NOTE

Fundaţiuni pe conuri şi conoide. — In cele ce urmează atrag atenţia asupra unui sistem de fundaţie pe pământ rău sau mediocru, imaginat de *Armand Considère* şi aplicat de dânsul cu succes în special la 2 lucrări importante şi anume: la fundaţiile docurilor şi antrepozitelor din *Marsilia* şi la acele ale docurilor şi antrepozitelor din *Hâvre*.

In sistemul acesta se substitue plăcile de fundaţie menite a repartiza presiunile pe teren, prin conuri găunoase de beton armat (cam în formă de clopot) aşezate cu întreaga lor suprafaţă interioară pe teren, cari vor face şi ele acest oficiu de repartizare, realizând însă o *importantă* economie de material *).

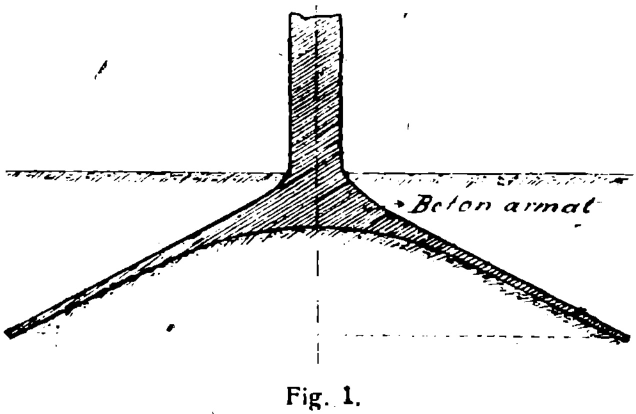

Fig. 1.

Menţionez d. ex. că după calculul comparativ făcut de Considère cu ocazia proectărei docurilor din Marsilia, fundaţia pe „plăci", constituite în cazul acesta dintr'o construcţie pe planşeu „întors" (placa propriu zisă jos şi nervurile în sus) reclama

808 m³ beton şi 98 t fer

*) Fig. 1 reprezintă o secţie verticală şi fig. 2 o vedere în timpul executărei unei astfel de fundaţii.

pe când fundaţia pe conuri s'a putut executa numai cu

260 m^3 beton şi 43 t fer

obţinându-se astfel o economie de

808—260=548 m^3 beton şi
98— 43= 55 t fer.

adică o economie de material de vreo 60 la sută.

Rezultatul acesta surprinzător se explică prin principiul de

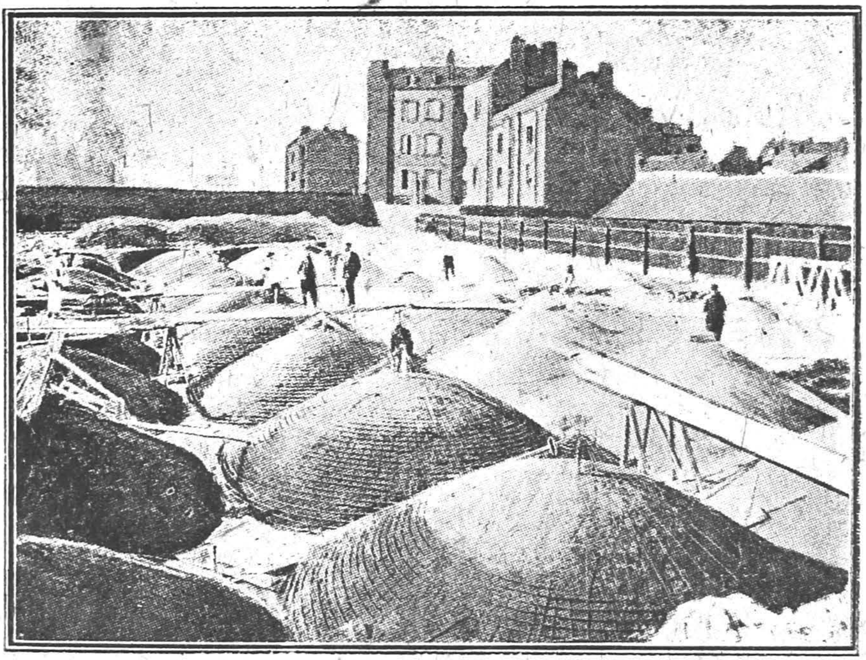

Fig. 2.

construcţie ce stă la baza noului sistem şi anume, de a face ca cele 2 materiale, unul determinat compresiunei (betonul) şi altul tensiunei (ferul) să fie puse în acţiune direct şi nu prin intermediul flexiunei, cum se va vedea îndată.

