

Noile poduri de șosea peste Șiret

(Urmare)

a) Calculul Arcului

În numărul trecut al Buletinului am arătat că înălțimea arcului în diferite puncte a fost calculată cu ajutorul ecuațiunii:

$$1. \quad h = h_0 \sec^2 \alpha$$

unde h_0 e înălțimea arcului la $\alpha = 0$ și α unghiul pe care tangenta la fibra mijlocie îl face cu orizontala.

Această relațiune pe lângă că convine bine direcțiunii către care se tinde asta-zi de a da arcelor secțiuni foarte variabile, pentru a le face pe cât se poate de egala rezistență, dă mai totdeauna valori admisibile pentru înălțimea arcului la rosturile de la nașteri (arce propriu zise) sau la rosturile de ruptură (arce în plin centru), prezintă în acelaș timp și marele avantaj că face integrabili toți termenii din ecuațiunile de elasticitate care depind numai de elemente geometrice.

Se evită ast-fel cu această formula o serie de integrări prin cuadraturi care în general conduc la calcule numerice lungi foarte susceptibile de erori.

Din cauză că metoda de calcul pe care am întrebuințat-o la construirea curbelor de presiune este în mare parte nouă, cred util a dezvolta această metoda cu toate detaliile pe care le comportă, stabilind ecuațiunile generale ale arcelor care au înălțimile lor definite de ecuațiunea (1), în ipoteză că arcul are o lățime constantă și că este constituit din un material care are acelaș mod de elasticitate în toate secțiunile lui.

Din formulele generale pe care le vom obține, vom face apoi ca aplicație, calculul arcului de 37.00 m. adoptat la podurile peste Șiret, calcul cu care s'au determinat eforturile presupunând că bolta

e de beton simplu, așa că armaturile metalice nu s'au avut în vedere, — propriu zis vorbind, — la calculul elastic al arcului, ci au fost puse numai pentru a lua tensiunile din anumite secțiuni periculoase.

2. Fie AB fibra mijlocie a arcului, $2a$ deschiderea ei, b săgeata, CED curba de presiune, Oxy axele de coordonate, nasterile A și B fiind de nivel.

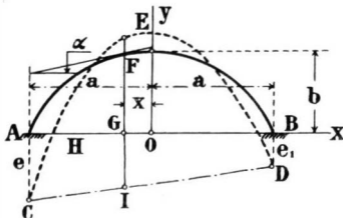
Momentul încovoetor în secțiunea F a arcului este :

$$(2) \quad M = H \overline{EF} = \mathcal{M} - (y + y_1) H$$

în care H este împingerea orizontală a arcului, \mathcal{M} momentul încovoetor fictiv pe care l'ar da sarcinile care acționează arcul în punctul G al unei grinzi drepte simplu rezimate AB și y_1 o lungime delinită de ecuația :

$$y_1 = \frac{e' + e}{2} + \frac{e' - e}{2} x$$

Fig. 1



Acestea spuse, travaliul de deformare corespunzător arcului întreg este :

$$(3) \quad T = \frac{1}{2E} \left(\int_{(AB)} \frac{M^2 ds}{J} + \int_{(AB)} \frac{N^2 ds}{F} \right)$$

în care E , F , J , N și ds sunt respectiv modulul de elasticitate, secțiunea, momentul de inerție, compresiunea normală și arcul elementar, ambele integrale fiind întinse d'alungul fibrei mijlocii AB ,

Dacă neglijem cum se face de obicei, efectul puterilor tăietoare, putem scrie :

$$(4) \quad N = H \sec \alpha$$

Ținând seama de ecuațiunile (1) și (4), dacă efectuăm integrala corespunzătoare efortului N, dacă transformăm prima integrală curbilinie în o integrală după axa Ox și dacă însemnăm cu b' baza constantă a secțiunii arcului, relațiunea (3) devine :

$$(5) \quad T = \frac{1}{b'h_0E} \left(\frac{6}{h_0^3} \int_{-a}^{+a} M^2 \cos^3 \alpha dx + aH^2 \right)$$

De asemenea, dacă facem :

$$\frac{e_1 + e_2}{2} H = Y,$$

$$\frac{e_1 - e_2}{2a} H = X$$

ecuația (2) se poate scrie :

$$(6) \quad M = \mathcal{M} - Hy - Xx - Y$$

de unde deducem, luând derivatele parțiale :

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -y, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -x, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = -1$$

Dacă aplicăm ecuațiunii (5) teorema lui *Castigliano*, anulând derivatele parțiale ale lui T în raport cu H, X și Y obținem ecuațiunile :

$$6 \quad \int_{-a}^{+a} \mathcal{M} y \cos^3 \alpha dx = ah^3 \cdot H$$

$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{M} x \cos^3 \alpha dx = 0$$

$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{M} \cos^3 \alpha dx = 0$$

sau înlocuind pe M prin valoarea dată de (6) și suprimând integralele care sunt nule din motive de simetrie :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-a}^{+a} \mathcal{M} y \cos^3 \alpha dx = \left(\frac{1}{6} a h^3 + 2 \int_0^a y^3 \cos^3 \alpha dx \right) H \\ \quad \quad \quad + 2 Y \int_0^a y \cos^3 \alpha dx \\ \int_{-a}^{+a} \mathcal{M} x \cos^3 \alpha dx = 2 X \int_0^a x^3 \cos^3 \alpha dx \\ \int_{-a}^{+a} \mathcal{M} \cos^3 \alpha dx = 2 H \int_0^a y \cos^3 \alpha dx + 2 Y \int_0^a \cos^3 \alpha dx \end{array} \right.$$

Acestea sunt pentru cazul nostru, ecuațiunile care definesc necunoscutele problemei H, X și Y ori care ar fi ecuația fibrei mijlocii.

