Flexiunea șinelor de tramvaiu

GH. EM. FILIPESCU
Profesor al Școalei Politecnice

In toate calculele ce se fac în această chestiune se presupune că avem de a face cu o grindă sau bară care reazimă pe un mediu elastic compresibil, cum de altfel și este și se mai presupune că șina este indefinit de lungă și acționată în un punct al ei de o sarcină P.

De obicei însă vehiculele cari circulă pe aceste șini sunt vehicule cu două osii așa în cât este mult mai convenabil a studia în acest caz șina acționată de cele două sarcini P ce se găsesc între ele la distanța 2 a.

Ipoteza șinii continui se înțelege că nu este exactă întrucât la îmbinarea de prelungire a șinilor cu ajutorul eclisẹlor nu putem obține acelaș modul de rigiditate EI, ca în cursul șinei și prin urmare in acest punct vom avea o discontinuitate. După măsurători sumare făcute la tramvaiele București unde la liniile noi s'a întrebuințat eclisajul sistem „Melann" săgețile măsurate în dreptul rostului au fost aproximativ egale cu acelea din cursul șinei. Aceasta se explică prin faptul că eclisa are o parte care înlocuește capul șinei, este destul de lungă și în plus este foarte bine solidarizată cu șina prin două pene ce se bat cu putere între inima eclisei și marginea inferioară a capului șinei. Ca să se vadă cât de puternică este această solidarizare e destul să spunem că la o eclisare un lucrător nesupraveghiat bine a bătut penele așa de tare că s'a desprins capul șinei de inima șinei provocând o fisură orizontală în lungul șinei. Prin urmare cel puțin atâta timp cât eclisarea este bine făcută și nu are vicii de montare se poate presupune că modulul de rigiditate EI, nu se modifică prea mult în dreptul rostului șinelor bine înțeles la acest sistem de eclisare. Rămâne ca măsurători mai precise să arate deosebirea exactă ce există la acest sistem de eclisare între tasările în dreptul rostului şi cele din şina curentă.

Se înţelege iarăşi că la şinile sudate la capăt vom fi mai aproape de adevăr întru cât în dreptul sudurii putem presupune că avem momentul de inerţie I cel puţin tot aşa de mare ca cel din cursul şinei, rămânând şi aci o deosebire numai la modulul de elasticitate care evident în dreptul sudurii nu mai este acelaşi ca în cursul şinei.

Numai în limita acestor aproximaţiuni calculul nostru se poate presupune exact.

Calculul acesta s'a făcut în vederea determinării elasticităţii diferitelor sisteme de fundaţiuni ce se întrebuinţează sub şinele de tramvai pentru a putea eventual în timpurile de astăzi a schimba atât profilul şinei cât şi sistemul de fundaţie din cauza preţurilor cu totul mari a materialelor de cale. O soluţie economică merită astăzi mai mult ca oricând un calcul deosebit din cauza, cum am spus, a preţurilor mari şi a valutei care pune mari piedici aprovizionării de materiale ce în majoritatea lor trebuesc aduse din străinătate.

* * *

Calcule de acestea au fost făcute şi de alţii şi aci voi da numai norma şi rezultatele obţinute.

Vom presupune o şină îndefinit lungă cu modulul de rigiditate EI.

Originea axelor o vom lua la mijlocul distanţei celor două sarcini P. şi în poziţia nedeformată.

Săgeţile η le vom măsura în jos positive ca de obicei şi în aceste condiţiuni, se ştie că ecuaţia fibrei medii deformate este

$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} = p$$

Dacă se presupune că reacţiunea şinei este dirijată de jos în sus, cum şi este de fapt când η este positiv, şi ea este proporţională cu η cu lăţimea b a tălpii şinei şi cu un factor k pe care pentru simplicitate îl presupunem constant, vom avea

$$p = -bk\eta,$$

şi deci

$$(1)\qquad EI\frac{d^4\eta}{dx^4}+bk\eta=o$$

a cărei integrală, dacă se notează: $\alpha=\sqrt[4]{\frac{bk}{4EI}}$, este:

$$(2)\ \eta=e^{\alpha x}(A_1\cos\alpha x+A_2\sin\alpha x)+e^{-\alpha x}(A_3\cos\alpha x+A_4\sin\alpha x).$$

Vom avea atâtea ramuri de aceste curbe, câte intervale sunt între sarcinile concentrate.