Conul poartă în „vârful" său stâlpul clădirei dela care primeşte sarcinele ce urmează a fi transmise terenului.

Armătura e compusă din 2 rânduri de vergele de fer aşezate după meridiane şi paralele. Acestea din urmă sunt singurile indispensabile şi pot căpăta şi formă de spirale ce urmează aproape aceleaşi curbe.

Reacţiunea ce-o exercită solul într'un punct oarecare al clopotului, se descompune în 2 forţe şi anume: într'o presiune îndreptată după generatricea care trece prin acest punct şi într'o forţă de tensiune orizontală îndreptată după proecţia orizontală a acestei generatrice.

Primei din aceste 2 forţe îi opune betonul direct reacţiunea necesară, pe când reacţiunea corespunzătoare forţei 2-a e exercitată de armăturile circulare. De flexiune dară este aicea tot aşa de puţin vorba ca şi la presiunea laterală a lichidelor în vase cilindrice.

In mod schematic, calculul unei astfel de fundaţiuni s'ar face precum urmează.

Numind:

P întreaga sarcină transmisă „clopotului“ în care se cuprinde şi greutatea sa proprie;

f proecţia orizontală a clopotului (suprafaţa cercului de bază $= \frac{\pi d^2}{4}$, d fiind diametrul cercului şi

p presiunea specifică normală în punctul considerat, vom avea:

$$p = \frac{P}{f}$$

Descompunând p intr'o componentă q verticală şi una r în direcţia generatricei, vom avea, numind α unghiul acesteia din urmă cu orizontala (fig. 3)

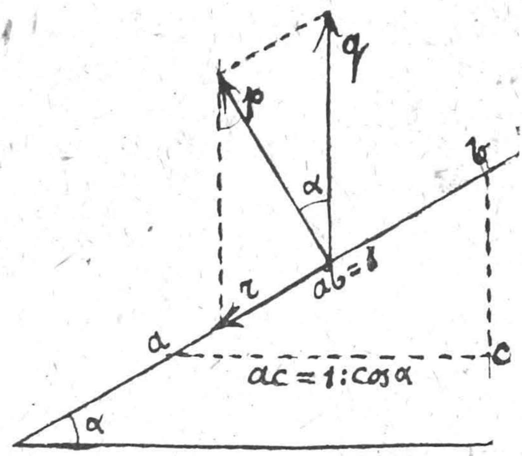

Fig. 3.

$$q = \frac{p}{\cos \alpha} \quad \text{şi} \quad r = p \operatorname{tg} \alpha$$

tg α corespunde de obiceiu aproximativ cu coeficientul de fricţiune al betonului pe teren, aşa că r este echilibrat de forţa de frecare. In ce priveşte q, suprafaţa orizontală ce i corespunde fiind $1 \times \cos \alpha$, rezultă că presiunea specifică verticală raportată la proecţia orizontală a unui element de suprafaţă a conului se poate admite $= p$.

Spre exemplu cu $P = 135$ t şi $d = 6{,}00$ m sa obţine:

$$p = \frac{135000}{\frac{\pi \cdot 600^2}{4}} = 0{,}48 \sim 0{,}5 \text{ kg.cm}^1$$

Impărţind acuma conoidul prin secţii orizontale în inele având fiecare lărgimea orizontală $= e$ (fig. 4) şi considerând un element de inel cu lungimea medie $= \lambda$ vom obţine reacţiunea verticală a solului corespunzătoare acestui element:

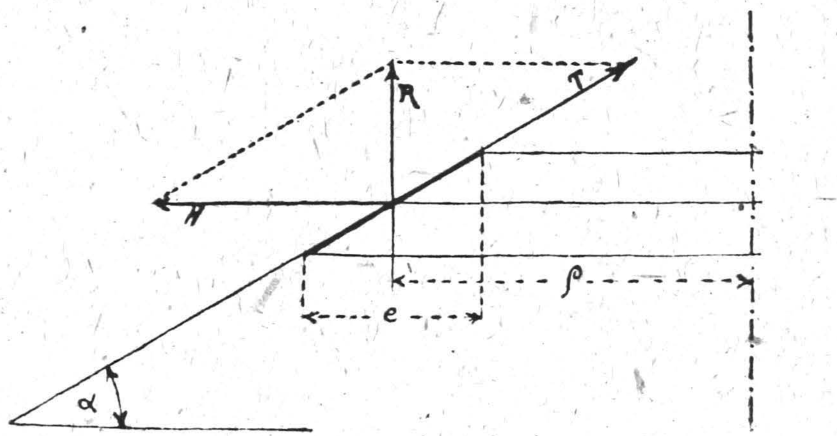

Fig. 4.

(1) $$R = p \cdot e \cdot \lambda$$

care descompusă în cele 2 componente menţionate mai sus ne dă:

(2) $$T = \frac{R}{\sin \alpha}$$ (îndreptat după tangenta la fibra mijlocie a secţiunei meridiane a conoidului) şi

(3) $$H = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha}$$ (după raza cercului paralel mediu al inelului considerat).

Armăturile circulare. ρ fiind raza cercului paralel mediu al inelului considerat, efortul de tracţiune exercitat în armătura cu secţia fc a acestei zone va produce o tensiune

$$\sigma_c = \frac{H \rho}{fc}$$

Compresiunea betonului. Numerotând dela bază spre vârf elementele zonelor inelare cuprinse între 2 planuri meridiane şi afectând mărimile corespunzătoare unui element dat cu un inciice care reprezintă numărul său de ordine, vom avea pentru elementul k următoarele relaţiuni:

$$T_{ka} = T_{(k-1)a} + T_k$$

în care T_{ka} este efortul acumulat şi T_k va fi calculat cu ajutorul formulei (2). Scriem acuma pe rând:

$$T_{ka} = T_{(k-1)a} + T_k$$

$$T_{(k-1)a} = T_{(k-2)a} + T_{k-1}$$

$$T_{(k-2)a} = T_{(k-3)a} + T_{k-2}$$

$$T_{2a} = T_{1a} + T_2$$

$$T_{1a} = T_1$$

Adunând membru cu membru obţinem:

$$T_{ka} = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_k = \sum_{\beta=1}^{\beta=k} T_\beta.$$

Formula (2) ne dă:

$$T_k = \frac{P_k}{\sin\alpha_k} = p \cdot e. \frac{\lambda_k}{\sin\alpha_k}$$, aşa că putem scrie:

$$T_{ka} = p\,e\left[\frac{\lambda_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\sin\alpha_2} + \frac{\lambda_3}{\sin\alpha_3} + \dots + \frac{\lambda_k}{\sin\alpha_k}\right]$$

Punând λ l şi observând că:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \frac{\rho_k}{\rho_1}$$

avem:

$$T_{ka} = \frac{pe}{\rho_1}\left[\frac{\rho_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\rho_2}{\sin\alpha_2} + \frac{\rho_3}{\sin\alpha_3} + \dots + \frac{\rho_k}{\sin\alpha_k}\right]$$ sau:

$$T_{ka} = \frac{pe}{\rho_1}\sum_{\beta=1}^{\beta=k}\frac{\rho_\beta}{\sin\alpha_\beta}$$

h_k fiind grosimea elementului măsurată perpendicular pe fibra mijlocie, compresiunea betonului va fi

$$\sigma_{bk} = \frac{T_{ka}}{h_k \cdot \lambda_k}$$

Aşa s. e. cu:

$p = 0,5$ kg.cm.^{2}; $e = 0,50$ m; $\rho_1 = 2,70$ m; $\rho_2 = 2,20$ m;

$\rho_3 = 1,70$ m; $\rho_4 = 1,20$ m; $\sin \alpha_1 = 0,43$; $\sin \alpha_2 = 0,43$;