3. Dacă admitem că fibra medie a arcului este parabola :

$$y = \frac{b}{a^2} (a^2 - x^2)$$

capătăm :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2bx}{a^2}, \quad dx = -\frac{a^2}{2b} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

În aceste condițiuni integralele din ecuațiunile (7) care nu conțin pe α se pot efectua și obținem :

$$u = \int_0^a \cos^4 \alpha \, dx = \frac{a^2}{2b} \int_0^{\alpha_0} \cos^4 \alpha \, d\alpha = \operatorname{cotg} \alpha_0 \left[\sin 2\alpha_0 \left(\cos^4 \alpha_0 + \frac{5}{4} \cos^2 \alpha_0 + \frac{15}{8} \right) + \frac{15}{4} \alpha_0 \right] \frac{a}{12}$$

$$\xi = \int_0^a x^2 \cos^4 \alpha \, dx = \frac{a^6}{8b^3} \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha \, d\alpha = \operatorname{cotg}^3 \alpha_0 \left(\sin^3 2\alpha_0 + 3 \sin 2\alpha_0 \sin^2 \alpha_0 - \frac{3}{2} \sin^3 2\alpha_0 + 3\alpha_0 \right) \frac{a^3}{48}$$

$$\eta = \int_0^a y \cos^4 \alpha \, dx = b \int_0^{\alpha_0} \cos^4 \alpha \, d\alpha - \frac{b}{a^2} \int_0^a x^2 \cos^4 \alpha \, dx = ab - \frac{b}{a^2} \xi$$

$$\zeta = \int_0^a y^2 \cos^4 \alpha \, dx = \frac{b^2}{a^4} (a^2 a - 2x^2 \xi + 2)$$

în care :

$$\eta_1 = \int_0^a x^2 \cos^4 \alpha \, dx = \frac{a^{10}}{32b^3} \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha \, d\alpha = \operatorname{cotg}^3 \alpha_0 \left(-\sin^3 2\alpha_0 + 3 \sin 2\alpha_0 \sin^2 \alpha_0 - \frac{3}{2} \sin^3 2\alpha_0 + 3\alpha_0 \right) \frac{a^2}{48}$$

α_0 fiind unghiul pe care îl face tangenta la nașterea fibrei mijlocii cu horizontala Ox .

Așa fiind ecuațiunile generale de echilibru elastic ale unui arc parabolic sunt :

$$(8) \quad \begin{cases} \int_{-a}^{+a} \epsilon \mathcal{H} y \cos^4 \alpha \, dx = \left(\frac{1}{6} a h_0^2 + 2\zeta \right) H + 2\eta_1 Y \\ \int_{-a}^{+a} \epsilon \mathcal{H} x \cos^4 \alpha \, dx = 2\xi X \\ \int_{-a}^{+a} \epsilon \mathcal{H} \cos^4 \alpha \, dx = 2\eta H + 2\alpha Y \end{cases}$$

4. Integralele din primii membri ai fiecăreia din ecuațiunile sistemului (8) sunt imposibil de efectuat în cazul general. Vom proceda

deci la nevoie pentru calculul lor prin una din metodele grafice cunoscute sau mai bine prin cuadraturi.

Se poate însă rezolva problema în mod complet și absolut riguros în ipoteză că arcul este încărcat cu o sarcină uniform repartizată pe orizontală.

Incărcarea simetrică totală, p fiind sarcina uniform repartizată avem :

$$\mathcal{M}'_b = \mathcal{M} = \frac{p a^2}{2 b} y$$

Ecuatiunile (8) devin :

$$\frac{p a^2}{b} \int_0^a y' \cos^2 \alpha dx = \frac{1}{6} (a h_0^2 + 2\delta) H + 2\gamma Y$$

$$\frac{p a^2}{b} \int_0^a y \cos^2 \alpha dx = 2 (\gamma H + \alpha Y)$$

sau :

$$\frac{p a^2}{b} \delta = \left(\frac{1}{6} a h_0^2 + 2\delta \right) H + 2\gamma Y$$

$$\frac{p a^2}{b} \gamma = 2 (\gamma H + \alpha Y)$$

sau rezolvând în raport cu Y și H :

$$(9) \quad \begin{cases} H = \frac{p a^2}{2 b} \frac{1}{1 + \varepsilon} \\ Y = \frac{p a^2}{2 b} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \end{cases}$$

în care :
$$\varepsilon = \frac{a h_0^2 \alpha}{12 (\alpha \delta - \gamma^2)}$$

Ecuatiunile (9) definesc împingerea la chee și momentul de încetare date de sarcina uniform distribuită p .

Momentele încovoetoare în arc variază după relațiunea :

$$M = \frac{p a^2}{2 b} \left(y - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

Incărcare disimetrică. — Să presupunem acum că încărcăm arcul cu sarcina p disimetric și anume pe o jumătate de arc cuprinsă între naștere și chee.

Momentul fictiv \mathcal{M}_{max} este dat de relațiunea :

$$\mathcal{M}_{max} = \frac{p a^2}{4}$$

Se vede ușor că putem înlocui integrala :

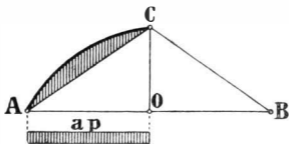
$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{M} x \cos^3 u \, dx$$

prin expresiunea :

$$\frac{p}{4} \int_0^u x^3 (a-x) \cos^3 u \, dx$$

care corespunde integralii întinsă în interiorul ariei cuprinsă între parabola AC și coarda sa.