Prin urmare presupunem că aceasta este ecuaţia fibrei medii deformate pe intervalul dela o la a adică până la sarcina P.

Dincolo de sarcina P este o altă curbă absolut de aceiaşi structură însă cu alte constante. Pentru a deosebi mai bine vom nota ordonatele ei cu η_1 şi vom avea:

$$(3)\ \eta_1=e^{\alpha x}(B_3\cos\alpha x+B_4\sin\alpha x)+e^{-\alpha x}(B_1\cos\alpha x+B_2\sin\alpha x).$$

Pentru a determina cele 8 constante, impunem condiţiile ce trebue să îndeplinească fibra medie deformată şi diferitele ei derivate în anumite puncte ale ei.

Vom căuta să determinăm mai întâiu constantele cele mai simple; vom impune condiţiile:

Pentru $x=o$, trebue să avem:

$$\frac{d\eta}{dx}=o,\quad \frac{d^3\eta}{dx^3}=o$$

căci din motive de simetrie atât tangenta la fibra medie deformată cât şi forţa tăietoare în originea axelor de coordonate este nulă, iar pentru $x=\infty$, trebue să avem:

$$\eta_1=o \text{ şi } \frac{d^3\eta_1}{dx^3}=o$$

adică săgeata şi forţa tăietoare să fie nule. Din exemplele numerice făcute se vede că η_1 are valori inapreciabile la distanţe relativ mici de sarcina P lucru de altfel confirmat şi practiceşte.

Din condiţiile de mai sus se deduce:

$$A_1-A_3=o,\ A_2+A_4=o,\ B_3=B_4=o.$$

iar ecuaţiile se reduc la:

(4) *) $\eta = A_1 \, ch \, \alpha x \cos \alpha x + A_2 \, sh \, \alpha x \sin \alpha x$

(5) $\eta_1 = e \, (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x),$

din care prin derivări succesive se deduce:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\eta}{dx} = (A_2 - A_1) \, ch \, \alpha x \sin \alpha x + (A_2 + A_1) \, sh \, \alpha x \cos \alpha x$$

(6) $$\frac{1}{2\alpha^2} \frac{d^2\eta}{dx^2} = A_2 \cos \alpha x \, ch \, \alpha x - A_1 \sin \alpha x \, sh \, \alpha x$$

$$\frac{1}{2\alpha^3} \frac{d^3\eta}{dx^3} = -(A_1 + A_2) \, ch \, \alpha x \sin \alpha x + (A_2 - A_1) \, sh \, \alpha x \cos \alpha x$$

$$\frac{1}{4\alpha^4} \frac{d^4\eta}{dx^4} = - A_1 \, ch \, \alpha x \cos \alpha x - A_1 \, sh \, \alpha x \sin \alpha x.$$

şi:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\eta_1}{dx} = e^{-\alpha x} [(B_2 - B_1) \cos \alpha x - (B_1 + B_2) \sin \alpha x]$$

$$\frac{1}{2\alpha^2} \frac{d^2\eta_1}{dx^2} = e^{-\alpha x} [- B_2 \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x]$$

(7) $$\frac{1}{2\alpha^3} \frac{d^3\eta_1}{dx^3} = e^{-\alpha x} [(B_1 + B_2) \cos \alpha x - (B_1 - B_2) \sin \alpha x]$$

$$\frac{1}{4\alpha^3} \frac{d^4\eta}{dx^4} = e^{-\alpha x} [- B_1 \cos \alpha x - B_2 \sin \alpha x]$$

Pentru determinarea celor patru constante ce au mai rămas avem condiţiunile că $x = a$:

$$\eta = \eta_1, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta_1}{dx_1}, \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d^2\eta_1}{dx^2} \quad \text{şi} \quad \frac{d^3\eta_1}{dx^3} - \frac{d^3\eta}{dx^3} = \frac{P}{EI}$$

adică săgeata, tangenta şi momentul încovoietor în dreptul sarcinei P sunt aceleaşi pentru ambele ramuri de curbă, iar diferenţa forţelor tăietoare ce sunt în ambele ramuri de o parte şi alta a sarcinei P este egală tocmai cu P.

