

# GEOMETRIE

## ÎN SPAȚIU

PENTRU

CLASA VI-a SECUNDARĂ

DE

OVIDIU N. ȚINO

Doctor în Matematici, Profesor la Școala Politehnică din Timișoara  
și Seminarul Pedagogic Universitar din București

MARIA CH. THEOHARI

Profesoară la Liceul „Domnița Ileana” din  
București. Fostă Asistentă la Observatorul  
Astronomic din București

VASILE I. BĂDULESCU

Profesor la Liceul „Aurel Vlaicu” din  
București. Fost Asistent la Școala Poli-  
tehnică din București

*Carte aprobată de Onor. Minister al Instrucțiunii Publice  
în anul 1936.*

---

EDIȚIA I

---

EDITURA «CUGETAREA»

P. C. GEORGESCU-DELAFRAS

BUCUREȘTI IV, Strada Mătășari No. 23



# GEOMETRIE

## ÎN SPAȚIU

PENTRU

CLASA VI-a SECUNDARĂ

DE

OVIDIU N. ȚINO

Doctor în Matematici, Profesor la Școala Politehnică din Timișoara  
și Seminarul Pedagogic Universitar din București.

MARIA CH. THEOHARI

Profesoară la Liceul „Domnița Ileana” din  
București. Fostă Asistentă la Observatorul  
Astronomic din București

VASILE I. BĂDULESCU

Profesor la Liceul „Aurel Vlaicu” din  
București. Fost Asistent la Școala Poli-  
tehnică din București

*Carte aprobată de Onor. Minister al Instrucțiunii Publice  
în anul 1936.*

EDIȚIA I

3947

TAXA TIMBRULUI DIDACTIC DE 5%  
PENTRU ACEST MANUAL SĂ PLĂTIT  
DIRECT CASEI CORPULUI DIDACTIC  
CONFORM DECIZIUNEI N°17436/932

EDITURA „CUGETAREA”

P. C. GEORGESCU-DELAFRAS  
BUCUREȘTI IV — Strada Mătăsari 23

*Toate drepturile rezervate. Reproducerile fără autorizația autorilor vor fi urmărite conform legii.*



# GEOMETRIE IN SPAȚIU<sup>\*)</sup>

## CAPITOLUL I

### LINIA DREAPTĂ<sup>\*)</sup>

1. **Postulatul dreptei.** Să considerăm în spațiu două puncte A și B (fig. 1). Dintre toate liniile ce trec prin aceste două puncte, numai linia dreaptă este bine determinată.

Două linii drepte care trec prin aceleași două puncte A și B din spațiu coincid în toată întinderea lor.



Fig. 1

Avem astfel următorul

**Postulat.** Două puncte distincte din spațiu determină o dreaptă și numai una.

Dreapta determinată de cele două puncte A și B se înseamnă prin literele celor două puncte care o determină, de exemplu zicem dreapta AB (fig. 1).

O dreaptă din spațiu mai poate fi notată printr'o singură literă scrisă lângă dreaptă, de exemplu dreapta D (fig. 2).

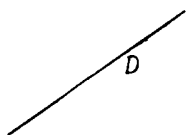


Fig. 3.

2. Fie dreapta AB determinată de punctele A și B ale spațiului (fig. 3). Să fixăm unul din cele două puncte, de exemplu punctul A, celălalt punct putând ocupa orice altă poziție B, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, ..... diferită

<sup>\*)</sup> În Geometria în spațiu vom folosi toate axiomele și postulatele introduse la începutul manualului de Geometrie plană de cl. V, manualul de față fiind continuarea Geometriei plane.

de punctul A. La fiecare poziție a punctului B, corespunde o poziție a dreptei AB în spațiu, ea schimbându-se cu poziția punctului B. Avem astfel dreptele AB,  $AB_1$ ,  $AB_2$ , ..... toate trecând prin punctul A.

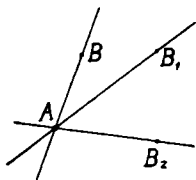


Fig. 3.

Rezultă dar că: *prin orice punct B al spațiului, distinct de punctul A, trece o dreaptă a punctului A, căci punctele A și B determină în acest caz poziția fiecărei drepte.*

3. Orice dreaptă din spațiu determină o direcțiune. Deoarece printr'un punct fix din spațiu trec o infinitate de drepte, zicem că prin orice punct al spațiului trec o infinitate de direcțiuni.

**Observare.** Vom vedea mai târziu, că infinitatea de direcțiuni ce trece printr'un punct oarecare al spațiului reprezintă toate direcțiunile din spațiu.

4. **Segment de dreaptă.** Fie dreapta D în spațiu (fig. 4). Fixăm pe ea două puncte A și B. Porțiunea dreptei D cuprinsă între punctele A și B se numește *segmentul de dreaptă*  $\overline{AB}$ .

Unul din cele două puncte se numește *origina*, celălalt se numește *extremitatea* segmentului.

Segmentul AB se înseamnă astfel:  $\overline{AB}$ .

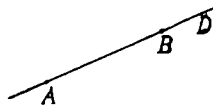


Fig. 4.

Dreapta AB, din care face parte segmentul  $\overline{AB}$ , se numește *dreapta sau suportul* segmentului.

Observăm că oricare din punctele A sau B poate fi luat ca origină a segmentului, celălalt punct rămânând extremitate. Astfel cele două puncte A și B determină pe dreapta D, două segmente  $\overline{AB}$  și  $\overline{BA}$ , care diferă unul de altul prin orientare.

Dacă pe direcțiunea reprezentată de dreapta D, hotărîm un sens pozitiv, de exemplu sensul dela A către B, (fig. 5), unul din cele două segmente, segmentul AB este orientat în același fel ca și dreapta. Acest segment este atunci pozitiv, celălalt segment este negativ, fiind orientat în sens contrar față de orientarea dreptei. De exemplu, dacă segmentul  $\overline{AB}$  este pozitiv,  $\overline{BA}$  este negativ. Rezultă că :

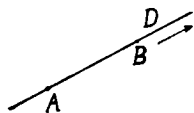


Fig. 5.

$$\overline{AB} = -\overline{BA},$$

sau

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0$$

5. **Observare.** Un segment de dreaptă, de exemplu  $\overline{AB}$ , (fig. 5), poate fi considerat ca drumul unui mobil în mișcare pe dreapta AB, dela punctul A la punctul B.

Punctul de plecare A este origina segmentului, punctul de oprire B este extremitatea lui, iar sensul mișcării, sensul segmentului.

6. **Semidreaptă.** Dacă pe dreapta D din spațiu fixăm punctul A (fig. 6), el împarte dreapta în două părți AM și AN. Fiecare din cele două părți se numește *semidreaptă*. Insemnăm cele două semidrepte astfel:  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AN}$ .

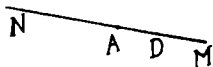


Fig. 6.

Fiecare din cele două semidrepte  $\overline{AM}$  și  $\overline{AN}$  poate fi considerată ca un segment de dreaptă cu origina în punctul A și extremitatea îndepărtată la infinit pe dreapta D.

Dacă segmentul a cărui extremitate s'a depărtat la infinit are orientarea dreptei, semidreapta rezultată are aceeași orientare ca dreapta; dimpotrivă dacă segmentul din care a rezultat semidreapta are orientarea opusă orientării dreptei, semidreapta are orientarea opusă dreptei.

Semidreptele  $\overline{AM}$  și  $\overline{AN}$  determinate de punctul A pe dreapta D au orientări opuse.

7. **Observare.** Pentru a lua o direcțiune trecând printr'un punct oarecare A din spațiu este de ajuns să luăm o semidreaptă cu origina în acel punct, care să reprezinte acea direcțiune.

8. **Operațiuni cu segmente.** Compararea segmentelor și operațiunile cu segmente în spațiu sunt acele cunoscute din Geometria plană.

9. **Măsura unui segment.** Măsurarea unui segment se face cu ajutorul unui segment unitate. Numărul rezultat, în cazul când operația este cu puțință, se numește *măsura* sau *lungimea* segmentului. De exemplu, dacă segmentul unitate  $u$  s'a cuprins de  $m$  ori în segmentul  $\overline{AB}$ , măsura segmentului  $\overline{AB}$  este  $m$ ; scriem:

$$\overline{AB} = m$$



Fig. 7

10. **Distanța a două puncte în spațiu.** Fie două puncte M și N în spațiu (fig. 7). *Depărtarea* sau *distanța* celor două puncte este lungimea segmentului  $\overline{MN}$  ce unește aceste două puncte.

## CAPITOLUL II

### PLANUL.

**11. Definițiuni.** Suprafața limitată pe care segmentul de dreaptă determinat de două puncte ale ei se așează în întregime, oricum ar fi luate cele două puncte, se numește porțiune de *suprafață plană* sau *porțiune de plan*.

Porțiuni de plan întâlnim la tot pasul. Fața unui ochiu de geam, fața unei mese, fața unui perete, fața unei ape liniștite, etc. sunt porțiuni de plan.

*Suprafața nelimitată care se bucură de proprietatea că dreapta determinată de două puncte oarecari ale ei aparține în întregime suprafeței, se numește suprafață plană sau prescurtat plan.*

Rezultă din această definițiune că o suprafață plană este nelimitată, ca și dreapta, în orice direcțiune pe care o conține.

**12.** Cele mai multe din porțiunile de suprafețe plane ce întâlnim în spațiu au formă de dreptunghi sau paralelogram. Cum astfel de porțiuni de plan se văd în perspectivă sub forma unui paralelogram, figurăm un plan printr'o porțiune a lui în forma unui paralelogram (fig. 8).

Planul figurat se notează cu o singură literă scrisă lângă el, De ex. planul P (fig. 8).

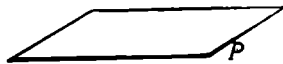


Fig. 8

Un plan mai poate fi figurat prin orice figură așezată în el: triunghi, cerc, etc.

Planul este o suprafață fără grosime. Este presupus opac. De aceea, orice figură așezată înapoia unui plan nu este văzută de un observator așezat în fața planului. Figura ascunsă de un plan se desenează punctat.

**13. Observare.** Planul fiind o suprafață nelimitată împarte spațiul în două regiuni, una de o parte, alta de cealaltă parte a lui. Astfel, planul P (fig. 9) împarte spațiul în regiunile I și II. O linie care unește un punct A din regiunea I, cu un punct B din regiunea II străbate neapărat planul într'un punct C al lui.

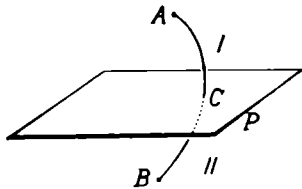


Fig. 9

Fig. 9

apărat planul într'un punct C al lui.

**14. Semiplan.** Fie planul P și dreapta D așezată în el (fig. 10). Dreapta D împarte planul P în două părți. Fiecare parte este numită *semiplan*.

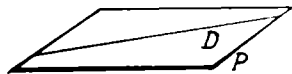


Fig. 10

Fiecare din semiplanele planului P este limitat de dreapta D.

**15. Determinarea planului.** Fie dreapta D în spațiu și un punct O exterior ei (fig. 11).

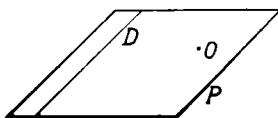


Fig. 11

Admitem fără demonstrație că prin dreapta D și punctul O exterior ei trece un plan și numai unul. Mai zicem că dreapta D și punctul O exterior ei determină un plan.

Proprietatea aceasta admisă fără demonstrație este un postulat.

Enunțăm deci următorul

**Postulat.** O dreaptă fixă din spațiu și un punct exterior ei determină un plan și numai unul.

**16.** Fie dreapta D și punctul O exterior ei (fig. 12).



Dreapta  $D$  și punctul  $O$  determină un plan  $P$  și numai acesta.

Dacă luăm un alt punct  $O'$  exterior dreptei  $D$  și neașezat în planul  $P$ , dreapta  $D$  și punctul  $O'$  determină un alt plan  $P'$ . Orice dreaptă  $O'M$ , care trece prin punctul  $O'$  și un punct oarecare  $M$  al dreptei  $D$ , înțeapă planul  $P$  în punctul  $M$  și nu aparține planului  $P$  (din cauza ipotezei făcute, că punctul  $O'$  este exterior planului  $P$ ).

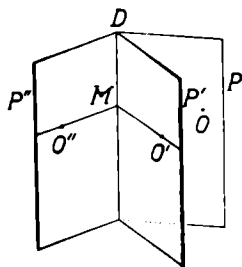


Fig. 12

Tot asemenea, dacă luăm un alt punct  $O''$  în afara dreptei  $D$  și neașezat în niciunul din planele  $P$  și  $P'$ , dreapta  $D$  și punctul  $O''$  determină un alt plan  $P''$  diferit de planele  $P$  și  $P'$ . Orice dreaptă  $O''M$  ce trece prin punctele  $O''$  și  $M$  nu aparține niciunuia din cele două plane.

Deoarece în spațiu putem lua o infinitate de puncte  $O', O'', O''', O''''$ ,... care să nu aparțină niciunuia din planele obținute mai înainte, urmează că există o infinitate de plane care să treacă prin dreapta  $D$ . Putem deci enunța următorul

**Postulat.** *Printr'o dreaptă în spațiu, trec o infinitate de plane.*

Această proprietate se mai poate enunța astfel :

*O dreaptă din spațiu nu determină poziția unui plan.*

Infinitatea de plane ce trec printr'o dreaptă din spațiu pot fi considerate și ca pozițiile în număr infinit ale aceluiași plan, care se rotește în jurul acelei drepte.

Deoarece printr'un punct al spațiului trec o infinitate de drepte și prin fiecare din aceste drepte trec o infinitate de plane, urmează că *printr'un punct al spațiului trec o infinitate de plane.*

**Exemple.** Pozițiile unei uși sau ferestre în mișcare

in jurul dreptei balamalelor, foile unei cărți deschise ce trec prin muchia cărții sunt plane ce trec prin aceeași dreaptă din spațiu.

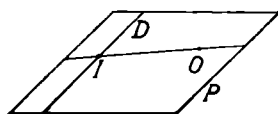


Fig. 13

**17. Observarea 1.** O dreaptă  $D$  și un punct  $O$  exterior ei determină în spațiu un plan  $P$  (fig 13).

Dacă pe dreapta  $D$  alegem un punct fix  $I$ , avem în planul  $P$  o altă dreaptă  $OI$  determinată de punctele  $O$  și  $I$ . Planul  $P$ , conținând dreptele  $D$  și  $OI$ , poate fi considerat ca determinat de aceste două drepte fixe din spațiu, care se taie în punctul  $I$ .

*Reciproc: Două drepte fixe  $D$  și  $D'$  din spațiu care se taie determină un plan.*

Fie dreptele  $D$  și  $D'$  care se intersectează în punctul  $I$  (fig. 14). Dreapta  $D'$  poate fi înlocuită prin punctul  $I$  și un alt punct  $O$  al ei. În acest caz, planul  $Q$  determinat de dreapta  $D$  și punctul  $O$  coincide cu planul  $P$ , determinat de dreptele  $D$  și  $D'$ .

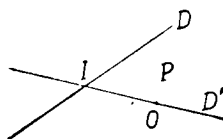


Fig. 14

În adevăr, dreapta  $OI$  aparține planului  $Q$  având două puncte  $O$  și  $I$  în acest plan. Orice altă dreaptă care trece prin punctul  $O$  și un punct  $M$  al dreptei  $D$  aparține și planului  $P$ , deoarece are două puncte  $O$  și  $M$  așezate în planul  $P$ . Urmează că orice dreaptă a planului  $Q$  aparține și planului  $P$ . Cele două plane  $P$  și  $Q$  sunt unul și același plan. Rezultă că postulatul determinării planului se mai poate enunța sub forma:

*Două drepte din spațiu care se taie determină un plan și numai unul.*

Două drepte care se taie se mai numesc *drepte concurente*.

**18. Observarea 2.** Fie planul  $P$  determinat de dreapta  $D$  și un punct  $C$  exterior ei (fig 15). Dacă luăm pe

dreapta D, două puncte A și B, dreapta D este determinată de punctele A și B. Planul P conține cele trei puncte A, B, C și poate fi considerat ca determinat de aceste trei puncte A, B, C, care nu sunt în linie dreaptă.

*Reciproc: Trei puncte A, B, C în spațiu, care nu sunt în linie dreaptă determină un plan (fig. 16).*

Două din aceste trei puncte, de ex. A și B, determină dreapta AB, care împreună cu punctul C determină planul P.

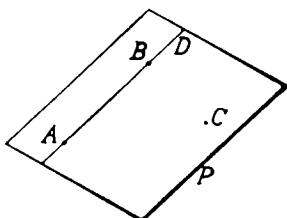


Fig. 15.

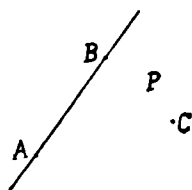


Fig. 16.

Planul P conține cele trei puncte date A, B, C. Orice dreaptă care se sprijină pe două din laturile triunghiului ABC, format din cele trei puncte, aparține planului P. Așa dar, planul P este bine determinat de cele trei puncte A, B, C.

Rezultă că postulatul determinării unui plan poate fi enunțat și sub forma :

*Trei puncte din spațiu care nu sunt în linie dreaptă determină un plan și numai unul.*

**19. Observarea 3.** Cele trei forme ale postulatului determinării unui plan le putem enunța și sub forma următoare :

a) *Dacă două plane au comune o dreaptă și un punct exterior dreptei, planele coincid în toată întinderea lor.*

b) *Dacă două plane au comune două drepte care se taie într'un punct (drepte concurente), ele coincid în toată întinderea lor.*

c) *Dacă două plane au comune trei puncte care nu sunt în linie dreaptă (puncte care nu sunt colineare), ele coincid în toată întinderea lor.*

**20. Observare importantă.** Prin definiție, două drepte paralele determină un plan, anume, planul în care se găsesc. Acest plan este determinat de una din ele și un punct al celeilalte.

**21. Generarea planului.** a) Să considerăm în spațiu o dreaptă  $D$  și un punct  $O$  exterior dreptei.



Fig. 17.

Dreapta  $D$  și punctul  $O$  determină un plan  $P$  (fig. 17).

Dreapta  $OM$  definită de punctul  $O$  și un punct oarecare  $M$

al dreptei  $D$  este conținută în planul  $P$ , având cele două puncte  $O$  și  $M$  în acest plan.

Presupunând punctul  $O$  fix și punctul  $M$  în mișcare pe dreapta  $D$ , dreapta  $OM$  se mișcă odată cu punctul  $M$  și descrie planul  $P$ , rotindu-se în jurul punctului  $O$ . Zicem că dreapta  $OM$  *naște* sau *generează planul*  $P$ . Din această cauză, dreapta  $OM$  poartă numele de *generatoare*. Dreapta  $D$ , pe care se sprijină generatoarea, se numește *directoare*.

Așa dar, o dreaptă care se mișcă în spațiu trecând printr'un punct fix și sprijininindu-se pe o altă dreaptă generează un plan în spațiu.

Acest fel de generare a planului se numește *generare conică*.

b) Fie dreptele  $D$  și  $D'$  din spațiu, care se taie în punctul  $I$  (fig. 18).

Dreptele concurente  $D$  și  $D'$  determină un plan  $P$  și numai acesta.

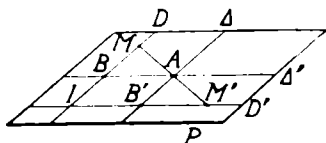


Fig. 18.

Luăm pe dreapta  $D$ , punctul  $M$  și pe dreapta  $D'$ , punctul  $M'$ . Fie  $B$  și  $B'$  respectiv mijloacele segmentelor  $\overline{IM}$  și  $\overline{IM'}$  și  $A$  mijlocul segmentului  $\overline{MM'}$  ce unește punctele  $M$  și  $M'$ .

Dreapta  $MM'$  este conținută în planul  $P$ , având două

puncte  $M$  și  $M'$  în acest plan. De asemenea, dreptele  $\Delta$   $\Delta'$  determinate respectiv de punctele  $A, B'$  și  $A, B$  sunt conținute (pentru același motiv) în planul  $P$ . Însă, după o proprietate a triunghiului, dreapta  $\Delta$  care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului  $MIM'$  este paralelă cu cea de a treia latură  $IM$  sau  $D$ . Tot astfel, dreapta  $\Delta'$  este paralelă cu dreapta  $D'$ .

Dacă punctul  $M$  este fix pe dreapta  $D$ , iar punctul  $M'$  se mișcă pe dreapta  $D'$ , dreapta  $\Delta$  se mișcă descriind planul  $P$ . Dreapta  $\Delta$  generează astfel planul  $P$ . Dacă însă punctul  $M'$  rămâne fix pe dreapta  $D'$  și punctul  $M$  se mișcă pe dreapta  $D$ , dreapta  $\Delta'$  paralelă cu  $D'$  se mișcă și generează planul  $P$ .

Rezultă că o dreaptă, care se mișcă rămânând paralelă cu ea însăși și sprijinindu-se pe o altă dreaptă, generează un plan în spațiu.

Dreapta care se mișcă este *generatoarea* planului, dreapta fixă este *directoarea* lui.

Acest fel de generare a planului este numită *cilindrică*.

**22. Figuri plane. Figuri în spațiu.** O reunire de puncte, linii, suprafețe, volum este o figură geometrică.

Dacă toate punctele unei figuri sunt în același plan, figura se numește *figură plană*.

Dacă punctele unei figuri nu sunt în același plan, figura se numește *figură în spațiu*.

Partea Geometriei care se ocupă cu proprietățile figurilor în spațiu și cu măsurarea întinderii lor poartă numele de *Geometrie în spațiu*.

### **Pozițiile relative ale unei drepte și unui plan în spațiu**

**23. Planul fiind suprafața nelimitată pe care luând oricum două puncte, dreapta determinată de ele este**

așezată pe acea suprafață, urmează că o dreaptă și un plan în spațiu pot avea una din următoarele trei pozițiuni :

a) *Dreapta are două puncte comune cu planul.* Zicem atunci că dreapta este conținută sau așezată în plan.

b) *Dreapta are un singur punct comun cu planul.* Zicem atunci că dreapta înțeapă sau intersectează planul.

c) *Dreapta n'are niciun punct comun cu planul.* Zicem că dreapta este paralelă cu planul.

**Exemple.** a) Dacă considerăm planul  $P$  al tavanului clasei și una din diagonalele lui,  $AB$ , avem exemplul unei drepte așezate într'un plan (fig. 19). În acest caz, toate punctele dreptei aparțin și planului. Dreapta și planul

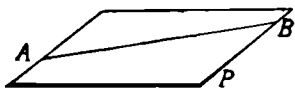


Fig. 19.

au o infinitate de puncte comune.

b) Planul  $P$  al feței unei mese și muchia  $D$  a unei rigle așezate înclinat pe fața mesei dau exemplul unei

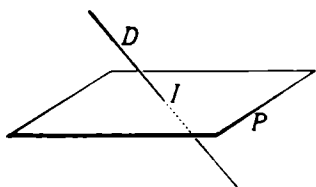


Fig. 20.

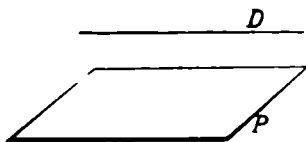


Fig. 21.

drepte care înțeapă un plan (fig. 19). Numai punctul  $I$  al dreptei  $D$  aparține și planului  $P$ .

c) O diagonală a tavanului și planul dușumelii reprezintă o dreaptă  $D$  din spațiu paralelă cu un plan  $P$  (fig. 21). Dreapta  $D$  nu are niciun punct comun cu



planul  $P$ , oricât ar fi prelungite. Mai zicem că dreapta  $D$  și planul  $P$  au un punct comun la infinit.

### Pozițiile relative ale unui punct și unui plan în spațiu

24. Un punct al spațiului poate avea față de un plan două poziții: a) *Punctul să fie în plan*; b) *Punctul să fie în afara (exterior) planului*.

a) Fie planul  $P$  în spațiu și două puncte  $A$  și  $B$  ale lui (fig. 22). Dreapta  $AB$  determinată de punctele  $A$  și  $B$ , având două puncte în plan este conținută în plan. Oricare punct  $M$  luat pe dreapta  $AB$  este în planul  $P$ .

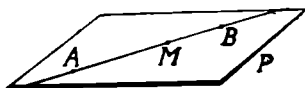


Fig. 22.

Rezultă că: *Pentru ca un punct să fie într'un plan este de ajuns ca el să fie pe o dreaptă din acel plan.*

b) Fie planul  $P$  și punctul  $N$  exterior lui (fig. 23). Un punct din spațiu este exterior planului, când nu se găsește pe nicio dreaptă a acelui plan.

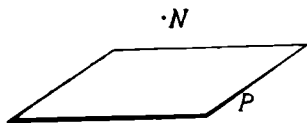


Fig. 23.

**Exemple.** Punctul din colțul unei bănci este un punct exterior planului dușumelii sau planului oricărui perete. Punctul luat pe o dreaptă trasă pe fața băncii este un punct din planul feței băncii.

25. **Construcția unui punct care să aparțină unui plan dat.**

a) *Planul este determinat de o dreaptă și un punct exterior ei.* Fie planul  $P$  determinat de dreapta  $D$  și punctul  $O$  exterior ei (fig. 24). Pentru a lua un punct în planul  $P$ , care să nu coincidă cu punctul  $O$  și să nu fie pe dreapta  $D$ , e nevoie să-l luăm pe altă dreaptă așezată în planul  $P$ .

Un punct oarecare  $A$  de pe dreapta  $D$  determină cu punctul  $O$ , dreapta  $OA$ , care aparține planului  $P$  având două puncte în acest plan. Orice punct  $M$  luat pe dreapta  $OA$  este un punct al planului  $P$  și răspunde problemei propuse.

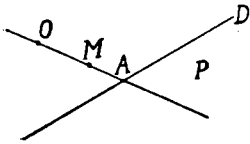


Fig. 24.

b) *Planul este determinat de două drepte concurente.* Fie planul  $P$  determinat de dreptele  $D$  și  $D'$  concurente în punctul  $O$  (fig. 25).

Să luăm un punct al planului  $P$ , care să nu fie pe niciuna din cele două drepte  $D$  și  $D'$  și să nu coincidă cu punctul  $O$ . El trebuie deci luat pe o dreaptă a planului  $P$  diferită de  $D$  și  $D'$ .

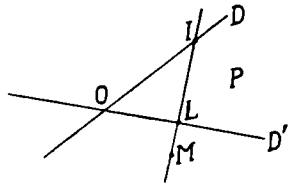


Fig. 25.

Pentru aceasta, luăm un punct oarecare  $I$  pe dreapta  $D$  și un punct oarecare  $L$  pe dreapta  $D'$ . Dreapta  $IL$  aparține planului  $P$ , având cele două puncte  $I$  și  $L$  în acest plan.

Orice punct  $M$  al dreptei  $IL$  este în planul  $P$  și răspunde problemei.

c) *Planul este determinat de trei puncte care nu sunt în linie dreaptă.*

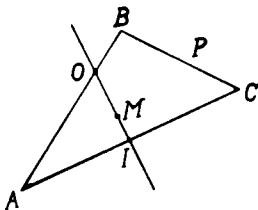


Fig. 26.

Fie planul  $P$  determinat de punctele  $A, B, C$  ale spațiului, care nu sunt în linie dreaptă (fig. 26).

Să luăm un punct al planului  $P$ , diferit de punctele  $A, B, C$  și care să nu fie pe niciuna din laturile triunghiului  $ABC$ .

Observăm că orice punct al oricăreia din dreptele  $AB, BC, AC$  aparține planului  $P$ . Luăm deci pe două din laturile triunghiului  $ABC$ , respectiv punctele  $O$  pe  $AB$  și

I pe AC. Dreapta  $OI$  având două puncte  $O$  și  $I$  așezate în planul  $P$  este așezată în acest plan.

Oricare punct  $M$  al dreptei  $OI$  este un punct al planului  $P$  și răspunde problemei.

### Pozițiile relative a două plane în spațiu.

**26. Teoremă.** Două plane care au un punct comun au o dreaptă comună, care trece prin acest punct.

Fie planele  $P$  și  $Q$  care trec prin același punct  $A$  din spațiu, adică au punctul  $A$  comun (fig. 27).

Figurăm planul  $P$  prin paralelogramul  $P$  conținând punctul  $A$  și planul  $Q$  prin două drepte  $BC$  și  $DE$  concurente în  $A$ .

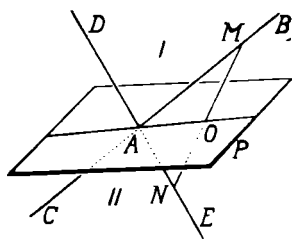


Fig. 27.

Să arătăm că planele  $P$  și  $Q$  au o dreaptă comună care trece prin punctul  $A$ .

Planul  $P$  fiind nelimitat împarte spațiul în două regiuni: regiunea I și regiunea II. Luăm pe una din dreptele planului  $Q$ , de ex. pe  $BC$ , punctul  $M$  în regiunea I și pe dreapta  $DE$  a aceluiași plan  $Q$ , punctul  $N$  în regiunea II. Punctele  $M$  și  $N$  determină dreapta  $MN$  așezată în planul  $Q$ , diferită de dreptele  $BC$  și  $DE$ . Unind două puncte de o parte și de alta a planului  $P$ , dreapta  $MN$  străbate acest plan într'un punct  $O$ .

Punctul  $O$  din planul  $P$  se află și în planul  $Q$ , fiind un punct al dreptei  $MN$  din acest plan. Așa dar, planele  $P$  și  $Q$  au pe lângă punctul  $A$  comun și punctul  $O$  comun. Având două puncte comune  $A$  și  $O$ , urmează că au comună dreapta  $AO$ , determinată de aceste două puncte.

Planele  $P$  și  $Q$  nu au niciun alt punct comun în afara dreptei  $AO$ , căci altfel ar coincide.

Dreapta  $AO$  comună celor două plane se numește

*dreapta de intersecție* a lor. Două plane care se taie se mai numesc *plane secante*.

**Exemple.** Planele a doi pereți ai clasei care trec prin același vârf al ei se taie după o dreaptă (muchie) care trece prin același vârf.

**27. Observarea 1.** Dacă rotim planul Q în jurul dreptei AO, până când un punct I al lui, exterior dreptei AO ajunge în planul P, planul Q coincide în această poziție cu planul P, deoarece au comune dreapta AO și punctul I exterior ei.

**28. Observarea 2.** În teorema de mai sus, am considerat două plane P și Q care aveau un punct comun.

Dacă considerăm două plane din spațiu care n'au niciun punct comun, cum sunt planele tavanului și planul dușumelei clasei, planele a două fețe opuse ale penarului, etc., zicem că cele două plane sunt *paralele*.

Rezultă dar că două plane în spațiu pot avea trei poziții unul față de altul :

- a) *Plane care coincid.*
- b) *Plane care se intersectează.*
- c) *Plane paralele.*

### **Pozițiile relative a două drepte în spațiu**

**29.** Două drepte pot avea în spațiu diferite pozițiuni una față de alta.

1. Să observăm două muchii ale unui perete al clasei, care se întâlnesc într'un vârf sau o muchie a unui perete și o diagonală a lui. În fiecare caz, dreptele considerate sunt așezate în același plan și se taie una cu alta (drepte concurente).

Observând acum două muchii verticale ale aceluiași perete sau două muchii opuse ale dușumelei, vedem că sunt drepte situate în același plan, paralele.

Conchidem că două drepte așezate în același plan

sunt sau *concurente* (se intersectează), sau *paralele* (n'au niciun punct comun).

Să figurăm acum aceste două pozițiuni a două drepte în spațiu.

Fie planul  $P$  și două drepte  $D$  și  $D'$  ale lui, care se taie în punctul  $I$  (fig. 28). Aceste două drepte sunt așezate în același plan, concurente.

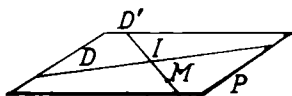


Fig. 28.

Fie acum planul  $Q$  și dreptele  $\Delta$  și  $\Delta'$  așezate în acest plan (fig. 29). Dacă dreptele  $\Delta$  și  $\Delta'$  n'au niciun punct comun, ele sunt drepte așezate în același plan, paralele.



Fig. 29.

**30. Observare.** Să considerăm un plan  $P$  și două drepte ale lui  $D$  și  $D'$  (fig. 29). Una din drepte, de ex. dreapta  $D$ , cu un punct  $M$  al celeilalte drepte  $D'$  determină planul  $P$ , oricare ar fi punctul  $M$  de pe dreapta  $D'$ .

Prin urmare, dacă presupunem că punctul  $M$  lunecă pe dreapta  $D'$ , planul determinat de acest punct și de dreapta  $D$  este totdeauna același.

2. Să considerăm acum una din muchiile tavanului clasei, colțul opus ei și muchia verticală trecând prin acest punct. Să însemnăm muchia tavanului cu  $D$  și muchia verticală cu  $AB$  (fig. 30). Zicem că muchia  $D$  și muchia  $AB$  sunt drepte care nu sunt așezate în același plan.

În adevăr, muchia  $D$  și punctul  $A$  exterior ei determină planul  $P$  al tavanului clasei. Considerând însă muchia  $D$  și punctul  $B$ , planul  $P'$  determinat de ele este așezat între planul tavanului și planul dușumelei.

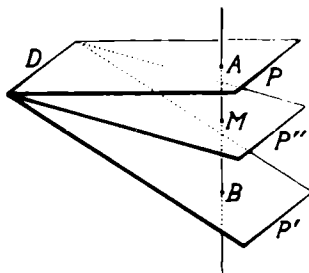


Fig. 30.