$\sin \alpha_3 = 0,40$; $\sin \alpha_4 = 0,39$, vom obţine:

$$T_{4a} = \frac{2500}{2,70}\left[\frac{2,70}{0,43} + \frac{2,20}{0,43} + \frac{1,70}{0,40} + \frac{1,20}{0,39}\right] = 17400 \text{ kg}$$

Cu $\lambda_1 = 45$ cm şi $h_4 = 12$ cm. rezultă

$$\sigma_{b_4} = \frac{17400}{45,12} = 32 \text{ cm}^2$$

O atenţie specială trebue dată punctului de reazăm al stâlpului pe conoid. Acolo lucrează sarcina transmisă de stâlp P', care descompusă într'o componentă orizontală H' şi una după generatrice, aceasta din urmă va fi equilibrată de reacţiunile de compresiunile betonului, pe când H' va da naştere unei forţe verticale de frecare acţionând de jos în sus cu valoarea

$$P'_1 = 0,70 \text{ H'}$$

în care 0,70 este coeficientul de frecare între beton şi beton. Se va verifica dacă

$$P'_1 > P'$$

Chiar dacă această condiţie este îndeplinită, se va face totuşi verificarea de rezistenţă a betonului conoidului la forfecare în punctul de pătrundere a stâlpului. introducând în calcul spre mai multă siguranţă — în vederea lipsei unei clarităţi perfecte a distribuţiei eforturilor în această regiune — numai $\frac{1}{2}$ P'$_1$, aşa că forţa forfecătoare va fi:

$$P_f = P' - \frac{1}{2}\, P'_1$$

Numind τ_f travaliul de forfecare vom avea, în ipoteza unui stâlp de secţie pătrată cu latura a şi a unei adâncimi de pătrundere în conoid $= h$

$$\tau_f = \frac{P_f}{4\, a\, h}$$

care trebue să fie $<$ travaliul admisibil. Chiar dacă această condiţie este împlinită se mai pun şi armături suplimentare.

Forța H' va produce la rândul ei o compresiune:

$$\sigma_b = \frac{H'}{4\,a h}$$

care trebue să rămâe și ea în limitele admisibile.

Inginer S. Soru

Incovoerea pieselor prizmatice drepte, cu articulații imobile la extremități. Aceasta este problema pusă și rezolvită de d-l Inginer *G. D. Roșianu* în No. 7—8 al „Buletinului" din 1920, pag. 446—452. Fiindcă ecuațiile problemei nu se pot rezolvi decât introducând simplificări în calcul, ne vom permite a arăta aici semnificarea acelor simplificări.

Reamintim că problema constă în determinarea reacțiunilor orizontale X ale articulațiilor fixe A și B, prin care razimă grinda A B de deschidere l, încărcată în mijlocul ei cu sarcina P. Ecuația (2), care dă reacțiunea X a fost:

$$\frac{X.\,l}{E\,\Omega} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 .\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Membrul întâi al acestei relații arată lungirea *barei A B* sub acțiunea tracțiunii X; iar membrul al doilea arată diferența dintre lungimea arcului A M' B și coarda A B $= l$. Dacă Δl este această diferență, λ lungimea arcului de curbă A M' B și ds un element al acestui arc, — vom avea:

$$\lambda = l + \Delta l = \int_{(A M' B)} ds.$$

Autorul deduce relația (2) din relația (1), pe care o vom putea scrie:

$$\frac{X}{E\,\Omega} \int_{(A M' B)} ds = \Delta l \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Sau încă:

$$\frac{X \lambda}{E\,\Omega} = \Delta l$$

Adică: diferența dintre lungimea arcului A M' B și coarda A B ar fi egală cu lungirea produsă de tracțiunea X asupra *unei bare de lungimea arcului A M' B.*

Credem că acest rezultat nu este riguros exact și că lungirea provocată de reacțiunile X este egală numai cu lungirea barei A B $= l$ sub tracțiunea X, cum se arată în relația (2). Nepotrivirea a provenit din faptul că autorul a socotit că puterea normală N_x dintr'o secție are proiecția orizontală egală cu X;

pe cât timp, puterea N_x se obține proectând puterea X pe tangenta la curba A M' B în secția considerată, la distanța x de articulația A. Astfel că:

$$N_x = X \cos \alpha;$$

iar lungimea rezultată va fi:

$$\Delta_x l = \int \frac{X \cos \alpha \, ds}{E \Omega} = \frac{X}{E \Omega} \int_o^l dx$$

$$\Delta_x l = \frac{X l}{E \Omega} \quad . \quad . \quad . \qquad (6).$$

Această relație arată că efectul reacțiunilor X este lungirea sub tracțiunea X a barei AB = l.