Fig. 2



Cea d'a doua ecuație din (8) se poate scrie sub forma :

$$\frac{p}{4} \int_0^a x^3 (a-x) \cos^3 u \, dx = 2 \frac{z}{p} N_{dis}$$

sau :

$$a \int_0^u x^3 \cos^3 u \, dx - \int_0^u x^3 \cos^3 u \, dx = \frac{8z}{p} N_{dis}$$

sau :

$$(10) \quad a \frac{z}{p} - z = \frac{8z}{p} N_{dis}$$

în care :

$$z = \int_0^a x^3 \cos^3 u \, dx = \frac{a^3}{16 b^4} \int_0^{\alpha_0} \sin^3 u \cos^3 u \, du = \cos^4 \alpha_0 \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \alpha_0 \right) \frac{a^4}{6}$$

De asemenea avem :

$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{M} \cos^3 u \, dx = \int_0^u \mathcal{M}_1 \cos^3 u \, dx + \int_0^u \mathcal{M}_2 \cos^3 u \, dx$$

unde :

$$\mathcal{M}_1 = \frac{p a^3}{4 b^4} y, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{p a}{4} (a-x)$$

și prin urmare :

$$\int_{-a}^{+a} M \cos^2 \alpha \, dx = \frac{p a^2}{4 b} \bar{\gamma} + \frac{p a}{4} (a \alpha - \theta)$$

unde :

$$\theta = \int_a^0 x \cos^2 \alpha \, dx = \frac{a^2}{4 b^2} \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha = \cot^2 \alpha_0 \left(1 - \cos^2 \alpha_0 \right) \frac{a^2}{b^2}$$

Putem deci scrie :

$$a p \left(\frac{a}{b} \bar{\gamma} + a \alpha - \theta \right) = 8 (\bar{\gamma} H_{dis} + a Y_{dis})$$

Ecuatiunile problemei sunt :

$$H_{dis} = \frac{1}{2} H_{sim}$$

$$p (a \bar{\gamma} - z) = 8 \bar{\gamma} X_{dis}$$

$$a p \left(\frac{a}{b} \bar{\gamma} + a \alpha - \theta \right) = 8 (\bar{\gamma} H_{dis} + a Y_{dis})$$

sau rezolvind :

$$(11) \quad \begin{cases} H_{dis} = \frac{p a^2}{4 b} \cdot \frac{1}{1 + z} \\ X_{dis} = \frac{p}{8} \left(a - \frac{z}{\bar{\gamma}} \right) \\ Y_{dis} = \frac{a^2 p}{8 b} \frac{1}{a} \left[b \left(\alpha - \frac{\theta}{a} \right) + \frac{z - 1}{z + 1} \bar{\gamma} \right] \end{cases}$$

Momentele de încăstrare sunt respectiv pentru nașterea din partea încărcată :

$$M_d = - a X_{dis} - Y_{dis}$$

pentru nașterea din partea descărcată :

$$M_d = a X_{dis} - Y_{dis}$$

X_{dis} și Y_{dis} fiind definiți de ecuațiile (11).

5. Acestea fiind stabilite să procedăm la calculul numeric al arcului de care ne interesăm. Vom face o problemă de verificare. Am arătat că grosimea arcului la chee este :

$$h_0 = 0.70 \text{ m.}$$

$$\text{De asemenea avem : } a = 18.95 \text{ m.}$$

$$b = 6.85 \text{ m.}$$

Unghiul α_0 e definit de ecuația :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2b}{a} = \frac{13.70}{18.95} = 0.723$$

și deci :

$$\sin \alpha_0 = 0.585 ; \sin 2\alpha_0 = 0.949 ; \cos \alpha_0 = 0.811 ; \cotg \alpha_0 = 1.385$$

$$\alpha_0 = 0.625$$

Înălțimea arcului la nașteri este :

$$l_h = \frac{h_0}{\cos^2 \alpha} = \frac{0.700}{0.5334} \cong 1.30 \text{ m.}$$

Se găsește :

$$\alpha = 11.618 ; \dot{\beta} = 858.707 ; \dot{\gamma} = 63.202 ; \dot{\delta} = 374.501$$

$$z = 0.0252 ; z = 10.746, 217 ; \theta = 82.199 ;$$

$$\frac{1}{1+z} = 0.9754 ; \frac{\dot{\gamma}}{a} \frac{z}{1+z} = 0.1337 ; \frac{z}{\dot{\beta}} = 12.514$$

$$\frac{1}{a} \left[b \left(\alpha - \frac{\theta}{a} \right) + \frac{z-1}{z+1} \dot{\gamma} \right] = -0.880$$

Ecuatiunile (9) și (11) devin :

$$(9') \quad \begin{cases} H_{sin} = 0.9754 \frac{P a^2}{2 b} \\ Y_{sin} = 0.1337 \frac{P a^2}{2 b} \end{cases}$$

și :

$$(11') \quad \begin{cases} H_{dis} = 0.4877 \frac{P a^2}{2 b} \\ X_{dis} = 0.8045 P \\ Y_{dis} = -0.2200 \frac{P a^2}{2 b} \end{cases}$$

Putem prin urmare cu ajutorul acestor ecuațiuni să determinăm, împingerile orizontale și momentele de încadrare date de încărcarea accidentală uniform distribuită, în ipoteza că arcul e complet încărcat (Sistemul 9') sau în ipoteză că arcul e disimetric încărcat (sistemul 11').

Să ne ocupăm acum de sarcinile permanente. Dividem arcul în bolțari prin rosturi verticale așa ca greutatea lor să vie aplicată pe mediana stâlpilor care susțin platelagiul și determinăm astfel sarcinile permanente în tone :

$$P_1 = 10.2 \quad P_2 = 8.9 \quad P_3 = 7.8 \quad P_4 = 6.8 \quad P_5 = 6.4 \quad P_6 = 6.0$$

$$P_7 = 5.8 \quad P_8 = 5.2$$

care revin din fiecare bolțar și zid transversal unui metru de lățime de arc, P_1 fiind zidul cel mai apropiat de nașteri ; sarcinile :

$$P_1 = 2,1 \text{ t} \quad P_{10} = 2,8 \text{ t}$$

provin respectiv din un bolțar de lângă naștere și din o jumătate bolțar de lângă chee. În determinarea acestor sarcini greutatea trotoarului a fost repartizată pe întreagă lățimea bolții. S'a admis ca densitate : pentru betonul bolții 2.2 t/m³ pentru impietruire 2.0 t/m³ și pentru beton armat 2.4 t/m³.