Un plan trecând prin muchia  $D$ , care ar coincide cu

planul tavanului, ca să-l aducem să treacă prin punctul B, trebuie să-l rotim în jurul muchiei D.

Planul P'' care trece prin muchia D și prin mijlocul M al muchiei AB este diferit de planul tavanului și de planul determinat de muchia D și punctul B.

Prin urmare, muchia D determină cu fiecare punct al muchiei verticale AB totdeauna alt plan. Cele două drepte D și AB nu pot fi așezate în niciunul din planele determinate de una din ele cu fiecare punct al celeilalte. Astfel de drepte le numim *drepte neașezate în același plan*.

Așa dar, pozițiile relative a două drepte din spațiu se pot rezuma în tabloul următor :

<i>Perechi de drepte</i>	{	<i>Așezate în același plan</i>	{	<i>Concurente.</i> <i>Paralele.</i>
		<i>Neașezate în același plan</i>		

## DREPTE PARALELE. DREPTE PARALELE CU PLANUL

Știm că două drepte dintr'un plan, care n'au nici un punct comun sunt *paralele*. Am văzut apoi că o dreaptă din spațiu poate să nu aibă niciun punct comun cu un plan dat. *Dreapta este atunci paralelă cu planul*.

**31. Construcția unei drepte paralele cu o dreaptă dată în spațiu.**

a) Fie în spațiu dreapta D și punctul O exterior ei (fig. 31). Să ducem prin punctul O, o paralelă la dreapta D. Dreapta D și punctul O exterior ei determină, după cum știm, un plan P și numai acesta.

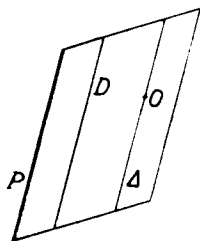


Fig. 31.

În planul P, construim prin punctul O (după cum știm din Geometria plană), o dreaptă Δ paralelă cu dreapta D și numai aceasta, după postulatul lui Euclid.



b) Fie două drepte  $D$  și  $D'$  în spațiu, concurente în punctul  $I$  (fig. 32).

Să ducem prin punctul  $M$  al dreptei  $D$ , o paralelă la dreapta  $D'$ .

Pentru aceasta, luăm un punct oarecare  $N$  pe dreapta  $D'$  și ducem segmentul  $\overline{MN}$ . Fie  $P$  mijlocul segmentului  $\overline{MN}$ . Pe dreapta  $IP$ , luăm segmentul  $\overline{PQ} = \overline{IP}$ . Dreapta  $MQ$  determinată pe punctele  $M$  și  $Q$  este în planul dreptelor  $D$  și  $D'$ , paralelă cu  $D'$  și trece prin  $M$ , deoarece patrulaterul  $IMQN$  este un paralelogram, diagonalele lui tăindu-se în părți egale.

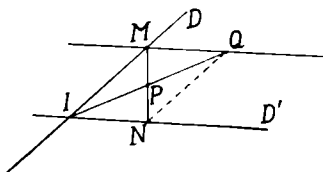


Fig. 32.

În planul determinat de dreptele concurente  $D$  și  $D'$ , prin punctul  $M$  exterior dreptei  $D'$  nu se poate duce la această dreaptă decât o singură paralelă, după postulatul lui Euclid.

### Construirea unei drepte paralele cu un plan dat.

32. Să considerăm planul  $P$  și punctul  $A$  exterior lui (fig. 33). Să construim prin punctul  $A$  o dreaptă paralelă cu planul  $P$ .

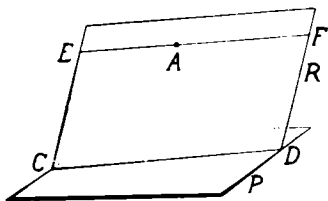


Fig. 33.

o dreaptă  $EF$  paralelă la  $CD$  și numai aceasta, după cum știm din Geometria plană (postulatul lui Euclid).

*Dreapta  $EF$  este paralelă cu planul  $P$ .*

În adevăr, dacă dreapta  $EF$  ar avea un punct comun cu planul  $P$ , acest punct ar fi comun dreptelor  $EF$  și  $CD$ , deoarece dreapta  $EF$  se găsește în planul  $R$  și

toate punctele comune planelor R și P sunt pe dreapta CD. Dreapta EF fiind paralelă cu dreapta CD nu are niciun punct comun cu ea; deci ea n'are niciun punct comun cu planul P. Dreapta EF este așa dar, paralelă cu planul P.

Enunțăm deci următoarea

**Teoremă.** *Dacă o dreaptă din spațiu este paralelă cu o dreaptă dintr'un plan, dreapta este paralelă cu acel plan.*

**33. Teoremă.** *Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, prin oricare punct al planului se poate duce o dreaptă paralelă cu dreapta dată.*

Fie planul P și dreapta AB paralelă cu el (fig. 34).

Să luăm un punct oarecare O al planului P.

Observăm că dreapta AB și punctul O în afara ei determină planul R. Planele P și R având punctul O comun au o dreaptă comună care trece prin punctul O; fie această dreaptă OI.

Dreapta OI este paralelă cu dreapta AB.

În adevăr, dreapta OI este în același plan R cu dreapta AB. Dreapta OI nu are niciun punct comun cu AB, căci dacă ar avea, acesta ar fi un punct comun dreptei AB și planului P. Știm însă că dreapta AB n'are nici un punct comun cu planul P. Prin urmare, dreapta OI este paralelă cu dreapta AB, ceea ce trebuia demonstrat.

**34. Teoremă.** Din teorema precedentă deducem: *Dacă o dreaptă AB este paralelă cu un plan P, paralela dusă printr'un punct oarecare O al planului la dreapta AB este situată în planul P* (fig 34).

În adevăr, paralela la dreapta AB, care trece prin punctul O trebuie să se găsească în planul R determi-

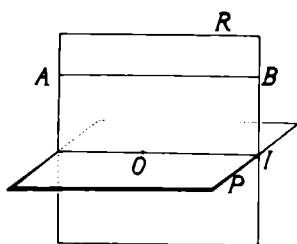


Fig. 34

nat de dreapta  $AB$  și punctul  $O$ . Planul  $R$  taie planul  $P$  după dreapta  $OI$ , care este paralelă cu dreapta  $AB$ , cum am arătat în teorema precedentă. Iar în planul  $R$ , prin punctul  $O$  nu putem duce decât dreapta  $OI$  paralelă cu  $AB$  (după postulatul lui Euclid). Prin urmare, prin punctul  $O$  nu se poate duce altă paralelă cu  $AB$ , decât dreapta  $OI$ , care este conținută în planul  $P$ .

**35. Teoremă.** Fie în spațiu dreptele paralele  $D$  și  $D'$  și planul  $P$ , care taie pe una din ele, de exemplu dreapta  $D$ , în punctul  $A$  (fig. 35).

Să arătăm că planul  $P$  taie și dreapta  $D'$ .

Dreptele paralele  $D$  și  $D'$  sunt prin definiție în același plan  $R$ . Acest plan  $R$  are punctul  $A$  comun cu planul  $P$ . Urmează că planul  $R$  taie planul  $P$  după o dreaptă  $AM$  ce trece prin punctul  $A$ . Însă în planul  $R$ , avem dreptele paralele  $D$  și  $D'$  și dreapta  $AM$ , care taie dreapta  $D$ . După o proprietate din Geometria plană, știm că dreapta  $AM$  taie și dreapta  $D'$  într'un punct  $A'$  al ei. Punctul  $A'$  este deci un punct comun planului  $P$  și dreptei  $D'$ , adică planul  $P$  taie dreapta  $D'$ .

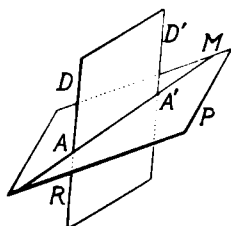


Fig. 35

Dreapta  $D'$  nu poate avea alt punct comun cu planul  $P$  în afară de  $A'$ , căci ar coincide cu dreapta  $AA'$  și n'ar mai fi paralelă cu dreapta  $D$ .

Urmează că putem enunța teorema:

*Dacă două drepte sunt paralele, orice plan care taie pe una din ele taie și pe cea de a doua.*

**36. Teoremă.** Să considerăm în spațiu două drepte paralele  $AB$  și  $CD$  și punctul  $M$  exterior lor (fig. 36).

Dreapta  $AB$  și punctul  $M$  exterior ei determină un plan  $P$ . Tot astfel, dreapta  $CD$  și punctul  $M$  determină un alt plan  $R$ . Planele  $P$  și  $R$  având comun punctul  $M$  au o dreaptă comună  $MN$ , care trece prin punctul  $M$ .

Să arătăm că dreapta  $MN$  este paralelă cu fiecare din dreptele  $AB$  și  $CD$ .

Observăm că dreapta  $CD$  fiind paralelă cu dreapta  $AB$  din planul  $P$  este paralelă cu planul  $P$  (32).

De asemenea, dreapta  $AB$  este paralelă cu planul  $R$ , fiind paralelă cu dreapta  $CD$  din acest plan.

Dacă prin punctul  $M$  al planului  $P$  ducem o paralelă  $MN'$  cu dreapta  $CD$ , ea este cuprinsă în planul  $P$ , după teorema precedentă. Această dreaptă  $MN'$  fiind paralelă cu dreapta  $CD$  este cuprinsă cu  $CD$  în același plan, care este determinat de  $CD$  și punctul ei  $M$ , adică în planul  $R$ . Fiind cuprinsă în ambele plane  $P$  și  $R$ , paralela  $MN'$  dusă este

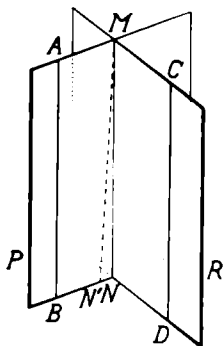


Fig. 36

intersecția  $MN$  a planelor  $P$  și  $R$ .

Avem așa dar teorema:

*Intersecția a două plane secante care trec prin două drepte paralele este paralelă cu fiecare din cele două drepte.*

**37. Teoremă.** *Două drepte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.*

Fie dreapta  $AB$  din spațiu și două puncte diferite  $C$  și  $E$  în afara dreptei (fig. 37). Dreapta  $AB$  și punctul  $C$  determină planul  $P$ , în care ducem dreapta  $CD$  paralelă cu dreapta  $AB$ . De asemenea, dreapta  $AB$  și punctul  $E$  determină planul  $R$ , în care ducem dreapta  $EF$  paralelă cu dreapta  $AB$ .

Dreptele  $CD$  și  $EF$  paralele cu dreapta  $AB$  sunt paralele între ele.

Observăm că dreapta  $EF$  fiind paralelă cu dreapta  $AB$  din planul  $P$  este paralelă cu planul  $P$ . Tot astfel, dreapta  $CD$  fiind paralelă

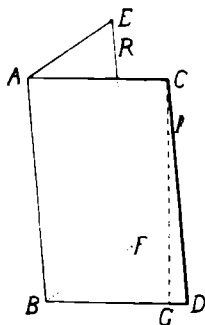


Fig. 37

cu dreapta AB din planul R este paralelă cu planul R.

Să ducem acum prin punctul C al planului P, dreapta CG paralelă cu dreapta EF. Dreapta CG este cuprinsă în planul P (35). Ea fiind paralelă cu dreapta EF din planul R, planul P ce trece prin dreapta CG taie planul R după dreapta AB paralelă cu dreapta CG.

Așa dar, în planul P avem prin același punct C două drepte CD și CG paralele la dreapta AB, ceea ce este absurd. Urmează că dreapta CG, dusă paralelă la dreapta EF coincide cu CD, adică dreapta CD este paralelă cu dreapta EF, c. c. t. d.

**Exemplu.** Două muchii verticale ale clasei, care nu aparțin aceluiași perete, paralele cu o a treia muchie sunt paralele între ele.

**38. Observarea 1.** Această teoremă din Geometria în spațiu este asemănătoare cu teorema a două drepte paralele cu o a treia dreaptă din același plan. Deci, în general: *Două drepte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.*

**39. Observarea 2.** Toate dreptele din spațiu paralele cu una din ele reprezintă o singură *direcțiune*. În spațiu, avem un număr nelimitat de direcțiuni. Pentru a reprezenta una din aceste direcțiuni este destul să ducem una din dreptele cu aceeași direcțiune.

### Unghiuri cu laturi paralele în spațiu

**40. Teoremă.** Fie unghiurile ABC și DEF cu laturile respectiv paralele și amândouă ascuțite (fig. 38).

Să arătăm că unghiurile ABC și DEF sunt egale.

Să luăm pe semidreptele paralele BA și ED respectiv, segmentele egale  $\overline{BM}$  și  $\overline{EN}$  și pe semidreptele BC și EF respectiv, segmentele egale  $\overline{BP}$  și  $\overline{ER}$ . Ducem segmentele  $\overline{BN}$  și  $\overline{PR}$ . Patrulaterelor BMNE și BPRE având câte două laturi opuse paralele și egale, sunt paralelograme. Urmează că în primul paralelogram MN și BE, în cel de

al doilea,  $\overline{PR}$  și  $\overline{BE}$  sunt paralele și egale ca laturi opuse în paralelogram.

Dreptele  $MN$  și  $PR$ , paralele cu dreapta  $BE$  sunt paralele între ele, iar segmentele  $\overline{MN}$  și  $\overline{PR}$  amândouă egale cu  $\overline{BE}$  sunt egale între ele. Rezultă că ducând segmentele  $\overline{MP}$  și  $\overline{NR}$ , patrulaterul format  $MNRP$  este un paralelogram, având laturile opuse  $\overline{MN}$  și  $\overline{PR}$  paralele și egale. Segmentele  $\overline{MP}$  și  $\overline{NR}$  sunt deci egale ca laturi opuse ale aceluiași paralelogram.

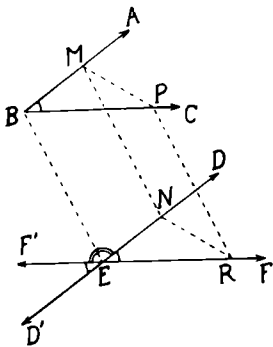


Fig. 38.

În acest caz, triunghiurile  $BPM$  și  $ERN$ , care au laturile respectiv egale, sunt egale. Unghiurile  $MBP$  ( $ABC$ ) și  $NER$  ( $DEF$ ) opuse laturilor egale  $\overline{MP}$  și  $\overline{NR}$  sunt egale.

Așa dar: *Două unghiuri ascuțite cu laturile respectiv paralele sunt egale.*

**Observarea 1.** În cazul când unghiurile  $ABC$  și  $DEF$  cu laturile respectiv paralele sunt amândouă obtuze, proprietatea este adevărată și demonstrația ei se face în același fel.

**Observarea 2.** Unghiurile considerate  $ABC$  și  $DEF$  au laturile respectiv paralele și îndreptate în același sens.

Dacă avem două unghiuri  $ABC$  și  $D'EF'$  cu laturile respectiv paralele și îndreptate în sensuri contrare (fig. 38), unghiurile sunt de asemenea egale.

În adevăr, unghiul  $D'EF'$  este egal cu unghiul  $DEF$  fiind opus la vârf cu unghiul  $D'EF'$ ; iar unghiul  $DEF$  este egal cu unghiul  $ABC$  având laturile respectiv paralele și de același sens. Urmează că unghiul  $D'EF'$  este egal cu unghiul  $ABC$ .

**Observarea 3.** Să considerăm acum unghiurile  $ABC$



și DEF' cu laturile respectiv paralele, două îndreptate în același sens și două îndreptate în sensuri contrare (fig. 38).

Unghiurile ABC și DEF' sunt suplimentare.

În adevăr, unghiul DEF adiacent unghiului DEF', având laturile necomune în prelungire este suplimentar cu unghiul DEF'. Iar unghiul DEF este egal cu unghiul ABC având laturile respectiv paralele și de același sens. Urmează că unghiul ABC este suplimentul unghiului DEF'.

Prin urmare, putem enunța teorema generală:

*Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt egale sau suplimentare și anume: egale, când au laturile respectiv paralele și amândouă de același sens sau de sensuri contrare; suplimentare, când două laturi sunt de același sens și două de sensuri contrare.*

**Exemple.** Unghiul a două muchii ale tavanului și unghiul a două muchii ale dușumelli clasei cu vârful pe aceeași muchie verticală sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele și de același sens, deci aceste unghiuri sunt egale.

Unghiul a două muchii ale tavanului cu vârful în extremitatea de sus a unei muchii verticale și unghiul a două muchii ale dușumelei cu vârful în extremitatea de jos a muchiei verticale opuse, sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele și de sensuri contrare; aceste unghiuri sunt egale.

**41. Unghiul a două drepte în spațiu.** În spațiu, două drepte pot fi așezate în același plan sau pot fi neașezate în același plan.

1. Unghiul a două drepte așezate în același plan, l-am studiat în Geometria plană.

Fie astfel în planul P, dreptele AB și CD (fig. 39). Unghiul lor este  $\widehat{BID} = \alpha$ . De ex. unghiul a două muchii ale tavanului clasei sau unghiul celor două dia-

gonale ale aceluiași tavan sau unghiul a două muchii ale acoperișului unei case.

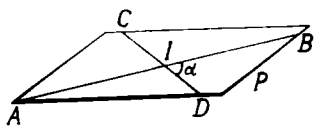


Fig. 39

2. Unghiul a două drepte neașezate în același plan este, prin definiție, unghiul a două drepte dintr'un plan, având direcțiunile celor două drepte date.

Fie dreptele AB și CD neașezate în același plan (fig. 40).

Pentru a găsi unghiul lor, ducem printr'un punct oarecare O al spațiului OM și ON respectiv paralele cu AB și CD. Unghiul  $\angle MON = \alpha$  este unghiul dreptelor AB și CD. Astfel este unghiul format de diagonala tavanului clasei cu una din muchiile dușumelii sau unghiul diagonalei tavanului cu muchia unei bănci.

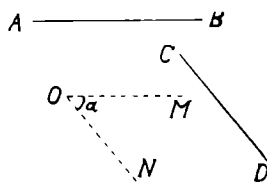


Fig. 40.

**Observare.** Unghiul a două drepte AB și CD ce nu sunt așezate în același plan (fig. 41) se poate avea mai simplu, ducând printr'un punct al uneia din drepte o paralelă la

cealaltă dreaptă. Astfel, ducem prin punctul I al dreptei CD, paralela MN la dreapta AB. Unghiul dreptelor AB și CD este  $\sphericalangle NID = \alpha$ .

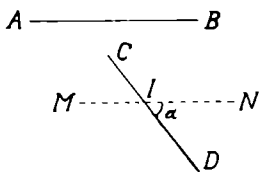


Fig. 41.

**42. Drepte perpendiculare în spațiu.** Dacă ducând printr'un punct O al spațiului paralele la cele două drepte date, unghiul format este drept, zicem că direcțiunile celor două drepte date în spațiu sunt *perpendiculare*.

De exemplu, o muchie verticală a clasei și diagonala tavanului care n'o întâlnește, muchia piciorului unei mese și o muchie a dușumelii sunt drepte perpendiculare în spațiu, deși nu sunt așezate în același plan.

**Observare.** Dacă o dreaptă  $D$  din spațiu este perpendiculară pe o altă dreaptă  $D'$ , dreapta  $D$  este perpendiculară pe orice dreaptă care are aceeași direcție cu dreapta  $D'$ .

### DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE PLAN.

#### 43. Construirea perpendicularei dintr'un punct dat la o dreaptă dată în spațiu.

1. Fie în spațiu dreapta  $AB$  și punctul  $O$  în afara ei (fig. 42). Să construim perpendiculara din punctul  $O$  la dreapta  $AB$ .

Dreapta  $AB$  și punctul  $O$  determină un plan  $P$ . În planul  $P$ , putem construi perpendiculara  $OI$  din punctul  $O$  la dreapta  $AB$  și numai aceasta. Dreapta  $OI$  este perpendiculara cerută.

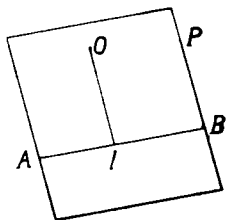


Fig. 42.

2. Fie acum, dreapta  $AB$  în spațiu și punctul  $O$  pe dreapta dată.

Să construim perpendiculara pe dreapta dată  $AB$ , în punctul  $O$ .

Știm că prin dreapta  $AB$  trec nenumărate plane în spațiu. Să considerăm unul dintre ele, de ex. planul  $P$ .

În planul  $P$ , ridicăm perpendiculara  $OC$  în punctul  $O$ , pe dreapta  $AB$ .

Să considerăm acum un al doilea plan  $Q$ , care să treacă prin dreapta  $AB$  (fig. 43). Ridicăm în planul  $Q$ , perpendiculara  $OD$  în punctul  $O$  pe dreapta  $AB$ . Și așa mai departe, în planele  $R, S, T, V, \dots$  adică în oricare din infinitatea de plane ce trec prin dreapta  $AB$ .

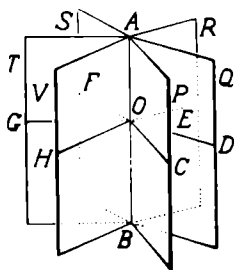


Fig. 43.

Rezultă că: *În spațiu, pe o dreaptă dată, într'un punct al ei, putem construi o infinitate de perpendiculare.*

**44. Observare.** După cum am văzut, dacă punctul  $O$  este exterior unei drepte  $AB$ , din punctul  $O$  la dreapta  $AB$ , se poate duce o singură perpendiculară  $OI$  (fig. 44). Însă în punctul  $I$  pe dreapta  $AB$ , putem duce nenumărate perpendiculare  $IC, ID, IE, \dots$

Să ducem acum prin punctul  $O$ , dreapta  $OC'$  paralelă cu  $OC$ , dreapta  $OD'$  paralelă cu  $OD$ , etc., câte o paralelă prin punctul  $O$  la fiecare din perpendicularele ridicate în punctul  $I$ , pe dreapta  $AB$ . Dreapta  $AB$  este perpendiculară pe direcția fiecăreia din dreptele  $OC', OD', OE, \dots$  Prin urmare :

*Printr'un punct exterior unei drepte date, se poate duce o singură perpendiculară pe aceea dreaptă, însă nenumărate direcții perpendiculare pe aceeași dreaptă.*

**45. Teoremă.** Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două direcțiuni dintr'un plan, ea este perpendiculară pe toate direcțiunile din acel plan.

Fie o dreaptă  $D$  în spațiu și pe ea un punct  $O$  (fig. 45). Putem duce nenumărate drepte perpendiculare pe dreapta  $D$ , în punctul  $O$ . Să construim două din aceste perpendiculare,  $OA$  și  $OB$ . Dreptele  $OA$  și  $OB$  concurente în punctul  $O$  determină un plan  $P$ . Dreapta  $D$  perpendiculară pe două direcțiuni  $OA$  și  $OB$  din planul  $P$  este perpendiculară pe orice altă direcție din planul  $O$ .

Pentru a reprezenta o direcție din planul  $P$ , diferită de direcțiile reprezentate de dreptele  $OA$  și  $OB$ , ducem prin punctul  $O$  și în planul  $P$ , o dreaptă diferită de dreptele  $OA$  și  $OB$ . Pentru

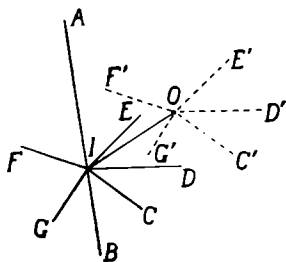


Fig. 44.

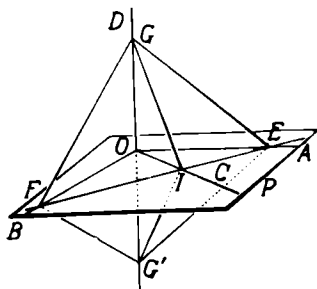


Fig. 45.

aceasta, luăm pe dreptele OA și OB respectiv punctele E și F. Dreapta EF este în planul P. Unim un punct oarecare I al dreptei EF cu punctul O; avem direcția OIC din planul P, diferită de direcțiile OA și OB.

Să arătăm că dreapta D este perpendiculară pe dreapta OC.

Pentru aceasta, luăm pe dreapta D două puncte G și G' simetrice în raport cu punctul O și le unim cu punctele E, I, F.

Triunghiurile GFG' și GEG' sunt isoscele, deoarece înălțimea corespunzătoare bazei este și mediană. Rezultă din fiecare că  $\overline{GF} = \overline{G'F}$  și  $\overline{GE} = \overline{G'E}$ .

Triunghiurile GFE și G'FE sunt egale, având laturile respectiv egale:  $\overline{GF} = \overline{G'F}$ ,  $\overline{GE} = \overline{G'E}$ ,  $\overline{FE} = \overline{FE}$ . Prin urmare, unghiurile opuse laturilor egale sunt egale,  $\sphericalangle GFE = \sphericalangle G'FE$ .

Considerând acum triunghiurile GFI și G'FI, ele sunt egale având câte un unghi egal cuprins între laturi respectiv egale:  $\sphericalangle GFE = \sphericalangle G'FE$ ,  $\overline{GF} = \overline{G'F}$ ,  $\overline{FI} = \overline{FI}$ . Deducem că laturile opuse unghiurilor egale sunt egale,  $\overline{GI} = \overline{G'I}$ .

Triunghiul GIG' având laturile  $\overline{GI}$  și  $\overline{G'I}$  egale este isoscel. Prin urmare, mediana IO a vârfului I este și înălțime, adică IO este perpendiculară pe GG'. Invers, GG' sau dreapta D este perpendiculară pe OI, ceea ce trebuia demonstrat.

Am demonstrat deci teorema: *Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două direcțiuni dintr'un plan, dreapta este perpendiculară pe orice altă direcțiune din acel plan.*

**Exemplu 1.** Una din muchiile verticale ale clasei fiind perpendiculară pe două muchii ale dușumelei care trec prin piciorul ei este perpendiculară pe planul dușumelii.

**Observări. 1.** *Dreapta perpendiculară pe orice direcțiune dintr'un plan se numește perpendiculară pe acel plan.*

Punctul în care dreapta înțeapă planul se numește *piciorul* perpendicularei.

Reciproc, orice dreaptă din planul  $P$  este perpendiculară pe dreapta  $D$ .

2. Dacă în enunțarea teoremei, în locul a două direcțiuni spunem două drepte ale planului, trebuie să adăogăm că cele două drepte sunt concurente, căci dacă ele sunt paralele au aceeași direcție.

**46. Plan perpendicular pe o dreaptă.** Am văzut că dacă luăm în spațiu o dreaptă  $D$  și un punct  $O$  pe ea, putem duce prin punctul  $O$  nenumărate perpendiculare pe dreapta  $D$ . Două oarecari din aceste perpendiculare, de ex:  $OA$  și  $OB$ , determină un plan  $P$  (fig. 46). Orice dreaptă perpendiculară în punctul  $O$ , pe dreapta  $D$  este cuprinsă în planul  $P$ .

Să presupunem că există o dreaptă  $OL'$  perpendiculară pe dreapta  $D$ , în punctul  $O$ , care nu este cuprinsă în planul  $P$ .

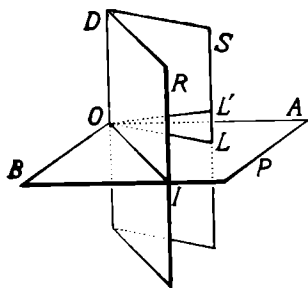


Fig. 46.

În acest caz, dreptele concurente  $D$  și  $OL'$  determină un plan  $S$ ; planul  $S$  având cu planul  $P$  punctul  $O$  comun, taie planul  $P$  după dreapta  $OL$  care trece prin punctul  $O$ . Dreapta  $D$  fiind perpendiculară pe planul  $P$  este perpendiculară pe

dreapta  $OL$  din planul  $P$ .

Rezultă că în planul  $S$ , există două drepte  $OL$  și  $OL'$  perpendiculare în același punct  $O$ , pe dreapta  $D$ ; ceea ce este absurd. Perpendiculara  $OL'$  este așezată deci în planul  $P$ .

Așa dar, avem teorema :

*Perpendicularele ridicate pe o dreaptă din spațiu, într'un punct al ei, formează un plan determinat de două din ele.*

*Planul format de toate perpendicularele ridicate în același punct al unei drepte din spațiu se numește plan perpendicular pe dreaptă.*

**Observare.** Am arătat în teorema precedentă, că toate perpendicularele ridicate pe o dreaptă în același punct al ei formează un plan perpendicular pe dreaptă în acel punct. Planul se bucură deci de proprietatea că orice dreaptă din el ce trece prin punctul comun lui și dreptei este perpendiculară pe dreapta dată. Zicem că *planul considerat este locul geometric al perpendicularelor ridicate în același punct al dreptei date.*

Putem deci enunța teorema (46) astfel: *Locul geometric al perpendicularelor ridicate în spațiu, în același punct al unei drepte este un plan perpendicular pe dreaptă în acel punct.*

**47. Construirea planului perpendicular pe o dreaptă într'un punct al ei.** Fie dreapta  $AB$  în spațiu și un punct  $O$  al ei (fig. 47). Să construim în punctul  $O$  un plan perpendicular pe dreapta  $AB$ .

Pentru aceasta, ducem prin dreapta  $AB$  două plane  $P$  și  $R$ . În fiecare din planele  $P$  și  $R$ , ridicăm perpendiculara pe dreapta  $AB$ , în punctul  $O$ : perpendicularele  $OI$  și  $OL$ . Aceste două drepte concurente determină planul  $S$  perpendicular pe dreapta  $AB$ , în punctul  $O$ . În adevăr, dreapta  $AB$  fiind perpendiculară pe dreptele concurente  $OI$  și  $OL$  ale planului  $S$  este perpendiculară pe planul  $S$ . Planul  $S$  este planul cerut. Să arătăm că planul  $S$  este unic.

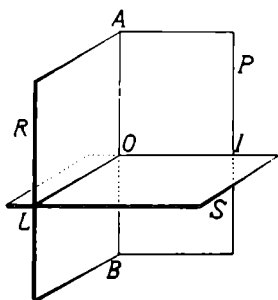


Fig. 47.

Să presupunem că am putea duce un alt plan  $S'$  perpendicular pe dreapta  $AB$  în punctul  $O$ , diferit de planul  $S$  (fig. 48).

Ducem prin dreapta  $AB$  un plan oarecare  $T$ . Planul  $T$

având punctul  $A$  comun cu fiecare din planele  $S$  și  $S'$ , le taie după câte o dreaptă ce trece prin punctul  $O$ . Fie  $OC$  și  $OC'$  respectiv dreptele de intersecție. Dreapta

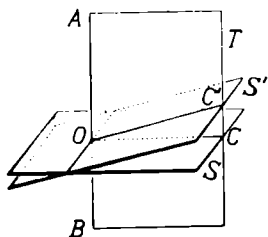


Fig. 48.

$AB$  perpendiculară pe planele  $S$  și  $S'$  este perpendiculară pe fiecare din dreptele  $OC$  și  $OC'$ . Avem astfel în planul  $T$ , dreptele  $OC$  și  $OC'$  perpendiculare în același punct  $O$  pe dreapta  $AB$ , ceea ce este imposibil. Aceasta înseamnă că planul  $S'$  presupus diferit de planul  $S$  coincide cu planul  $S$ , adică planul  $S$  este unic.

Rezultă dar următoarea teoremă :

*Printr'un punct al unei drepte se poate duce un plan perpendicular pe dreaptă și numai unul.*

**48. Aplicație.** *Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de capetele unui segment este planul perpendicular pe mijlocul segmentului.* Fie segmentul  $\overline{AB}$  din spațiu (fig 49). Prin mijlocul  $O$  al segmentului  $\overline{AB}$  ducem planul  $P$  perpendicular pe segment.

Oricare punct  $M$  al planului  $P$  este egal depărtat de capetele  $A$  și  $B$  ale segmentului  $\overline{AB}$ .

În adevăr, segmentul  $\overline{AB}$ , fiind perpendicular pe planul  $P$ , este perpendicular pe dreapta  $OM$ , care unește mijlocul  $O$  al segmentului cu punctul  $M$ . Însă, în planul determinat de segmentul  $\overline{AB}$  și punctul  $M$ ,  $M$  este un punct de pe perpendiculara  $OM$  ridicată pe mijlocul segmentului  $\overline{AB}$ , deci  $\overline{MA} = \overline{MB}$ .

Orice punct în afara planului  $P$  este neegal depărtat de  $A$  și  $B$ .

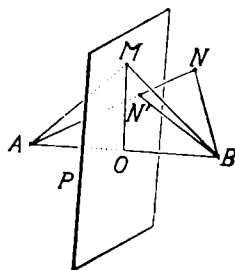


Fig. 49.



Fie  $N$  un punct exterior planului  $P$ . Segmentul  $\overline{AN}$  înțeapă planul  $P$  în punctul  $N'$ , astfel că  $\overline{N'A} = \overline{N'B}$ .

Iar în triunghiul  $N'BN$ ,  $\overline{NB} < \overline{NN'} + \overline{N'B}$  sau  $\overline{NB} < \overline{NN'} + \overline{N'A} = \overline{NA}$ , deci  $\overline{NB} < \overline{NA}$ . Punctul  $N$  este neegal depărtat de capetele segmentului  $\overline{AB}$ .

Toate punctele planului  $P$  bucurându-se de aceeași proprietate, planul  $P$  este un loc geometric.