Dar fiindcă curba A M' B reprezintă fibra medie deformată a grinzii AB, se cuvine a considera și eforturile secundare de tensiune datorite puterilor tăetoare. Adică, în centrul de greutate al secției la distanța x de A, trebue să ducem pe lângă reacțiunea orizontală X și reacțiunea verticală $\frac{P}{2}$. Contribuția acestei din urmă reacțiuni la puterea normală a secției este: $\left(\frac{P}{2} \sin \alpha\right)$ Lungimile corespunzătoare vor fi:

$$\Delta_p . l = \int \frac{\frac{P}{2} \sin \alpha \, ds}{E \Omega} = \frac{P}{2 E \Omega} \int dy = \frac{E f}{P . \Omega}$$

unde f este săgeata MM' din mijlocul grinzii. Cu alte cuvinte lungirile datorite puterilor tăetoare vor fi egale cu lungirea sub tracțiunea P a unei bare identice cu grinda AB, dar având ca lungime săgeata f din mijlocul grinzii. Luând $f = \frac{P l^3}{48 E J}$, avem:

$$\Delta_p . l = \frac{P^2 l^3}{48 E^2 J \Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

Vom face mai jos, comparație între lungirile $\Delta_x l$ și $\Delta_p l$. Neglijând deocamdată lungirile $\Delta_p . l$, ecuația (1) de mai sus trebue scrisă:

$$\frac{X l}{E \Omega} = \Delta l \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1').$$

Pentru Δl, avem relația:

$$l + \Delta l = \int_o \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1'').$$

Cantitatea $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, în totdeauna va fi cuprinsă între 0 şi 1. Luând cazul mai defavorabil al grinzii A B liber răzimate la extremităţi, deviaţia maximă va fi pe razime şi va avea valoarea

$$\frac{P\,l^2}{16\,E\,J} = \frac{M\,l}{4\,E\,J} = \frac{M\,v\,l}{J\,4\,E\,v} = \frac{R}{4\,E} \cdot \frac{l}{v},$$

unde *M* este momentul încovoetor în mijlocul grinzii: *v* este distanţa axului neutru al secţiei la fibra ei cea mai depărtată; şi *R* este rezistenţa dezvoltată.

Pentru grinzi metalice, luând $R = 1000$ kgr.|cm², $E = 2.10^6$ kg. cm² şi $\frac{l}{v} = 80$, — găsim

$$\max.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1000 \times 80}{4 \times 2 \times 10^6} = \frac{1}{100}$$

la care corespunde un unghiu de $0^0\,35'$.

Pentru grinzi de lemn, luând $R = 100$ kg.|cm², $E = 10^5$ kg.|cm² şi $\frac{l}{v} = 40$, — găsim:

$$\max.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{100 \times 40}{4 \times 10^5} = \frac{1}{100}.$$

Aceste calcule ne arată că putem desfăşura radicalul din relaţia (1''), după:

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}\,z - \frac{1}{2.4}\,z^2 + \ldots,$$

aşa după cum a procedat şi autorul, obţinând:

$$\Delta\,l = \int_o^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 .\, dx.$$

Cu acest rezultat, relaţia (2) e pe deplin stabilită:

$$\frac{X.l}{E.\Omega} = \int_o^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 .\, dx \qquad (2).$$

Pentru efectuarea integralei din membrul al doilea al relaţiei ce precede, autorul ia ca punct de plecare ecuaţia diferenţială a curbei A M' B:

$$E\,J\,\frac{d^2 y}{dx^2} - X.\,y + \frac{P.\,x}{2} = 0.$$

Introducând simplificări indispensabile de calcul, autorul obţine ca valoare a integralei o cantitate independentă de X.

