003$.

Scara pe care trebue să măsurăm lungimile w'_n în tone, sau scara forţelor în poligonul forţelor, va fi:

$$\frac{0^m,003}{1 \text{ tonă}}$$

Lungimile w'_{15}, ..., w'_2, w'_1 au fost duse una după alta după direcţia forţelor. Ele constituesc astfel poligonul forţelor, a cărui scară este cea mai de sus. (Epura 5).

Curba de presiune auxiliară.

Cu un pol O, convenabil ales pe orizontala extremităţii superioare a poligonului forţelor, construim poligonul funicular al sarcinilor P_1, ..., P_{15}. Acest poligon funicular este asemănător cu curba de presiune şi l-am numit «Curba de presiune auxiliară». Raportăm această curbă de presiune auxiliară la axele de coordonate η' l x (Epura 5) trecînd prin intersecţia ei cu verticala naşterii. Curba aceasta va avea atunci abscise egale cu curba medie a bolţii şi ordonatele ei vor fi η'.

Polul O se alege aşa ca ordonatele η' să aibă o mărime convenabilă. Poziţia polului determină distanţa polară H′ care se măsoară pe scara forţelor şi a fost luată de:

$$H' = 80 \text{ tone}.$$

Evaluarea grafică a cantităţii $\int_0^l \eta'\,dx = K_3$.

Avem $K_3 = \int_0^l \eta'\,dx = 2\sum_1^{15} \eta'_n \times 1^m$.

Este destul prin urmare de a măsura ordonatele η'_n pe scara lungimilor, a lua rezultatele numerice obţinute ca exprimînd metri pătraţi, a le aduna şi a înmulţi rezultatul cu 2.

Mai expeditiv ar fi a se măsura cu planimetrul numărul de centimetri pătraţi al suprafeţei cuprinse între curba auxiliară, axa absciselor şi verticala cheei şi a înmulţi rezultatul cu 8, metrul pătrat fiind reprezentat în epura 5 prin 4 cm².

Măsurînd lungimile η'_n, găsim următoarele valori:

η'_1	η'_2	η'_3	η'_4	η'_5	η'_6	η'_7	η'_8	η'_9
$0^m,32$	$0^m,90$	$1^m,43$	$1^m,90$	$2^m,34$	$2^m,73$	$3^m,07$	$3^m,37$	$3^m,64$

η'_{10}	η'_{11}	η'_{12}	η'_{13}	η'_{14}	η'_{15}
$3^m,86$	$4^m,04$	$4^m,18$	$4^m,28$	$4^m,36$	$4^m,39$.

$$\sum_1^{15} \eta'_n \times 1^m = 44^{m^2},81$$

$$K_3 = 2 \times 44^{m^2},81 = 89^{m^2},62.$$

---

1) A să vedea Epura 5 pe planşa XLVII.

Evaluarea grafică a cantității $K_4 = \int_0^l y\,\eta'\,dx$.

Avem:

(11) $$K_4 = 2\sum_1^{15} y_n\,\eta'_n \times 1^m.$$

Fie (Fig. 7) $mn = \eta'_n$ ordonata curbei de presiune auxiliare la mijlocul bolțarului n. Să luăm $ma = 1^m,00$ și $ab = y_n$. Ducem ordonata bc și intersecția ei cu an o proectăm în N pe mn.

Avem $\frac{bc}{y_n} = \frac{\eta'_n}{1^m}$, toți termenii fiind lungimi, care se citesc în metri pe scara lungimilor.