#### 49. Construirea planului perpendicular pe o dreaptă care să treacă printr'un punct exterior ei.

Fie dreapta  $AB$  în spațiu și punctul  $O$  exterior ei (fig. 50). Să construim un plan perpendicular pe dreapta  $AB$ , care să treacă prin punctul  $O$ .

Pentru aceasta, prin dreapta  $AB$  și punctul  $O$  ducem planul  $P$  determinat de ele. În acest plan  $P$ , coborim perpendiculara  $OI$  pe dreapta  $AB$ .

În punctul  $I$ , pe dreapta  $AB$  în spațiu, se pot ridica nenumărate perpendiculare. În alt plan  $R$ , care trece prin dreapta  $AB$ , construim perpendiculara  $OL$ , pe dreapta  $AB$ .

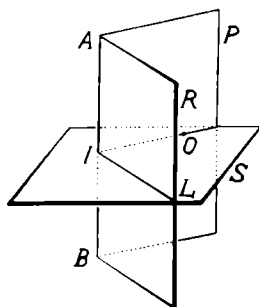


Fig. 50.

Dreptele concurente  $IO$  și  $IL$  determină planul  $S$  care, conținând două direcțiuni perpendiculare pe dreapta  $AB$ , este perpendicular pe dreapta  $AB$  și trece prin punctul  $O$ .

Planul  $S$  este planul cerut.

Să arătăm acum că planul  $S$  este unic.

Să presupunem că am putea duce prin punctul  $O$  un alt plan  $S'$  perpendicular pe dreapta  $AB$ , diferit de planul  $S$  (fig. 51).

Dreapta  $AB$  și punctul  $O$  exterior ei determină planul  $T$ .

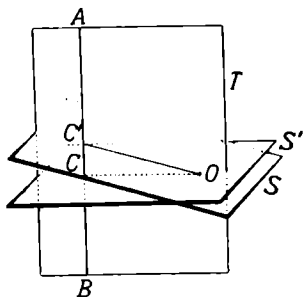


Fig. 51.

Planul  $T$ , având punctul  $O$  comun cu fiecare din planele  $S$  și  $S'$  le taie după câte o dreaptă ce trece prin punctul  $O$ . Fie  $OC$  și  $OC'$  respectiv dreptele de intersecție. Dreapta  $AB$  fiind perpendiculară pe fiecare din planele  $S$  și  $S'$  este perpendiculară pe fiecare din dreptele  $OC$  și  $OC'$ . Avem astfel în planul  $T$ , două perpendiculare  $OC$  și  $OC'$  pe dreapta  $AB$ , din același punct  $O$  exterior dreptei  $AB$ , ceea ce este imposibil. Urmează că planul  $S'$  se confundă cu planul  $S$ , adică planul  $S$  este unic.

Rezultă dar teorema următoare :

*Printr'un punct exterior unei drepte se poate duce un plan perpendicular pe acea dreaptă și numai unul.*

**50. Construirea perpendicularei pe un plan dat într'un punct al lui.** Fie planul  $P$  determinat de două drepte concurente  $OA$  și  $OB$  și punctul  $O$  din acest plan (fig. 52). Să construim o dreaptă perpendiculară pe planul  $P$  în punctul  $O$ . Prin punctul  $O$  al dreptei  $OA$ , putem duce în spațiu un plan  $Q$  perpendicular pe dreapta  $OA$ .

De asemenea, prin punctul  $O$  al dreptei  $OB$ , putem duce un plan  $R$  perpendicular pe dreapta  $OB$ .

Planele  $Q$  și  $R$  având punctul  $O$  comun au o dreaptă comună, dreapta  $OL$  de intersecție a lor. Dreapta  $OL$  este perpendiculară pe dreapta  $OA$ ,

fiind în planul  $Q$  și pe dreapta  $OB$ , fiind în planul  $R$ . Dreapta  $OL$  fiind perpendiculară pe dreptele  $OA$  și  $OB$  din planul  $P$  este perpendiculară pe planul  $P$ .

Așa dar, dreapta  $OL$  este perpendiculara cerută pe planul  $P$ , în punctul  $O$ .

**Observare.** Dacă luăm alte două drepte  $OA'$  și  $OB'$ , în planul  $P$ , planele perpendiculare pe dreptele  $OA'$

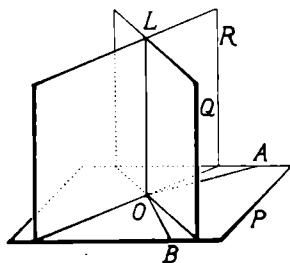


Fig. 52.

și  $OB'$  în punctul  $O$ , sunt diferite de planele  $Q$  și  $R$ . Aceste plane noi, având punctul  $O$  comun, au o dreaptă de intersecție  $OL'$  perpendiculară pe planul  $P$ . Dreapta de intersecție  $OL'$  este tot perpendiculara  $OL$ .

În adevăr, dacă dreapta  $OL'$  ar fi diferită de perpendiculara  $OL$  (fig. 53), ele ar determina un plan  $S$ , fiind două drepte concurente. Planul  $S$  având punctul  $O$  comun cu planul  $P$  ar tăia planul  $P$  după o dreaptă  $OM$ . Atunci în planul  $S$ , pe dreapta  $OM$  și în punctul  $O$  al ei, s'ar putea duce două perpendiculare, ceea ce este imposibil. Urmează că dreapta  $OL'$  este confundată cu perpendiculara  $OL$ .

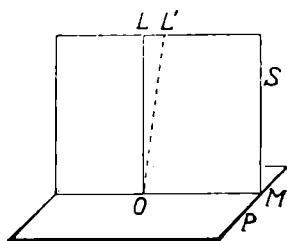


Fig. 53.

Putem dar enunța următoarea

**Teoremă.** *Intr'un punct al unui plan, putem ridica o perpendiculară pe acel plan și numai una.*

**51. Construirea perpendicularei pe un plan dintr'un punct exterior lui.**

Fie planul  $P$  și punctul  $O$  exterior lui (fig. 54). Să construim o perpendiculară pe planul  $P$ , care să treacă prin punctul  $O$ .

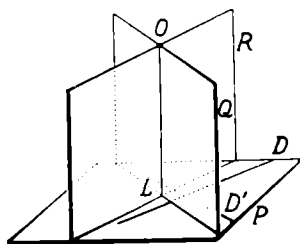


Fig. 54.

Pentru aceasta, luăm în planul  $P$  două direcțiuni reprezentate prin dreptele  $D$  și  $D'$ . Prin punctul  $O$ , ducem în spațiu, planul  $Q$  perpendicular pe dreapta  $D$ . De asemenea, prin punctul  $O$  ducem planul  $R$ , perpendicular pe dreapta  $D'$ . Planele  $Q$  și  $R$  având punctul

$O$  comun, au o dreaptă comună  $OL$ . Dreapta  $OL$  fiind în planul  $Q$  este perpendiculară pe dreapta  $D$ ; tot astfel, dreapta  $OL$  fiind în planul  $R$  este perpendiculară pe

dreapta  $D'$ . Rezultă că dreapta  $OL$  este perpendiculară pe două direcțiuni ale planului  $P$  și deci este perpendiculară pe planul  $P$ .

Dreapta  $OL$  este perpendiculara cerută din punctul  $O$  pe planul  $P$ .

**Observare.** Dacă în locul direcțiunilor  $D$  și  $D'$ , luăm în planul  $P$  alte două direcțiuni  $D_1$  și  $D'_1$ , planele perpendiculare în punctul  $O$ , pe direcțiunile  $D_1$  și  $D'_1$ , sunt diferite de planele  $Q$  și  $R$ . Aceste plane noi, având punctul  $O$  comun se intersectează după o dreaptă  $OL'$  perpendiculară pe planul  $P$ . Această dreaptă  $OL'$  este tot perpendiculara  $OL$ .

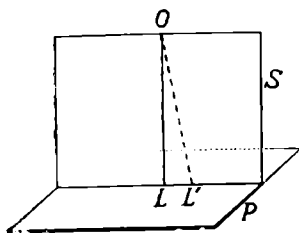


Fig. 55.

Dacă dreapta  $OL'$  ar fi diferită de dreapta  $OL$  (fig. 55), amândouă ar determina un plan  $S$  (fiind două drepte concurente), care ar tăia planul  $P$  după dreapta  $LL'$ . Atunci, în planul  $S$ , din punctul  $O$  exterior dreptei  $LL'$ , s'ar putea duce două perpendiculare la dreapta  $LL'$ , ceea ce este imposibil. Urmează că dreapta  $OL'$  este confundată cu perpendiculara  $OL$ .

Putem dar enunța următoarea

**Teoremă.** *Dintr'un punct exterior unui plan, se poate coborî o perpendiculară pe acel plan și numai una.*

**52. Teoremă.** Fie în spațiu dreptele paralele  $D$  și  $D'$  și planul  $P$  perpendicular pe una din ele, de ex. pe dreapta  $D$  (fig. 56).

Planul  $P$  este perpendicular pe dreapta  $D'$ .

Să considerăm în planul  $P$ , două direcțiuni oarecari  $\Delta$  și  $\Delta'$ . Dreapta  $D$  perpendiculară pe planul  $P$ , prin ipoteză, este perpendiculară pe direcțiunile  $\Delta$  și  $\Delta'$  din acest plan. Dreapta  $D'$  paralelă cu  $D$  este și ea perpendiculară pe direcțiunile  $\Delta$  și  $\Delta'$  din planul  $P$ . Prin urmare,

dreapta  $D'$  e perpendiculară pe planul  $P$ , deoarece este perpendiculară pe două direcțiuni din acest plan: invers, planul  $P$  este perpendicular pe dreapta  $D'$ .

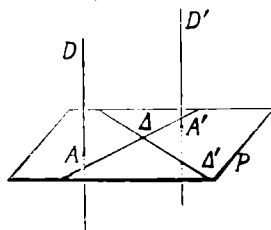


Fig. 56.

Am demonstrat deci teorema:  
*Dacă două drepte sunt paralele, orice plan perpendicular pe una din ele este perpendicular și pe cealaltă.*

Mai putem enunța această teoremă sub forma: *Dacă două drepte sunt paralele și una din ele este perpendiculară pe un plan, cea de a doua este perpendiculară pe același plan.*

**Exemplu.** Două muchii verticale ale clasei sunt două drepte paralele. Planul podelei sau planul tavanului perpendicular pe una din ele este perpendicular și pe cealaltă muchie.

**53. Drepte perpendiculare pe același plan.** Fie planul  $P$  și două drepte  $AB$  și  $CD$  perpendiculare pe planul  $P$  (fig. 57).

Dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt paralele. Una din dreptele date, de ex.  $AB$  și punctul  $C$  al celeilalte drepte  $CD$ , determină un plan  $R$ , care taie planul  $P$  după dreapta  $AC$ . Dacă presupunem că dreapta  $CD$  nu e paralelă cu dreapta  $AB$ , să ducem prin punctul  $C$ , dreapta  $CD'$  paralelă cu  $AB$ .

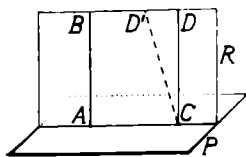


Fig. 57.

Dreapta  $CD'$  fiind paralelă cu dreapta  $AB$  este cuprinsă în planul  $R$  și este perpendiculară în punctul  $C$ , pe planul  $P$  (52). Urmează că în punctul  $C$  al planului  $P$ , există două perpendiculare  $CD$  și  $CD'$  pe acest plan, ceea ce este, imposibil.

Dreapta  $CD'$  dusă paralelă la  $AB$  se confundă cu  $CD$ , adică dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt paralele.

Avem deci următoarea

**Teoremă.** *Două drepte perpendiculare pe același plan, în două puncte deosebite sunt paralele.*

**Exemplu.** Două muchii ale clasei perpendiculare pe planul podelei, două muchii ale unei cutii care sunt perpendiculare pe planul unei fețe sunt drepte paralele.

#### 54. Teorema celor trei perpendiculare.

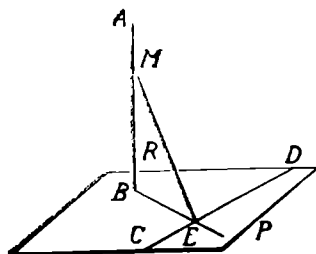


Fig. 58.

Fie planul  $P$  în spațiu, o dreaptă  $AB$  perpendiculară pe planul  $P$  și o dreaptă  $CD$  în acest plan (fig. 58). Din piciorul  $B$  al perpendicularei  $AB$ , ducem dreapta  $BE$  perpendiculară pe dreapta  $CD$ . Unim un punct oarecare  $M$  al perpendicularei  $AB$  cu punctul  $E$ , piciorul perpendicularei  $BE$  din plan.

Dreapta  $ME$  este perpendiculară pe dreapta  $CD$  din plan.

În adevăr, dreapta  $AB$  fiind perpendiculară pe planul  $P$  este perpendiculară pe orice direcțiune din plan, deci pe  $CD$ . Invers dreapta  $CD$  este perpendiculară pe  $AB$ .

Dreapta  $CD$ , care este perpendiculară pe dreptele  $AB$  (cum am observat) și  $BE$  (prin construcție), este perpendiculară pe planul  $R$  determinat de dreapta  $AB$  și  $BE$ . Dreapta  $CD$  este deci perpendiculară pe orice dreaptă din planul  $R$ , deci și pe dreapta  $ME$ .

Invers, dreapta  $ME$  este perpendiculară pe dreapta  $CD$  din plan, ceea ce trebuia demonstrat.

Avem astfel teorema :

*Dacă din piciorul unei perpendiculare pe un plan, ducem o perpendiculară pe o dreaptă din acel plan, dreapta care unește un punct oarecare al perpendicularei pe plan cu piciorul perpendicularei dusă*

*pe dreapta din plan este perpendiculară pe dreapta din plan.*

**Observare.** Dreptele  $AB$ ,  $BE$  și  $ME$  fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă  $CD$  din planul  $P$ , această teoremă poartă numele de „*teorema celor trei perpendiculare*“.

**Exemplu.** O muchie verticală a clasei este perpendiculară pe o muchie a dușumelei ce trece prin piciorul ei. Aceasta la rândul ei este perpendiculară pe altă muchie a dușumelei. Orice dreaptă ce unește un punct al muchiei verticale cu piciorul celei dintâi muchii a dușumelei este perpendiculară pe a doua muchie a dușumelei.

**55. Teorema reciprocă I.** Fie un plan  $P$ , un punct  $A$  exterior lui și o dreaptă  $CD$  din acest plan (fig 59). Ducem din punctul  $A$  o perpendiculară  $AB$  pe planul  $P$  și o perpendiculară  $AE$  pe dreapta  $CD$  din plan.

Să arătăm că dreapta  $BE$ , care unește picioarele celor două perpendiculare, este perpendiculară pe dreapta  $CD$ .

În adevăr, dreapta  $CD$  fiind perpendiculară pe două drepte concurente  $AB$  și  $AE$  ce determină planul  $ABE$  este perpendiculară pe acest plan. Ca urmare, dreapta  $CD$  este perpendiculară pe orice dreaptă din planul  $ABE$ , deci și pe dreapta  $BE$  conținută în acest plan. Invers, dreapta  $BE$  este perpendiculară pe dreapta  $CD$ .

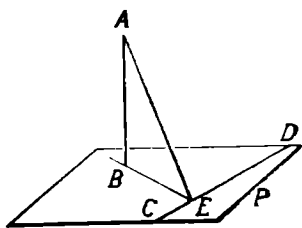


Fig. 59

Avem dar teorema reciprocă :

*Dacă din același punct din afara unui plan, coborîm o perpendiculară pe plan și o perpendiculară pe o dreaptă din acel plan, dreapta care unește picioarele acestor două perpendiculare este perpendiculară pe dreapta din plan.*

*Dacă din același punct din afara unui plan, coborîm o perpendiculară pe plan și o perpendiculară pe o dreaptă din acel plan, dreapta care unește picioarele acestor două perpendiculare este perpendiculară pe dreapta din plan.*

**56. Teorema reciprocă II.** Fie un plan  $P$  și o dreaptă  $CD$  în acest plan (fig. 60). Într'un punct  $E$  al dreptei  $CD$  ridicăm două drepte perpendiculare pe dreapta  $CD$ : dreapta  $EF$  în planul  $P$  și dreapta  $EG$  în afara planului  $P$ . Dintr'un punct oarecare  $A$  al dreptei  $EG$ , coborim perpendiculara  $AB$  pe dreapta  $EF$ .

Să arătăm că dreapta  $AB$  este perpendiculară pe planul  $P$ .

Planul  $AEB$  determinat de dreptele  $EF$  și  $EG$  perpendiculare pe dreapta  $CD$  este perpendicular pe dreapta  $CD$ . Invers, dreapta  $CD$  este perpendiculară pe planul  $AEB$  și ca urmare pe dreapta  $AB$  din acest plan. Astfel dreapta  $AB$  este perpendiculară pe dreapta  $CD$  și pe dreapta  $EF$  prin construcție, ambele din planul  $P$ ;  $AB$  este deci perpendiculară pe planul  $P$ .

Avem teorema reciprocă :

*Dacă într'un punct oarecare al unei drepte dintr'un plan, ridicăm două perpendiculare pe această dreaptă,*

*una în plan și alta în afara planului, perpendiculara coborâtă dintr'un punct al dreptei din afara planului pe dreapta perpendiculară din plan este perpendiculară pe acel plan.*

**57. Aplicație.** Construim un triunghi  $BCD$  și unim un punct  $A$  exterior planului acestui triunghi cu vârfurile lui (fig. 61) Porțiunile de plan determinate de segmentele de drepte, două câte două, formează un corp numit *tetraedru*.

Dacă ducem înălțimea  $AE$  a feței triunghiulare  $ACD$  și în punctul  $E$  ridicăm o perpendiculară  $EI$  pe muchia  $CD$  a feței  $BCD$ , perpendiculara  $AI$  dusă din punc-

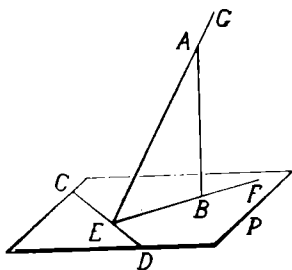


Fig 60

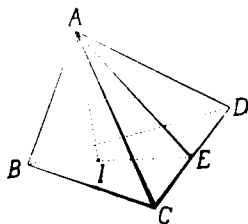


Fig. 61



tul A pe dreapta EI este perpendiculară pe planul feței BCD.

Dreapta AI este numită *înălțimea tetraedrului*.

58. **Dreaptă oblică față de plan.** Dacă o dreaptă înțeapă un plan și nu este perpendiculară pe acel plan, dreapta se numește *oblică* față de plan. De ex, dreapta AB (fig. 62) este oblică față de planul P.

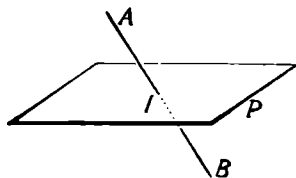


Fig. 62.

Punctul I în care dreapta AB intersectează planul P se numește *picioarul* sau *urma* dreptei AB pe planul P.

### PERPENDICULARE ȘI OBLICE DIN ACELAȘI PUNCT LA UN PLAN

59. **Teoremă.** Fie un plan P și punctul O exterior lui (fig. 63).

Ducem din punctul O perpendiculara OI și o oblică oarecare OM la planul P. Să arătăm că segmentul  $\overline{OI}$  al perpendicularei este mai scurt decât segmentul oblicei OM.

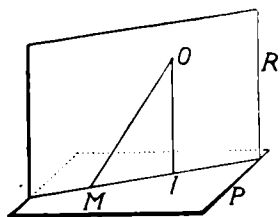


Fig. 63.

Dreptele concurente OI și OM determină un plan R, care taie planul P după dreapta IM. Dreapta OI, perpendiculară pe planul P este perpendiculară pe dreapta IM din acest plan. În planul R, din punctul O exterior dreptei IM, avem perpendiculara OI și oblica OM. Știm din Geometria plană că segmentul perpendicularei OI este mai scurt decât segmentul oblicei OM. Prin urmare, proprietatea din plan se păstrează și în spațiu.

Putem deci enunța teorema :

*Dacă din același punct exterior unui plan, ducem perpendiculara și o oblică oarecare la plan, perpendiculara este mai scurtă decât oricare oblică.*

**60. Oblice din același punct la un plan.** Fie planul  $P$  și punctul  $O$  exterior lui (fig 63). Ducem din punctul  $O$  la planul  $P$ , perpendiculara  $OI$  și două oblice  $OM$  și  $ON$ , ale căror picioare să fie egal depărtate de piciorul  $I$  al perpendicularei.

Segmentele oblicelor  $\overline{OM}$  și  $\overline{ON}$  sunt egale.

Observăm că fiecare din oblicele  $OM$  și  $ON$  determină cu perpendiculara  $OI$  câte un plan, care taie planul  $P$  respectiv după dreptele  $IM$  și  $IN$ . Perpendiculara  $OI$  pe planul  $P$  este perpendiculară pe dreptele  $IM$  și  $IN$  din acest plan.

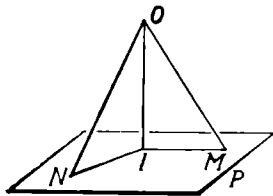


Fig. 64

Triunghiurile dreptunghice formate  $OIM$  și  $OIN$  sunt egale având catetele respectiv egale:  $\overline{OI}=\overline{OI}$ ,

(comună),  $\overline{IM}=\overline{IN}$  (prin ipoteză). Rezultă că  $\overline{OM}=\overline{ON}$ .

Așa dar avem următoarea

**Teoremă.** *Dacă din același punct exterior unui plan, ducem la acest plan perpendiculara și două oblice cu picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei, oblicele sunt egale.*

**Observare.** În spațiu, putem duce din punctul  $O$  exterior unui plan  $P$ , nenumărate oblice cu picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei. Toate aceste oblice sunt egale.

**61.** Fie planul  $P$  și punctul  $O$  exterior lui (fig. 65). Ducem din punctul  $O$  perpendiculara  $OL$  și două oblice  $OL$  și  $OM$ , ale căror picioare să fie neegal depărtate de piciorul perpendicularei și anume:  $\overline{IM} > \overline{IL}$ .

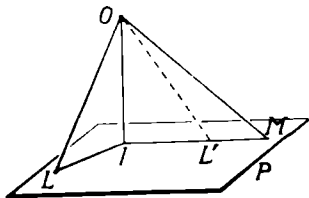


Fig. 65.

Segmentele oblicelor  $\overline{OL}$  și  $\overline{OM}$  sunt neegale;  $\overline{OM}$  cu piciorul mai depărtat este mai lungă.

Fiecare din oblicele  $OL$  și  $OM$  determină cu perpendiculara  $OI$  câte un plan, care taie planul  $P$  respectiv după dreptele  $IL$  și  $IM$ . Dreapta  $OI$ , perpendiculară pe planul  $P$  este perpendiculară pe dreptele  $IL$  și  $IM$  din acest plan.

Luăm pe dreapta  $IM$ , segmentul  $\overline{IL'} = \overline{IL}$  și ducem oblica  $OL'$ . Oblicele  $\overline{OL}$  și  $\overline{OL'}$  având picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei  $OI$  sunt egale,  $\overline{OL} = \overline{OL'}$ .

Însă în planul  $OIM$ , oblica  $OM$  cu piciorul mai depărtat decât piciorul oblicei  $OL'$  este mai lungă decât aceasta, adică  $\overline{OM} > \overline{OL'}$ . Rezultă că  $\overline{OM} > \overline{OL}$ , deoarece  $\overline{OL'} = \overline{OL}$ .

Avem dar, următoarea

**Teoremă.** *Dacă din același punct exterior unui plan, ducem la acest plan perpendiculara și două oblice cu picioarele neegal depărtate de piciorul perpendicularei, oblicele sunt neegale; oblica cu piciorul mai depărtat este mai lungă.*

## 62. Teoreme reciproce.

1<sup>o</sup>. Fie planul  $P$  și punctul  $O$  exterior lui (fig. 66). Din punctul  $O$  la planul  $P$  putem duce nenumărate segmente de drepte  $\overline{OI}$ ,  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ , .....

Presupunem că cea mai scurtă din aceste drepte este  $\overline{OI}$ .

Să arătăm că dreapta  $OI$  este perpendiculară pe planul  $P$ .

Dacă ducem din punctul  $O$  perpendiculara  $OL$  pe planul  $P$ , segmentul  $OL$  este mai scurt

decât oricare din segmentele  $\overline{OI}$ ,  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ , .... duse mai înainte, ceea ce este imposibil, deoarece știm că cel mai scurt segment este  $\overline{OI}$ . Rezultă că *segmentul  $OI$  este perpendiculara dusă din punctul  $O$  la planul  $P$ .*

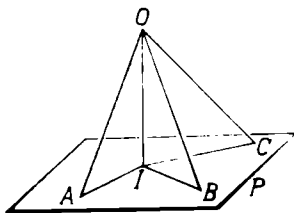


Fig. 66.

2°. Două oblice  $\overline{OA}$  și  $\overline{OB}$  egale au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei  $OI$ .

În adevăr, perpendiculara  $OI$  pe planul  $P$  este perpendiculară pe dreptele  $IA$  și  $IB$  din acest plan. Triunghiurile dreptunghice  $OIA$ ,  $OIB$ , având ipotenuzele egale  $\overline{OA} = \overline{OB}$  și câte o catetă egală,  $\overline{OI} = \overline{OI}$ , sunt egale. Rezultă că  $\overline{IA} = \overline{IB}$ , adică *picioarele oblicelor egale sunt egal depărtate de piciorul perpendicularei*.

3°. Două oblice  $OA$  și  $OC$  neegale au picioarele neegal depărtate de piciorul perpendicularei  $OI$ ; oblica mai lungă  $OC$  are piciorul  $C$  mai depărtat.

Dacă picioarele  $A$  și  $C$  ar fi egal depărtate de piciorul  $I$  al perpendicularei, oblicele  $OA$  și  $OC$  ar fi egale, ceea ce este contrar ipotezei.

Dacă piciorul  $C$  ar fi mai apropiat decât piciorul  $A$  de piciorul  $I$  al perpendicularei, oblica  $OC$  ar fi mai scurtă decât oblica  $OA$ , ceea ce este contrar ipotezei.

Rezultă deci că piciorul  $C$  este mai depărtat decât piciorul  $A$ , de piciorul  $I$  al perpendicularei, adică *picioarele oblicelor neegale sunt neegal depărtate de piciorul perpendicularei și anume: piciorul oblicei mai lungi este mai depărtat*.

**63. Observare.** Distanța dela punctul exterior  $O$  planului  $P$  la acest plan măsurată pe perpendiculara  $OI$  este mai scurtă decât distanța măsurată pe oricare dintre oblicele  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,... De aceea, lungimea perpendicularei  $OI$  se ia ca distanță dela punctul  $O$  la planul  $P$ .

Prin urmare: *Distanța dela un punct exterior unui plan până la acel plan este lungimea perpendicularei coborâtă din punct pe plan*.

**64. Aplicație.** Fie planul  $P$  și punctul  $O$  exterior lui (fig. 67).

Din punctul  $O$  la planul  $P$ , putem duce o infinitate de oblice egale, de ex.  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ , .... Picioarele acestor oblice fiind egal depărtate de piciorul perpendi-

cularei  $OI$  dusă din același punct la plan, sunt așezate pe un cerc cu centrul în piciorul  $I$  al perpendicularei și având raza egală cu depărtarea comună de piciorul perpendicularei.

Toate oblicele formează o suprafață curbă limitată la plan numită *suprafață conică*.

Proprietatea picioarelor oblicelor egale se poate enunța sub forma următoare: *Locul geometric al picioarelor oblicelor egale ce se pot duce din același punct exterior unui plan la acest plan este un cerc*.

Insemnând cu  $i$ ,  $l$  și  $d$  respectiv măsurile perpendicularei, oblicei și depărtării piciorului oblicei de piciorul perpendicularei, teorema lui Pitagora aplicată triunghiului format ne dă

$$l^2 = i^2 + d^2.$$

## PLANE PARALELE.

Am văzut că două plane care n'au niciun punct comun se numesc plane paralele (28).

**65. Plane perpendiculare pe aceeași dreaptă. Teoremă.** Fie o dreaptă  $D$  în spațiu și pe ea două puncte  $A$  și  $B$  (fig. 67). Să construim în fiecare din aceste puncte planele  $P$  și  $R$  respectiv perpendiculare pe dreapta  $D$ .

Planele  $P$  și  $R$  perpendiculare pe dreapta  $D$  în punctele  $A$  și  $B$  respectiv sunt paralele.

Dacă prin dreapta  $D$  ducem un plan oarecare  $S$ , acest plan având câte un punct comun cu planele  $P$  și  $R$  le taie respectiv după câte o dreaptă. Fie  $AM$  și  $BN$  aceste drepte de intersecție.

Dreapta  $D$ , fiind perpendiculară pe fiecare din planele  $P$  și  $R$ , este perpendiculară pe fiecare din dreptele  $AM$

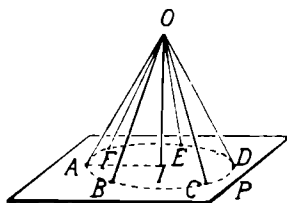


Fig. 67.

și BN. Fiind în același plan S și perpendiculare pe aceeași dreaptă D, dreptele AM și BN sunt paralele.

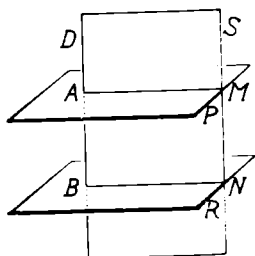


Fig. 68.

Planele P și R nu pot avea niciun punct comun; sunt deci paralele.

Am demonstrat astfel următoarea :

**Teoremă.** Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă, în două puncte diferite ale ei sunt paralele.

**Exemplu.** Observând clasa, constatăm că planul dușumelei și planul tavanului sunt perpendiculare pe una din muchiile laterale ale clasei, în două puncte diferite. Aceste plane sunt paralele.

**66. Teoremă.** Intersecțiile a două plane paralele cu un al treilea plan sunt drepte paralele.

Să considerăm două plane paralele P și R și să le tăiem cu un al treilea plan S (fig. 68).

Intersecțiile AB și CD ale planelor P și R cu planul S sunt drepte paralele.

În adevăr, dreptele AB și CD sunt în același plan S. Ele n'au niciun punct comun, căci dacă ar avea unul, planele P și R ar avea același punct comun, ceea ce este absurd, deoarece știm că planele P și R sunt paralele.

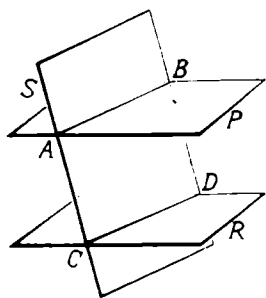


Fig. 69.

Dreptele  $AB$  și  $CD$  fiind în planul  $S$  și neavând nici un punct comun sunt paralele; ceea ce trebuia să demonstrăm.

**Exemplu.** Planul tavanului clasei și planul podelei sunt două plane paralele. Tăiate de planul unuia din pereți dau muchiile de sus și de jos de pe acest perete, paralele.

**67. Construcția planului paralel cu un plan dat printr'un punct exterior acestuia.** Fie planul  $P$  și punctul  $A$  exterior lui (fig. 70). Să arătăm că prin punctul  $A$  trece un plan paralel cu planul  $P$  și numai unul.

Considerăm în planul  $P$ , dreptele  $D_1$  și  $D_2$  care n'au aceeași direcție. Ducem prin punctul  $A$  dreptele  $D'_1$  și  $D'_2$  respectiv paralele cu  $D_1$  și  $D_2$ . Dreptele concurente  $D'_1$  și  $D'_2$  determină planul  $P'$ .

Planul  $P'$  este paralel cu planul  $P$ .

Să presupunem că planele  $P$  și  $P'$  ar avea un punct comun  $I$ . Planele ar avea în acest caz, o dreaptă comună  $IJ$  care trece prin punctul  $I$ .

Dreptele  $D'_1$  și  $D'_2$  fiind respectiv paralele cu acest plan (32), planul  $P'$  ce trece prin  $D'_1$  și  $D'_2$  tale deci planul  $P$  după dreapta  $IJ$  paralelă cu fiecare din dreptele  $D'_1$  și  $D'_2$ . Urmează că în planul  $P'$ , dreptele concurente  $D'_1$  și  $D'_2$ , sunt ambele paralele cu aceeași dreaptă  $IJ$  ceea ce este imposibil. Rezultă că planul  $P'$  nu poate avea punct comun cu planul  $P$ , adică planul  $P'$  este paralel cu planul  $P$ .

Să considerăm în planul  $P$ , o altă direcție  $D_3$ . Dreapta  $D_3$  și punctul  $A$  determină un plan  $R$  care taie planul  $P'$  după o dreaptă  $D_3$ , care trece prin punctul  $A$  și este paralelă cu  $D_3$  din planul  $P$ . Aceasta înseamnă că orice

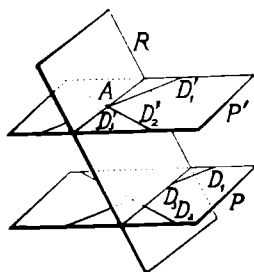


Fig. 70.

paralelă dusă prin punctul A la una din infinitatea de direcțiuni ale planului P este cuprinsă în planul P'. Sau toate paralelele duse prin punctul A la fiecare din direcțiunile planului P formează planul P' paralel cu planul P.

Să arătăm acum că planul P' este singurul plan paralel cu planul P, ce trece prin punctul A din spațiu.