$$\Delta l = \frac{P^2 . l^5}{960 . E^2 J^2}$$

Dar dacă voim a neglija influenţa reacţiunilor X asupra variaţiei deviaţiilor, putem imediat găsi valoarea lungirii Δl, luând pentru $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ valorile pentru o grindă independentă A B, încărcată la mijloc cu sarcina P:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P . l^2}{16 E J} - \frac{P . x^2}{4 E J}$$

Ridicând la patrat:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{P^2 . l^4}{256 . E^2 J^2} = \frac{P^2 . x^4}{16 . E^2 J^2} - \frac{P^2 . l^2 x^2}{32 . E^2 J^2}.$$

Integrând şi făcând în rezultat $x = \frac{l}{2}$, căpătăm:

$$\Delta l = \frac{P^2 . l^5}{960 . E^2 J^2} \tag{8}$$

Aseasta e diferenţa dintre lungimea arcului fibrei deformate prin încovoerea sarcinii P şi distanţa orizontală a razimelor. Pentru a se vedea cât de neînsemnată este valoarea lui Δl, vom scrie expresia precedentă astfel:

$$\Delta l = \left(\frac{M . v}{J}\right)^2 . \left(\frac{l}{v}\right)^2 . \frac{l}{60 E^2} = \frac{R^2 . \left(\frac{l}{v}\right)^2 . l}{60 E^2}$$

Luând aceleaş valori ca pentru calculul făcut mai sus pentru $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, găsim respectiv la grinzi metalice şi la grinzi de lemn:

$$\Delta l = \frac{l}{24.000}; \quad \Delta l = \frac{l}{37.500}.$$

Ducând în ecuaţia (2) valoarea lui Δl din relaţia (8) găsim:

$$X = \frac{P^2 . l^4}{960 . E J . r^2} \tag{4}$$

Fiindcă autorul a calculat valoarea lui X pentru două exemple numerice, vom putea deduce imediat lungirile Δl pentru aceleaşi exemple, cu ajutorul relaţiei:

$$\Delta l = \frac{X . l}{E . \Omega}.$$

Asffel, pentru grinda metalică de 10 metri, găsim

$$\Delta l = \frac{1044 \times 1000}{2 \times 10^6 \times 78} = 0{,}006 \text{ cm.}$$

şi

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{166.667}.$$

Iar pentru grinda de lemn de 5 metri deschidere, găsim:

$$\Delta l = \frac{772 \times 500}{10^5 \times 600} = 0{,}0065 \text{ cm.}$$

şi:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{76\,923}.$$

Putem acum să comparăm lungirea Δl cu lungirea secundară a puterilor tăetoare $\Delta_p . l$, dată de relaţia (7), pe care o vom scrie:

$$\Delta_p . l = \frac{P^2 . l^3}{48 . E^2 J . \Omega} = \Delta l . \frac{20 . r^2}{l^2}$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta_p . l} = \frac{20 . r^2}{l^2}$$

Cu datele numerice din articolul în chestiune, găsim pentru grinda de lemn, respectiv:

$$\frac{\Delta l}{\Delta_p . l} = 310; \qquad \frac{\Delta l}{\Delta_p . l} = 167.$$

Pentru a obţine pentru Δl o expresie depinzând de X, reluăm ecuaţia diferenţială a curbei $A M^1 B$:

$$E J \frac{d^2 y}{dx^2} - X . y + \frac{P . x}{2} = O,$$

în care pentru y vom pune valoarea corespunzătoare pentru o grindă liber răzimată A B:

$$y = \frac{P . x (3 l^2 - 4 x^2)}{48 E J}$$

şi vom avea:

$$E J \frac{dy}{dx} = \frac{X . P}{48 E J} \left(\frac{3 l^2 x^2}{2} - x^4 \right) - \frac{P x^2}{4} + C$$

$$E J . y = \frac{X . P}{48 E J} \left(\frac{l^2 x^3}{2} - \frac{x^5}{5} \right) - \frac{P x^3}{12} + C . x$$