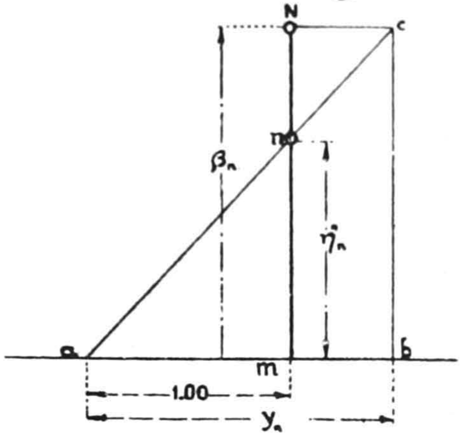
Sau: $$y_n\,\eta'_n = bc \times 1^m = \beta_n \times 1^m.$$

Relația (11) ne dă:

(12) $$K_4 = 2\sum_1^{15} \beta_n \times 1^m \times 1^m.$$

Intocmai ca la evaluarea cantității $K_2 = \int_0^l y^2\,dx$, obținem pe K_4 măsurînd pe scara lungimilor cele 15 ordonate β_n astfel obținute și

Fig. 7



luînd dublul sumei valorilor numerice citite ca exprimînd metri cubi.

In epura 5 a fost mai convenabil a lua $ma = 3^m,00$.

Avem atunci:

(13) $$K_4 = 2 \times 3 \times \sum_1^{15} \beta_n \times 1^m \times 1^m = 6\sum_1^{15} \beta_n \times 1^{m2}.$$

Măsurînd ordonatele β_n pe scara lungimilor, s'au obţinut valorile următoare:

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
$0^m,06$	$0^m,32$	$0^m,78$	$1^m,25$	$1^m,84$	$2^m,46$	$3^m,11$	$3^m,73$	$4^m,34$

β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}
$4^m,86$	$5^m,33$	$5^m,72$	$6^m,01$	$6^m,21$	$6^m,30$.

Avem: $$\sum_1^{15} \beta_n = 52^m,32.$$

şi $$K_4 = 6 \times 52^m,32 \times 1^{m^2} = 313^{m^3},92.$$

Mai expeditiv s'ar fi obţinut $\Sigma_1^{15}\ \beta_n \times 1^m$ măsurînd cu planimetrul numărul de centimetri patraţi reali reprezentat de suprafaţa cuprinsă între curba ordonatelor β_n, axa absciselor şi verticala cheii. Am fi împărţit numărul de centimetri pătraţi, măsuraţi cu planimetrul, cu (41^{m^2} fiind reprezentat pe scara noastră prin 4 centimetri patraţi). Numărul de metri pătraţi obţinut rămîne de înmulţit cu 6×1^m pentru a avea pe K_4.

Construcţiunea curbei de presiune în cazul supraîncărcării simetrice reprezentate prin înălţimea $\frac{v}{2}$.

Am raportat dela început bolta la axele de coordonate yQx trecînd prin naşterea intradosului.

Fie η ordonata curbei de presiune. Ea este dată pentru cazul acesta (bolta şi sarcinile simetrice) de formula:

$$\eta = \zeta + \frac{H'}{H}\eta', \tag{14}$$

în care ζ este ordonata la cele două naşteri, η' ordonata deja tratată a curbei de presiune auxiliare, H' împingerea orizontală a curbei de presiune auxiliară sau distanţa polară a poligonului forţelor, şi H împingerea orizontale în cazul de care ne ocupăm.

Pentru a avea pe η rămîne deci să determinăm valorile necunoscute ζ şi H. Ne servim de cele 2 ecuaţiuni (1).

Ecuaţiunile (1), în urma notaţiunilor stabilite în paragrafele precedente, devin:

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{\delta^2}{12}A + K_1 &= l\zeta + K_3\frac{H'}{H} \\ \frac{\delta^2}{12}C + K_2 &= K_1\zeta + K_4\frac{H'}{H} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Acest sistem de 2 ecuaţiuni permite a determina pe ζ şi H, toate celelalte cantităţi fiind cunoscute. Avem, din paragrafele precedente:

$A = 0^m,98$

$C = 26^m,94$

$K_1 = 89^{m^2},60$

$K_2 = 308^{m^3},82$

$K_3 = 89^{m^2},62$

$K_4 = 313^{m^3},92$

$l = 30^m,00$

$H' = 80$ tone

$\delta =$ grosimea medie a bolţii

$$\frac{0^m,50 + 0^m,57}{2} = 0^m,535.$$

$\delta^2 = 0^{m^2},2862$

$$\frac{\delta^2}{12} = 0^{m^2},02385$$

Ecuaţiunile (15) devin:

$$(16) \quad \begin{cases} -\dfrac{\delta^2 A}{12\, l} + \dfrac{K_1}{l} = \zeta + \dfrac{K_3}{l}\,\dfrac{H'}{H} \\[2ex] \dfrac{\delta^2 C}{12\, K_1} + \dfrac{K_2}{K_1} = \zeta + \dfrac{K_4}{K_1}\,\dfrac{H'}{H} \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem de 2 ecuaţiuni în raport cu necunoscutele ζ şi $\frac{H'}{H}$. Cunoscînd pe H', deducem imediat valoarea lui H din cea găsită pentru $\frac{H'}{H}$.

Făcînd calculul, s'au găsit valorile:

$$(17) \quad \begin{cases} H = 88^t,38 \\ Z = 0^m,282 \end{cases}$$

Acum putem determina grafic foarte uşor ordonatele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$ ale curbei de presiune căutate, cu ajutorul formulei (14). Punctele 1, ..., 15 corespund aci cu rosturile verticale, naşterea purtînd numărul O şi cheea numărul 15.

Fie (Fig. 8) $I\,m = \eta'_{rm}$ ordonata punctului m al curbei de presiune auxiliare. Să luăm $I\,K = \zeta$ (scara lungimilor). Ducem dreapta KU aşa ca tangenta unghiului ei cu I T să fie $\frac{H}{H'}$. Vom avea:

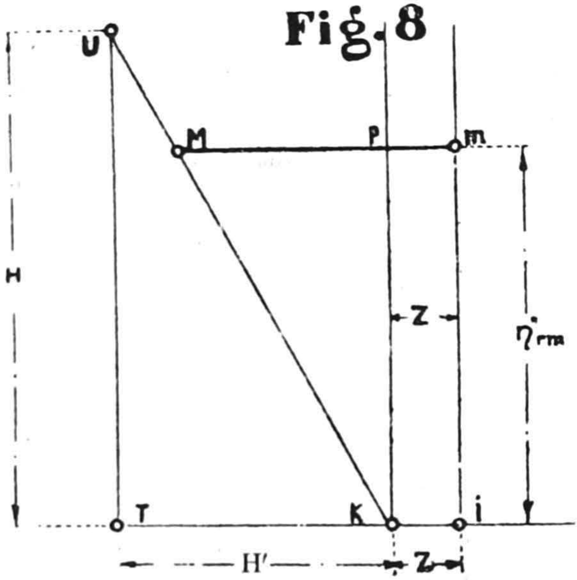
$$m\,M = \eta_m.$$

In adevăr, $m\,p = \zeta$ şi (triunghiuri asemenea) $p\,M = \eta'_{rm}\,\frac{H'}{H}$; deci:

$$m\,M = \zeta + \eta'^{rm}\,\frac{H'}{H} = \eta'_m \text{ (Formula 14).}$$

Astfel s'au construit (Epura 5) ordonatele η_1, η_2, .., η_{15} căutate. Cu aceste ordonate raportate la axa absciselor Qx (Epura 6) 1) s'a

Fig. 8



construit curba de presiune pentru cazul supraîncărcării simetrice reprezentate de înălţimea de beton armat $\frac{v}{2}$. Această curbă de presiune este cea desenată punctat în epura 6.

Observaţie. S'a adoptat aici pentru ordonata curbei de presiune auxiliare notaţia η'_{rm}, care însemează ordonata în dreptul rostului vertical No. m, pentru deosebire de η'_n care era ordonata aceleiaşi curbe în dreptul mijlocului bolţarului No. n. Indicele r însemnează «în dreptul unui rost».

Reacţiunile rezultante pe rosturi în cazul supraîncărcării simetrice reprezentate de înălţimea $\frac{v}{2}$.