Să presupunem că luând în planul P alte două direcțiuni diferite de cele de mai înainte, paralelele cu ele duse prin punctul A ar determina un alt plan P'' paralel cu planul P și trecând prin același punct A (fig. 70),

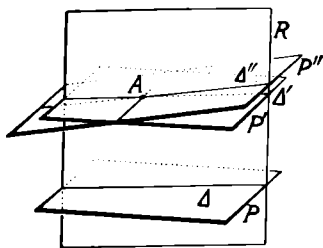


Fig. 71.

Luăm în planul P o direcțiune oarecare  $\Delta$ . Dreapta  $\Delta$  și punctul A exterior ei determină planul R care având punctul A comun cu planele P' și P'' le taie res-

pectiv după dreptele  $\Delta'$  și  $\Delta''$  ce trec prin punctul A. Dreptele  $\Delta'$  și  $\Delta''$  sunt ambele paralele cu dreapta  $\Delta$ , ca intersecțiunile perechilor de plane paralele P, P' și P, P'' cu planul R. În acest caz, în planul R, prin punctul A exterior dreptei  $\Delta$ , trec două paralele cu dreapta  $\Delta$ , ceea ce este imposibil (postulatul lui Euclid). Urmează că planul P'' este tot una cu planul P', adică planul P' este unic.

Am demonstrat astfel cele două părți ale teoremei:

*Printr'un punct exterior unui plan, se poate duce un plan paralel cu planul dat și numai unul.*

**Observare.** Deoarece orice paralelă dusă prin punctul A la planul P este cuprinsă în planul P' și reciproc, teorema de mai sus se poate enunța sub forma următoare :

*Locul geometric al paralelelor duse printr'un punct exterior unui plan, la un plan dat este un plan paralel cu planul dat, ce trece prin acel punct.*



**68. Consecințe.** 1. Din teorema demonstrată mai sus, rezultă imediat proprietatea: *Unghiurile cu laturile paralele au ște planele lor paralele.* (Fig. 72).

În adevăr, laturile  $B'A'$  și  $B'C'$ , respectiv paralele cu laturile  $BA$  și  $BC$  din planul  $P$  determină planul  $P'$  paralel cu planul  $P$ .

**Exemplu.** O masă cu fața dreptunghiulară este așezată astfel că două muchii care se taie ale feței sunt respectiv paralele cu două muchii care se taie ale podelei. Fața mesei și fața podelei sunt atunci două plane paralele.

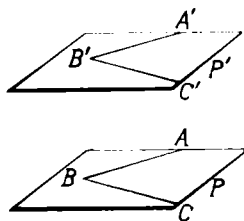


Fig. 72

2. *Dacă două plane sunt paralele, orice dreaptă a unui plan este paralelă cu celălalt plan.*

Fie planele paralele  $P$  și  $P'$  și dreapta  $D$  conținută în planul  $P$  (fig. 73).

Dacă dreapta  $D$  ar întâlni planul  $P'$  într'un punct, acest punct ar fi comun planelor  $P$  și  $P'$ . Însă planele  $P$  și  $P'$  nu pot avea niciun punct comun, fiind paralele; deci nici dreapta  $D$  nu poate avea punct comun cu planul  $P'$ , deci este paralelă cu planul  $P'$ .

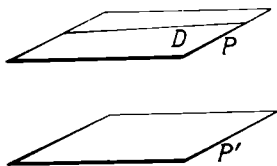


Fig. 73

**Exemplu.** Fața podelei și fața tavanului sunt două plane paralele. Diagonala tavanului este paralelă cu planul podelei.

**69. Teoremă.** Fie planele paralele  $P$  și  $P'$  și dreapta  $D$  care înțeapă unul din ele, de ex. planul  $P$  (fig. 74).

Să arătăm că dreapta  $D$  înțeapă și planul  $P'$ .

Pentru aceasta, să considerăm planul  $R$  care trece prin dreapta  $D$ . Planul  $R$  taie planele  $P$  și  $P'$  respectiv după dreptele paralele  $AB$  și  $A'B'$ . Avem astfel în planul  $R$ , dreptele paralele  $AB$  și  $A'B'$  și dreapta  $D$  care

taie pe  $AB$  în punctul  $A$ . După o teoremă din Geometria plană, dreapta  $D$  taie și dreapta  $A'B'$  într'un punct  $A'$  al ei. Urmează că dreapta  $D$  are punctul  $A'$  comun

cu planul  $P'$ , punctul  $A'$  fiind pe dreapta  $A'B'$  din planul  $P'$ ; adică dreapta  $D$  înțeapă planul  $P'$ .

Dreapta  $D$  nu poate avea alt punct comun cu planul  $P'$  decât punctul  $A'$ , căci în cazul acesta ea ar fi așezată, în planul  $P'$  și n'ar putea întâlni planul  $P$ , conform ipotezei.

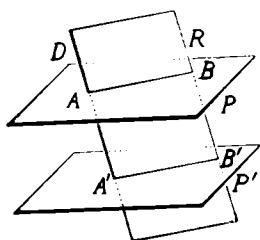


Fig. 74.

Rezultă dar următoarea teoremă :

*Dacă două plane sunt paralele, orice dreaptă care înțeapă pe unul din ele înțeapă și pe celălalt.*

**70. Teoremă.** Fie planele paralele  $P$  și  $P'$  și o dreaptă  $D$  perpendiculară pe unul din ele, de ex. pe planul  $P$  (fig. 75).

Dreapta  $D$  este perpendiculară pe planul  $P'$ .

Să ducem prin dreapta  $D$  două plane  $R$  și  $S$ . Fiecare din planele  $R$  și  $S$  taie planele  $P$  și  $P'$  după două drepte paralele, ca intersecții a două plane paralele cu un al treilea plan. Fie  $AB$ ,  $A'B'$ , intersecțiile planului  $R$  cu planele  $P$  și  $P'$  și  $AC$ ,  $A'C'$  intersecțiile planului  $S$  cu aceleași plane  $P$  și  $P'$ .

Dreapta  $D$  perpendiculară pe planul  $P$  este perpendiculară pe dreptele  $AB$  și  $AC$  din acest plan și deci perpendiculară pe paralelele lor  $A'B'$  și  $A'C'$ .

Prin urmare, dreapta  $D$  este perpendiculară pe două direcțiuni ale planului  $P'$ ; ea este deci perpendiculară pe planul  $P'$ .

Rezultă dar teorema :

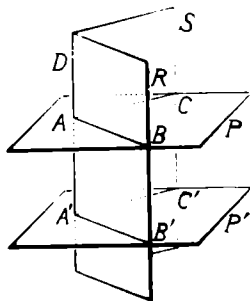


Fig. 75.

*Dacă două plane sunt paralele, orice dreaptă perpendiculară pe unul din ele este perpendiculară și pe celălalt plan.*

**Exemplu.** Planul podelei și planul tavanului unei camere sunt două plane paralele. Firul unei lămpi atârnată de tavan este o dreaptă perpendiculară pe planul tavanului. El este perpendicular și pe planul podelei.

**71. Mișcarea de translație în spațiu.** Fie dreapta  $D$  și planul  $P$  perpendicular pe dreapta  $D$ , într'un punct  $A$  al ei (fig. 76).

Dacă planul  $P$  se mișcă în spațiu astfel ca să rămână tot timpul perpendicular pe dreapta  $D$ , iar un punct  $M$  al lui să descrie o dreaptă paralelă cu dreapta  $D$ , zicem că planul  $P$  are o *mișcare de translație*.

Dreapta  $D$  se numește *direcția translației*, iar mărimea segmentului  $AA'$  al dreptei  $D$ , cuprins între două poziții  $P$  și  $P'$  ale planului  $P$  se numește *mărimea translației*.

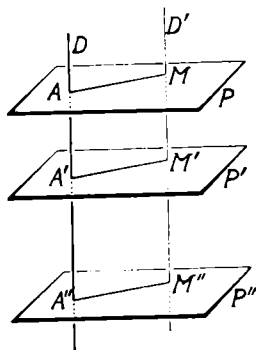


Fig. 76

**72. Segmente de drepte paralele cuprinse între plane paralele.** Fie două plane paralele  $P$  și  $R$  și dreptele paralele  $AB$  și  $CD$ , care le intersectează în punctele  $A, B$  și  $C, D$  respectiv (fig. 77).

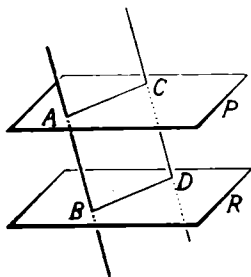


Fig. 77

Segmentele  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  ale celor două drepte paralele cuprinse între planele  $P$  și  $R$  sunt egale.

În adevăr, dreptele paralele  $AB$  și  $CD$  determină planul  $ABDC$ , care taie planele paralele  $P$  și  $R$  după dreptele paralele  $AC$  și  $BD$ . În acest caz, patrulaterul plan  $ABDC$  este un parale-

logram având laturile opuse paralele. Rezultă că laturile opuse sunt egale, adică  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

Putem enunța dar, următoarea

**Teoremă.** *Segmentele de drepte paralele cuprinse între plane paralele sunt egale.*

**Exemple.** Două muchii verticale ale clasei cuprinse între planul tavanului și planul podelei sunt egale, ca segmente paralele cuprinse între plane paralele. Tot astfel, două muchii paralele ale penarului, ale unei cutii obișnuite, cuprinse între două fețe opuse, două muchii ale picioarelor unei mese cuprinse între fața mesei și fața podelei sunt exemple de segmente paralele cuprinse între plane paralele, deci egale.

**73. Consecințe.** 1. Dacă două plane paralele  $P$  și  $P'$  taie mai multe drepte paralele  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  (fig. 78),

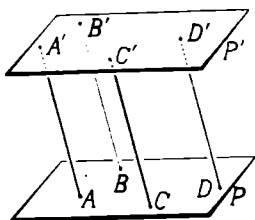


Fig. 78

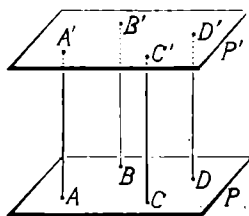


Fig. 79

segmentele dreptelor cuprinse între cele două plane paralele sunt egale, adică

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}.$$

În adevăr, segmentele paralele  $AA'$  și  $BB'$ , cuprinse între planele paralele  $P$  și  $P'$  sunt egale,  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ . Tot astfel,  $\overline{BB'} = \overline{CC'}$ ,  $\overline{CC'} = \overline{DD'}$ ; Rezultă că

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}.$$

2. În cazul când direcția segmentelor este perpendiculară pe cele două plane, măsura lor comună este cea mai scurtă distanță între cele două plane (fig. 79).

**74. Teoremă.** *Două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.*

Fie în spațiu planele  $P$  și  $Q$  paralele cu planul  $R$  (fig. 80). Planele  $P$  și  $Q$  sunt paralele între ele.

Dacă ducem o dreaptă  $D$  perpendiculară pe planul  $R$  în punctul  $C$ , această dreaptă este perpendiculară pe planul  $P$  în punctul  $A$  și pe planul  $Q$  în punctul  $B$ , deoarece fiecare din aceste plane este paralel cu planul  $R$ .

Planele  $P$  și  $Q$  sunt deci perpendiculare pe dreapta  $D$  în două puncte diferite  $A$  și  $B$  ale ei; ele sunt deci paralele. c. c. t. d.

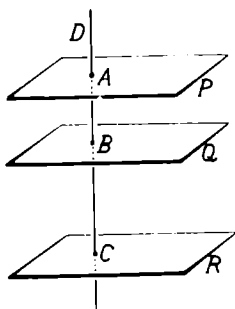


Fig. 80

**Exemplu.** Fața unei mese și planul tavanului sunt paralele cu planul podelei; ele sunt paralele între ele.

**75. Teoremă.** Să considerăm în spațiu trei plane paralele  $P, Q, R$  care să taie două drepte oarecari  $D$  și  $D'$ , respectiv în punctele  $A$  și  $A', B$  și  $B', C$  și  $C'$  (fig 81).

Segmentele dreptelor  $D$  și  $D'$  cuprinse între planele date, două câte două, sunt proporționale.

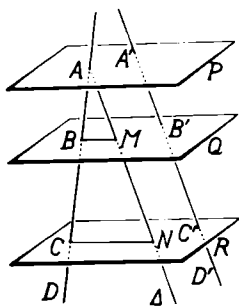


Fig. 81.

Să ducem prin punctul  $A$  al dreptei  $D$ , dreapta  $\Delta$  paralelă cu dreapta  $D'$ . Această dreaptă înțeapă planele  $Q$  și  $R$  în punctele  $M$  și  $N$  respectiv. Dreptele concurente  $D$  și  $\Delta$  determină un plan  $S$ , care taie planele paralele  $Q$  și  $R$  după dreptele paralele  $BM$  și  $CN$ . Urmează că în triunghiul  $ACN$ , dreapta  $BM$  paralelă cu latura  $CN$  imparte celelalte

două laturi în părți proporționale, adică

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MN}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}.$$

Insă  $\overline{AM} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{MN} = \overline{B'C'}$  ca segmente de drepte paralele cuprinse între plane paralele.

Înlocuind segmentele  $\overline{AM}$  și  $\overline{MN}$  prin egalele lor  $\overline{A'B'}$  și  $\overline{B'C'}$  în proporțiile scrise mai sus, obținem

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

egalități care arată că segmentele dreptelor D și D' cuprinse între planele P, Q și R sunt proporționale.

Enunțăm dar teorema :

*Trei plane paralele determină pe două drepte oarecari din spațiu, segmente proporționale.*

**76. Observare.** Dacă în locul a trei plane paralele, am avea un număr oarecare de plane paralele care întâlnesc două drepte în spațiu, demonstrăm în același fel, că *planele determină pe cele două drepte segmente proporționale.*

## UNGHIURI DIEDRE

**77. Definițiuni.** Fața unei uși închise reprezintă un semiplan în spațiu, care trece prin dreapta AB a balamalelor (fig. 82). Deschidem ușa și o oprim într-o poziție oarecare P'. Zicem că *fața ușii a descris un unghi diedru* în trecerea dela poziția P la poziția P'.

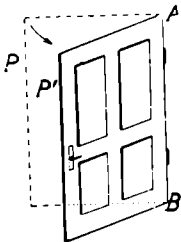


Fig. 82.

Prin urmare: *trecerea unui semiplan dela o poziție la alta, printr-o rotație în jurul dreptei care-l mărginește se numește unghi diedru.*

Poziția dela început a semiplanului poartă numele de *semiplan origină*; poziția la care s'a oprit semiplanul este numită *semiplan extremitate*. În general, dacă printr-o dreaptă din spațiu considerăm două semiplane, unul origină și altul extremitate, *figura formată de cele două semiplane se numește unghi diedru* sau mai simplu *diedru*.

Fie unghiul diedru format din semiplanele  $P$  și  $P'$ , care trec prin dreapta  $AB$  (fig. 83).

Semiplanele  $P$  și  $P'$  se numesc *fețele diedrului*, dreapta  $AB$  se numește *muchia diedrului*.

Unghiul diedru considerat, care are fața origină  $P$ , fața extremitate  $P'$  și muchia  $AB$ , se notează și se citește  $P'ABP$  (fig. 83).

În cazul unui singur unghi diedru, el se poate nota și citi mai simplu numai prin muchia lui, de ex. unghiul diedru  $AB$  (fig. 83).

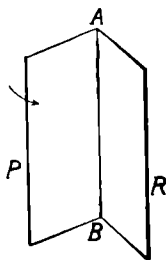


Fig. 83.

**78. Observări.** 1. Din definiția unghiului diedru, rezultă că unghiul diedru înseamnă schimbarea poziției unui semiplan, care se rotește în jurul dreptei care-l limitează.

2. Din aceeași definiție, rezultă că cel mai mare unghi diedru este acela care corespunde unei rotații ce aduce semiplanul extremitate în poziția semiplanului origină, dela care a plecat.

3. În cazul când semiplanul extremitate ocupă poziția semiplanului origină, rotația fiind nulă, unghiul diedru este egal cu zero (cel mai mic).

4. Un unghi diedru rezultând din rotația unui semiplan, este locul să ținem seamă de sensul în care se face rotația. Dacă presupunem că un observator este așezat pe muchia diedrului cu capul spre punctul  $A$ , dacă rotația semiplanului se face dela dreapta la stânga, adică contrar mișcării acelor unui ceasornic, zicem că *rotația se face în sensul pozitiv și diedrul este pozitiv*. Dacă rotația semiplanului se face dela stânga la dreapta, adică asemănător mișcării acelor unui ceasornic, *rotația se face în sensul negativ și unghiul diedru este negativ*.

**79. Unghiuri diedre adiacente.** Fie semiplanul  $P$  mărginit la dreapta  $AB$  (fig. 84).

Presupunem că semiplanul  $P$  se rotește în jurul dreptei  $AB$  până la poziția  $Q$ , cu unghiul diedru  $QABP$ . Semiplanul  $P$  se rotește mai departe, adică în același sens, dela poziția  $Q$  până la poziția  $R$ , cu unghiul diedru  $RABQ$ .

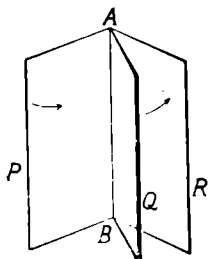


Fig. 84

Unghiurile diedre  $QABP$  și  $RABQ$  au aceeași muchie  $AB$ , fața  $Q$  comună, și fața origină a celui de al doilea diedru coincide cu fața extremitate a celui dintâi. Ele se numesc *unghiuri diedre adiacente*.

**80. Compararea unghiurilor diedre cu aceeași muchie, aceeași față origină și de același sens.**

A compara două unghiuri diedre înseamnă a afla cum este unul față de celălalt, ca mărime.

Fie unghiurile diedre  $QABP$  și  $RABP$  care au aceeași muchie  $AB$  și aceeași față origină  $P$  (fig. 85 și 86).

Putem avea două cazuri:

a) Dacă fața extremitate  $Q$  a diedrului  $QABP$  este cuprinsă între fața origină  $P$  și fața extremitate  $R$  a diedrului  $RABP$  (fig. 85), unghiul diedru

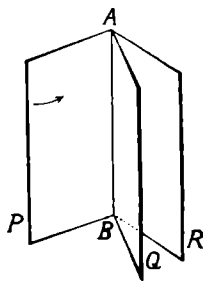


Fig. 85.

$QABP$  este mai mic decât unghiul diedru  $RABP$ , deoarece rotația semiplanului  $P$  pentru a naște unghiul diedru  $QABP$ , este mai mică ca rotația aceluiași semiplan pentru a naște unghiul diedru  $RABP$ .

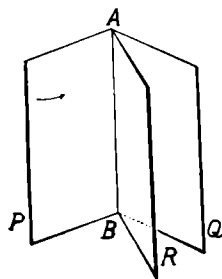


Fig. 86.

b) Dacă fața extremitate  $R$  a diedrului  $RABP$  este cuprinsă între fața origină  $P$  și fața extremitate  $Q$  a diedrului  $QABP$  (fig. 86), unghiul



diedru QABP este mai mare decât unghiul diedru RABP, deoarece rotația semiplanului P pentru a naște diedrul QABP este mai mare decât rotația lui pentru a naște diedrul RABP.

**81. Compararea unghiurilor diedre cu aceeași muchie și de același sens.**

Fie unghiurile diedre QABP și Q'ABP' care au aceeași muchie AB și același sens (fig. 87).

Pentru a compara aceste două unghiuri diedre, rotim diedrul QABP în sensul comun, până când fața origină P a lui se așterne pe fața origină P' a diedrului Q'ABP' rămas fix. În această poziție, unghiurile diedre au aceeași muchie, aceeași față origină și același sens.

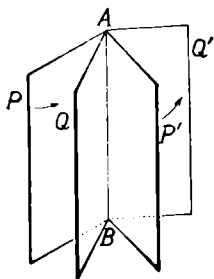


Fig. 87.

a) Dacă fața extremitate Q a diedrului QABP este cuprinsă între fața origină P' și fața extremitate Q', a

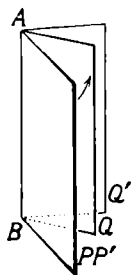


Fig. 88.

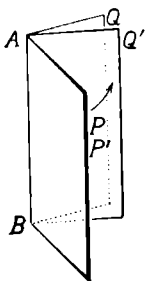


Fig. 89

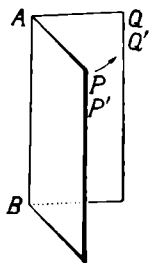


Fig. 90.

diedrului Q'ABP' (fig. 88), unghiul diedru QABP este mai mic decât unghiul diedru Q'ABP'.

b) Dacă fața extremitate Q a diedrului QABP ajunge astfel încât fața extremitate Q' a diedrului Q'ABP' este cuprinsă între fața origină P și fața extremitate Q a diedrului QABP (fig. 89), unghiul diedru QABP este mai mare decât unghiul diedru Q'ABP'.

c) Dacă fața extremitate  $Q$  a diedrului  $QABP$  se așterne pe fața extremitate  $Q'$  a diedrului  $Q'ABP'$  (fig. 90), unghiul diedru  $QABP$  este egal cu unghiul diedru  $Q'ABP'$ .

**82. Compararea unghiurilor diedre care n'au aceeași muchie.** Fie unghiurile diedre  $QABP$  și  $Q'A'B'P'$  (fig. 91).

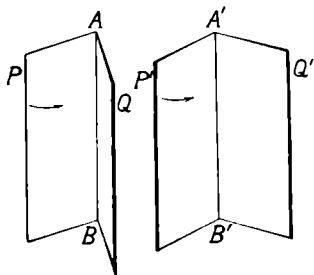


Fig. 91.

Pentru a compara aceste două diedre, mutăm diedrul  $QABP$  de exemplu, ca muchia lui  $AB$  să se așeze pe muchia  $A'B'$  a diedrului  $Q'A'B'P'$ .

În acest fel, diedrele au aceeași muchie și compararea

lor se face ca în cazul precedent.

**83. Unghiul plan corespunzător unui diedru.** Fie unghiul diedru  $QABP$ , al cărui sens este de exemplu pozitiv (fig. 92). Când semiplanul  $P$  se rotește în jurul muchiei  $AB$  ca să ocupe poziția feței extremitate  $Q$ , un punct oarecare  $M$  al feței origină  $P$  descrie un drum în spațiu ajungând în poziția  $N$ , în fața extremitate  $Q$ .

În această mișcare a punctului  $M$  în jurul muchiei  $AB$  (considerată ca *axă de rotație*), distanța punctului  $M$  la muchia  $AB$

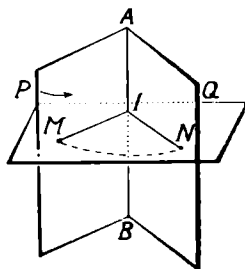


Fig. 92.

nu se schimbă. Dar această distanță a punctului  $M$  la muchia  $AB$  este măsurată de perpendiculara  $MI$  dusă din punctul  $M$  pe muchia  $AB$ .

Punctul  $I$  în rotația semiplanului  $P$  fiind pe muchia  $AB$  rămâne fix, așa că diferitele poziții ale perpendicularei  $MI$  sunt perpendiculare pe muchia  $AB$ , în punctul  $I$ . Deci se găsesc toate în același plan perpendicular pe muchia  $AB$ , în punctul  $I$ . Când semiplanul  $P$  ajunge în

poziția feței extremitate Q, perpendiculara MI ajunge în poziția IN.

Prin urmare, când semiplanul P se rotește în jurul muchiei AB, dela fața origină P până la fața extremitate Q, semidreapta IM se rotește în planul perpendicular pe muchia AB în punctul I, până la poziția IN.

Așa dar, unghiului diedru QABP format din semiplanele P și Q îi corespunde unghiul plan NIM format din intersecțiile planului perpendicular pe muchia AC în punctul I, cu fețele diedrului.

Unghiul NIM se numește *unghiul plan al unghiului diedru QABP*.

Observăm că unghiul plan NIM corespunzător diedrului QABP se poate construi ridicând în punctul I al muchiei AB, câte o perpendiculară pe muchie, în fiecare față a diedrului.

Este evident că la fiecare punct al muchiei diedrului corespunde câte un plan perpendicular pe muchie, deci câte un unghi plan, rezultat din intersecția planului, perpendicular cu fețele diedrului.

Se pune întrebarea: Cum sunt aceste unghiuri plane între ele?

Să arătăm că aceste unghiuri plane sunt egale între ele.

Pentru aceasta, să considerăm două unghiuri plane MIN și M'I'N' corespunzătoare diedrului QABP, în două puncte I și I' ale muchiei AB (fig. 93).

Laturile IM și I'M' perpendiculare în fața P pe muchia AB sunt paralele. De asemenea, laturile IM și I'N' perpendiculare în fața Q pe muchia AB sunt paralele. Unghiurile din spațiu MIN și M'I'N', având laturile respectiv paralele și de același sens, sunt egale.

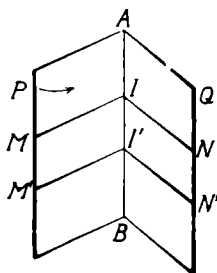


Fig. 93

Prin urmare: *Toate unghiurile plane obținute tăind*

*unghiul diedru prin plane perpendiculare pe muchie fiind egale, este de ajuns să considerăm numai unul din ele.*

**84. Relațiuni între unghiurile diedre și unghiurile lor plane.** Să considerăm unghiurile diedre QABP

și RABP cu aceeași muchie AB, aceeași față origină P și de acelaș sens, astfel că unghiul diedru RABP este mai mare ca unghiul QABP (fig. 94).

Tăiem aceste unghiuri diedre cu un plan S perpendicular pe muchia comună AB, care taie fețele P, Q, R după semidreptele IL, IM, IN. Astfel unghiului diedru RABP, îi corespunde unghiul plan NIL.

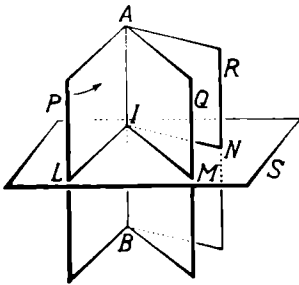


Fig. 94

Observăm că unghiul plan NIL corespunzător diedrului RABP este mai mare ca unghiul plan MIL corespunzător diedrului QABP.

Prin urmare, enunțăm teorema: *La două unghiuri diedre neegale, corespund două unghiuri plane neegale și anume, unghiului diedru mai mare îi corespunde unghiul plan mai mare.*

**Reciproc.** Fie unghiurile plane MIL și NIL așezate în planul S, astfel că  $\sphericalangle NIL > \sphericalangle MIL$  (fig. 94).

Ridicăm în punctul I perpendiculara AB pe planul S. Perpendiculara AB cu fiecare din semidreptele IL, IM, IN determină respectiv semiplanele P, Q, R, limitate la dreapta AB. Aceste semiplane definesc unghiurile diedre QABP și RABP, astfel că diedrul RABP este mai mare ca diedrul QABP.

Prin urmare: *La două unghiuri plane neegale, corespund unghiuri diedre neegale și anume, unghiului plan mai mare îi corespunde unghiul diedru mai mare.*

2. Fie unghiurile diedre QABP și SABR cu același sens (fig. 95).

Tălem aceste două unghiuri diedre cu un plan T perpendicular pe muchia AB, în punctul I. Acest plan taie fețele P, Q, R, S respectiv după semidreptele IC, ID, IE, IF. Unghiurilor diedre QABP și SABR, le corespund unghiurile plane DIC și FIE.

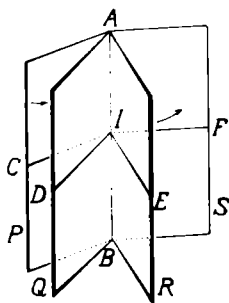


Fig. 95

Să rotim diedrul QABP în jurul muchiei AB și în sensul comun, diedrul SABR rămânând fix, până când fața origină P se așterne peste fața origină R a diedrului SABR. Prin această rotire, latura origină IC a unghiului plan DIC se așterne pe latura origină IE a unghiului plan FIE.

a) Dacă fața extremitate Q a unghiului diedru QABP este cuprinsă între fața origină R și fața extremitate S a diedrului SABR (fig. 96), latura extremitate ID este cuprinsă între latura origină IE și latura extremitate IF. Deci unghiul plan DIC corespunzător diedrului QABP este mai mic ca unghiul plan FIE corespunzător diedrului mai mare SABR. Tot astfel, dacă diedrul QABP este mai mare ca diedrul SABR, arătăm că unghiul plan DIC este mai mare ca unghiul plan FIE. Urmează deci teorema : *La două unghiuri diedre neegale, corespund unghiuri plane neegale și anume, unghiului diedru mai mare îi corespunde*

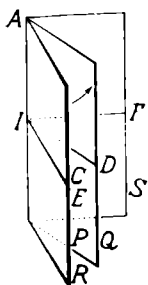


Fig. 96

*unghiul plan mai mare și reciproc.*

b) Dacă fața extremitate Q a diedrului QABP se așterne pe fața extremitate S a diedrului SABR (fig. 97), latura extremitate ID se așterne pe latura extremitate IF, deoarece ea se rotește într'un plan perpendicular pe muchia AB, în punctul I și trebuie să se găsească

în planul S, deci la intersecția planului perpendicular pe muchia AB, în punctul I cu planul S, care este IF. Deci unghiul plan DIC este egal cu unghiul plan FIE.

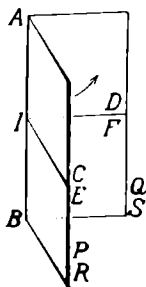


Fig. 97

Urmează teorema: *Unghiurile plane corespunzătoare la două unghiuri diedre egale sunt egale.*

**Observare.** Proprietatea demonstrată mai sus este adevărată și în cazul când unghiurile diedre considerate n'au aceeași muchie, căci putem mișca unul din diedre în spațiu, astfel ca muchia lui să coincidă cu muchia celui de al doilea diedru.

**Reciproc.** Fie două unghiuri plane DIC și FIE egale și în același plan T (fig. 98).

Ridicăm în punctul I, perpendiculara AB pe planul T. Perpendiculara AB determină cu fiecare din semidreptele IC, ID, IE, IF respectiv semiplanele P, Q, R, S, limitate la dreapta AB. Unghiurilor plane date DIC și FIE, le corespund unghiurile diedre QABP și SABR.

Să arătăm că unghiurile diedre QABP și SABR sunt egale.

Pentru aceasta, dăm unghiului plan DIC o mișcare de rotație în planul T, în jurul punctului I și în sensul diedrelor, până când latura origină IC se așterne pe latura origină IE. În această rotație, muchia AB păstrează o poziție fixă în spațiu, deoarece punctul I rămâne fix și planul T de asemenea. Urmează că semiplanele P și Q legate de semidreptele IC și ID se rotesc în jurul dreptei AB și când IC se așterne pe IE, semiplanul P coincide cu semiplanul R. Dar, din cauză că unghiurile

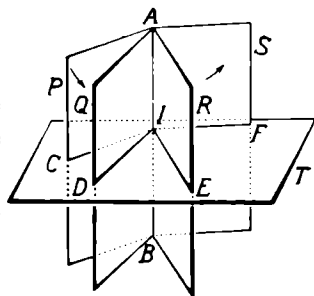


Fig. 98

plane DIC și FIE sunt egale și de același sens, când IC se așterne pe IE, latura extremitate ID se așterne pe latura extremitate IF. Urmează că semiplanul Q legat de semidreapta ID coincide după această rotație, cu semiplanul S.

Se vede dar că, dacă unghiurile plane se suprapun, se suprapun și unghiurile diedre corespunzătoare.

Rezultă dar teorema reciprocă:

*Două unghiuri diedre, ale căror unghiuri plane, corespunzătoare sunt egale, sunt egale.*

**85. Plan bisector al unui unghi diedru este semiplanul care trece prin muchia diedrului și împarte unghiul diedru în două diedre egale.**

Fiind dat unghiul diedru QABP (fig. 99), semiplanul R care-l împarte în două diedre RABP și QABR egale este planul bisector al diedrului dat.

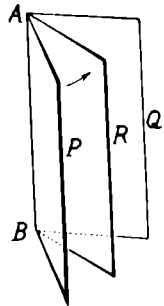


Fig. 99

Planul bisector al unui unghi diedru este numit mai scurt câteodată „bisectorul unghiului diedru.“

**86. Măsura unui unghi diedru.** Să considerăm unghiul diedru particular QABP, pentru care fața extremitate Q este în același plan cu fața origină P (fig 100).

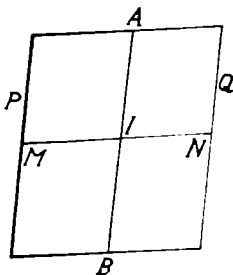


Fig. 100

Unghiul plan corespunzător acestui unghi diedru este unghiul cu laturile în prelungire NIM.

Cum toate unghiurile plane cu laturile în prelungire sunt egale, urmează că toate unghiurile diedre cu fețele în același plan sunt egale.

Însă, un unghi plan cu laturile în prelungire se împarte, după cum știm, în 180 unghiuri plane egale, adică 180 unghiuri de un grad. Fiecărui

din unghiurile plane de 1 grad îi corespunde un unghiu diedru, astfel că unghiul diedru cu fețele în același plan se descompune în 180 unghiuri diedre egale. Unul oarecare din aceste 180 unghiuri diedre se numește *unghiu diedru de 1 grad*. El folosește ca unitate de măsură pentru unghiurile diedre.

Urmează că unghiul diedru cu fețele în același plan are 180 unghiuri diedre de 1 grad, adică măsura unghiului diedru cu fețele în același plan este 180, aceeași ca măsura unghiului plan corespunzător.