Dar pentru $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ este zero. Astfel că

$$C = -\frac{5 X . P . l^4}{16 \times 48 E J}.$$

Ducând această valoare în ecuațiile precedente, obținem:

$$E J . \frac{dy}{dx} = \frac{X . P}{48 E J} \left(\frac{3 l^2 x^2}{2} - x^4 \right) - \frac{P x^2}{4} - \frac{5 X . P l^4}{16 \times 48 E J} \qquad (9)$$

$$E J . y = \frac{X . P}{48 E J} \left(\frac{l^2 x^3}{2} - \frac{x^5}{5} \right) - \frac{P x^3}{12} - \frac{5 X . P l^4 . x}{16 \times 48 E J} \qquad (10)$$

Cu relația (9), putem calcula $\left[\frac{dy}{dx} \right]^2$; iar cu relația (10), putem deduce săgețile. Procedând pe această cale, găsim pentru reacțiunea X ecuația de gradul al doilea:

$$\frac{24 l^4}{7} X^2 + \left[l^4 - \frac{12 \times 37}{35} l^2 E J - \frac{16^2 \times 24^2 E^3 J^3 r^2}{P^2 l^4} \right] X.$$

$$+ 2 E J \left[\frac{8 \times 18}{5} E J + 10 l^2 \right] = O$$

Pentru a găsi săgeata maximă, facem în relația (10), $x = \frac{l}{2}$ și obținem:

$$s_{max} = \frac{P . l^3}{48 . E J} \left[1 - \frac{X . l^2}{10 E J} \right] \qquad (11)$$

Inlocuind pe X cu valoarea sa din relația (4), găsim

$$s_{max} = \frac{P . l^3}{48 . E J} \left(1 - \frac{P^2 l^6}{9600 . E^2 J^2 r^2} \right)$$

Dar $\frac{P l^3}{48 E J}$ este săgeata f pentru o grindă liber răzimată, astfel că:

$$s_{max} = f \left(1 - \frac{6 f^2}{25 r^2} \right).$$

Adică: reacțiunile X micșorează săgeata f cu cantitatea $\left(\frac{6 f^3}{25 r^2} \right)$, pe care o însemnăm cu f_1. Din relația (11) deducem:

$$s_{max} = f - f_1,$$

și

$$f_1 = \frac{X . P . l^5}{480 E^2 J^2}$$

Apropiind acest rezultat de relaţia (8), obţinem:

$$f_1 = \frac{2\,X\,l\Delta}{P}$$

Această relaţie o putem stabili direct cu ajutorul suprapunerii efectelor.

Acţionând numai sarcina P asupra grinzii liber răzimate AB, travaliul efectuat va fi: $\left(\frac{1}{2}\,P.f\right)$. Adăogându-se reacţiunile X, se adaogă travaliul:

$\left(\frac{1}{2}\,X\,\Delta\,l - P\,f_1\right)$. Travaliul total va fi:

$$T = \frac{1}{2}\,P.f + \frac{1}{2}\,X\,\Delta\,l - P\,f_1\,.$$

Incepând cu reacţiunile X, se va efectua travaliul: $\left(\frac{1}{2}\,X\,\Delta\,l\right)$. Adăogându-se sarcina P, se va mai produce travaliul: $\frac{1}{2}\,P\left(f - f_1\right) - X\,\Delta\,l$. Travaliul total va fi:

$$T = \frac{1}{2}\,P.f - \frac{1}{2}\,X\,\Delta\,l - \frac{1}{2}\,P\,f_1\,.$$

Egalând expresiile găsite pentru T, găsim:

$$f_1 = \frac{2\,X\,\Delta\,l}{P}\,.$$

Calculând această scurtare a săgeţii f pentru cele două exemple ale autorului, avem:

a) Pentru grinda de lemn:

$$f_1 = \frac{2 \times 1044 \times 0{,}006}{2000} = 0{,}0063 \text{ cm.}$$

b) Pentru grinda de lemn:

$$f_1 = \frac{2 \times 772 \times 0{,}0065}{2000} = 0{,}0025 \text{ cm.}$$

Săgeţile f pentru aceste două cazuri vor fi:

a) Pentru grinda de fier:

$$f = \frac{2000 \times 1000^3}{48 \times 2 \times 10^6 \times 12493} \quad 2 \text{ cm.}$$

b) Pentru grinda de lemn:

$$f = \frac{2000 \times 500^3}{48 \times 10^5 \times 45000} = 1,2 \text{ cm.}$$

Aceste calcule arată lămurit că putem considera egale săgețile f și s_{max}.