Luăm în poligonul forţelor (Epura 5) distanţa $15 - 0_1$ corespunzătoare cu $H = 88^t,38$, pe scara forţelor. Unind 0_1 cu diferitele puncte ale poligonului forţelor avem reacţiunile rezultante pe rosturile verticale. De ex., pentru rostul vertical 6, aflat la mijlocul distanţei între forţele P_6 şi P_7, vom numi punctele O_1 şi 6 ale poligonului forţelor şi vom măsura $6 - 0_1$ pe scara forţelor, ceea ce va da reacţiunea totală R_6P.

1) A să vedea Epura 6 pe planşa XLVIII. Originalele epurelor 3, 6 şi 7 au fost la scările menţionate pe dînsele. Am fost siliţi a le reduce la $^1/_2$. Rugăm pe cititori să binevoiască a ţine seamă de aceasta închipuindu-şi aceste epure în mărimi duble de cele produse aci.

Curba de presiune în cazul supraîncărcării cu sarcina mobilă dată de înălţimea v aplicată pe jumătatea din stînga a deschiderii.

Am obţinut curba de presiune datorită greutaţii permanente totale şi supraîncărcării indicate în Fig. 3.

Căutăm acum variaţiunile $\Delta\eta$ suferite de curba de presiune deja construită, în caz cînd suprapunem încă sarcina mobilă indicată în Fig. 4.

Adăogînd algebric variaţiunile $\Delta\eta$ la ordonatele η, vom obţinea curba de presiune datorită greutăţii permanente totale şi sarcinii mobile din Fig. 5.

Să căutăm întîi variaţiunile $\Delta\eta$ în dreptul fiecăruia din rosturile verticale 0,1,2,..., 14, 15, 14′, 13′, 12′,..., 1′, 0′ (Epura 6).

Se demostrează că sarcina mobilă din Fig. 4, care are ca rezultantă un cuplu, dă o împingere orizontală nulă.

Prin urmare, prin adăugarea sarcinii din Fig. 4, împingerea orizontală deja aflată, H, care este totodată proecţiunea orizontală a reacţiunilor rezultante ale tutulor rosturilor, rămîne neschimbată şi egală tot cu H deja găsit $= 88^{t}, 38$.

Aceasta nu înseamnă că reacţiunea rezultantă la chee ar rămînea orizontală. Din contră supraîncărcarea din Fig. 4 dă la chee o reacţiune verticală. Această reacţiune verticală, compusă cu reacţiunea la chee deja obţinută, va da reacţiunea la chee în cazul supraîncărcării din Fig. 5, care reacţiune nu va mai fi prin urmare orizontală.

Se demonstrează că variaţiunile algebrice $\Delta\eta$ se obţin în modul următor: (Epura 7).[1]) Ducem orizontala A′B′. Luăm, pe scara lungimilor,

$$A'A = B'B = d = \frac{\Pi v l^2}{64\ H} = \frac{2{,}4 \frac{\text{tone}}{\text{m}^2} \times 0^{\text{m}},40 \times \overline{30^{\text{m}}}^{\,2}}{64 \times 88^{t},38} = 0^{\text{m}},153$$

Pentru mai multă preciziune însă, am luat aici, pentru înălţimile AA′, BB′ şi cele asemenea de mai la vale, o scară a lungimilor de 10 ori mai mare. Deci în epura 7 scara înălţimilor este $\frac{0^{\text{m}},2}{1^{\text{m}}}$.

Pe semideschiderea bolţii A′C şi cu săgeată $= d$ construim o parabolă îndreptată în sus pentru semideschiderea din stînga şi în jos pentru cea din dreapta. Unim A cu B. Ordonatele parabolelor în

1) Epura 7 să găseşte pe planşa XLVIII.

raport cu axele de coordonate y A B (măsurate pe scara înălţimilor) vor da algebriceşte variaţiunile $\Delta\eta$ căutate, cu sens pozitiv în sus şi negativ în jos.

Adăogînd algebriceşte aceste variaţiuni $\Delta\eta$ la ordonatele curbei de presiune deja aflate, obţinem curba de presiune pentru cazul supraîncărcării nesimetrice reprezentate de înălţimea v. Ea este desenată cu linie plină în epura 6.