*) Constantele A_1 şi A_2 din aceste ecuaţii diferă cu factorul 2 de aceleaşi constante A_1 şi A_2 cari le-am avut până aci.

Vom nota cu $ch \, \alpha x$ şi $sh \, \alpha x$ respectiv *cosinus hiperbolic şi sinus hiperbolic de αx.*

Dacă notăm :

$$ch\,\alpha x \cos \alpha a = l, \qquad ch\,\alpha a \sin \alpha a = r, \qquad e^{-\alpha a} \cos \alpha a = u,$$

$$sh\,\alpha a \sin \alpha a = m, \qquad sh\,\alpha a \cos \alpha a = s, \qquad e^{-\alpha a} \sin \alpha a = v,$$

găsim

$$l\,A_1 + m\,A_2 - u\,B_1 - v\,B_2 = o$$

$$(s-r)\,A_1 + (s+r)\,A_2 + (v+u)\,B_1 + (v-u)\,B_2 = o$$

$$-m\,A_1 + l\,A_2 - v\,B_1 + u\,B_2 = o$$

$$(s+r)\,A_1 + (r-s)\,A_2 + (u-v)\,B_1 + (u+v)\,B_2 = \frac{P}{2\alpha^3 EI}$$

cari de dau :

$$A_1 = (v+u)\frac{P}{4\alpha^3 EI} \qquad A_2 = (v-u)\frac{P}{4\alpha^3 EI}$$

$$B_1 = (l-m)\frac{P}{4\alpha^3 EI} \qquad B_2 = (l+m)\frac{P}{4\alpha^3 EI}$$

Introducând aceste valori în locul constantelor din grupul de ecuații (6) și (7) căpătăm :

$$\eta = \frac{P}{4\alpha^3 EI}\left[(v+u)\,ch\,\alpha x \cos \alpha x + (v-u)\,sh\,\alpha x \sin \alpha x\right]$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{P}{2\alpha^2 EI}\left[-u\,ch\,\alpha x \sin \alpha x + v\,sh\,\alpha x \cos \alpha x\right]$$

$$(8) \quad EI\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{P}{2\alpha}\left[(v-u)\,ch\,\alpha x \cos \alpha x - (v+u)\,sh\,\alpha x \sin \alpha x\right]$$

$$EI\frac{d^3\eta}{dx^3} = -P\left[(v\,ch\,\alpha x \sin \alpha x + u\,sh\,\alpha x \cos \alpha x\right]$$

$$EI\frac{d^4\eta}{dx^4} = -P\alpha\left[(v+u)\,ch\,\alpha x \cos \alpha x + (v-u)\,sh\,\alpha x \sin \alpha x\right.$$

și

$$\eta_1 = \frac{P}{4\alpha^3 EI} e^{-\alpha x}\left[(l-m)\cos \alpha x + (l+m)\sin \alpha x\right]$$

$$\frac{d\eta_1}{dx} = \frac{P}{2\alpha^2 EI} e^{-\alpha x}\left[m \cos \alpha x - l \sin \alpha x\right]$$

$$(9)\quad E\,I\frac{d^2\eta_1}{dx^2} = \frac{P}{2\alpha}e^{-\alpha x}\left[-(l+m)\cos\alpha x + (l-m)\sin\alpha x\right)$$

$$E\,I\frac{d^3\eta_1}{dx^3} = P\,e^{-\alpha x}\left[l\cos\alpha x + m\sin\alpha x\right]$$

$$E\,I\frac{d^4\eta_1}{dx^4} = -P\,\alpha\,e^{-\alpha x}\left[(l-m)\cos\alpha x + (l+m)\sin\alpha x\right]$$

Ecuaţiile astfel transformate şi fixate valorile constantelor, sunt apte pentru calculele numerice.