Cu aceste rezultate, putem calcula eforturile secundare datorite articulațiilor fixe A și B. Vom avea:

$$R = \frac{X}{\Omega} - \frac{Xf}{W}.$$

Aplicând această formulă pentru cele două exemple, găsim:

a) Pentru grinda de fier:

$$R = \frac{1044}{77,7} - \frac{1044 \times 2}{781} = 13,4 - 2,7 = 10,7 \text{ kg./cm}^2.$$

b) Pentru grinda de lemn:

$$R = \frac{772}{600} - \frac{772 \times 1,2}{3000} = 1,3 - 0,3 = 1 \text{ kg./cm}^2.$$

Prin urmare, se vor putea considera ca eforturi secundare datorite reacțiunilor X, numai tensiunile: $\frac{X}{\Omega}$.

* * *

Să considerăm și o grindă AB încastrată la extremități, căci încastrarea face fixe secțiile A și B. Ca solicitare vom lua tot sarcina P în mijlocul C al grinzii. (Fig. 1).

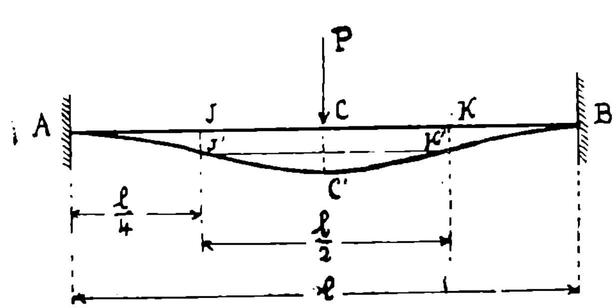

Fig. 1.

Curba A C' B a fibrei neutre deformate va avea două puncte de inflexiune J' și K', în secțiile J și K situate la distanțele $\frac{l}{4}$ de razimele A și B. In aceste puncte de inflexiune, momentele încovoetoare datorite sarcinelor verticale sunt nule. Astfel că punând consola A J în prelungirea consolei K B, secțiile A și B confundându-se, obținem o grindă identică cu grinda liber rězimată J' K' de deschidere $\frac{l}{2}$ și acționată în mijlocul ei de sarcina P. Rezultă de aici că săgeata f_i din secția unui punct de inflexiune va fi egală cu săgeata din mijlocul grinzii J' K'; iar săgeata f C C' din mijlocul grinzii încastrate A B va fi îndoitul săgeții f_i. Adică:

$$f = 2 . f_i = \frac{2 . P \left(\frac{l}{2}\right)^3}{48 E J} = \frac{P . l^3}{192 E J}$$

Ținând seamă acum că secțiile extreme A și B rămân nemișcate, trebue să introducem în aceste secții două reacțiuni orizontale X, egale și opuse. Mărimea lor va fi îndoitul reacțiunei X calculate precedent pentru o grindă J' K' de deschidere $\frac{l}{2}$ Deci:

$$X = 2 . \frac{P^2 \left(\frac{l}{2}\right)^4}{960 E J r^2} = \frac{1}{8} \frac{P^2 l^4}{960 E J r^2}$$

Adică reacțiunea X pentru o grinda încastrată A B va fi de 8 ori mai mică decât reacțiunea X pentru o grindă A B articulată la extremități. Raportul dintre aceste reacțiuni va fi mai mic, când comparația lor se face pe baza rezistențelor admisibile. Astfel, pentru grinda A B articulată la extremități vom avea:

$$X = \frac{P^2 l^4}{960 E J r^2} = \frac{1}{60} R^2 \left(\frac{l}{v}\right)^2 \Omega$$

Pentru grinda încastrată, avem:

$$X = \frac{1}{8} \frac{P^2 l^4}{960 E J r^2} = \frac{1}{120} R^2 \left(\frac{l}{v}\right)^2 \Omega$$

Inginer N. Profiri