Reacţiunile rezultante pe rosturile verticale în cazul supraîncărcării v aplicate pe jumătatea din stînga a deschiderii.

Să construim poligonul forţelor pentru acest caz.

Toate lungimile $w_1,..., w_{15}$, proporţionale cu sarcinile bolţarilor (Epura 4), pentru jumătatea din stînga a deschiderii trebuesc mărite cu $\frac{v}{2}$, pentru a corespunde supraîncărării v; iar $w_{1'}, w_{2'},...$ $w_{14'}, w_{15'}$, pentru jumătatea din dreapta, trebuesc micşorate cu $\frac{v}{2}$, pentru a corespunde nesupraîncărcării.

Cu alte cuvinte trebue ca lungimile reprezentative ale sarcinilor P_1... P_{15} de pîn'acum să le mărim cu lungimea ω (Epura 4) pentru jumătatea din stînga a deschiderii, şi să le micşorăm cu ω pentru cea din dreapta.

Astfel s'a obţinut poligonul forţelor $P_{1'}, P_{2'},..., P_{15'}, P_{15}, P_{14},...$ P_2, P_1 în epura 6.

Polul O_2 sau intersecţia reacţiunilor rezultante ale naşterilor va fi, cum am spus mai sus, la distanţa $H = 88^{t.}, 38$, împingerea orizontală rămînînd neschimbată.

Fie V_0 şi $V_{0'}$ proecţiunile verticale ale reacţiunilor rezultante ale naşterilor din stînga şi din dreapta, R_0 şi $R_{0'}$.

Să însemnăm:

$$\frac{P_1 + P_2 + ... + P_{15} + P_{15'} + P_{14'} + ... + P_{1'}}{2} = \frac{\text{Sarcina totală}}{2} = V$$

(18)[1] $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se demostrează că } V_0 = V + \frac{5}{32}\,\Pi\, vl \\ \text{şi } V_{0'} = V - \frac{5}{32}\,\Pi\, vl \end{array} \right.$

1) $\frac{5}{32}\,\Pi\, v\, l = \frac{5}{32} \times 2{,}4 \frac{t}{m^2} \times 0^m{,}4 \times 30^m = 4^{t}{,}5$

Cunoscînd proecţiunile verticale V_0 şi $V_{0'}$ şi proecţiunea orizontală H ale reacţiunilor naşterilor, determinăm aceste reacţiuni R_0 şi $R_{0'}$ şi polul O_2. Astfel obţinem reacţiunile rezultante

	$R_0, R_1, \ldots R_{14}, R_{15}, R_{14'}, R_{13'}, \ldots R_{1'}, R_{0'}$
ale rosturilor	$0, 1, \quad 14, 15, 14'. 13', \quad ,1', 0'$

care au loc în cazul supraîncărcării nesimetrice v. Reacţiunea la chee R_{15} nu mai este orizontală.

Suma sarcinilor tutulor bolţarilor este aceeaşi în cele două cazuri de supraîncărcare tratate $\left(\frac{v}{2}\right.$ simetrică şi v nesimetrică$\left.\right)$

Presiunile unitare pe rosturile verticale.

Dacă bolta ar fi de beton simplu, ar fi destul de exact să studiăm presiunile unitare pe rosturile verticale.

Pentru rosturile în care curba de presiune se află în treimea mijlocie, presiunile unitare extreme, c, sunt date de formula

$$c = \frac{H}{\chi}\left(1 \pm \frac{6e}{\chi}\right)$$

H fiind împingerea orizontală $= 88^{t}, 38$, χ grosimea bolţii măsurată pe verticală, şi e distanţa verticală între centrul de presiune şi mijlocul rostului.

Pentru rosturile în care curba de presiune ese din treimea mijlocie, avem presiunea unitară maximă

$$c = \frac{2\,H}{3\,\xi}$$

ξ fiind distanţa verticală între centrul de presiune şi extremitatea rostului cea mai apropiată.