Încărcarea permanentă fiind simetrică de o parte și de alta a cheii, ecuațiunile (8) devin :

$$\int_0^a M y \cos^2 \alpha dx = \left(\frac{1}{12} a h_0^2 + \delta \right) H + \gamma Y$$

$$\int_0^a M \cos^2 \alpha dx = \gamma H + a \gamma$$

iar dacă rezolvim în raport cu H și Y obținem :

$$(8') \quad \begin{cases} H = \frac{a \int_0^a M y \cos^2 \alpha dx - \gamma \int_0^a M \cos^2 \alpha dx}{\frac{a}{12} a h_0^2 + a \delta - \gamma^2} \\ Y = \frac{\left(\frac{a}{12} h_0^2 + \delta \right) \int_0^a M \cos^2 \alpha dx - \gamma \int_0^a M y \cos^2 \alpha dx}{\frac{a}{12} a h_0^2 + a \delta - \gamma^2} \end{cases}$$

sau efectuând calculele numerice și înlocuind integralele prin sume :

$$(8'') \quad \begin{cases} H = 0.03179 \sum_0^a M y \cos^2 \alpha \Delta x - 0.17294 \sum_0^a M \cos^2 \alpha \Delta x \\ Y = 1.02689 \sum_0^a M \cos^2 \alpha \Delta x - 0.17294 \sum_0^a M y \cos^2 \alpha \Delta x \end{cases}$$

Rămâne acum, pentru a determina pe H și Y să calculăm sumele din membrul al doilea.

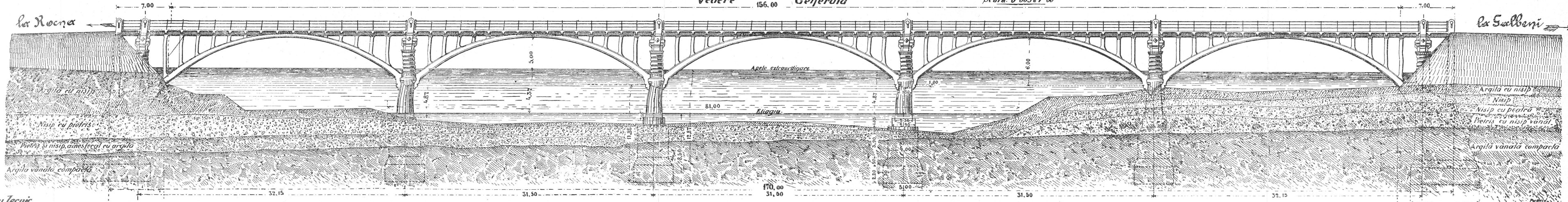
(Va urma)

ȘTEFAN N. MIREA

Pod definitiv boltit parabolic de 170^m lungime, cu 5 deschideri de câte 30^m, peste râul Siret la Rocna

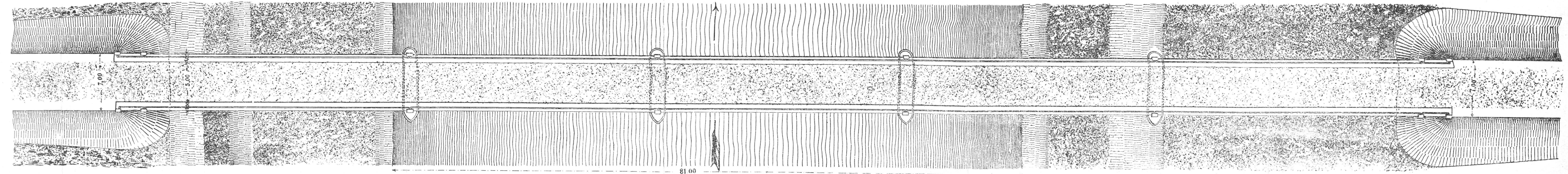
Ministerul Lucr. Publice
Direcțiunea
Serviciul de Poduri și Soseli

Vedere 156.00 Gejerulă Scara: 0^m005 = 1^m00



Director:
[Signature]
Seful Biroului Tehnic
Inginer:
[Signature]

Planul.

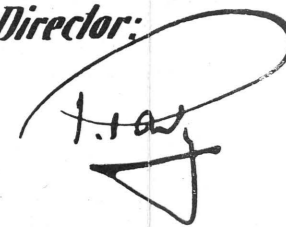



Inginer
Cavol. Grigorescu

Tip de pod definitiv
boltit parabolic, de 30,00, deschidere,
aplicat la podurile peste "Siret", de la
Ajudul-Vechiu, Răcățanu și Rocna.

Calculul elastic al arcului
Curbele de presiune.

Director:

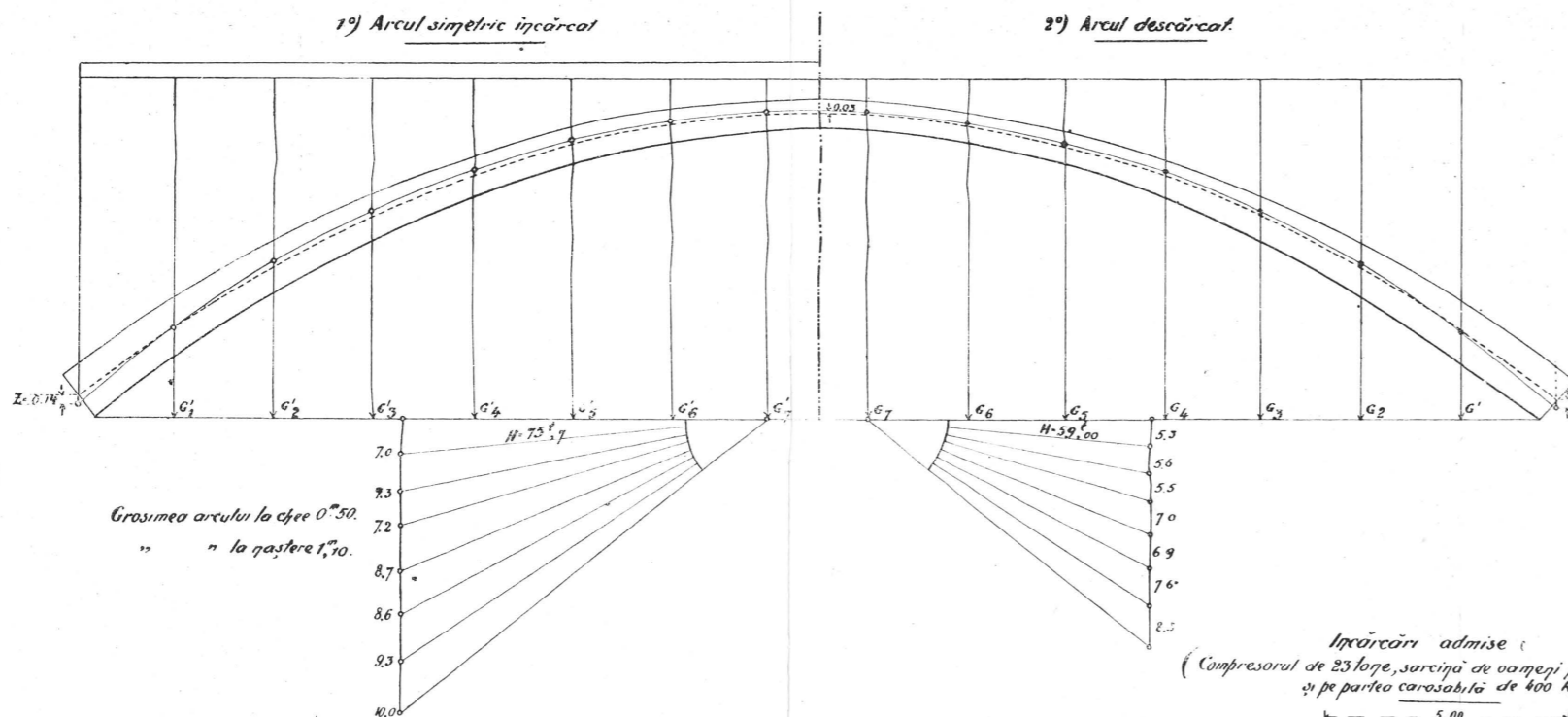


Șeful biroului tehnic
Inginer: 

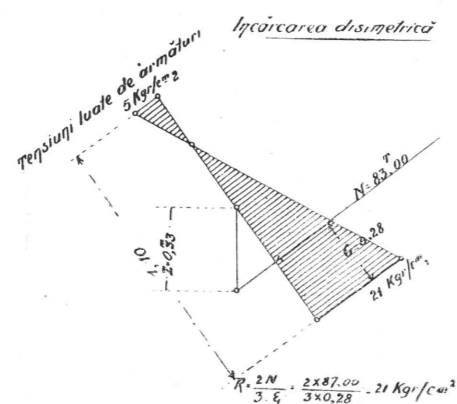
Inginer:



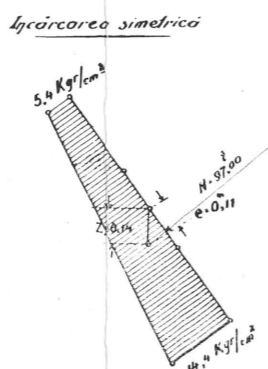
a) **Încărcări simetrice**



Travaliul materialului la rostul de la naștere



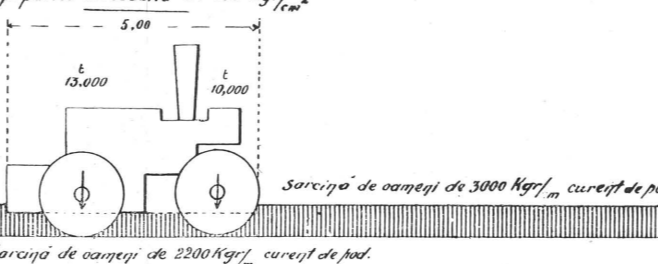
Încărcarea disimetrică



Încărcarea simetrică

$$R \cdot \frac{N}{S} \left(1 + \frac{e \cdot c}{b}\right) = \frac{97}{1,7} \left(1 + \frac{0,66}{1,70}\right) = \frac{16,4}{5,4}$$