* * *

E vorba ca din încărcările date şi elementele şinei să se găsească constanta k a fundaţiei sub şini.

Pentru şina S. T. B. à tramvaielor din Bucureşti avem $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg./cm.^{2}, $I = 2430$ cm.^{4}, $W = 249$ cm^3 şi lăţimea tălpii şinei de 16 cm.

Incărcările sub care s'au făcut măsurători sânt de $P = 4500$ kg, pentru un vagon S. T. B. (Simmering), încărcat ca la Bucureşti cu distanţa între osii de 230 cm. $= 2 \times 115 = 2\,a$, adică, $a = 115$ cm. Greutatea vagonului este de 13,5 tone la care s'à adăogat în mod aproximativ greutatea pasagerilor din vagon şi a celor agăţaţi de el.

In aceste condiţiuni săgeata măsurată rudimentar, a fost de 0,22 cm. sub sarcină când una din sarcini era în apropierea mijlocului şinei care are o lungime de 15 m.

Măsurând săgeata sub îmbinarea cu eclisa „Melann" când sarcina cădea în dreptul eclisei s'a găsit aproximativ cam aceiaşi valoare.

In acest mod din prima ecuaţie a grupului (8) putem deduce pe α şi deci apoi pe k.

Avem:

$$\eta = \frac{P\,a^3}{4\,E\,I}\,\frac{1}{(\alpha a)^3}\left[(v+u)\,l + (v-u)\,m\right]$$

$$(2\,\alpha\,a)^3 = \frac{2P\,a^3}{E\,I\,\eta}\left[(v+u)\,l + (v-u)\,m\right]$$

$$2\alpha a = a\sqrt[3]{\frac{2P}{EI\eta}\left[(v+u)l+(v-u)m\right]}$$

sau

$$2\alpha a = a\sqrt[3]{\frac{P}{EI\eta}\left[1+\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{ch\,2\alpha + sh\,2\alpha}\right]}$$

Pusă sub această formă, găsim prin încercări valoarea lui $\alpha a = 0{,}9423$ şi deci $\alpha = 0{,}0082$.

La măsurarea săgeţii şinei nu s'a găsit o diferenţă apreciabilă între săgeata din originea axelor şi aceia de sub sarcină şi am putea controla calculul nostru luând $\eta = 0{,}22$ cm. în originea axelor. Acolo avem:

$$\eta = \frac{P a^3}{4(\alpha a)^3 EI}(v+u)$$

care ne dă

$$\alpha a = a\sqrt[3]{\frac{P}{4EI\eta}\cdot\frac{\cos\alpha a + \sin\alpha a}{ch\,\alpha a + sh\,\alpha a}}$$

din care tot prin încercări găsim $\alpha a = 0{,}9405$ ceia ce ne dă $\alpha = 0{,}0082$. Aşa dar putem pleca dela această valoare pentru găsirea lui k, din formula:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{bk}{4EI}}$$

punând aci toate valorile cunoscute se capătă:

$$K = 5{,}77 \ \text{kg.|cm.}^3$$

Cu aceste date vom avea:

$\cos\alpha a = 0{,}588$ $\quad\sin\alpha a = 0{,}809$ $\quad e^{-\alpha a} = 0{,}390$

$ch\,\alpha a = 1{,}478$ $\quad sh\,\alpha a = 1{,}088$

şi deci:

$v + u = 0{,}545$ $\quad v - u = 0{,}086$

$l + m = 1{,}750$ $\quad l - m = 0{,}010$

Cu aceste date putem calcula momentele încovoietoare şi rezistenţele în diferite secţiuni.

In origine momentul va fi

$$M_0 = -\frac{4500}{2 \times 0,0082}\, 0,086 = -23600 \text{ kg. cm.}$$

iar în dreptul sarcinei va fi

$$M_1 = \frac{4500}{2 \times 0,0082}\,[0,086 \times 0,588 \times 1,478 - 0,545 \times 0,809 \times 1,088]$$

$$= 110.800 \text{ kg.cm.}$$

care ne dă

$$\sigma = \frac{M}{W} = 398 \text{ kg.|cm.}^2$$

(Va urma).