Această proprietate este generală.

În adevăr, să luăm un unghiu diedru al cărui unghiu plan să conțină, de exemplu 30 unghiuri de 1 grad. Fiecărui unghiu plan de 1 grad îi corespunde un unghiu diedru de 1 grad. Prin urmare, măsura unghiului plan când luăm ca unitate de măsură unghiul de 1 grad este 30, iar măsura unghiului diedru când luăm ca unitate de măsură unghiul diedru de 1 grad este de asemenea 30.

Urmează deci teorema :

*Măsura unui unghiu diedru este egală cu măsura unghiului plan corespunzător.*

87. **Observări.** 1. Dacă unghiul plan corespunzător unui unghiu diedru conține  $n$  unghiuri de 1 grad, unghiul diedru conține  $n$  unghiuri diedre de 1 grad. Proprietatea enunțată este deci generală.

2. Din această proprietate, rezultă că toate proprietățile unghiurilor din Geometria plană au corespunzătoarele lor pentru unghiurile diedre. Astfel :

a) Două unghiuri diedre adiacente cu fețele exterioare în același plan sunt suplimentare (fig. 102).

b) Două unghiuri diedre opuse la muchie (fețele unuia sunt în același plan cu fețele celuilalt) sunt egale (fig 102).

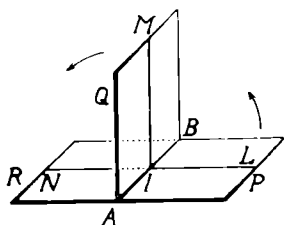


Fig. 101.



c) Dacă două plane se taie după o dreaptă, ele formează patru unghiuri diedre mai mici ca unghiul diedru cu fețele în același plan. Aceste unghiuri diedre sunt două câte două opuse la muchie, deci două

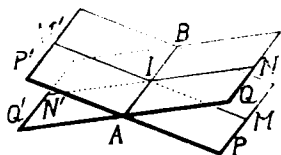


Fig. 102.

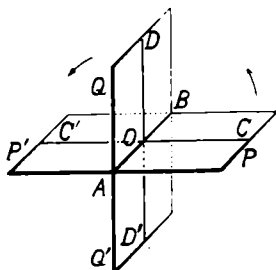


Fig. 103.

câte două egale. Dacă unul din aceste două unghiuri diedre este drept (are măsura egală cu 90), celelalte trei sunt deasemenea unghiuri drepte (fig. 103).

Un unghi diedru este drept când unghiul său plan corespunzător este drept.

Un unghi diedru este *ascuțit* sau *obtuz* după cum unghiul său plan este ascuțit sau obtuz.

Două unghiuri diedre sunt *complementare* sau *suplimentare* dacă unghiurile lor plane corespunzătoare sunt complementare sau suplimentare.

## PLANE PERPENDICULARE.

**88. Definiție.** Două plane care se taie după o dreaptă sunt *perpendiculare*, când formează un diedru drept.

Știm că un unghi diedru este drept când unghiul său plan este drept. Rezultă că *condițiunea ca două plane care se taie să fie perpendiculare este ca unghiul plan corespunzător diedrului format de ele să fie drept.*

Fie planele P și Q care se taie după dreapta AB (fig. 104).

Unghiul plan COD al diedrului format de ele fiind drept, diedrul PABQ este drept; planele P și Q sunt perpendiculare.

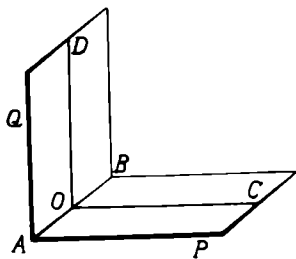


Fig. 104.

**Exemple.** Planul tavanului unei camere și planul unuia din pereți sunt plane perpendiculare. Tot plane perpendiculare sunt fața ușii și fața dușumelii, o față laterală a unui penar și fața mesei pe care este așezat, etc.

**89. Construcția unui plan perpendicular pe un plan dat.** Fie planul P (fig. 105). Să construim un plan perpendicular pe planul P.

Pentru aceasta, într'un punct O al planului P ridicăm perpendiculara OA pe acest plan. Prin dreapta AO trec însă o infinitate de plane. Fie R unul din aceste plane, care taie planul P după dreapta MN.

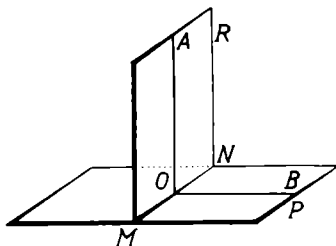


Fig. 105.

Să arătăm că planul R este perpendicular pe planul P.

În adevăr, planul R formează cu planul P unghiul diedru RMNP. Pentru a construi unghiul plan corespunzător diedrului RMNP, este de ajuns să ducem în planul P, perpendiculara OB pe muchia MN, în punctul O. Dreapta OA fiind perpendiculară pe planul P este perpendiculară pe muchia diedrului MN. Deci unghiul AOB este unghiul plan corespunzător diedrului RMNP.

Dar dreapta OA fiind perpendiculară pe planul P este perpendiculară pe dreapta OB din acest plan. Deci unghiul AOB, unghiul plan corespunzător diedrului RMNP, este drept; unghiul diedru RMNP este drept, adică planul R este perpendicular pe planul P.

Rezultă astfel teorema :

*Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, orice plan care trece prin acea dreaptă este perpendicular pe planul dat.*

**90. Aplicațiuni. 1** Un fir cu plumb în stare de repaos, trecând printr'un punct  $O$  al spațiului determină o direcțiune  $OA$  (fig. 105) numită *verticala* punctului  $O$ .

Orice plan perpendicular pe verticala unui punct  $O$  din spațiu se numește plan *orizontal* pe acea verticală. Astfel este planul  $H$ . (fig. 105).

Fie un plan oarece  $V$ , care trece prin verticala  $OA$ . Planul  $V$  este perpendicular pe orice plan orizontal perpendicular pe verticala  $OA$ , de oarece trece printr'o dreaptă  $OA$  perpendiculară pe orice plan orizontal.

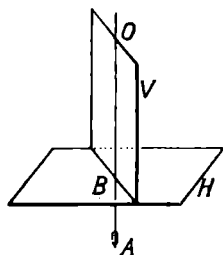


Fig. 106.

Această proprietate este întrebuințată de nenumărate ori în construcțiuni. Pentru ca să construiască un perete vertical, zidarul face ca fața lui să treacă printr'un fir cu plumb în stare de repaos, adică printr'o verticală.

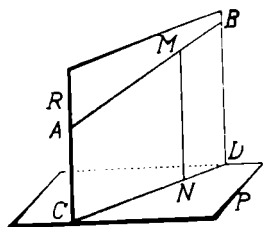


Fig. 107.

2. Fie în spațiu dreapta  $AB$  și un plan  $P$  (fig. 107). Să ducem prin dreapta  $AB$  un plan perpendicular pe planul  $P$ .

Coborim dintr'un punct oarecare  $M$  al dreptei  $AB$ , perpendiculara  $MN$  pe planul  $P$ . Dreptele concurente  $AB$  și  $MN$  determină planul  $R$ , care trecând prin dreapta  $MN$  perpendiculară pe planul  $P$  este perpendicular pe planul  $P$ .

**91. Teoremă.** Fie planele perpendiculare  $P$  și  $R$ , care se taie dupa dreapta  $AB$  (fig. 108). Ducem într'unul din

ele, de ex. în planul R, dreapta OM perpendiculară pe dreapta de intersecție AB.

Dreapta OM este perpendiculară pe planul P.

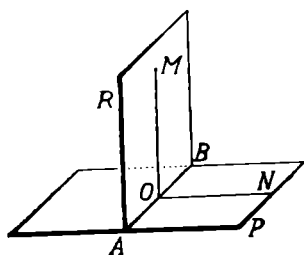


Fig. 108.

Să ducem în planul P, dreapta ON perpendiculară pe dreapta AB în punctul O. Semidreptele OM și ON formează unghiul MON, care este unghiul plan al diedrului format de cele două plane P și R, ele fiind perpendiculare în același punct pe muchia diedrului și cuprinse

respectiv în fiecare față. Planele P și R fiind date perpendiculare, unghiul plan MON al diedrului format de ele este drept, adică dreapta OM este perpendiculară pe dreapta AB.

Dreapta OM este astfel perpendiculară pe două drepte concurente AB și ON ale planului P; ea este deci perpendiculară pe planul P.

Rezultă dar teorema :

*Dacă două plane sunt perpendiculare, orice dreaptă dusă într'unul din ele perpendiculară pe dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe celălalt plan.*

**92 Teoremă reciprocă.** Fie în spațiu două plane perpendiculare P și R, care se taie după dreapta AB (fig. 108). Dacă dintr'un punct M al planului R, coborim perpendiculara MO pe planul P, dreapta MO este cuprinsă în planul R.

În adevăr, perpendiculara MO' coborită din punctul M al planului R pe dreapta de intersecție AB este perpendiculară pe planul P (teorema 90). Însă, din punctul M exterior pla-

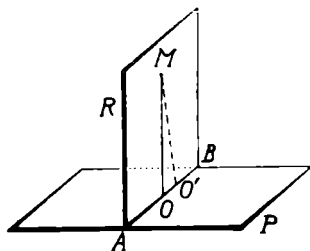


Fig. 109.

nului P, nu putem cobori decât o singură perpendiculară MO pe planul P. Urmează că dreapta MO' se confundă cu perpendiculara MO și prin urmare MO este cuprinsă în planul R.

Am dovedit astfel teorema reciprocă :

*Dacă două plane sunt perpendiculare și dintr'un punct al unuia coborim perpendiculara pe cellalt, această perpendiculară este cuprinsă în primul plan.*

**93. Consecință.** Fie un plan P (fig. 110). Ducem în acest plan, dreapta AB și într'un punct I al ei, planul Q perpendicular pe dreapta AB.

Planul Q este perpendicular pe planul P.

În adevăr, planul Q fiind perpendicular pe dreapta AB, invers dreapta AB este perpendiculară pe planul Q. Planul P trecând prin dreapta AB perpendiculară

pe planul R este perpendicular pe planul Q. Deci, invers, planul R este perpendicular pe planul P.

Avem proprietatea :

*Orice plan perpendicular pe o dreaptă dintr'un plan este perpendicular pe acel plan.*

**Observare.** Această proprietate ne dă putința să construim un plan perpendicular pe un plan dat.

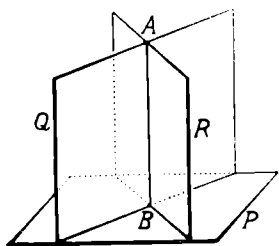


Fig. 111.

**94. Teoremă.** Să considerăm două plane P și Q care se taie, ambele perpendiculare pe un al treilea plan R. (fig. 111). Planele P și Q se taie după dreapta AB.

Dreapta AB este perpendiculară pe planul R.

Să coborim dintr'un punct oarecare, de ex. A, al intersecției AB o perpendiculară pe

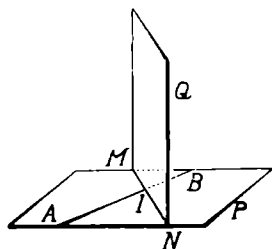


Fig. 110.

planul R. De oarece punctul A este comun planelor P și Q, perpendiculara coborită este cuprinsă atât în planul P, cât și în planul Q (teorema 91). Ceeace înseamnă că perpendiculara coborită nu este alta decât dreapta de intersecție AB. Prin urmare, dreapta de intersecție AB a planelor P și Q este perpendiculară pe planul R.

Rezultă dar teorema :

*Dacă două plane care se taie sunt perpendiculare pe un al treilea plan, intersecția lor este perpendiculară pe cel de al treilea plan.*

**Exemple. 1.** Doi pereții laterali  $P_1$  și  $P_2$  care se taie

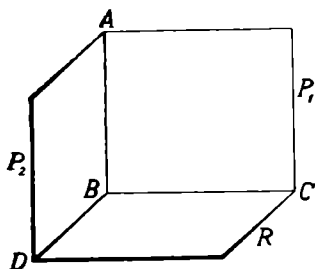


Fig. 112.

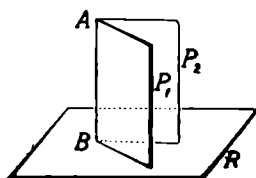


Fig. 113.

ai unei camere fiind perpendiculare pe planul podelei R, intersecția lor AB (muchia camerei) este perpendiculară pe planul podelei (fig. 112).

2. Două fețe  $P_1$ ,  $P_2$  ale unei cărți deschise, așezată perpendicular pe fața unei mese R se taie astfel după muchia cărții AB, care este perpendiculară pe planul feței mesei (fig. 113).

**95. Observare.** Dacă un plan este perpendicular pe intersecția altor două plane, el este perpendicular pe fiecare din celelalte două plane, din cauză că este perpendicular pe dreapta de intersecție, care este cuprinsă în fiecare din celelalte două plane.

**96. Aplicații.** Fie planele  $P$  și  $Q$ , care se taie după dreapta  $MN$  și un punct  $O$  din spațiu, exterior (fig. 114). Coborim din punctul  $O$  perpendicularele  $OA$  și  $OB$  pe planele  $P$  și  $Q$  respectiv.

Dreptele concurente  $OA$  și  $OB$  determină planul  $S$ . Intersecția  $MN$  a planelor  $P$  și  $Q$  este perpendiculară pe planul  $S$ .

Planul  $S$  taie planele  $P$  și  $Q$  respectiv după dreptele  $IA$  și  $IB$ . Patrulaterul plan  $OAIB$  are cele două unghiuri opuse  $A$  și  $B$  drepte; urmează că celelalte două unghiuri opuse  $O$  și  $I$  sunt suplimentare.

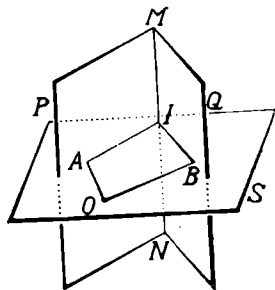


Fig. 114.

Dacă unghiul  $O$  este drept, suplimentul său este și el drept și reciproc.

Fie planele  $P$  și  $Q$  care se taie după dreapta  $MN$ , formând un unghi diedru ascuțit (fig. 115).

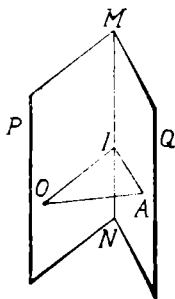


Fig. 115.

Luăm în una din fețe, de ex. în fața  $P$ , punctul  $O$  și coborim din  $O$  perpendiculara  $ON$  pe fața  $Q$ .

Planul perpendicular pe muchia  $MN$  și trecând prin dreapta  $OA$  taie fețele  $P$  și  $Q$  după dreptele  $OI$  și  $IA$  respectiv. Triunghiul  $OIA$  format este dreptunghi în  $A$ , de oarece dreapta  $OA$  perpendiculară pe planul  $Q$  este perpendiculară pe dreapta  $AI$  din acest plan. Rezultă că unghiurile  $O$  și  $I$  sunt complementare.

## PROIECȚIUNI.

**97. Definițiuni.** Fie în spațiu un plan  $P$  și un punct  $A$  exterior lui (fig. 116). Din punctul  $A$  se poate cobori o perpendiculară  $Aa$  pe planul  $P$  și numai aceasta

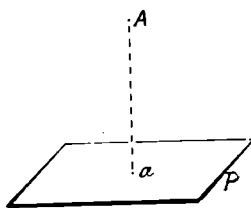


Fig. 116.

*Piciorul a al perpendicularei coborâtă din punctul  $A$  pe planul  $P$  se numește proiecțiunea ortogonală a punctului  $A$  (sau mai scurt proiecțiunea) pe planul  $P$ .*

Planul  $P$  ia numele de *plan de proiecțiune*, iar perpendiculara  $Aa$  se numește *proiectantă*,

În general, proiecțiunea unui punct se înseamnă cu aceeași literă mică ca litera cu care am însemnat punctul din spațiu.

**98. Caz particular.** Dacă punctul a cărui proiecțiune vrem s'o avem este în planul  $P$  (fig. 117), proiecția lui coincide cu punctul.

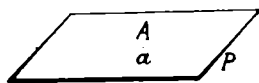


Fig. 117.

**99. Proprietate.** *Proiecțiunea pe un plan a unui punct din spațiu este bine determinată.*

În adevăr, din punctul  $A$  (fig. 116) nu putem cobori pe planul de proiecție  $P$  decât o singură perpendiculară, care înțeapă planul într'un singur punct; urmează că proiecția punctului  $A$  este unică.

Mai spunem: *Un punct din spațiu fiind dat, proiecțiunea lui pe un plan este determinată.*

**Reciproca** nu-i adevărată, căci dându-se proiecția  $a$  a unui punct pe un plan  $P$ , (fig. 118), oricare punct  $A_1, A_2, A_3, \dots$  al perpendicularei ridicată în punctul  $a$  pe planul  $P$  are ca proiecție punctul  $a$ .

Spunem pe scurt: *Proiecția unui punct fiind dată, punctul din spațiu nu-i determinat.*



**100. Observare.** Pentru a putea determina punctul din spațiu când se dă proiecția  $a$  a lui pe un plan  $P$ , trebuie să cunoaștem măsura proiectantei  $Aa$  și semnul ei. Convenim să scriem înaintea măsurii proiectantei  $Aa$  semnul  $+$  sau  $-$ , după cum punctul  $A$  se află într'o regiune sau alta a spațiului, determinată de planul  $P$ .

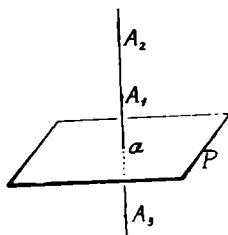


Fig. 118.

Măsura algebrică a proiectantei  $\overline{Aa}$  se numește *cota* punctului.

Putem dar enunța proprietatea: *Un punct din spațiu poate fi determinat prin proiecția și cota lui.*

**101. Proiecția unei linii drepte.** Fie dreapta  $AB$  în spațiu și planul de proiecție  $P$  (fig. 119).

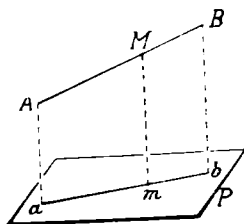


Fig. 119.

Pentru a avea proiecția dreptei  $AB$  pe planul  $P$ , proiectăm fiecare din punctele ei pe planul  $P$ . Figura formată de proiecțiunile punctelor dreptei  $AB$  este proiecția dreptei.

Să demonstrăm că *proiecțiunea unei drepte pe un plan este o linie dreaptă.*

Fie dreapta  $AB$  și planul de proiecție  $P$  (fig. 119). Luăm un punct oarecare pe dreapta  $AB$ , de ex.  $B$  și-l proiectăm în  $b$  pe planul  $P$ . Proiectanta  $Bb$  și dreapta  $AB$  determină un plan  $R$  perpendicular pe planul  $P$ , de oarece trece prin dreapta  $Bb$ , care este perpendiculară pe planul  $P$ . Planul  $R$  taie planul  $P$  după dreapta  $ab$ .

Dreapta  $ab$  este proiecția dreptei  $AB$ .

Pentru a dovedi aceasta, este destul să arătăm că proiecția unui punct oarecare  $M$  al dreptei  $AB$  este pe  $ab$ .

În adevăr, proiectanta  $Mm$  a punctului  $M$  fiind per-

pendiculara coborită dintr'un punct al planului R pe planul P, după o proprietate demonstrată (91) este așezată în planul R. Ea înțeapă planul P într'un punct comun planelor P și R, deci într'un punct al dreptei  $ab$ . Așa dar, oricare punct al dreptei AB se proiectează pe planul P pe dreapta  $ab$ .

Spunem aceeași proprietate sub forma: *Proiecția dreptei AB planul P este dreapta ab.*

**102. Observări.** 1. Planul R determinat de dreapta AB și proiectanta unuia din punctele ei intersectează planul P după dreapta  $ab$  care este proiecția dreptei AB. Acest plan cuprinde proiectantele tuturor punctelor dreptei, după cum am dovedit mai sus. De aceea, planul R se numește *planul proiectant* al dreptei AB.

2. O dreaptă în spațiu este determinată de două din

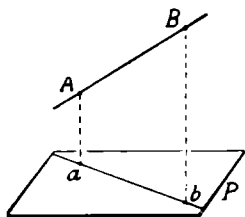


Fig. 120.

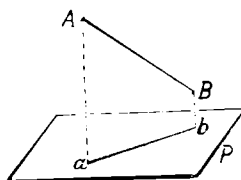


Fig. 121.

punctele ei. Pentru a avea proiecția unei drepte D pe un plan P (fig. 120), proiectăm pe acest plan, două puncte oarecari A și B ale ei. Fie  $a$  și  $b$  proiecțiunile respective ale punctelor A și B. Dreapta  $ab$  din planul P este proiecția dreptei AB pe planul P (fig. 121).

Urmează că proiecția segmentului de dreaptă  $\overline{AB}$  este segmentul  $\overline{ab}$ , care are ca origină proiecția originii și ca extremitate proiecția extremității segmentului dat.

**103. Poziții particulare ale unei drepte față cu planul de proiecție.** O dreaptă în spațiu poate avea față cu un plan de proiecție unele poziții particulare:

a) *Dreapta este cuprinsă în planul de proiecție (fig. 122).*

Proiecția fiecărui punct coincidând cu punctul, urmează că proiecția dreptei coincide cu dreapta. În figura 122, proiecția  $ab$  a dreptei  $AB$  coincide cu dreapta  $AB$ .

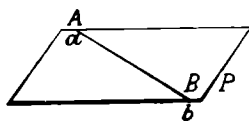


Fig. 122.

b) *Dreapta este paralelă cu planul de proiecție. În*

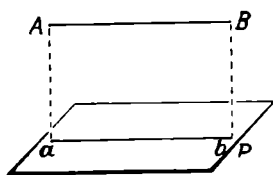


Fig. 123

acest caz, planul proiectant al dreptei taie planul de proiecție după o dreaptă paralelă cu dreapta din spațiu. Proiecția dreptei  $AB$  (fig. 123) paralelă cu planul de proiecție  $P$  este paralelă cu dreapta.

c) *Dreapta este perpendiculară pe planul de proiecție. În acest caz, proiectantele punctelor dreptei coincid cu dreapta. Proiecția dreptei este un punct. Astfel, proiecția dreptei  $AB$  perpendiculară pe planul  $P$  (fig. 124) în acest plan este punctul  $a$ .*

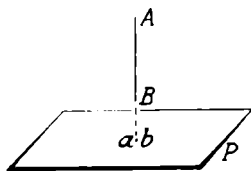


Fig. 124.

**104. Teoremă.** *Proiecția unei drepte pe un plan este bine determinată.*

În adevăr, printr'o dreaptă din spațiu nu se poate duce decât un plan proiectant față de planul de proiecție și intersecția lui cu planul de proiecție este bine determinată.

*Reciproca nu-i adevărată.* Dându-se proiecția unei drepte din spațiu pe un plan  $P$ , dreapta nu-i determinată, deoarece orice dreaptă cuprinsă în planul perpendicular pe planul  $P$ , care trece prin proiecția dată are ca proiecție proiecția dată.

**Observare.** Dacă odată cu proiecția dreptei se dau proiecțiunile a două puncte ale ei și cotele lor, dreapta din spațiu se poate determina.

**105. Proiecțiunile a două drepte paralele.** Fie în spațiu două drepte paralele  $AB$  și  $A'B'$  și planul de proiecție  $P$  (fig. 125). Proiectăm dreptele  $AB$  și  $A'B'$  pe planul  $P$ ; obținem proiecțiunile lor  $ab$  și  $a'b'$  respectiv.

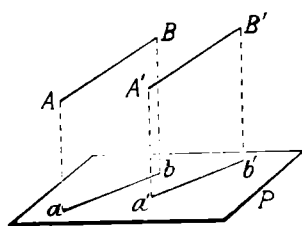


Fig. 125

Să arătăm că proiecțiunile  $ab$  și  $a'b'$  sunt paralele.

Proiecția unei drepte fiind intersecția planului ei proiectant cu planul de proiecție, să considerăm planele proiectante ale dreptelor  $AB$  și  $A'B'$ , de-

terminate respectiv de fiecare dreaptă și proiectanta unuia din punctele ei, de ex. proiectantele punctelor  $A$  și  $A'$  respectiv. Planele proiectante  $\alpha AB$  și  $\alpha'A'B'$  sunt paralele fiecare conținând două direcțiuni paralele respectiv cu două direcțiuni din celălalt. Intersecțiile lor cu planul de proiecție  $P$ , adică dreptele  $ab$  și  $a'b'$ , sunt paralele, ca intersecții a două plane paralele cu un al treilea plan.

Rezultă dar teorema :

*Proiecțiunile a două drepte paralele pe același plan de proiecție sunt paralele.*

Reciproca nu-i adevărată, adică dacă proiecțiile a două drepte din spațiu pe același plan de proiecție sunt paralele, dreptele din spațiu pot fi paralele sau nu.

### Unghiul unei drepte cu un plan.

**106. Teoremă.** *Unghiul făcut de o dreaptă cu proiecția ei pe un plan este mai mic decât unghiul ce face aceeași dreaptă cu orice altă dreaptă din plan, care trece prin piciorul ei.*

Fie în spațiu dreapta  $AB$  și planul de proiecție  $P$  (fig. 126).

Proiectăm dreapta  $AB$  pe planul  $P$  după dreapta  $Ba$

și ducem în planul  $P$ , din piciorul  $B$  al dreptei  $AB$  o dreaptă oarecare  $BC$ .

Să arătăm că unghiul  $ABa$  făcut de dreapta  $AB$  cu proiecția ei  $Ba$  este mai mic decât unghiul  $ABC$  făcut de dreapta  $AB$  cu dreapta dusă  $BC$ .

Luăm pe semidreapta  $BC$ , segmentul  $\overline{BC} = \overline{Ba}$  și ducem segmentul de dreaptă  $\overline{AC}$ . Segmentul  $\overline{AC}$  oblic din punctul  $A$  până la planul  $P$  este mai mare ca segmentul perpendicular  $\overline{Aa}$ .

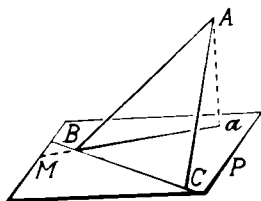


Fig. 126.

Triunghiurile formate  $ABa$  și  $ABC$  au două laturi egale ( $\overline{AB} = \overline{AB}$  comună,  $\overline{Ba} = \overline{BC}$  prin construcție) și cea de a treia latură neegală ( $\overline{Aa} < \overline{AC}$ ). Urmează că latura mai mică din triunghiul  $ABa$  se opune unghiului mai mic, adică

$$\sphericalangle ABa < \sphericalangle ABC.$$

Dreapta  $BC$  putând avea orice direcție în planul  $P$ , trecând însă prin punctul  $B$ , urmează că unghiul dreptei  $AB$  cu proiecția ei pe planul  $P$  este mai mic decât unghiul făcut de aceeași dreaptă  $AB$  cu orice altă dreaptă din același plan  $P$ , care să treacă prin punctul  $B$ .

Teorema enunțată a fost deci demonstrată.

**Definiție.** *Unghiul ce face o dreaptă cu proiecția ei pe un plan se numește unghiul dreptei cu acel plan.*

**107. Observări.** 1. Dacă dreapta  $BC$  s'ar roti în planul  $P$ , în jurul punctului  $B$ , unghiul  $ABC$  al dreptei  $AB$  cu dreapta  $BC$  variază. Cea mai mică valoare a lui este unghiul  $ABa$ ; cea mai mare valoare a lui este  $ABM$ , când dreapta  $BC$  este în prelungirea semidreptei  $Ba$ .

2. Unghiul  $ABa$  pe care dreapta  $AB$  îl face cu planul  $P$  este complementul unghiului ascuțit  $BAA$  al dreptei

AB cu proiectanta unuia din punctele ei, de oarece triunghiul dreptunghiu  $ABa$  ne dă

$$\sphericalangle ABA + \sphericalangle BAA = 90^\circ.$$

### Linia de cea mai mare pantă a unui plan.

**108. Teoremă.** *Unghiul ce-l face o dreaptă de pe o față a unui diedru, cu proiecția ei pe cealaltă față a diedrului are cea mai mare valoare, când dreapta este perpendiculară pe muchia diedrului.*

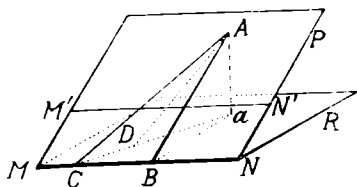


Fig. 127.

Fie unghiul diedru  $PMNR$  (fig. 127). Din același punct  $A$  al feței  $P$ , să ducem perpendiculara  $AB$  și oblică  $AC$  pe muchia  $MN$ .

Proiecțiunile dreptelor  $AB$  și  $AC$  pe fața  $R$  sunt respectiv  $Ba$  și  $Ca$ .

Să comparăm unghiurile  $ABa$  și  $ACa$  făcute de fiecare din dreptele  $AB$  și  $AC$  cu proiecția ei pe cealaltă față a diedrului.

Observăm că dreapta  $Aa$  fiind perpendiculară pe planul  $R$  și dreapta  $AB$  fiind perpendiculară pe dreapta  $MN$  din același plan, după reciproca teoremei celor trei perpendiculare, dreapta  $aB$  este perpendiculară pe dreapta  $MN$ , muchia diedrului. Urmează că dreapta  $Ca$  este oblică pe muchia  $MN$  și deci  $\overline{Ba} < Ca$ .

Luăm pe semidreapta  $aC$ , segmentul  $aD = aB$  și ducem segmentul  $AD$ . Triunghiurile dreptunghice formate  $ABa$  și  $ADa$  sunt egale, având catetele lor respectiv egale; rezultă că  $\sphericalangle ABA = \sphericalangle ADA$ .

Însă, unghiul  $ADa$  este exterior triunghiului  $ACD$  și deci mai mare ca unghiul interior  $ACD$  al triunghiului; atunci și unghiul  $ADa$  este mai mare ca unghiul  $ACa$ . Prin urmare, unghiul perpendicularei  $AB$  cu proiecția ei  $aB$  este mai mare decât unghiul oblicei  $AC$  cu proiecția  $aC$ .

Deoarece din punctul  $A$  al planului  $P$ , putem duce o singură perpendiculară  $AB$  și o infinitate de oblice pe muchia  $MN$ , unghiul perpendiculararei  $AB$  cu proiecția ei pe planul  $R$  este mai mare decât unghiul oricărei oblice din același punct pe muchia  $MN$ , cu proiecția ei pe planul  $R$ .

Teorema enunțată este astfel demonstrată.

**109. Observări.** 1. Unghiul  $ABa$  (fig. 127) este chiar unghiul plan al diedrului format de planele  $P$  și  $R$ .

2. Dacă ducem în planul  $P$ , dreapta  $M'N'$  paralelă cu muchia  $MN$  a diedrului  $PMNR$ , dreapta  $AB$  este perpendiculară pe dreapta  $M'N'$ , fiind perpendiculară pe paralela ei  $MN$ .

Însă dreapta  $M'N'$  este paralelă cu planul  $R$ , fiind paralelă cu dreapta  $MN$  din acest plan. Rezultă că dreapta  $AB$  este perpendiculară pe toate dreptele planului  $P$  paralele cu planul  $R$ , fiindcă în planul  $P$  putem duce o infinitate de drepte paralele cu  $MN$  și deci și cu planul  $R$ .

*Dreapta  $AB$  este numită dreapta de cea mai mare pantă a planului  $P$  față pe planul  $R$ .*

3. Unghiul plan al diedrului  $PABR$  este unghiul cel mai mare ce-l poate face unul din cele două plane cu diferite drepte cuprinse în celălalt plan.

4. Unghiul de cea mai mare pantă al unui plan față de planul orizontal are deosebită importanță în construirea de drumuri, șosele, căi ferate pe un plan inclinat.

**110. Proiecția unui unghi drept pe un plan.** Fie în spațiu unghiul drept  $BAC$  (fig. 128) și planul de proiecție  $P$ , astfel că laturile unghiului  $BAC$  sunt paralele cu planul  $P$ .

Proiectăm unghiul  $BAC$  pe planul  $P$ , proiectând fiecare din laturile lui;  $bac$  este proiecția unghiului  $BAC$ .

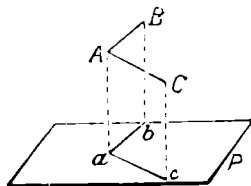


Fig. 128.

Să arătăm că unghiul  $bac$  este drept. Observăm că laturile unghiului  $BAC$  fiind pa-

rarele cu planul  $P$ , ele sunt respect  $\vee$  paralele cu proiecțiunile lor, adică  $AB$  este paralelă cu  $ab$  și  $AC$  este paralelă cu  $ac$ .

Proiectanta  $Aa$  fiind perpendiculară pe planul  $P$  este perpendiculară pe semidreptele  $ab$  și  $ac$  din acest plan. Aceeași proiectantă  $Aa$  perpendiculară pe  $ab$  este perpendiculară și pe paralela ei  $AB$ . Prin urmare, semidreapta  $AB$  fiind perpendiculară pe  $Ac$  și  $Aa$  este perpendiculară pe planul lor  $CAa$ . Paralela  $ab$  cu  $AB$  este și ea perpendiculară pe planul  $CAa$  și deci pe semidreapta  $ac$  din acest plan. Rezultă că unghiul  $bac$  are laturile perpendiculare, adică este unghi drept.