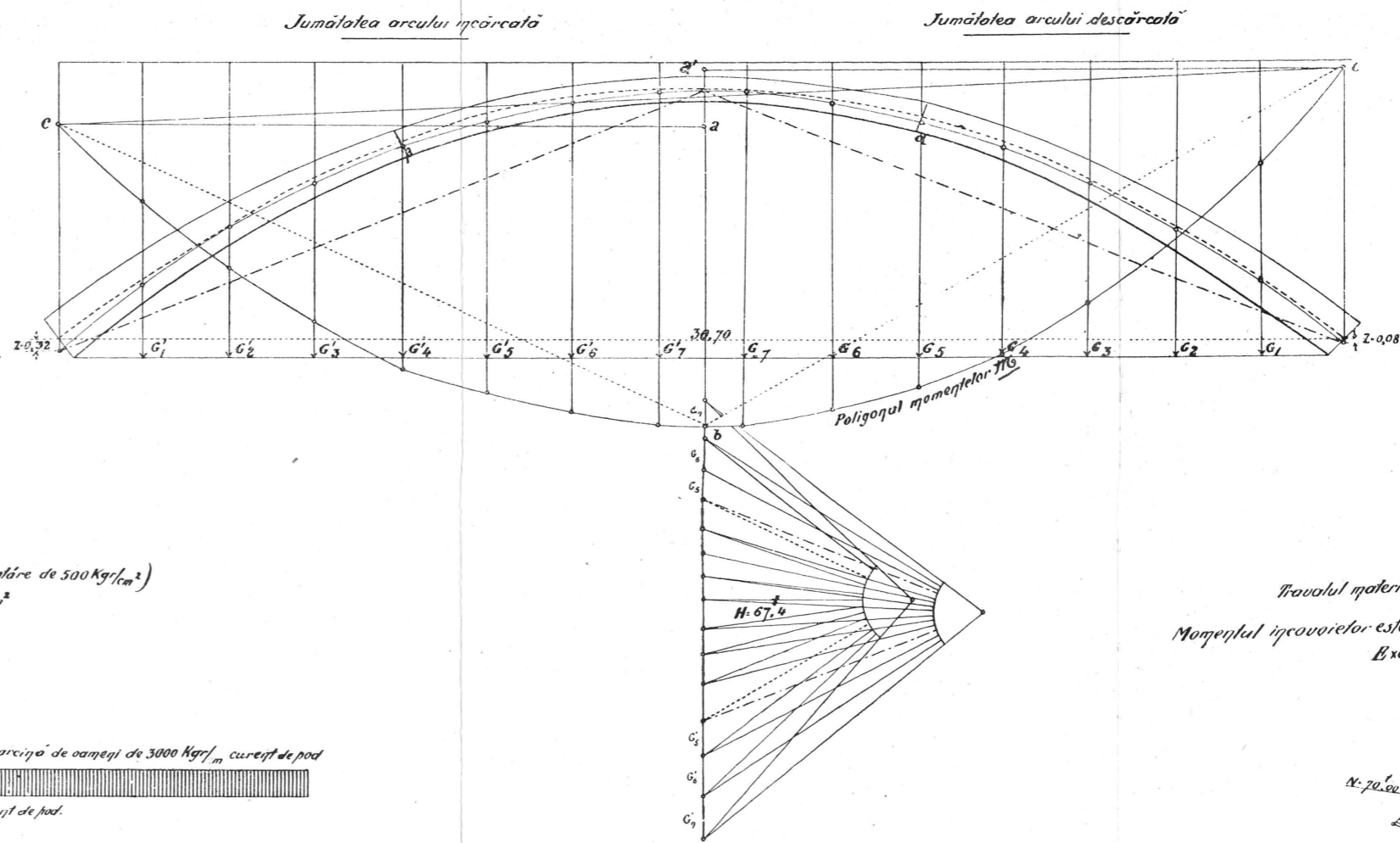
Încărcări admise
(Compressorul de 23 tone, sarcină de oameni petrolare de 500 Kg/cm² și pe partea carosabilă de 400 Kg/cm²)



Încărcări uniforme repartizate echivalente, obținute prin repartizarea greutatei compresorului după plan la 65° canavali, fiind considerat astfel, ca încălzirea arcului, să fie maximă.

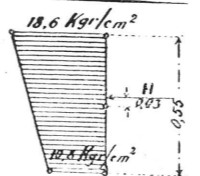
Se găsește $p = 850 \text{ kg/cm}$ curent de o porțiune de arc cu 1,00 lățime

b) **Încărcări disimetrice**



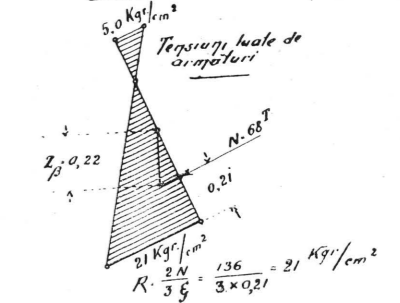
Travaliul materialului la rostul de la cheie

Încărcarea totală

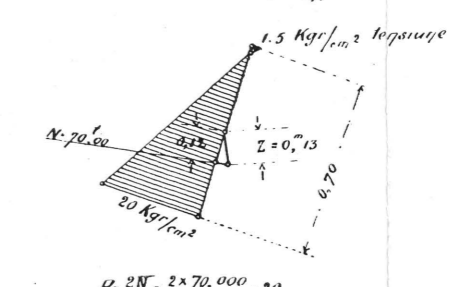


$$R \cdot \frac{N}{S} \left(1 + \frac{e \cdot c}{b}\right) = \frac{73,7}{0,55} \left(1 + \frac{0,18}{0,55}\right) = \frac{18,6}{10,8}$$

Travaliul materialului în rostul β (încărcare disimetrică)
Momentul încovoielilor este: $M = M_0 - H_y - X_n - Y = 312 - 67,4 \times 4,60 - 0,57 \times 7,17 - 15,2 - 15,37 \text{ T.M.}$
Depărtarea curbei de presiune de fibra mijlocie $Z_\beta = \frac{15,3}{67,4} = 0,22$



Travaliul materialului la rostul α (încărcare disimetrică)
Momentul încovoielilor este: $M = M_0 - H_y - X_n - Y = 355 - 67,4 \times 5,25 + 0,57 \times 5,12 - 13,2 - 9,07 \text{ T.M.}$
Eccentricitate $Z_\alpha = \frac{9,00}{67,4} = 0,13 \text{ m.}$



Travaliu admise
Rezistența betonului, la strivire: 25 Kg/cm²
" " la întindere: 5 Kg/cm²