Astfel pentru bolta studiată rostul vertical cel mai expus este cel dela naşterea din partea supraîncărcată. Avem acolo:

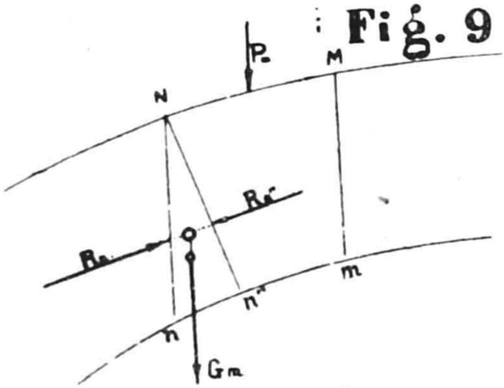
$$c = \frac{2 \times 88\ 38}{3 \times 0{,}12}\ \frac{\text{tone}}{m^2} = 491\ \frac{\text{tonă}}{m^2} = 49{,}1\ \frac{\text{Kg.}}{cm^2}$$

Prin urmare bolta nu se poate construi din beton simplu, ci betonul ei va trebui armat.

Presiunile unitare pe rosturile normale. Odată admis ca material betonul armat, este preferabil a studia rosturile normale.

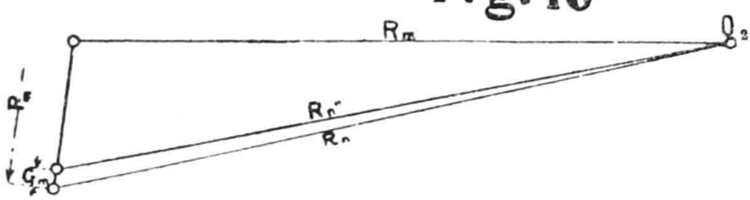
Să considerăm un bolţar cu rosturi verticale, bolţarul No m, limitat de rosturile n N şi m M şi care suportă sarcina totală P_m (Fig. 9). Reacţiunile rezultante pe rosturile verticale n şi m sunt R_n şi R_m (Fig. 9 şi 10). Ne trebue reacţiunea rezultantă pe rostul normal n'' N; s'o însemnăm cu $R_{n''}$.

Fig. 9



$R_{n''}$ se poate deduce foarte uşor. In adevăr, prizma triunghiulară $n\,n''$ N se află în echilibru supt acţiunea forţelor R_n şi $R_{n''}$ şi

Fig. 10



greutatea ei proprie G_m. Dacă ducem pe G_m în poligonul forţelor obţinem imediat pe $R_{n''}$ în mărime şi direcţie după cum arată figura 10. Punctul de aplicaţie al lui $R_{n''}$ pe rostul n'' N se găseşte cum arată figura 9.

Insă, G_m fiind foarte mic faţă cu P_m, $R_{n''}$ se confundă, practic vorbind, cu R_n. In practică putem prin urmare proceda în modul următor:

Luăm pe R_n ca reacţiune rezultantă pe rostul normal n'' N şi suntem atunci în condiţiuni ceva mai defavorabile pentru rezistenţă, R_n fiind ceva mai mare ca $R_{n''}$. Centrul de presiune pe rostul normal n'' N se găseşte în practică la intersecţia rostului n'' N cu reacţiunea R_n, sau chiar cu curba de presiune.

Notă. Cele două curbe de presiune tratate mai sus s'ar fi putut construi cu ajutorul poligonului funicular corespunzător poligonului forțelor și polului aferent fiecărui caz. Procedeurile tratate mai sus sunt însă superioare pentru că înlătură acumularea de erori. In procedeul descris nu avem acumulări posibile decît la curba de presiune auxiliară; aceasta din urmă trebuește deci construită cu cea mai mare îngrijire.

Pentru aflarea eforturilor maxime la chee, ar trebui repetată epura sarcinilor simetrice pentru cazul supraîncărcării generale date de înălțimea v, în loc de $\frac{v}{2}$. In general însă aceasta nu este necesar, pentru că nu cheea este rostul cel mai obosit, ci acelea unde epura arată că curba de presiune este mai excentrică.

Ianuarie 1911.