Putem deci enunța următoarea

**Teorema.** *Un unghi drept se proiectează după un unghi drept pe un plan paralel cu laturile lui.*

Aceeași teoremă se mai poate enunța: *Dacă două drepte perpendiculare în spațiu sunt paralele cu un plan, proiecțiile lor pe acest plan sunt perpendiculare.*

b) Fie acum în spațiu, unghiul drept  $BAC$  care să aibă numai una din laturile lui, de ex.  $BA$ , paralelă cu planul de proiecție  $P$  (fig. 129). Proiectăm unghiul  $BAC$  pe planul  $P$ ; găsim unghiul  $bac$ .

Să arătăm că unghiul  $bac$  este drept.

Pentru aceasta, observăm că proiectanta  $Aa$  fiind perpendiculară pe planul de proiecție  $P$  este perpendiculară pe semidreapta  $ab$  din acest plan. Urmează că  $Aa$  este perpendiculară și pe dreapta  $AB$ , paralelă cu  $ab$ . Astfel dreapta  $AB$  este perpendiculară pe dreptele concurente  $AC$  și  $Aa$  și deci și pe planul lor  $CAa$ . Dreapta  $AB$  fiind perpendiculară pe planul

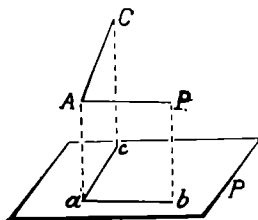


Fig. 129

$CAa$ , paralela ei  $ab$  este perpendiculară pe același plan  $CAa$  și prin urmare pe dreapta  $ac$  cuprinsă în acest



plan. Așa dar,  $ab$  este perpendiculară pe  $ac$ , adică unghiul  $bac$ , proiecțiunea unghiului drept  $BAC$ , este tot unghiul drept.

Putem deci enunța teorema mai generală decât cea precedentă :

*Proiecția pe un plan a unui unghiul drept, care are una din laturi paralelă cu acest plan, este tot un unghiul drept.*

Această teoremă se mai poate enunța și astfel :

*Dacă două drepte sunt perpendiculare în spațiu și una din ele este paralelă cu un plan, proiecțiunile lor pe acest plan sunt perpendiculare.*

**Exemplu.** Unghiul drept format de două muchii ale tavanului clasei, care se întâlnesc, se proiectează după un unghiul drept pe planul podelei, vârful proiecțiunii fiind pe aceeași muchie cu unghiul din spațiu. În acest caz, planele proiectante ale laturilor unghiului format de cele două muchii ale tavanului sunt respectiv fețele celor doi pereți.

**Observare.** Ipoteza teoremei de mai sus având două părți, urmează că această teoremă admite două teoreme reciproce.

**111. Teorema reciprocă I.** *Dacă un unghiul din spațiu, care are una din laturi paralelă cu un plan, se proiectează pe acest plan după un unghiul drept, unghiul din spațiu este drept.*

Fie în spațiu unghiul  $BAC$ , care se proiectează pe planul  $P$  paralel cu latura  $AB$ , după unghiul drept  $bac$  (fig 130). Să arătăm că unghiul din spațiu  $BAC$  este drept.

Proiectanta  $Aa$  fiind perpendiculară pe planul  $P$  este perpendiculară pe dreapta  $ab$  din acest plan. Atunci, dreapta  $ab$  dată perpendiculară pe  $ac$  este perpendiculară pe  $Aa$  și deci și pe planul lor  $Aac$ . Dreptele  $AB$

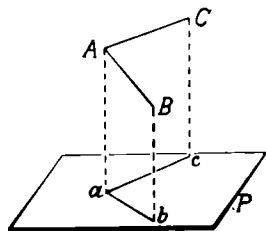


Fig. 130

și  $ab$  fiind paralele, planul  $Aac$  perpendicular pe  $ab$  este perpendicular pe dreapta  $AC$  din acest plan. Ceea ce înseamnă că unghiul  $BAC$  din spațiu este drept.

Teorema reciprocă enunțată a fost deci demonstrată.

**112 Teorema reciprocă II.** *Dacă un unghi drept se proiectează pe un plan după un unghi drept, una din laturile lui cel puțin este paralelă cu planul de proiecție.*

Fie în spațiu unghiul drept  $BAC$ , care se proiectează pe planul  $P$  după unghiul drept  $bac$  (fig. 131).

Să demonstrăm că una din laturile unghiului drept  $BAC$  cel puțin este paralelă cu planul  $P$ , de ex.  $AC$ , este paralelă cu planul  $P$ .

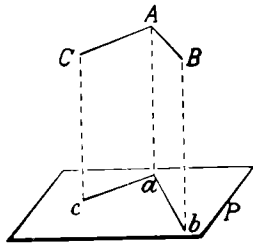


Fig. 131.

În adevăr, proiectanta  $Aa$  perpendiculară pe planul  $P$  este perpendiculară pe dreptele  $ac$  și  $ab$  din acest plan. Astfel, dreapta  $ab$  fiind perpendiculară pe dreptele concurente  $ab$  și  $Aa$  este perpendiculară pe planul lor  $ACca$  și

deci și pe dreapta  $AC$  din acest plan. Rezultă că dreapta  $AC$  este perpendiculară pe dreptele neperalele  $AB$  și  $ab$  din planul  $ABba$ ; prin urmare, dreapta  $AC$  este perpendiculară pe acest plan. Dreptele  $AC$  și  $ac$  perpendiculare în două puncte deosebite pe planul  $ABba$  sunt paralele; ceea ce înseamnă că dreapta  $AC$ , latura unghiului  $BAC$ , este paralelă cu planul  $P$ , fiind paralelă cu  $ac$  din acest plan.

**Observare.** Aceste teoreme și teoremele lor reciproce au deosebită importanță și numeroase aplicațiuni în Geometria descriptivă.

**113. Perpendiculara comună la două drepte în spațiu.** Fie în spațiu dreptele  $AB$  și  $CD$ , care nu sunt în același plan (fig. 132). Printr'un punct al uneia, de ex. punctul  $C$  al dreptei  $CD$ , să ducem dreapta  $CE$  paralelă

cu AB. Dreptele concurente CD și CE determină planul P, paralel cu dreapta AB, deoarece conține dreapta CE paralelă cu AB.

Proiectăm dreapta AB pe planul P; fie  $ab$  această proiecție.

Din punctul I, unde proiecția  $ab$  taie dreapta CD, ridicăm perpendiculara IL pe planul P.

Să arătăm că dreapta IL este perpendiculară în același timp pe ambele drepte date AB și CD; ea este unică.

În adevăr, dreapta IL fiind perpendiculară pe planul P este perpendiculară pe dreapta CD din acest plan.

Dreapta IL este perpendiculară însă și pe dreapta  $ab$  din același plan P și deci și pe paralela ei AB.

Așa dar, dreapta IL este perpendiculară pe dreptele date AB și CD.

Perpendiculara IL este unică, căci dacă am mai putea duce o altă dreaptă  $I'L'$  perpendiculară pe AB și CD, dreapta  $I'L'$  ar fi perpendiculară și pe paralela  $a'b'$  cu dreapta AB, dusă prin punctul I', în planul P. Dreapta  $I'L'$  ar fi atunci perpendiculară pe planul P. Însă perpendiculara din punctul L' al dreptei AB pe planul P își are piciorul în punctul l' al dreptei  $ab$ , proiecția dreptei AB. Ar urma să putem duce din același punct L' exterior planului P, două perpendiculare  $L'I'$  și  $L'l'$  pe planul P, ceea ce este absurd.

Rezultă următoarea teoremă :

*Fiind date două drepte în spațiu neașezate în același plan, se poate duce o dreaptă perpendiculară pe dreptele date și numai una.*

**Definiție.** Dreapta IL perpendiculară pe cele două drepte se numește *perpendiculara comună a celor două drepte*.

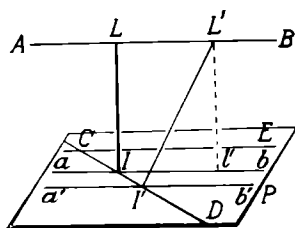


Fig. 132.

Perpendiculara comună  $IL$  a dreptelor  $AB$  și  $CD$  este mai scurtă decât orice alt segment de dreaptă, de ex.  $I'L'$  ce unește un punct  $L'$  al dreptei  $AB$  cu un punct  $I'$  al dreptei  $CD$ .

Observăm că  $\overline{L'I'} < \overline{L'I}$  căci perpendiculara este mai scurtă decât oblica dusă din același punct exterior planului  $P$ , la planul  $P$ .

Însă  $\overline{L'I} = \overline{IL}$ , ca paralele cuprinse între paralele. Rezultă că  $\overline{IL} < \overline{I'L'}$ .

De aceea, segmentul  $IL$  se mai numește *cea mai scurtă distanță* între dreptele date  $AB$  și  $CD$ .

**Exemple.** Dacă considerăm două muchii ale clasei, una așezată în planul tavanului, alta în planul podelei, care să nu fie pe același plan al unui perete lateral, de ex.  $AB$  și  $CD$  (fig. 133), muchia  $AC$  care unește extremitățile lor  $A$  și  $C$  este perpendicularara comună a celor două drepte  $AB$  și  $CD$ .

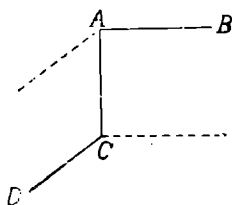


Fig. 133.

**114. Observări.** 1. Dacă două drepte din spațiu sunt concurente,

perpendiculara lor comună este perpendiculara pe planul lor în punctul lor comun, dar cea mai mică distanță a celor două drepte este nulă.

2. Dacă două drepte în spațiu sunt paralele, există o infinitate de perpendiculare comune lor. Cea mai mică distanță între cele două drepte este distanța lor comună, dreptele fiind în același plan.

## Proiecția unei figuri

**114. Proiecția unei figuri, din spațiu pe un plan** este figura din planul de proiecție formată de proiecțiile tuturor punctelor figurii. De ex., fie în spațiu triunghiul  $ABC$  și planul  $P$  (fig. 134). Proiecția triunghiului  $ABC$  pe planul  $P$  se obține proiectând laturile lui pe

acest plan. Pentru aceasta, este de ajuns să proiectăm vârfurile lui  $A, B, C$ , în  $a, b, c$ . Proiecția triunghiului  $ABC$  pe planul  $P$  este triunghiul  $abc$ , din planul  $P$ .

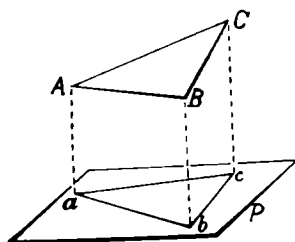


Fig. 134.

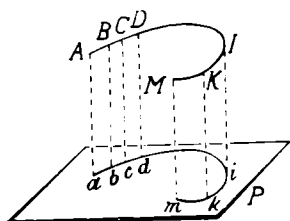


Fig. 135.

**116. Proiecția unei linii curbe pe un plan.** Fie în spațiu linia curbă  $AIM$  și planul de proiecție  $P$  (fig. 135). Proiecțiile  $a, b, c, \dots$  ale punctelor  $A, B, C, \dots, M$  ale curbei date formează pe planul  $P$  linia curbă  $aim$ , care se numește *proiecția liniei curbe din spațiu*.

Mai spunem: *Proiecția unei curbe pe un plan este locul proiecțiilor punctelor ei pe acel plan.*

**117. Simetria în spațiu.** Două puncte  $A$  și  $A'$  din spațiu sunt *simetrice* față de un punct  $O$ , când punctul  $O$  este mijlocul segmentului ce unește cele două puncte (fig. 136). Punctul  $O$  este numit *centru de simetrie*.

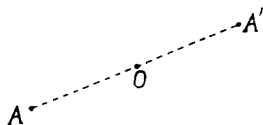


Fig. 136.

Două puncte  $B$  și  $B'$  din spațiu sunt simetrice față de o dreaptă

$D$ , dacă dreapta  $D$  este perpendiculară pe mijlocul segmentului ce unește cele două puncte (fig. 137). Dreapta  $D$  poartă numele de *axă de simetrie*.

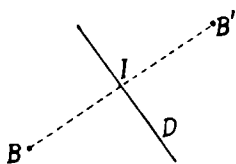


Fig. 137.

Două puncte din spațiu  $C$  și  $C'$  sunt simetrice față de un plan  $P$ , dacă planul  $P$  este perpendicular pe mijlocul segmentului ce unește

cele două puncte (fig. 138). Planul P la numele de *plan de simetrie*.

Două figuri din spațiu, astfel că punctele uneia sunt simetricele punctelor celeilalte în raport cu același centru (axă, plan) de simetrie, se numesc *figuri simetrice* în raport cu acel centru (axă, plan de simetrie).

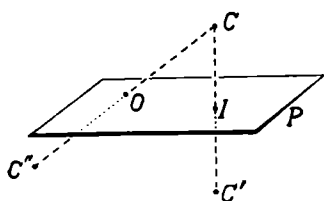


Fig. 138.

De exemplu, triunghiurile ABC și A'B'C' sunt simetrice în raport cu planul P, (fig. 139) de oarece vârfurile A', B', C' sunt simetricele vârfurilor A, B, C, respectiv în raport cu planul P.

O figură în spațiu are un centru (axă, plan) de simetrie, când punctele ei sunt simetrice două câte două în raport cu acest centru (axă, plan).

Figurile simetrice în spațiu se bucură de proprietăți asemănătoare cu cele ale figurilor simetrice din Geometria plană.

**Observare.** Punctele C și C' simetrice față cu planul P (fig. 139) sunt *drept simetrice* fațăcu planul P, pe când punctele C și C'' simetrice față cu punctul O din planul P sunt *oblic simetrice* față de același plan, după direcția CO.

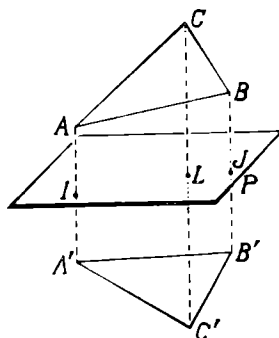


Fig. 139.

## Unghiuri triedre, unghiuri poliedre

**118. Intersecția a trei plane.** Să considerăm în spațiu trei plane oarecari P, Q, R (fig. 140).

Presupunând că planele P și Q se taie, intersecția lor este o dreaptă, pe care s'o numim AA'.

După așezarea dreptel AA' față de planul R. putem avea mai multe cazuri:

a) Dreapta  $AA'$  este cuprinsă în planul  $R$ . Urmează că cele trei plane  $P, Q, R$  trec prin dreapta  $AA'$ . Ele au o infinitate de puncte comune.

b) Dreapta  $AA'$  înțeapă planul  $R$  într'un punct  $T$ . Punctul  $T$  aparține celor trei plane. Ele au deci un punct comun și numai unul.

c) Dreapta  $AA'$  este paralelă cu planul  $R$ . Urmează că cele trei plane  $P, Q, R$  n'au nici un punct comun la distanță finită. Intersecția celor trei plane este formată din trei drepte paralele (planele determină o *suprafață prismatică*).

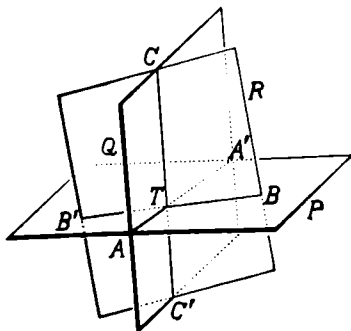


Fig. 140.

Să considerăm cazul când trei plane date în spațiu au un punct comun (fig. 140). Luăm din cele trei plane, porțiunile mărginite respectiv pe semi-dreptele  $TA, TB, TC$ . Ele formează o figură numită *unghiu triedru* sau mai simplu *triedru* (fig. 141).

Punctul  $T$  se numește vârful unghiului triedru, iar dreptele  $TA, TB, TC$  se numesc *muchii* lui. Planele  $ATB, BTC, CTA$  două câte două formează trei *unghiuri diedre* ce au ca muchii, muchiile unghiului triedru  $TA, TB, TC$ . Muchiile  $TA, TB, TC$ , formează două câte două, trei unghiuri plane:  $ATB, BTC, CTA$  care se numesc *fețele* unghiului triedru.

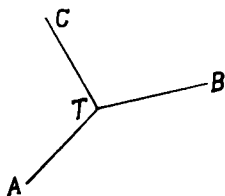


Fig. 141.

Fețele și unghiurile diedre sunt *elementele* unghiului triedru.

Un unghiu triedru se înseamnă cu o literă la vârf și cu câte o literă la fiecare muchie a lui. Unghiu triedru

din fig. 141 se citește TABC, adică scriem și citim litera dela vârf întâi și apoi literele de pe muchii în aceeași ordine.

**119. Observări.** 1. Prin intersecția celor trei plane P, Q, R (fig. 140) s'a format odată cu unghiul triedru TABC, un al doilea unghi triedru TA'B'C', care are același vârf și ale cărui muchii sunt în prelungirea muchiilor unghiului triedru TABC.

Unghiul triedru TA'B'C' se numește *unghiul triedru simetric* al unghiului triedru TABC.

2. Unghiul triedru care are două fețe egale este numit *isoscel*.

3. Unghiul triedru care are o față unghi drept poartă numele de triedru *dreptunghi*.

4. Dacă cele trei plane care formează un unghi triedru sunt perpendiculare două câte două, cele trei muchii ale triedrului sunt perpendiculare două câte două. Triedrul se numește în acest caz *triedru tridreptunghi*.

**120. Sensul unui triedru.** Fie unghiul triedru TABC. (fig 142).

Presupunem că un observator se găsește așezat pe

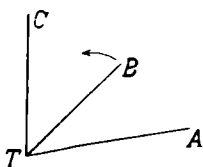


Fig. 142

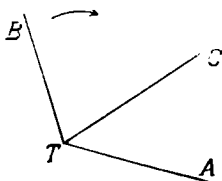


Fig. 143

muchia TA, cu picioarele în vârful T al triedrului și privind înăuntrul lui. Dacă observatorul vede muchia TB la dreapta lui și muchia TC la stânga lui, zicem că unghiul triedru este *direct* sau *de sens pozitiv*. În cazul când vede muchia TB la stânga lui și muchia TC la dreapta lui, (fig. 143) zicem că unghiul triedru este *retrograd* sau *de sens negativ*.



**121. Proprietățile unghiurilor triedre.** 1°. Fie unghiul triedru  $TABC$  (fig. 144). Să însemnăm fețele lui astfel: fața  $BTC$  opusă muchiei  $TA$  cu  $a$ , fața  $CTA$  opusă muchiei  $TB$  cu  $b$ , fața  $ATB$  opusă muchiei  $TC$  cu  $c$ .

Presupunem că fața  $a$  este cea mai mare.

Să arătăm că fața  $a$  este mai mică decât suma celorlalte două fețe  $b$  și  $c$ .

Fața  $a$  fiind cea mai mare, să ducem în planul ei, din vârful  $T$  semidreapta  $TD$  care să facă cu muchia  $TB$  un unghi egal cu fața  $c$ .

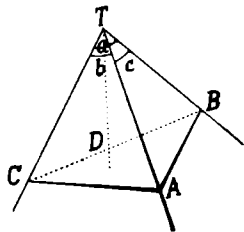


Fig. 144

Pe semidreptele  $TA$  și  $TD$  să luăm respectiv segmentele egale  $\overline{TA} = \overline{TD}$  și prin punctul  $D$  să ducem o dreaptă oarecare,  $BC$  care taie muchiile  $TB$  și  $TC$  respectiv în punctele  $B$  și  $C$ . Unim apoi punctele  $B$  și  $C$  cu punctul  $A$ .

Triunghiurile  $ATB$  și  $BTD$ , având  $\overline{TB} = \overline{TB}$  comună,  $\overline{TA} = \overline{TD}$  prin construcție,  $\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTD$  prin construcție, sunt egale. Rezultă că  $\overline{AB} = \overline{BD}$ . Inșă, în triunghiul  $ABC$ , avem

$$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Să scădem din ambele părți ale acestei inegalități pe  $\overline{BD}$ ;

$$\overline{BC} - \overline{BD} < \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BD}.$$

Dar  $\overline{AB} = \overline{BD}$ ; această inegalitate devine

$$\overline{BC} - \overline{BD} < \overline{AC}$$

sau

$$\overline{CD} < \overline{BC}.$$

În felul acesta, triunghiurile  $DTC$  și  $ATC$  au două laturi egale ( $\overline{TC} = \overline{TC}$ ,  $\overline{TA} = \overline{TD}$ ) și cea de a treia neegală ( $\overline{CD} < \overline{CA}$ ). Urmează că la latura mai mică  $DC$  din triunghiul  $DTC$  se opune unghiul mai mic  $\sphericalangle DTC$ , adică

$$\sphericalangle DTC < \sphericalangle ATC.$$

Adunăm la partea întâia a acestei inegalități unghiul BTD și la partea a doua egalul lui BTA :

$$\sphericalangle DTC + \sphericalangle BTD < \sphericalangle ATC + \sphericalangle BTA$$

sau

$$\sphericalangle BTC < \sphericalangle ATC + \sphericalangle BTA$$

sau

$$a < b + c.$$

Din această inegalitate, deducem imediat

$$b > a - c \text{ și } c > a - b.$$

Față  $a$  fiind cea mai mare,

$$b < a \text{ și } c < a$$

și cu atât mai mult

$$b < a + c \text{ și } c < a + b;$$

Din aceste inegalități, deducem

$$a > b - c \text{ sau } a > c - b, \text{ după cum } b > c \text{ sau } c > b.$$

Rezultă dar următoarea proprietate :

*Fiecare față a unui unghi triedru este mai mică ca suma celorlalte două și mai mare ca diferența lor.*

2°. Să considerăm unghiul triedru  $TABC$  (fig. 145) ale cărui fețe să le însemnăm  $a, b, c$ .

Să arătăm că suma fețelor lui este mai mică ca 4 unghiuri drepte.

Pentru aceasta, să prelungim una din muchii, de ex.  $TA$ , dincolo de vârf în  $TA'$ . Muchia  $TA'$  formează cu muchiile  $TB$  și  $TC$  un alt unghi triedru  $TA'BC$ , ale cărui fețe sunt  $a, b', c'$ .

După proprietatea de mai sus,  $a < b' + c'$ .

Însă fețele  $b'$  și  $c'$  sunt respectiv suplimentele fețelor  $b$  și  $c$ , adică

$$b' = 2dr - b,$$

$$c' = 2dr - c.$$

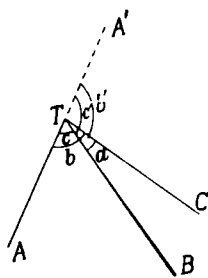


Fig. 145

Inlocuind în inegalitatea (1), avem

$$a < 2dr - b + 2dr - c,$$

sau

$$a + b + c < 4dr.$$

adică : *Suma fețelor unui unghiur triedru este mai mică decât 4 unghiuri drepte.*

**122. Unghiuri poliedre.** Din același punct T din spațiu, ducem mai multe semidrepte, de exemplu TA, TB, TC, TD, TE în număr de cinci. Cea dintâi semidreaptă TA cu cea de a doua TB determină planul ATB. Semidreapta a doua TB cu cea de a treia TC determină planul BTC, ș. a. m. d.

Figura formată de porțiunile de plane determinate de semidreptele duse și mărginite la ele, într'o anumită ordine, se numește *unghiur poliedru*.

Punctul T este *vârful* unghiului poliedru ; TA, TB, TC, TD, TE sunt *muchiile* lui. Unghiurile plane formate de muchiile consecutive două câte două sunt *fețele* unghiului poliedru, iar diedrele formate de planele ce se taie după muchiile lui sunt *unghiurile diedre* ale unghiului poliedru.

Un unghiur poliedru se însemnează cu o literă la vârf și cu câte o literă la fiecare muchie a lui. El se scrie și se citește începând cu litera dela vârf, apoi cu literele de pe muchii în același sens, astfel : unghiul poliedru TABCDE. (fig. 146).

Dacă toate fețele sunt de aceeași parte a planului oricăreia din ele, unghiul poliedru se numește *convex*. Unghiul poliedru TABCDE (fig. 146) este convex.

Dacă planul unei fețe taie unghiul poliedru, acesta se numește *concav*. De ex., unghiul poliedru VABCDE (fig. 147) este un unghiur poliedru concav.

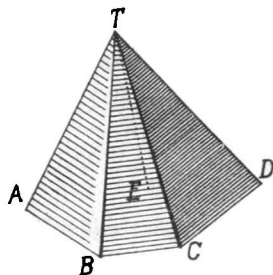


Fig. 146

Un unghi poliedru este *direct* (de sens pozitiv) sau *retrograd* (de sens negativ) după aceeași convențiune dela unghiurile triedre.

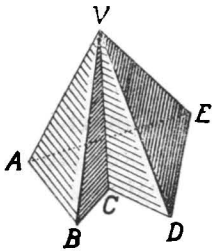


Fig. 147

Se demonstrează la unghiurile poliedre aceleași proprietăți asupra fețelor, ca la unghiurile triedre, adică :

1. Fiecare față a unui poliedru este mai mică decât suma celorlalte fețe.

2. Suma fețelor unui unghi poliedru este mai mică decât 4 unghiuri drepte.

### Probleme.

1. Printr'un punct dat în spațiu, să se ducă o dreaptă care să întâlnească două drepte care nu sunt în același plan.

R. Se va lua punctul cu fiecare dreaptă.

2. Fiind date două drepte concurente  $D$  și  $D'$  și un punct  $A$  exterior planului lor să se ducă o dreaptă prin punctul  $A$  care să le întâlnească.

3. Trei drepte  $D_1, D_2, D_3$  sunt astfel că două oarecari din ele se taie. Să se arate că ele sunt în același plan sau concurente.

4. Același exercițiu pentru 4, 5, ...  $n$  drepte.

5. Se dau trei drepte concurente în spațiu  $OA, OB, OC$ . Două plane oarecari taie cele trei drepte date în  $A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2$  respectiv. Se obțin două triunghiuri  $A_1B_1C_1$  și  $A_2B_2C_2$ .

Să se arate că perechile de drepte  $A_1B_1, A_2B_2; A_1C_1, A_2C_2; B_1C_1, B_2C_2$  sunt concurente.

R. Fiecare pereche de laturi este așezată în același plan.

6. Să se ducă o dreaptă paralelă cu o dreaptă dată care să se sprijine pe două drepte neașezate în același plan.

R. Planele paralele cu dreapta dată duse prin dreptele date se taie după dreapta cerută.

7. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, orice dreaptă paralelă cu dreapta este paralelă cu planul.

R. Soluția imediată.

8. Să se ducă printr'un punct dat, o dreaptă care să întâlnească o dreaptă și un cerc neașezate în același plan.

R. Se caută intersecția planului determinat de dreaptă și punct cu planul cercului. Discuție.

9. Printr'un punct A al unui plan, se duce un segment oarecare  $\overline{AB}$ . Prin punctul B, se duce un segment  $\overline{BC}$  paralel cu planul P. Din punctul C, se duce un segment  $\overline{CD}$  paralel, de sens contrar și egal cu  $\overline{AB}$ .

- Să se arate că punctul D se găsește în planul P.
- Câte puncte D se pot construi?
- Ce este figura ABCD?
- Care este locul punctelor D în planul P?
- Ce se întâmplă când  $\overline{BC} = \overline{AC}$ ?

R. Se va cerceta figura formată; d) cerc,

10. Se dă un plan P și o dreaptă D paralelă cu el. Unim un punct O din planul P cu un punct M care se mișcă pe dreapta D.

- Ce descrie mijlocul I al segmentului  $\overline{OM}$ ?
- Dacă și punctul O se mișcă în planul P pe o dreaptă D' paralelă cu D, ce descrie punctul I?
- Dacă punctul O îl înlocuim cu un punct L al planului P, exterior dreptei D', ce se întâmplă cu locul punctului I de mai sus?

R. a) O dreaptă; b) aceeași dreaptă; c) o dreaptă paralelă

11. Patrulaterul ale cărui vârfuri nu sunt în același plan se numește *patrulater strâmb*.

Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater strâmb sunt vârfurile unui paralelogram. Centrul acestui paralelogram este mijlocul segmentului care unește mijloacele diagonalelor patrulaterului strâmb.

R. Figura se descompune în figuri plane.

12. Intr'un punct A al unui plan P, ridicăm un segment  $\overline{AB}$  perpendicular pe planul P. Prin punctul B, se duce un segment  $\overline{BC}$  perpendicular pe  $\overline{AB}$  și egal cu  $\overline{AB}$ . Din punctul C, se duce un segment CD paralel, de sens contrar și egal cu  $\overline{AB}$ .

- Să se arate că punctul D este în planul P.
- Câte puncte D se pot construi?
- Ce este figura ABCD?
- Care este locul punctelor D din planul P?

Re va cerceta figura formată; c) pătrat; d) cerc.

13. Să se ducă printr'un punct al unui plan dat și în el, o dreaptă cu direcția perpendiculară pe o dreaptă oarecare din spațiu. Discuție.

R. Se vor considera cele trei poziții ale dreptei față cu planul.

14. Să se găsească pe o dreaptă dată punctele egal depărtate de două puncte date.

R. Intersecția dreptei cu planul perpendicular pe mijlocul segmentului.

15. Să se găsească pe o dreaptă dată, punctele egal depărtate de două puncte date dintr'un același plan.

R. Vezi ex. 14.

16. Să se găsească punctul dintr'un plan, astfel ca suma distanțelor lui la două puncte exterioare planului să fie minimă (cea mai mică).

R. punctele pot fi în regiuni deosebite sau nu ; în primul caz, intersecția planului cu dreapta punctelor ; în cazul al doilea, intersecția planului cu o dreaptă ce trece printr'un punct și simetricul celuilalt,

17. Fiind date un plan P și două puncte A și B așezate în aceeași regiune față de plan, să se găsească un punct pe plan, astfel ca diferența distanțelor lui la cele două puncte date să fie maximă (cea mai mare).

R. Intersecția planului cu dreapta punctelor date.

18. Dacă prin una din diagonalele unui paralelogram, ducem un plan oarecare, perpendicularele coborite pe acest plan din extremitățile celeilalte diagonale sunt egale.

R. Egalitatea triunghiurilor.

19. O dreaptă și un plan perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.

R. Se va duce un plan ajutător.

20. Două plane P și R se taie după dreapta MN. Fie o dreaptă D din planul P, care întâlnește muchia MN în punctul I și punctele A,B,C pe dreapta D. Ducem prin punctele A,B,C paralele cu o direcție din spațiu, care nu e paralelă cu planul R. Aceste paralele întâlnesc planul R în punctele A', B', C' respectiv.

Să se arate că

a) Punctele A', B', C' sunt pe o dreaptă D'.

b) În ce punct taie dreapta D' dreapta MN ?

c) Ce figură formează mijloacele segmentelor  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  și ce așezare are această figură ?

R. a) Dreptele duse sunt în același plan ; b) punctul I ; c) O dreaptă ce trece prin I.

21. Fie două plane P și R cari se taie după dreapta MN. Se ia pe o dreaptă D din planul P paralelă cu muchia MN, punctele A,B,C. Prin punctele A,B,C se duc paralele cu o direcție care nu e paralelă cu planul R. Aceste drepte paralele întâlnesc planul R în punctele A', B', C'.

Să se arate că :

a) Punctele A', B', C' sunt pe aceeași linie dreaptă D'.

- b) Dreapta  $D'$  este paralelă cu muchia  $MN$ .  
c) Segmentele  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  sunt egale între ele.  
d) Mijloacele segmentelor  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  sunt pe o dreaptă paralelă cu muchia  $MN$ .

R. Vezi ex. 20.

22. Un plan se rotește în jurul unei drepte fixe. Dintr'un punct  $M$  din spațiu, se coboară perpendiculare pe planul mobil în diferitele lui poziții. Locul acestor perpendiculare. Locul proiecțiilor punctului  $M$  din spațiu pe planul mobil.

R. Un plan. Un cerc.

23. Se dau două drepte oarecari în spațiu. Să se afle locul geometric al unei drepte paralele cu una din ele, întâlnind pe cea de a doua și care se mișcă în lungul acesteia.

R. Un plan.

24. Locul punctelor egal depărtate de două plane paralele.

R. Un plan.

25. Locul punctelor egal depărtate de două plane oarecari.

R. Planele bisectoare ale diedrului format de cele date.

26. Locul punctelor egal depărtate de două drepte concurente. Aceeași problemă pentru două drepte paralele.

R. Planul determinat de bisectoarea unghiului lor cu perpendiculara comună.

27. Locul punctelor egal depărtate de vârfurile unui triunghi.

R. O dreaptă perpendiculară pe planul triunghiului, etc.

28. Locul punctelor de pe un plan egal depărtate de trei puncte care nu sunt în linie dreaptă.

R. Vezi ex. 27.

29. Locul mijloacelor segmentelor duse dintr'un punct exterior unui plan până la acest plan. Generalizare.

R. Un plan paralel cu planul dat.

30. Fie două plane paralele  $R$  și  $S$  și punctele  $A, B, C$  în planul  $R$  neașezate în linie dreaptă. Prin punctele  $A, B, C$  ducem drepte paralele cu o direcție neparalelă cu planele date, care întâlnesc planul  $S$  în punctele  $A', B', C'$ . Fie  $M, N, P$  mijloacele segmentelor  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  respectiv. Să se arate că

a) Punctele  $M, N, P$  determină un plan paralel cu planele date.

b) Orice segment de dreaptă mărginit la planele  $R$  și  $S$  este împărțit în două părți egale de planul  $MNP$ .

c)  $I$  fiind un punct al planului  $MNP$ , orice segment ce trece prin punctul  $I$  mărginit la planele  $R$  și  $S$  este împărțit în două părți egale de punctul  $I$ .