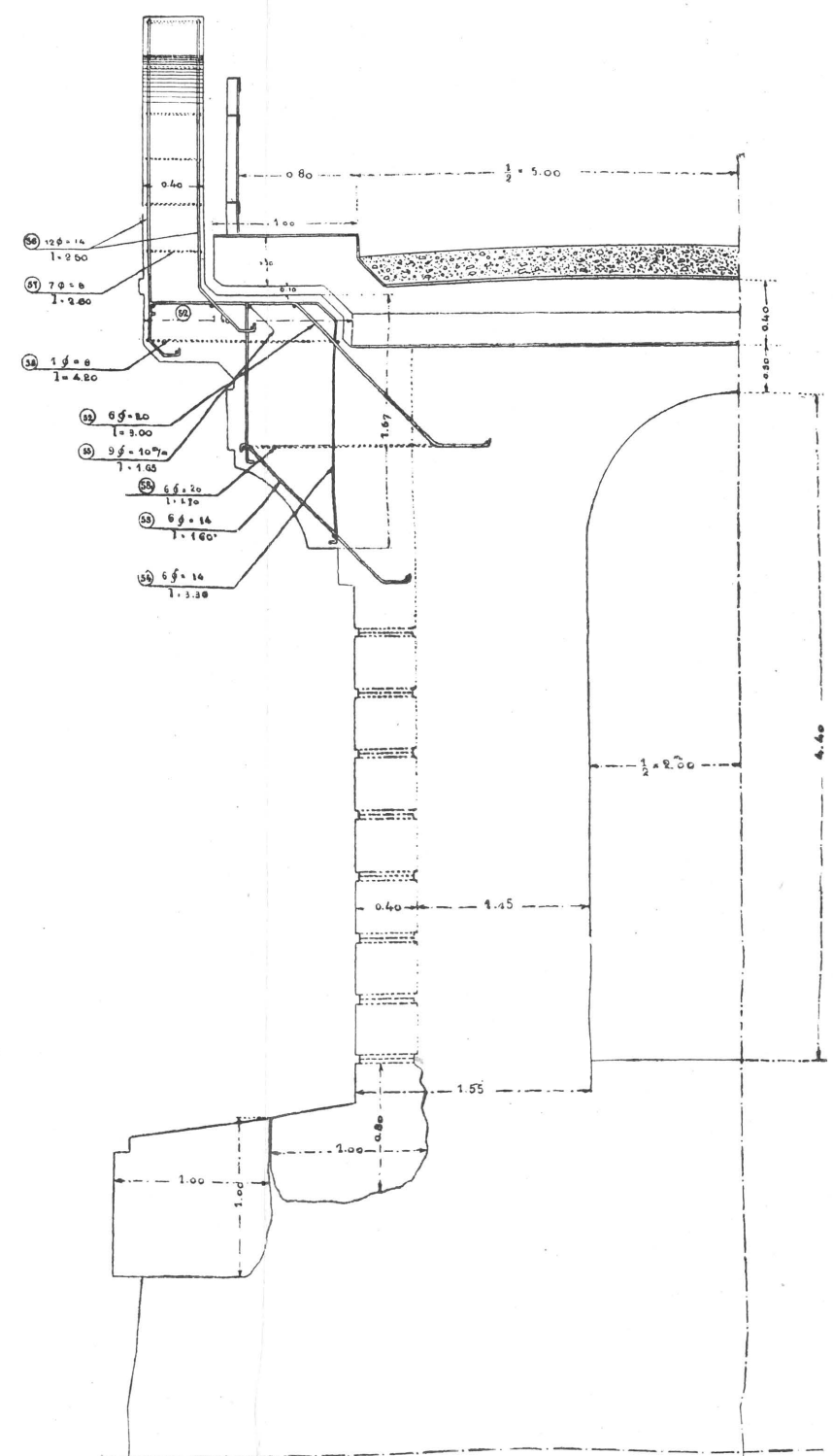
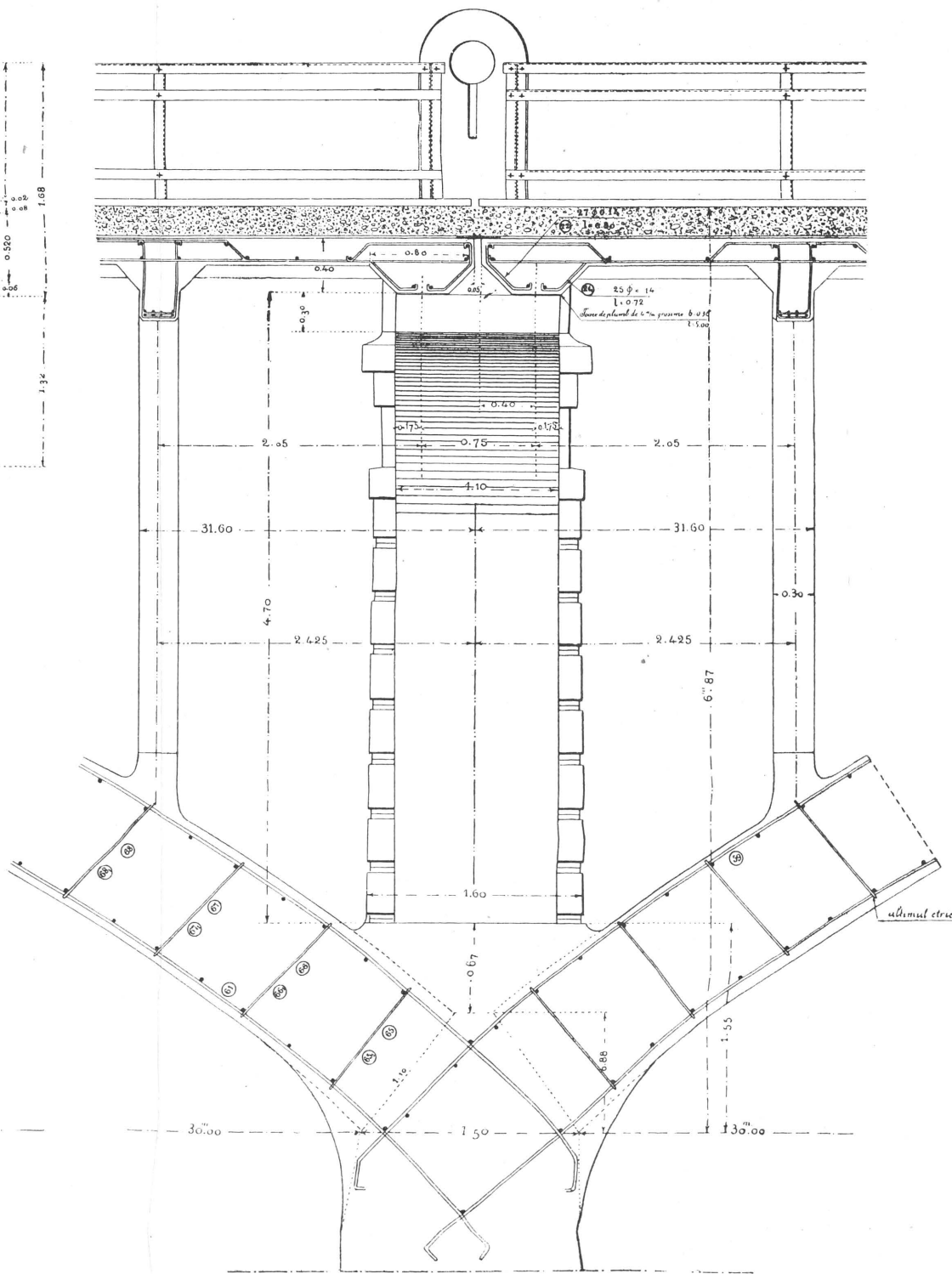
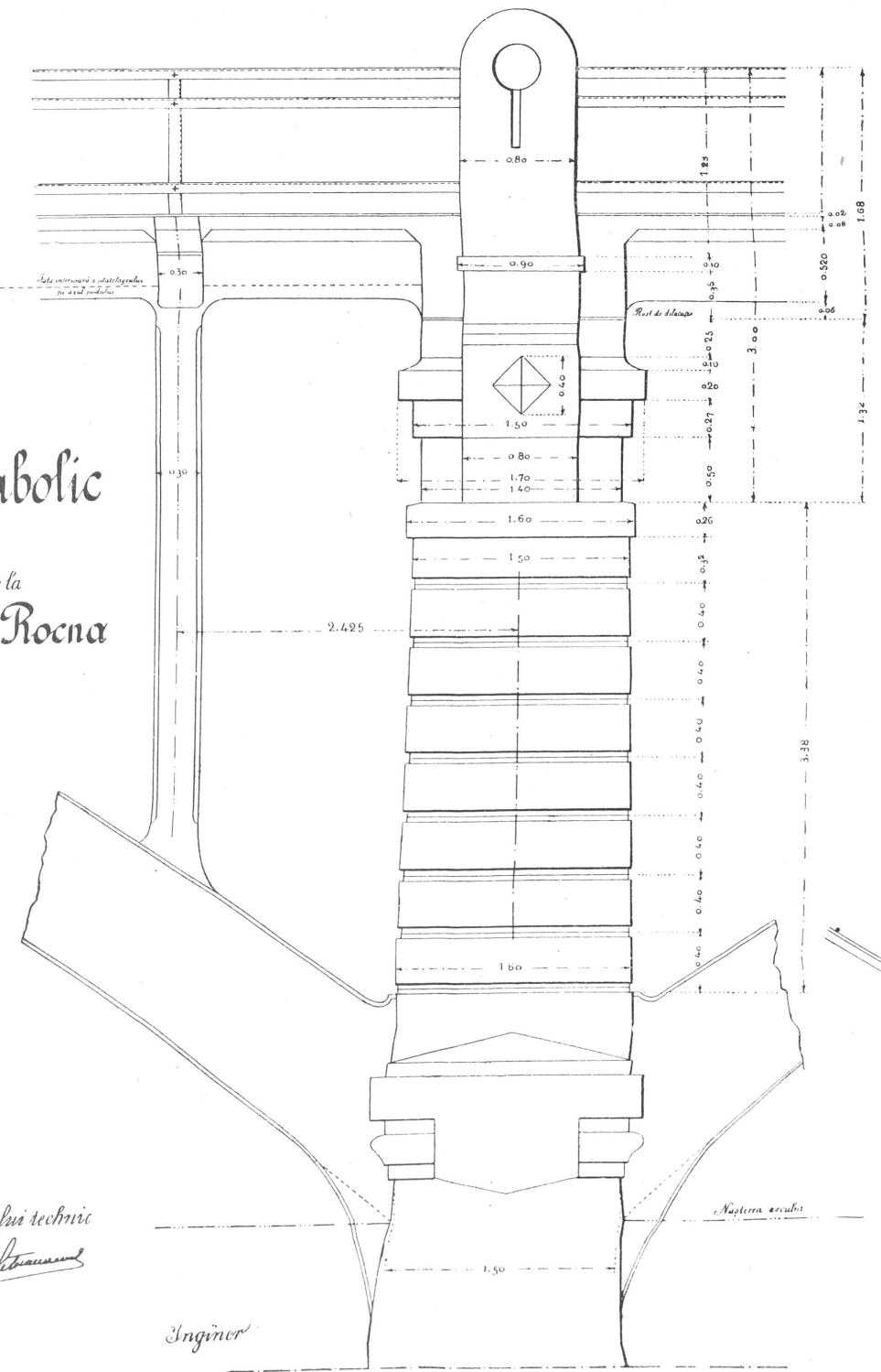
Scara lungimilor pentru arc $1 \text{ cm} = 1 \text{ metru}$
" forțelor $1 \text{ cm} = 10 \text{ tone}$
" momentelor $1 \text{ cm} = 50 \text{ T.M.}$
" travaliilor $1 \text{ cm} = 10 \text{ Kg/cm}^2$

Vederea stîlpului de pe pilă

Secțiunea longitudinală

Secție transversală prin pilă

Tip de pod boltit parabolic
 de 30^m.00 deschidere
 aplicat la podurile peste Siret de la
 Căminul Vechiu Răcătau, Rocna
 Scara 5 cm. = 1 metru



Director
[Signature]

Seful biroului tehnic
 Inginer
[Signature]

Inginer
[Signature]