R. Teorema unghiurilor cu laturile paralele.

31. Se dau două plane paralele  $R$  și  $S$ , segmentul  $\overline{AB}$  perpendicular pe planul  $R$  și mărginit la planele  $R$  și  $S$  și triunghiul  $MNP$  în planul

R. Se ia pe segmentul  $\overline{AB}$ , punctul O astfel ca  $\overline{OA} = \frac{1}{2} \overline{OB}$ . Dreptele OM, ON, OP intâlnesc planul S respectiv în punctele M', N', P'.

a) Să se arate că triunghiurile MNP și M'N'P' sunt asemenea.

b) Știind că aria triunghiului MNP este  $s \text{ m}^2$ , să se afle aria triunghiului M'N'P'.

32. Se dau două plane paralele P și R și un segment  $\overline{AB}$  perpendicular pe planul R și limitat la planele date. Prelungim dreapta AB dincolo de planul P, cu  $\overline{BC} = \overline{AB}$  și în planul P, luăm un segment  $\overline{BI} = \overline{BC}$ . Ducem planul S perpendicular pe AI în punctul I. Să se arate că:

a) Planul S trece prin punctul C.

b) Dreapta CI este perpendiculară pe intersecția MN a planelor R și S.

R. Dreapta CI este perpendiculară pe AI în I. CI este perpendiculară pe una din cele două paralele.

33. Locul punctelor egal depărtate de trei drepte paralele care nu sunt în același plan.

R. O dreaptă paralelă cu dreptele date.

34. Dacă două plane sunt respectiv paralele cu două plane care se taie, intersecțiunile lor sunt paralele.

R. Se va prelungi unul din plane.

35. Locul mijloacelor segmentelor paralele cu direcție dată și cuprinse între două plane paralele.

R. Un plan paralel cu planele date.

36. Locul mijloacelor segmentelor de drepte paralele, ce se sprijină pe fețele unui diedru.

R. Se consideră unul din segmente și se duce prin el un plan care taie muchia diedrului. Locul punctelor din acest plan este mediana triunghiului determinat de segment, cu punctul de intersecție al planului dus cu muchia. Printr'o translație a planului, mediana se mișcă paralel cu ea, sprijinindu-se pe muchie. Locul cerut este un plan.

37. Locul mijloacelor segmentelor de drepte cuprinse între două plane paralele. Generalizare.

R. Un plan.

38. Locul punctelor din spațiu, astfel ca suma depărtărilor fiecăruia din ele la cele două fețe ale unui diedru să fie constantă.

R. Perpendicularele duse din unul din puncte pe fețele diedrului determină un plan perpendicular pe muchie. Locul punctelor cerute din acest plan este baza triunghiului isoscel format de dreapta ce trece prin punctul considerat, cu intersecțiile planului



cu fețele diedrului. Prin translație, se găsește că locul căutat este un plan.

39. Aceeași problemă, astfel ca diferența depărtărilor fiecăruia din puncte la fețele diedrului să fie constantă.

R. Soluție analoagă.

40. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, cea mai mică distanță dela această dreaptă la toate dreptele din plan ce nu sunt paralele cu ea este constantă.

R. Distanța dintre planul dat și planul paralel trecând prin dreapta dată.

41. Dacă o linie curbă din spațiu se proiectează pe două plane care se taie după o dreaptă, curba este o dreaptă. Să se cerceteze cazul când planele proiectante se contundă.

R. Curba este intersecția planelor perpendiculare pe planele date respectiv după proiecțiile date.

42. Locul proiecțiilor unui punct din spațiu pe dreptele dintr'un plan ce trec prin același punct al planului.

R. Un cerc.

43. Dacă o dreaptă face unghiuri egale cu fețele unui diedru, punctele ei de intersecție cu fețele diedrului sunt egal depărtate de muchie. Să se spună dacă reciproca este adevărată.

R. Unghiurile dreptei cu fețele dau laturile unghiului plan al diedrului. Nu!

44. Să se arate că mijlocul unui segment se proiectează în mijlocul proiecției segmentului. Generalizare (punctul care împarte segmentul într'un raport dat).

R. Aplicație la o teoremă din Geometria plană.

45. Proiecția unui triunghi isoscel pe un plan paralel cu bisectoarea unghiului dela vârf este tot un triunghi isoscel. Să se cerceteze dacă reciproca este adevărată.

R. Se va compara unghiul bisectoarei cu baza, în spațiu și în proiecție.

46. Proiecția unui triunghi isoscel pe un plan paralel cu baza lui este tot un triunghi isoscel.

R. Vezi ex. 45.

47. Proiecția unui unghi pe un plan paralel cu bisectoarea lui are ca bisectoare proiecția bisectoarei unghiului dat.

k. Luăm pe laturile unghiului două segmente egale. Se formează un triunghi isoscel și se aplică 45.

48. Suma unghiurilor ce face o semidreaptă dusă din vârful unui unghi diedru și înăuntrul lui, cu cele trei muchii este cuprinsă între suma și semisuma fețelor lui.

R. Să se cerceteze figura formată.

49. Planul perpendicular pe una din fețele unui triedru dreptunghiu (una din fețe unghi drept) taie acest triedru, după un triunghi dreptunghiu.

R. Se aplică proprietățile planului perpendicular.

50. Cele trei plane duse prin muchiile unui triedru perpendicular pe fețele opuse (plane înălțimi) se taie după aceeași dreaptă.

R. Se vor lua planele duse două câte două.

51. Cele trei plane duse prin muchiile unui triedru bisectoare ale diedrelor lui (plane bisectoare) se taie după aceeași dreaptă.

R. Vezi 50.

52. Cele trei plane duse prin câte una din muchiile unui triedru și prin bisectoarea feței (plane mediane) opuse se taie după aceeași dreaptă.

R. Vezi 50.

53. Se consideră un poligon plan de  $n$  laturi. Să se găsească :

a) Locul punctelor egal depărtate de vârfurile poligonului.

b) Locul punctelor egal depărtate de laturile poligonului.

c) Legătura dintre distanța comună la vârfurile și distanța comună la laturile poligonului.

R. Locul este o dreaptă perpendiculară pe planul poligonului.

54. Trei plane se taie după trei drepte paralele. Să se găsească :

a) Locul punctelor egal depărtate de cele trei plane.

b) Locul punctelor egal depărtate de dreptele lor de intersecție.

R. Câte o dreaptă în fiecare caz.

55. Printr'o dreaptă  $D$ , se duc trei semiplane formând trei unghiuri diedre egale.

a) Să se găsească măsura lor comună.

a) Să se arate că punctele oricărui din plane sunt egal depărtate de celelalte două plane.

R. Se va tăia figura cu un plan perpendicular pe dreapta  $D$ .

56. Se dă un plan  $P$  și un punct  $O$  exterior lui. Să se afle locul punctelor simetrice ale punctului  $O$  în raport cu planul  $P$ , după toate direcțiunile ce trec prin punctul  $O$ .

R. Se iau trei puncte  $A, B, C$  în planul  $P$  neșezate în linie dreaptă și apoi simetricele lui  $O$  în raport cu planul  $P$ , după direcțiunile  $OA, OB, OC$ . Locul cerut este un plan paralel cu  $P$ .

57. În una din fețele unui unghi diedru, se ia o dreaptă  $D$ . Să se construiască în cealaltă față, o dreaptă perpendiculară pe dreapta  $D$ . Discuțiune.

R. Dreapta  $D$  așezată într'o față întâlnește muchia în  $O$ . Dreapta cerută face parte din perpendicularele în punctul  $O$  pe dreapta  $D$ .

58. Trei plane formează un unghi triedru. Să se găsească :

- a) Locul punctelor egal depărtate de fețele triedrului.  
 b) Locul punctelor egal depărtate de muchiile triedrului.

R. Câte o dreaptă în fiecare caz.

59. Se dau două plane paralele P și Q și în ele se iau două drepte D și D' cu direcțiunile perpendiculare una pe alta. Se iau două puncte la întâmplare A și A' respectiv pe dreptele D și D'. Din A se duce  $\overline{AB}$  perpendicular pe dreapta D' și din A se duce  $\overline{A'B}$  perpendicular pe dreapta D. Să se arate că  $\overline{BB'}$  măsoară distanța cea mai mică între planele P și P'.

R. Se va arăta că  $\overline{BB'}$  este perpendicular pe planul P, consecință a unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare.

60. Se consideră două plane P și R perpendiculare unul pe altul, care se taie după dreapta D. Luăm un punct A în planul P și ducem  $\overline{AM}$  astfel ca mijlocul său O să se găsească în planul R. Fie A' simetricul lui A în raport cu dreapta D. Să se arate că avem relațiunea

$$\overline{AM}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'M}^2,$$

oricare ar fi lungimea segmentului  $\overline{AM}$ .

R. Se va arăta că dacă a este punctul unde AA' taie pe D, aO este perpendiculară pe AA'. Apoi, că triunghiul AA'M este dreptunghi.

61. a) Să se determine direcția unui plan de proiecție astfel ca proiecția pe el a unui triunghi scalen dat să fie un triunghi isoscel.

b) Cum trebuie așezat acel plan, pentru ca proiecția pe el a triunghiului scalen să fie un triunghi echilateral?

c) Să se deducă din cazul triunghiului scalen concluziuni pentru proiecția unui triunghi isoscel pe un plan.

R. Fie ABC triunghiul dat, abc proiecția lui pe planul căutat. Planele paralele cu o poziție găsită satisfac problemei. Se poate deci presupune dată una din proiectantele vârfurilor. Ducând în planele proiectante ale laturilor AB și AC,  $\overline{BB'}$  și  $\overline{CC'}$  paralele cu planul de proiecție, avem

$$\overline{AC'}^2 - \overline{AB}^2 = (2\overline{Aa} - \overline{Bb} - \overline{Cc}) (\overline{Bb} - \overline{Cc}) (\overline{AC} > \overline{AB})$$

În cazul când proiecția trebuie să fie triunghi echilateral, triunghiul abc trebuie să fie de două ori isoscel, deci vom avea două relațiuni ca cea precedentă, care determină celelalte două proiectante, așa că planul de proiecție este bine determinat.

În cazul când triunghiul dat este isoscel,  $\overline{AC} = \overline{AB}$ , partea I-a a relației scrise este zero. Partea a doua trebuie să fie zero; două

cazuri:  $\overline{Bb} = \overline{Cc}$ , planul de proiecție paralel cu baza BC a triunghiului isoscel;  $\overline{Aa} = \frac{1}{2}(\overline{Bb} + \overline{Cc}) = \overline{Mm}$ , M fiind mijlocul laturii BC. Planul trebuie să fie paralel cu mediana AM.

62. a) Cum trebuie să fie așezat planul unui triunghi echilateral față de un unghi diedru, pentru ca proiecțiile lui pe fețele diedrului să fie triunghiuri isoscele?

b) Cum trebuie să fie dat un diedru pentru ca proiecțiile unui triunghi echilateral pe fețele lui să fie trei triunghiuri isoscele?

R. a) Se iau două drepte perpendiculare în cele două fețe ale diedrului și se așează triunghiul isoscel astfel ca baza să fie paralelă cu una din drepte, iar bisectoarea corespunzătoare paralelă cu cealaltă.

b) Este de ajuns ca una din fețe să fie unghi drept.

63. Să se așeze în spațiu un triunghi isoscel, astfel ca proiecția lui pe un plan dat să fie un triunghi echilateral.

R. Se vor considera cele două cazuri în care proiecția unui triunghi isoscel pe un plan este un triunghi isoscel și se va căpăta diferența proiectantelor astfel încât baza triunghiului isoscel din proiecție să fie eg lă cu laturile triunghiului isoscel.

64. Se dau un plan P și o dreaptă D conținută în el.

a) Să se ducă prin dreapta D un plan R, astfel ca un segment  $\overline{AB}$  după linia de cea mai mare pantă a planului R să fie îndoitul proiecțiunii sale pe planul P.

b) Să se ducă planul R prin dreapta D, astfel ca diferența proiectantelor punctelor A și B (de pe linia de cea mai mare pantă a planului R) să fie jumătatea segmentului  $\overline{AB}$ .

c) Astfel ca proiecțiunea segmentului  $\overline{AB}$  să fie egală cu diferența proiectantelor punctelor A și B.

d) Astfel ca proiecțiunea segmentului  $\overline{AB}$  să fie cât  $\frac{m}{n}$  din  $\overline{AB}$ .

Discuțiune. Caz particular  $\frac{m}{n} = \frac{5}{13}$ .

R. Se va construi în fiecare caz un triunghi, care să aibă ca laturi segmentul dat, proiecția lui pe planul P și diferența proiectantelor punctelor A și B.

### CAPITOLUL III.

## POLIEDRE.

**123. Definițiuni.** Corpul solid mărginit de fețe plane se numește *poliedru*.

Să construim ca exemplu un astfel de corp. Fie unghiul poliedru oarecare  $TABCDE$  (fig. 148). Dacă tăiem acest unghi poliedru printr'un plan  $S$  care să întâlnească toate muchiile lui, porțiunile de plan  $TA'B'$ ,  $TB'C'$ ,  $TC'D'$ ,  $TD'E'$ ,  $TE'A'$ ,  $A'B'C'D'E'$  cuprind o porțiune de spațiu sau mărginesc un corp solid, care are toate fețele plane.

Corpul  $TA'B'C'D'E'$  este un *poliedru*.

Porțiunile poligonale ale planelor ce mărginesc acest poliedru se numesc *fețe*. Dreptele de intersecție ale fețelor două câte două sunt numite *muchii*. Fețele adiacente două câte două formează *unghiurile diedre* ale poliedrului. Muchiile poliedrului se taie între ele, cel puțin câte trei, în puncte numite *vârfuri*. Fețele care au comun același vârf formează *unghiurile poliedre* ale poliedrului.

Un poliedru este *convex* când rămâne de aceeași parte a planului oricăreia din fețe. Se mai poate spune

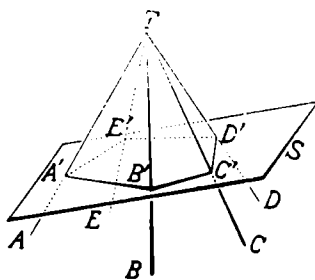


Fig. 148.

că planul oricărei fețe nu taie poliedrul. Astfel este poliedrul TA'B'C'D'E' din fig. 148.

Dacă planul unei fețe taie poliedrul, el poartă numele de poliedru *concau*. Astfel poliedrul TABCDEF (fig. 149) este un poliedru *concau*.

Un poliedru poate avea un număr oarecare de fețe, însă nu mai puțin de patru fețe.

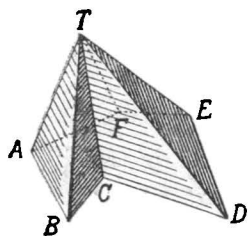


Fig. 149

Poliedrul poartă numiri după numărul fețelor. Astfel poliedrul cu patru fețe se numește *tetraedru*; cel cu cinci fețe, *pentaedru*; cel cu șase fețe, *hexaedru*; cel cu zece fețe, *decaedru*; cel cu 12 fețe, *dodecaedru*; cel cu 20 fețe, *icosaedru*.

**124. Poliedre regulate.** Poliedrul ale cărui fețe sunt poligoane regulate egale între ele și ale cărui unghiuri poliedre sunt egale între ele se numește *poliedru regulat*.

Există numai cinci poliedre convexe regulate și anume:

1°. *Tetraedrul regulat*, care are patru fețe triunghiuri echilaterale egale, reunite câte trei în același vârf (fig. 150).

2°. *Hexaedrul regulat* sau *cubul*, care are șase fețe

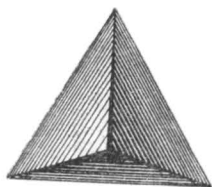


Fig. 150.

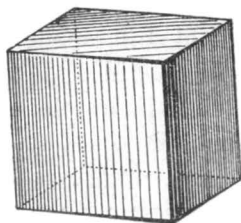


Fig. 151.

pătrate egale, reunite câte trei în același vârf și dihedrele drepte (fig. 151).

3°. *Octaedrul regulat*, care are opt fețe triunghiuri

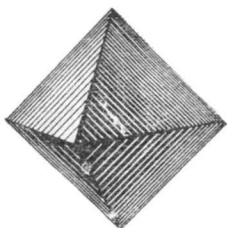


Fig. 152.

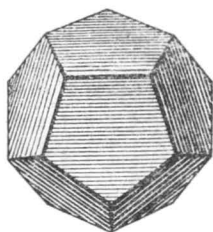


Fig. 153.

echilaterale egale, reunite câte patru în același vârf. (fig. 152).

4°. *Dodecaedrul regulat*, care are 12 fețe pentagoane regulate egale, reunite câte trei în același vârf (fig. 153).

5°. *Icosaedrul regulat*, care are 20 fețe triunghiuri echilaterale egale, reunite câte cinci în același vârf (fig. 154).

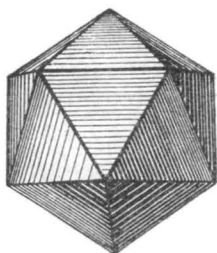


Fig. 154.

## P R I S M A.

125. **Suprafața prismatică.** Să considerăm unghiul poliedru convex  $TABCDE$  (fig. 155).

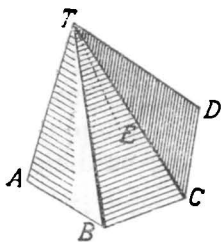


Fig. 155.

Dacă vârful  $T$  se depărtează din ce în ce în direcția uneia din muchii, de exemplu a muchiei  $TA$ , în sensul dela  $A$  la  $T$ , unghiurile plane dela vârful unghiului poliedru se micșorează necontenit. Când vârful  $T$  s'a depărtat la infinit, muchiile  $TA, TB, TC, TD, TE$ , devin paralele între ele, având toate direcția muchiei  $TA$  (fig. 156).

Fetele unghiului poliedru formează în acest caz o *suprafață prismatică*.

Suprafața prismatică poate fi deci considerată, ca limita către care tinde un unghi poliedru când vârful lui se depărtează la infinit, în direcția uneia din muchii.

De oarece unghiul poliedru considerat era convex, suprafața prismatică obținută este *convexă*.

Dacă tăiem suprafața prismatică convexă  $ABCDEA'B'C'D'E'$  cu un plan  $S$  (fig. 156), obținem un poligon convex  $A_1B_1C_1D_1E_1$ . Planul  $S$  se numește *plan de secțiune*,

iar poligonul  $A_1B_1C_1D_1E_1$  se numește *secțiune plană* în suprafața prismatică. Dacă planul de secțiune este perpendicular pe direcția muchiilor, secțiunea plană se numește *dreaptă*; în cazul când planul este oblic față de direcția muchiilor, secțiunea plană se numește *oblică*.

Suprafața prismatică  $ABCDEA'B'C'D'E'$  poate fi concepută ca născută de o dreaptă, care se mișcă rămânând paralelă cu direcția  $AA'$  și sprijinindu-se pe poligonul plan  $A_1B_1C_1D_1E_1$ . În acest caz, dreapta care se mișcă se numește *generatoare* a suprafeței prismatice, iar poligonul  $A_1B_1C_1D_1E_1$  pe care se sprijină generatoarea se numește *directoare*.

**126. Observări.** 1. Dacă vârful  $T$  se depărtează la infinit în direcția unei alte muchii, de exemplu  $TB$ , suprafața prismatică obținută are muchiile paralele cu direcția  $TB$ . Rezultă că din același unghi poliedru obținem atâtea suprafețe prismatice, câte muchii are unghiul poliedru, diferind între ele prin direcțiunea muchiilor.

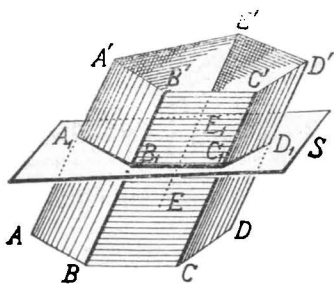


Fig. 156.



2. Dacă unghiul poliedru considerat la început este concav, suprafața prismatică născută prin depărtarea vârfului la infinit pe una din muchii este concavă. Secțiunea ei plană este un poligon concav.

127. **Prisma.** Fie suprafața prismatică  $ABCDEA'B'C'D'E'$  (fig. 157).

Să tăiem această suprafață prismatică prin două plane paralele  $S$  și  $S'$ , care să întâlnească toate muchiile.

Planele  $S$  și  $S'$  taie respectiv suprafața prismatică după poligoanele  $ABCDE$  și  $A'B'C'D'E'$ ; obținem astfel un poliedru. Poliedrul mărginit de suprafața prismatică dată și de cele două poligoane

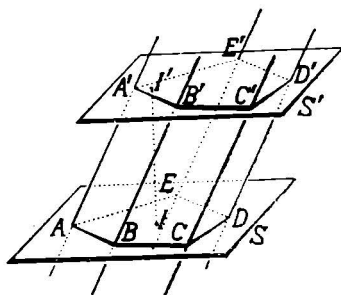


Fig. 157.

paralele se numește *prismă*. Fețele poligoanelor paralele  $ABCDE$  și  $A'B'C'D'E'$  se numesc *bazele* prisme;  $ABCDE$  baza de jos,  $A'B'C'D'E'$  baza de sus. Fețele suprafeței prismatice se numesc *fețe laterale* ale prisme.

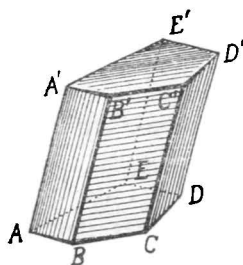


Fig. 157 a.

Muchille poligoanelor de bază se numesc *muchii bazelor*, iar muchiile suprafeței prismatice se numesc *muchii laterale* ale prisme. Punctele de intersecție ale muchiilor sunt *vârfurile* prisme.

O prismă se însemnează cu câte o literă scrisă la fiecare din vârfulurile ei (fig. 157). Prisma din fig. 157a se citește  $ABCDEA'B'C'D'E'$ .

Segmentul de dreaptă ce unește două vârfuluri ale unei prisme ce nu sunt pe aceeași față se numește *diagonală*. Planul ce trece prin două muchii și nu este

față se numește *plan diagonal*. Segmentul perpendiculară pe planele bazelor și cuprins între ele se numește *înălțimea prismei*.

Din aceste considerațiuni, se vede că definiția prismei este întemeiată pe două proprietăți: 1) *Muchiile laterale paralele*; 2) *plane de bază paralele*.

**128. Clasificarea prismelor.** Prisma fiind definită cu ajutorul unei direcțiuni a muchiilor paralele și alta a planelor de bază paralele, vom avea o clasificare a prismelor după direcțiunea muchiilor laterale față de planele bazelor.

Dacă direcțiunea muchiilor laterale ale unei prisme este oblică față de planele bazelor, prisma se numește *oblică* sau *oarecare*. Dacă direcțiunea muchiilor laterale este perpendiculară față de planele bazelor, prisma se numește *dreaptă*.

O altă clasificare a prismelor se face după felul poligonului de bază. După cum baza este triunghi, patrulater, pentagon, exagon, etc., prisma se numește *triunghiulară*, *patrulateră*, *pentagonală*, *exagonală*, etc.

De obicei, o prismă este numită ținând seama și de felul poligonului de bază și de direcțiunea muchiilor laterale față de bază. De exemplu, numim: prismă triunghiulară oblică, prismă patrulateră dreaptă, etc. Prisma dreaptă care are bazele poligoane regulate se numește *prismă regulată*.

**Exemple.** Cele mai multe corpuri din jurul nostru au formă de prismă. O cutie de chibrituri, un dulap, un penar, clasa, o cameră, un creion întreg cu fețe plane, o cărămidă întreagă, etc. sunt prisme.

**129. Proprietăți generale.** Din definiția prismei rezultă imediat proprietățile următoare:

1°. *Muchiile laterale ale unei prisme sunt egale între ele*, fiind segmente de drepte paralele cuprinse între plane paralele.

2°. *Fețele laterale ale unei prisme sunt paralele-*

*grame*, de oarece fiecare față este un patrulater care are două laturi opuse (cele două muchii laterale) paralele și egale.

3°. *Muchiile bazelor de pe aceeași față laterală sunt paralele*, ca intersecții ale planelor de bază paralele cu planul acelei fețe.

4°. *Muchiile bazelor sunt respectiv egale*, ca laturi opuse ale unui paralelogram. Urmează că *poligoanele de bază au laturile respectiv egale*.

5°. *Două unghiuri corespunzătoare ale poligoanelor de bază* (cu vârfurile pe aceeași muchie) *sunt egale*, având laturile respectiv paralele și de același sens.

6°. *Poligoanele de bază sunt egale*, având unghiurile și laturile respectiv egale.

**Observare.** Înălțimea unei prisme drepte este egală cu muchiile laterale, ca segmente de drepte paralele cuprinse între plane paralele.

**130. Secțiune plană în prismă.** Să considerăm o prismă oarecare, de ex. prismă patrulateră ABCDEFGH (fig. 158).

Un plan de secțiune S, care întâlnește toate muchiile laterale ale prisme între cele două baze, taie suprafața ei prismatică după poligonul LMNP, care se numește *secțiune plană a prisme*.

Dacă planul de secțiune S este oblic față de direcțiunea muchiilor laterale, secțiunea plană este *oblică* (fig. 158).

Dacă planul de secțiune T este perpendicular față de direcțiunea muchiilor laterale, secțiunea plană L'M'N'P' este *dreaptă* (fig. 158).

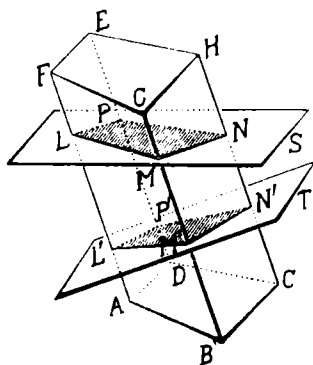


Fig. 158.

131. **Teoremă.** Fie o prismă oarecare, de exemplu prisma pentagonală ABCDEFGHIJ (fig. 159), în care facem două secțiuni plane KLMNO și K'L'M'N'O', prin două plane paralele.

Secțiunile plane paralele KLMNO și K'L'M'N'O' sunt egale.

În adevăr, partea din prismă dată cuprinsă între planele paralele ale secțiunilor este o nouă prismă, ale cărei baze sunt cele două secțiuni plane.

Însă, poligoanele de bază ale unei prisme sunt egale; urmează că secțiunile plane paralele sunt egale.

Rezultă dar următoarea teoremă:

*Două secțiuni plane făcute într-o prismă*

*prin plane paralele sunt egale.*

**Observări.** 1. Teorema de mai sus este adevărată și pentru mai multe secțiuni plane paralele.

2. Pentru a tăia dintr-o prismă oblică o prismă dreaptă, este de ajuns să facem în prismă oblică două secțiuni plane drepte. Solidul cuprins între cele două secțiuni drepte este o prismă dreaptă.

## PARALELIPIPEDUL.

132. **Definițiuni.** Prisma care are ca bază un paralelogram, are fețele paralelograme și poartă numele de paralelipiped (fig. 160).

Paralelipipedul este *oblic* (fig. 160) sau *drept* (fig. 161), după cum muchiile sale laterale sunt oblice sau perpen-

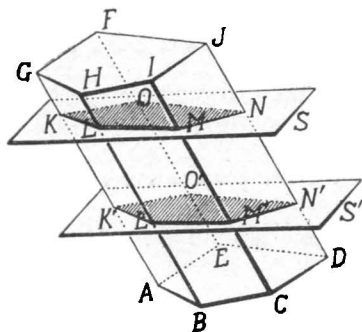


Fig. 159

diculare pe planele bazelor. Paralelipipedul drept care are bazele dreptunghiuri se numește *paralelipiped*

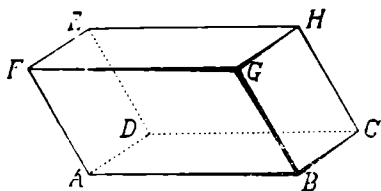


Fig. 160

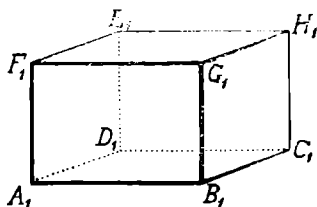


Fig. 161

*dreptunghi* (fig. 162). Paralelipipedul dreptunghi care are muchiile egale este *cul*.

In desen, nu se poate deosebi un paralelipiped drept de unul dreptunghi, din cauză că perspectiva deformează figurile în spațiu.

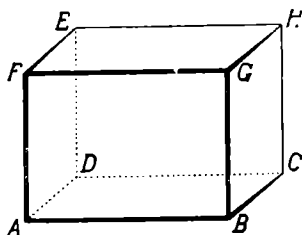


Fig. 162

**133. Proprietățile paralelipipedului.** Fie paralelipipedul ABCDEFGH (fig. 163).

Să arătăm că două fețe opuse, de exemplu ADEF și BCHG sunt paralele și egale.

In adevăr, muchiile laterale AF și BG sunt paralele și egale. Muchiile AD și BC sunt paralele și egale ca laturile paralelogramului de bază. Urmează că unghiurile FAD și GBC, având laturile paralele și de același sens sunt egale, iar planele lor sunt paralele.

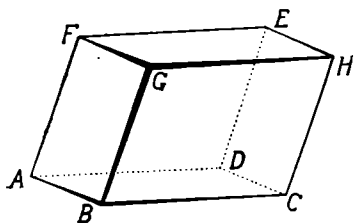


Fig. 163

Prin urmare, paralelogramele ADEF și BCHG având două laturi și unghiul cuprins respectiv egale, sunt egale.

Așadar, fețele opuse  $ADEF'$  și  $BCHG$  sunt paralele și egale.

În același fel, demonstrăm că celelalte două fețe opuse  $ABGF$  și  $CHED$  sunt paralele și egale.

Rezultă dar proprietatea următoare a paralelipipedului: *Fețele laterale opuse ale unui paralelipiped, două câte două, sunt paralele și egale.*

**Consecință.** Această proprietate permite să luăm oricare pereche de fețe opuse, drept baze, adică așezând paralelipipedul pe oricare față, el rămâne tot paralelipiped.

2°. Fie paralelipipedul  $ABCDEFGH$  (fig. 164). Să facem în el o secțiune printr'un plan  $P$ , care să taie toate muchiile laterale între baze.

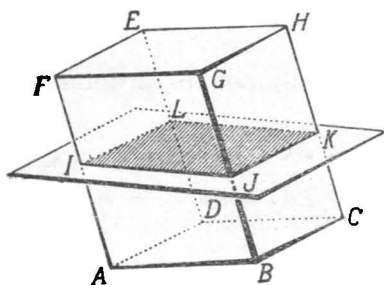


Fig. 164

Secțiunea plană  $IJKL$  este un paralelogram.

În adevăr, laturile opuse ale secțiunii, două câte două, sunt paralele ca intersecțiile a două plane paralele cu un al treilea plan. Prin urmare, secțiunea  $IJKL$  este un paralelogram.

Putem dar enunța a doua proprietate a unui paralelipiped :

*Secțiunea plană a unui paralelipiped printr'un plan care taie toate muchiile este un paralelogram.*

134. **Observări.** 1. Fețele laterale ale unui paralelipiped fiind paralelograme, el poate fi definit ca: *Poliedrul cu fețele paralelograme.*

2. De asemenea, paralelipipedul dreptunghiu mai poate fi definit astfel: *Poliedrul care are toate fețele dreptunghiuri se numește paralelipiped dreptunghiu.*

135. **Aplicațiuni.** 1. Fie paralelipipedul ABCDEFGH (fig. 165).

Să arătăm că diagonalele lui sunt concurente și se împart în părți egale.

Pentru aceasta, să ducem două din cele patru diagonale ale paralelipipedului, de exemplu BE și DG. Ducem în același timp segmentele  $\overline{DB}$  și  $\overline{EG}$  care unesc capetele diagonalelor considerate. Patrulaterul format BDEG este un paralelogram, având laturile opuse  $\overline{BG}$  și  $\overline{DE}$  paralele și egale, ca muchii laterale ale unei prisme. Urmează că diagonalele lui se taie în părți egale, adică  $\overline{OB} = \overline{OE}$  și  $\overline{OD} = \overline{OG}$ .

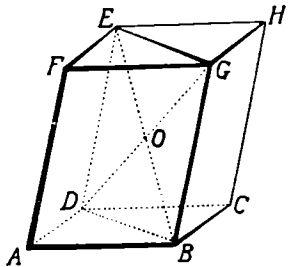


Fig. 165

Luând acum diagonală BE pe rând cu celelalte AH și CF rămase, demonstrăm în același fel că ele trec prin mijlocul O al diagonalei BE și se taie în părți egale.

Rezultă dar proprietatea următoare: *Diagonalele unui paralelipiped sunt concurente și se taie în părți egale.*

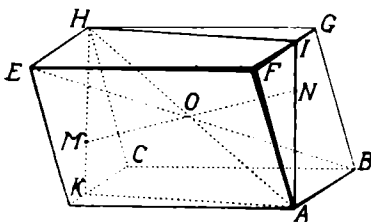


Fig. 166

2. Ducem prin punctul O de intersecție al diagonalelor unui paralelipiped ABCDEFGH (fig. 166) un segment de dreaptă MN mărginit la două fețe opuse. Punctul O este mijlocul segmentului  $\overline{MN}$ .

În adevăr, segmentul  $\overline{MN}$  cu una din diagonalele paralelipipedului, de ex: AH, determină un plan, care taie paralelipipedul după patrulaterul AIHK. Acest patrulater

este paralelogram, căci laturile lui opuse sunt paralele ca intersecții a două plane paralele cu un al treilea plan. Segmentul  $AH$  este diagonala paralelogramului  $AHK$ . După o proprietate din Geometria plană, segmentul  $\overline{MN}$  ce trece prin mijlocul  $O$  al diagonalei  $\overline{AH}$ , mărginit la două laturi opuse este împărțit în două părți egale de punctul  $O$ .

Rezultă dar proprietatea: *Punctul de intersecție al diagonalelor unui paralelipiped este mijlocul oricărui segment de dreaptă ce trece prin el, mărginit la două fețe opuse.*

Această proprietate arată că *punctul  $O$  este centrul de simetrie al paralelipipedului.*

3. Fie paralelipipedul dreptunghiu  $ABCDEFGH$  (fig. 167). Să arătăm că diagonalele lui sunt egale. Pentru aceasta, să ducem două din diagonalele lui, de ex.  $DG$  și  $BE$ . Unind vârfurile  $E$  și  $G$ ,  $D$  și  $B$  se formează patrulaterul  $DBGE$ , care este paralelogram, căci  $DE$  este paralelă și egală cu  $BG$ . Înșă, muchiile  $DE$  și  $BG$  perpendiculare pe baze sunt perpendiculare pe  $BD$  din planul bazei. Paralelogramul  $DBGE$  este dreptunghiu și deci diagonalele lui sunt egale.

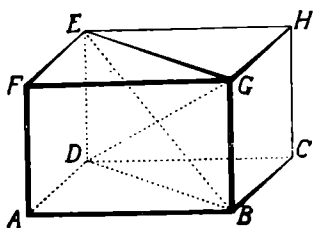


Fig. 167

În același fel, demonstrăm că una din diagonalele considerate este egală și cu celelalte diagonale. Rezultă dar proprietatea:

*Diagonalele unui paralelipiped dreptunghiu sunt egale.*

**Observare.** Egalitatea diagonalelor  $\overline{DG}$  și  $\overline{BG}$  se poate arăta și prin egalitatea triunghiurilor dreptunghice  $BDE$  și  $DBG$ .



4. Fie paralelipipedul dreptunghiu ABCDEFGH (fig. 168), în care ducem una din diagonale, de ex. BE.

Diagonala BE determină cu muchia DE și diagonala BD a bazei triunghiul dreptunghiu BDE, deoarece muchia DE perpendiculară pe baza ABCD este perpendiculară pe dreapta BD din acest plan. După teorema lui Pitagora,

$$\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2.$$

Însă, diagonala BD este ipotenuza triunghiului dreptunghiu DCB. După aceeași teoremă,

$$\overline{BD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2.$$

Rezultă că

$$\overline{BE}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{DE}^2.$$

sau

$$\overline{BE}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{DE}^2,$$

căci  $\overline{CB} = \overline{DA}$  ca laturi opuse ale dreptunghiului de bază.

Muchiile DA, DC, DH ce se unesc în același vârf C se numesc *dimensiunile* paralelipipedului dreptunghiu.

Proprietatea demonstrată mai sus se poate enunța astfel: *Pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghiu este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni.*

5. În cazul particular al unui cub ABCDEFGH (fig. 169), cele trei dimensiuni sunt egale cu muchia lui. Insemnând muchia cu  $m$  și diagonala cu  $d$ , avem

$$d^2 = m^2 + m^2 + m^2$$

sau

$$d^2 = 3m^2;$$

de unde

$$d = m\sqrt{3}.$$

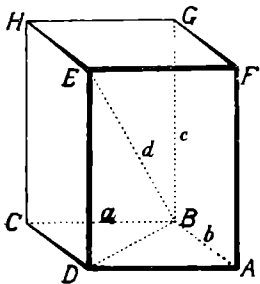


Fig. 168.

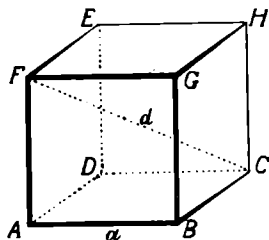


Fig. 169

## Volumul și aria prisme

136. Prin *suprafața* unui corp înțelegem totalitatea fețelor lui. Prin *suprafața lui*, un corp vine în atingere cu restul spațiului.

*Volumul* unui corp este porțiunea de spațiu închisă de suprafața lui.

Pentru o mai bună înțelegere, să luăm un exemplu. Presupunem că avem o prismă oarecare de lemn și înăuntrul ei tăiem o altă prismă, având aceeași direcție a muchiilor și bazele în planele bazelor prismei dintâi. Suprafața corpului rezultat este formată din fețele laterale ale prisme exterioare, din fețele laterale ale prisme interioare și porțiunile rămase din bazele prisme exterioare. Volumul acestui corp este spațiul închis de suprafața lui, așa cum a fost definită.

Două corpuri sunt *egale* când pot ocupa la timpuri diferite, același loc în spațiu.

Două corpuri care au același volum însă au forme deosebite se numesc *echivalente*.

Unitatea de măsură pentru volume este cubul construit pe unitatea de lungime.

137. **Egalitatea a două prisme drepte.** Să considerăm două prisme drepte care să aibă bazele direct egale și înălțimile egale, de exemplu prismele triunghiulare drepte  $ABCDEF$  și  $A'B'C'D'E'F'$  (fig. 170).

Să arătăm că aceste prisme sunt egale.

Pentru a arăta că două corpuri solide sunt egale, trebuie să arătăm că *ele pot ocupa la timpuri diferite, același loc în*

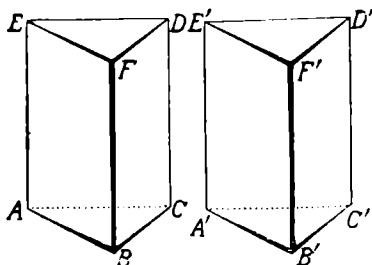


Fig. 170

spațiu. Prisma  $ABCDEF$  are baza de jos  $ABC$  în planul

determinat de vârfurile ei, în care însemnăm locul vârfurilor  $A, B, C$ . Muchiile ei  $AE, BF, CD$  sunt perpendiculare pe planul  $ABC$ , iar extremitățile lor  $E, F, D$ , ocupă anumite poziții în spațiu.

Luăm prisma  $ABCDEF$  din locul ocupat de ea și așezăm prisma a doua  $A'B'C'D'E'F'$  cu baza de jos pe același plan, astfel ca vârfurile  $A'$  și  $B'$  ale bazei de jos să ocupe locurile vârfurilor  $A$  și  $B$ . Bazele prismelor fiind date egale, vârful  $C'$  ocupă locul vârfului  $C$ . Astfel baza de jos  $A'B'C'$  ocupă locul ocupat mai înainte de baza de jos  $ABC$ .

Muchiile  $A'E', B'F', C'D'$  perpendiculare pe baza  $A'B'C'$  respectiv în punctele  $A', B', C'$  ce ocupă locul vârfurilor  $A, B, C$ , iau direcțiunile muchiilor  $AE, BF, CD$  perpendiculare pe același plan, în aceleași puncte. Aceste muchii fiind egale cu muchiile prismei dintâi, ele având lungimea înălțimii comune, vârfurile  $E', F', D'$  ocupă respectiv locul vârfurilor  $E, F, D$ . Rezultă că baza de sus a prismei  $A'B'C'D'E'F'$  ocupă locul pe care l'a ocupat mai înainte baza de sus, a prismei  $ABCDEF$ .

Prisma  $A'B'C'D'E'F'$  ocupă deci locul ocupat mai înainte de prisma  $ABCDEF$ . Prin urmare, cele două prisme sunt egale.

Am demonstrat astfel următoarea teoremă :

*Două prisme drepte care au bazele direct egale și înălțimile egale sunt egale.*

**Observare.** Demonstrația se face în același fel, oricâte laturi ar avea poligoanele de bază ale prismelor.

**138. Trunchiul de prismă.** Dacă tăiem o prismă dreaptă oarecare  $ABCDEF$  (fig. 171) cu un plan oblic față de direcția muchiilor laterale, fiecare din cele două corpuri obținute  $ABCGHI$  și  $DEFGHI$  se numește *trunchiul de prismă dreaptă*.

Dacă însă tăiem o prismă oblică  $ABCDEFGH$  cu un plan oblic față de muchiile laterale și care nu e paralel

cu bazele, fiecare din solidele obținute ABCDPLMN și

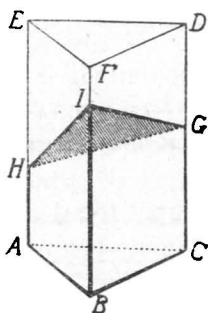


Fig 171

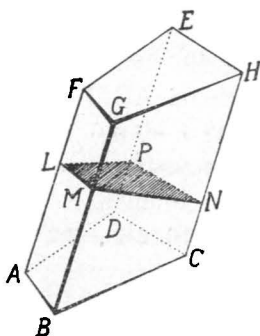


Fig. 172

LMNPEFGH se numește *trunchiu de prismă oblică* (fig. 172).

**139. Egalitatea a două trunchiuri de prismă**

**dreaptă.** Fie două trunchiuri de prismă triunghiulară dreaptă ABCDEF și A'B'C'D'E'F', care au bazele egale și muchiile laterale respectiv egale (fig 173). Trunchiurile de prismă ABCDEF și A'B'C'D'E'F' sunt egale.

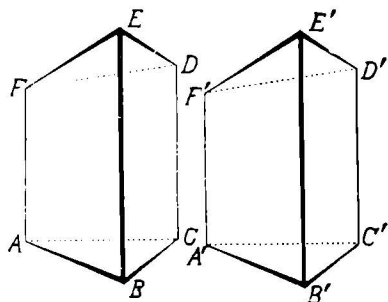


Fig. 173

Pentru a dovedi această proprietate, observăm că trunchiul de prismă dreaptă ABCDEFGH, în poziția în care se găsește are baza de jos ABC într'un plan, în care însemnăm locurile vârfurilor A, B, C. Muchiile laterale AE, BF, CD ocupă anumite poziții în spațiu, perpendiculare respectiv în vârfurile bazei de jos, pe planul bazei ABC. Extremitățile D, E, F ale acestor muchii ocupă anumite poziții în spațiu.

Luăm trunchiul  $ABCDEF$  din locul ocupat de el și așezăm trunchiul de prismă  $A'B'C'D'E'F'$  cu baza de jos pe același plan, astfel ca vârfurile  $A'$  și  $B'$  de ex. să vină în locurile vârfurilor  $A$  și  $B$ . Bazele trunchiurilor fiind egale, vârful  $C'$  ocupă locul vârfului  $C$ . Astfel, baza de jos  $A'B'C'$  a trunchiului al doilea ocupă locul ocupat mai înainte de baza de jos a trunchiului dintâi.

Muchiile laterale  $A'E'$ ,  $B'F'$ ,  $C'D'$  perpendiculare pe baza  $A'B'C'$  în punctele  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , când aceste vârfuri ocupă respectiv locurile vârfurilor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , iau direcțiunile muchiilor  $AE$ ,  $BF$ ,  $CD$  fiind perpendiculare pe același plan, în aceleași puncte. Muchiile trunchiului  $A'B'C'D'E'F'$  fiind respectiv egale cu muchiile trunchiului  $ABCDEF$ , vârfurile  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$ , ocupă locurile de mai înainte ale vârfurilor bazei de sus a trunchiului dintâi. Rezultă că baza de sus a trunchiului  $A'B'C'D'E'F'$  ocupă locul bazei de sus a trunchiului  $ABCDEF$ .

Trunchiul de prismă  $A'B'C'D'E'F'$  ocupă deci locul ocupat mai înainte de trunchiul de prismă  $ABCDEF$ . Prin urmare, trunchiurile de prismă date sunt egale.

Dacă trunchiurile de prismă ar avea poligoane de bază cu un număr oarecare de laturi, proprietatea demonstrată este adevărată și pentru acele trunchiuri. Ea este deci generală și o enunțăm astfel:

*Două trunchiuri de prismă dreaptă care au bazele egale și muchiile laterale respectiv egale sunt egale.*

**140. Prisme echivalente.** Două prisme, de exemplu, una triunghiulară și una pentagonală, care au același volum, neavând aceeași formă se numesc *prisme echivalente*.

**141. Teorema echivalenței prismelor.** Să considerăm o prismă oblică de ex. prisma patrulateră oblică  $ABCDEFGH$  (fig. 174).

Facem în această prismă secțiunea dreaptă  $IJKL$ .

Prelungim muchiile laterale ale prismei oblice și luăm pe una din ele, de ex. AF, segmentul  $\overline{AM}=\overline{FI}$ .

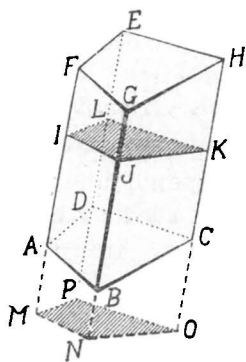


Fig. 174

Prin punctul M, ducem un plan perpendicular pe muchia IM, care determină în prelungirea prisme date o nouă secțiune dreaptă MNOP. Se formează astfel o prismă dreaptă MNOPLIJK.

Să dovedim că prisma oblică dată ABCDEFGH este echivalentă cu prisma dreaptă MNOPLIJK.

Observăm că  $\overline{JN}=\overline{IM}=\overline{FA}=\overline{GB}$ ; muchiile laterale JN și GB egale, având partea  $\overline{BJ}$  comună, rezultă  $\overline{BN}=\overline{GJ}$  ca diferențe de segmente

egale. Tot astfel, arătăm că  $\overline{CO}=\overline{HK}$  și  $\overline{DP}=\overline{EL}$ .

Prisma oblică ABCDEFGH este compusă din două trunchiuri de prismă dreaptă IJKLDABC și IJKLEFGH, iar prisma dreaptă MNOPLIJK este compusă din două trunchiuri de prismă dreaptă IJKLDABC și MNPDABC. Rezultă că ele au o parte comună, trunchiul de prismă IJKLDABC; cealaltă două părți sunt două trunchiuri de prismă dreaptă ce au bazele egale (ca baze ale prismelor) și muchiile respectiv egale (după cum am arătat). Prisma oblică ABCDEFGH și prisma dreaptă MNOPLIJK fiind compuse din câte două solide respectiv egale, însă altfel așezate au același volum, adică sunt echivalente.

Rezultă așa dar teorema :

*Orice prismă oblică este echivalentă cu o prismă dreaptă care are ca bază o secțiune dreaptă făcută în prisma oblică și muchia egală cu muchia prisme oblice.*

**142 Teoremă.** Fie paralelipipedul drept ABCDEFHG (fig. 175). Să ducem prin două muchii opuse, de ex. AF și CF, planul diagonal AFHC. Acest plan diagonal

taie bazele ABCD și EFGH respectiv după diagonalele AC și FH și împarte paralelipipedul în două prisme triunghiulare ACDEFH și ABCHFG.

Prismele drepte ACDEFH și ABCHFG având bazele egale (diagonala AC împarte paralelogramul ABCD în două triunghiuri egale) și înălțimile egale sunt egale.

Rezultă dar următoarea proprietate :

*Un plan diagonal împarte un paralelipiped drept în două prisme triunghiulare drepte egale.*

**143. Teoremă.** Să considerăm paralelipipedul oblic ABCDEFGH (fig. 176) și să-l tăiem prin planul diagonal EDBG. Planul diagonal EDBG desparte paralelipipedul

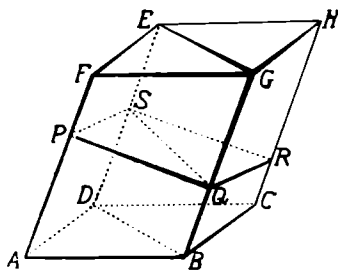


Fig. 176

în două prisme triunghiulare oblice ABDEFG și BCDEGH.

Să arătăm că aceste prisme sunt echivalente.

Dacă facem în paralelipipedul ABCDEFGH o secțiune dreaptă PQRS, planul diagonal taie paralelogramul de secțiune după diagonala QS.

Diagonala QS împarte paralelogramul PQRS în două triunghiuri PQS și QRS egale. Triunghiurile PQS și QRS fiind în planul de secțiune perpendicular pe muchiile laterale, urmează că triunghiurile PQS și QRS sunt secțiuni drepte făcute respectiv în prismele triunghiulare ABDEFG și BCDEGH.

Însă, știm că o prismă oblică este echivalentă cu una dreaptă care are ca bază secțiunea dreaptă în prisma oblică și muchia egală cu muchia prisme oblice. Urmează că prismele triunghiulare oblice ABDEFG și

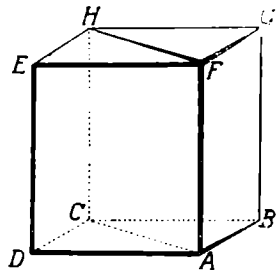


Fig. 175

BCDEGH sunt echivalente amândouă cu aceeași prismă dreaptă, care are ca bază secțiunea dreaptă făcută în una din ele și ca muchie, muchia paralelipipedului. Prin urmare, prismele triunghiulare oblice sunt echivalente.

Putem deci enunța proprietatea generală:

*Un plan diagonal împarte un paralelipiped oarecare în două prisme triunghiulare echivalente.*

**Observare.** Două prisme egale sunt echivalente. Două prisme echivalente nu sunt totdeauna egale.

**144. Teoremă.** Să considerăm două paralelipipede dreptunghice ABCDEFGH și A'B'C'D'E'F'G'H', care au

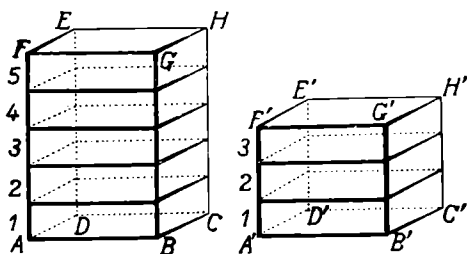


Fig. 177

bazele egale (fig 177). Ne propunem să aflăm raportul volumelor acestor două paralelipipede.

Să presupunem că înălțimile acestor două paralelipipede dreptunghice admit o unitate de măsură comună, care se cuprinde în înălțimea AF de ex. de 5 ori și în înălțimea A'F' a celui de al doilea, de 3 ori. Măsurile înălțimilor respective ale celor două paralelipipede sunt deci 5 și 3.

Ducem prin punctele de diviziune ale înălțimilor AF și A'F', plane paralele cu planele bazelor. Aceste plane descompun paralelipipedul dreptunghiu ABCDEFGH în 5 paralelipipede dreptunghice, care sunt egale având bazele egale ca secțiuni prin plane paralele în aceeași prismă și înălțimile egale, cât unitatea de măsură a înăl-



țimii. Deasemenea, ducem prin punctele de diviziune ale înălțimii  $A'F'$ , plane paralele cu planele bazelor.

Aceste plane descompun paralelipipedul dreptunghiu  $A'B'C'D'E'F'G'H'$ , în trei paralelipipe dreptunghice, egale între ele, căci au bazele egale, ca secțiuni prin plane paralele în aceeași prismă și înălțimile egale, cât unitatea de măsură a înălțimii.

Însă paralelipipedul 1 din paralelipipedul  $ABCDEFGH$  și paralelipipedul 1 din paralelipipedul  $A'B'C'D'E'F'G'H'$  sunt două prisme drepte care au bazele egale și înălțimile egale. Ele sunt deci egale. Urmează că părțile paralelipipedului  $AH$  sunt egale cu părțile paralelipipedului  $A'H'$ . Una din ele poate fi deci luată ca unitate de măsură a volumelor celor două paralelipipe considerate. În acest caz, măsura volumului celui dintâi este 5, iar măsura volumului celui de al doilea este 3. Rezultă că

$$\frac{\text{volumul paralelipipedului } AH}{\text{volumul paralelipipedului } A'H'} = \frac{5}{3}.$$

Raportul dintre volumele paralelipipedelor este deci egal cu raportul dintre înălțimile lor, adică

$$\frac{\text{volumul paralelipipedului } AH}{\text{volumul paralelipipedului } A'H'} = \frac{\text{înălțimea } \overline{AF}}{\text{înălțimea } \overline{A'F'}}.$$

Am găsit astfel raportul volumelor paralelipipedelor considerate, pe care-l enunțăm astfel :

*Raportul volumelor a două paralelipipe dreptunghice care au bazele egale este egal cu raportul înălțimilor lor.*

Însemnând cu  $V$  și  $V'$  măsurile respective ale volumelor celor două paralelipipe considerate, cu  $i$  și  $i'$  măsurile înălțimilor lor respective, după teorema demonstrată putem scrie

$$\frac{V}{V'} = \frac{i}{i'}.$$

145. **Observări.** 1. Bazele celor două paralelipede dreptunghice considerate fiind egale, înseamnă că dreptunghiurile ce sunt bazele lor respective au dimensiunile egale.

Teorema de mai sus se poate enunța și astfel: *Raportul volumelor a două paralelipede dreptunghice care au dimensiunile bazelor egale este egal cu raportul înălțimilor lor.*

2. Dacă două paralelipede dreptunghice au egale alte două dimensiuni decât acelea ale bazelor, luăm ca

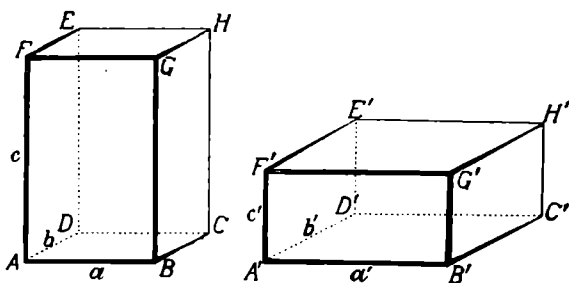


Fig. 178

baze fețele care au ca dimensiuni, dimensiunile egale. Aceasta este cu puțință după proprietatea cunoscută a paralelipedului.

146. **Teoremă.** Fie două paralelipede dreptunghice

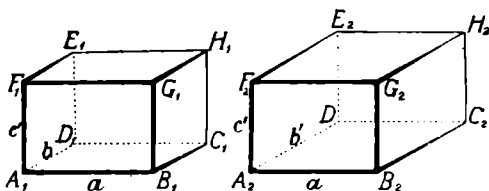


Fig. 178 a.

ABCDEF $\overline{G}$ H și A'B'C'D'EFGH' (fig. 178). Insemnăm dimensiunile lor respective cu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  și  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ .

Să construim două paralelipede noi:  $P_1$  cu dimen-

siunile  $a, b, c'$  și  $P_2$  cu dimensiunile  $a, b', c'$ . Să însemnăm volumele paralelipipedelor date și ale celor construite cu  $V, V', V_1$  și  $V_2$  respectiv.

Comparând pe rând paralelipipedele: ABCDEFGH cu  $P_1, P_1$  cu  $P_2, P_2$  cu  $A'B'C'D'E'F'G'H'$ , putem scrie:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{c}{c'}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{V_2}{V'} = \frac{a}{a'}$$

Inmulțind parte cu parte aceste trei egalități, obținem

$$\frac{V}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V'} = \frac{c}{c'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{a}{a'}$$

sau:

$$\frac{V}{V'} = \frac{a \cdot b \cdot c}{a' \cdot b' \cdot c'}$$

Această egalitate exprimă teorema:

*Volumele a două paralelipipede dreptunghice sunt între ele ca produsele numerelor ce măsoară dimensiunile lor.*

147. **Teoremă.** Să considerăm un paralelipiped dreptunghiu ABCDEFGH și un cub LMNOPQRS (fig. 179).

Insemnăm cu  $V, a, b, c$ , respectiv măsurile volumului și dimensiunilor paralelipipedului, cu  $V'$  și  $a'$  respectiv măsurile volumului și muchiei cubului. După teorema precedentă avem:

$$(1) \quad \frac{V}{V'} = \frac{a \cdot b \cdot c}{a' \cdot a' \cdot a'}$$

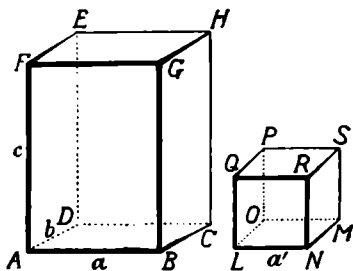


Fig. 179

Dacă  $a'$  este egală cu unitatea de lungime, cubul construit pe ea ca muchie este unitatea de volum, adică  $V' = 1$ . Egalitatea (1) devine:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

care arată că: *volumul unui paralelipiped dreptunghiu este egal cu produsul numerelor ce măsoară cele trei dimensiuni ale lui.*

**148. Observare.** Produsul numerelor  $a$  și  $b$ , ce măsoară lungimea și lățimea dreptunghiului de bază al paralelipipedului reprezintă măsura suprafeței acestui dreptunghi. Teorema de mai sus se poate deci enunța și sub forma :

*Măsura volumului unui paralelipiped dreptunghiu este egală cu produsul numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea lui.*

Dacă însemnăm cu  $V$ ,  $b$  și  $i$  numerele ce măsoară volumul, suprafața bazei și înălțimea paralelipipedului dreptunghi, avem

$$V = b \times i$$

**149. Volumul cubului.** Cubul fiind un paralelipiped dreptunghi cu muchiile egale, măsurile celor trei dimensiuni sunt egale. Insemnând cu  $l$  măsura lor comună, avem :

$$V = l \cdot l \cdot l = l^3$$

De unde :

$$l = \sqrt[3]{V}$$

**150. Volumul paralelipipedului drept.** Fie paralelipipedul drept ABCDEFGH (fig. 180).

Să aflăm măsura volumului lui.

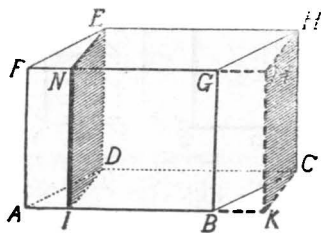


Fig. 180

Pentru aceasta, ducem prin muchiile laterale CH și DE respectiv planele CHMK și DENI perpendiculare pe muchiile paralele cu muchia AB. Ele determină în paralelipipedul ABCDEFGH socotit cu bazele ADEF și BCHG secțiunile drepte IDFN și CHMK și în baza ABCD segmentele DI și CK perpendiculare pe AB. Paralelipipedul IKCDENMH,

având ca bază secțiunea dreaptă în paralelipipedul ABCDEFGH și aceeași muchie laterală este echivalent cu cel dat.

Însă, paralelipipedul IKCDENMH este dreptunghiu, de oarece fețele lui sunt dreptunghiuri. Il socotim cu baza IKCD și înălțimea DE, aceeași ca a paralelipipedului dat. Insemnând cu  $V'$ ,  $b'$  și  $i'$  măsurile respective ale volumului, bazei și înălțimii lui, știm că;

$$V' = b' \times i'.$$

Să însemnăm cu  $V$ ,  $b$ ,  $i$  respectiv măsurile volumului, bazei și înălțimii paralelipipedului dat.

Paralelipipele fiind echivalente  $V = V'$ . Dreptunghiul IKCD fiind echivalent cu paralelogramul ABCD,  $b = b'$ . Înălțimile paralelipipedelor fiind egale,  $i = i'$ . Înlocuind pe  $V'$ ,  $b'$ , și  $i'$  în egalitatea de mai sus prin egalele lor, avem

$$V = b \times i$$

adică: *Măsura volumului unui paralelipiped drept este egală cu produsul numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea lui.*

**151. Volumul paralelipipedului oblic.** Fie paralelipipedul oblic ABCDEFGH (fig. 181). Să aflăm măsura volumului lui.

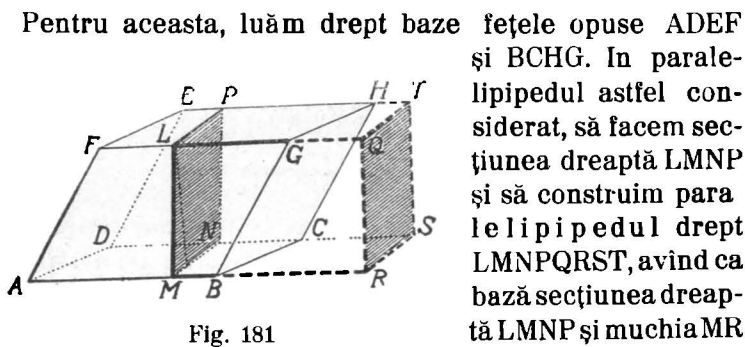


Fig. 181

Pentru aceasta, luăm drept baze fețele opuse ADEF și BCHG. În paralelipipedul astfel considerat, să facem secțiunea dreaptă LMNP și să construim paralelipipedul drept LMNPQRST, având ca bază secțiunea dreaptă LMNP și muchia MR egală cu muchia AB.

După o proprietate cunoscută, paralelipipedul drept

LMNPQRST este echivalent cu paralelipipedul oblic ABCDEFGH.

Măsura volumului paralelipipedului LMNPQRST se află înmulțind măsura suprafeței bazei LMNP, cu măsura înălțimii  $\overline{MR} = \overline{AB}$ .

Așa dar: *Măsura volumului paralelipipedului oblic se află înmulțind aria secțiunii drepte cu măsura muchiei corespunzătoare.*

Insă secțiunea dreaptă LMNP este un paralelogram.

Aria ei este egală cu produsul numerelor ce măsoară baza MN și înălțimea LI. Iar baza MN a secțiunii este înălțimea paralelogramului de bază ABCD. Observăm apoi că înălțimea LI a secțiunii LMNP, fiind în planul secțiunii drepte este perpendiculară pe direcția muchiei AB și pe MN, prin construcție. Ea este deci perpendiculară pe planul ABCD, fiind perpendiculară pe două direcțiuni din acest plan. Luând ca bază a paralelipipedului dat fața ABCD, LI este înălțimea corespunzătoare ei.

Să însemnăm cu  $b$ ,  $h$ ,  $i$ , respectiv măsurile segmentelor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{MN}$ ,  $\overline{LI}$ . Măsura suprafeței secțiunii drepte este

$$h \times i,$$

iar măsura  $V$  a volumului paralelipipedului este

$$V = (h \times i) \times b.$$

sau

$$V = b \times h \times i.$$

Insă

$$b \times h = \text{aria (ABCD)};$$

deci

$$V = \text{aria (ABCD)}$$

Rezultă că: *Măsura volumului unui paralelipiped oblic este egală cu produsul numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea corespunzătoare.*

**152. Volumul prisme triunghiulare.** Fie prisma triunghiulară ABCDEF (fig. 182). Să aflăm măsura volumului ei.

Să ducem prin muchiile AB și BF, plane respectiv

paralele cu fețele opuse BCDF și AGHE. Aceste plane se taie după dreapta GH, paralelă cu muchiile AE și CD, după o teoremă cunoscută.

Planele duse determină în planele de bază, împreună cu fețele AGHE și BCDF paralelogramele AECG și EHDF. Solidul obținut ABCGHEFD este un paralelipiped cu baza ABCG și muchiile laterale AE, CD, BF, GH.

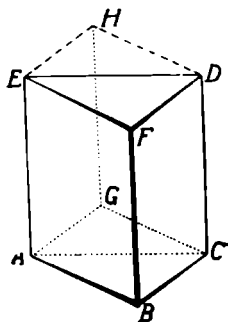


Fig. 182

Fața ACDE a prisme triunghiulare este plan diagonal al paralelipipedului; prin urmare, împarte paralelipipedul în două prisme triunghiulare echivalente. Urmează că volumul prisme triunghiulare este jumătatea volumului paralelipipedului.

Să însemnăm cu  $V$ ,  $b$ ,  $i$  respectiv măsurile volumului, suprafeței bazei și înălțimii prisme date; cu  $V'$ ,  $b'$ ,  $i'$  măsurile volumului, suprafeței bazei și înălțimii paralelipipedului construit. Avem:

$$V' = b' \times i'.$$

Însă  $i = i'$ ,  $b = \frac{b'}{2}$ ; rezultă că

$$V = \frac{V'}{2} = \frac{b' \times i'}{2} = \frac{b'}{2} \times i' = b \times i,$$

sau

$$\boxed{V = b \times i}$$

Prin urmare: *Măsura volumului unei prisme triunghiulare este egală cu produsul numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea ei.*

153. **Volumul prisme poligonale.** Fie o prismă poligonală oarecare, de exemplu prisma pentagonală oblică ABCDEFGHIJ (fig. 183). Să aflăm măsura volumului ei.

Pentru aceasta, să ducem prin una din muchiile ei laterale, de exemplu AG, planele diagonale AGJD și AGIC. Descompunem astfel prisma poligonală în trei prisme triunghiulare ABCIGH, ACDJGI, ADEFGJ cu aceeași înălțime LL' a prisme poligonale.

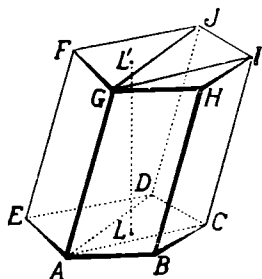


Fig. 183

Insemnăm cu  $V_1, V_2, V_3$ , respectiv numerele ce măsoară volumele prismelor triunghiulare; cu  $b_1, b_2, b_3$ , numerele ce măsoară suprafețele bazelor respective, cu  $i$  măsura înălțimii comune și cu  $b$  măsura suprafeței bazei prisme poligonale.

Prisma poligonală fiind egală cu suma prismelor triunghiulare în care a fost descompusă,

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

sau după proprietatea precedentă,

$$V = b_1 \times i + b_2 \times i + b_3 \times i = (b_1 + b_2 + b_3) \times i.$$

Însă  $b = b_1 + b_2 + b_3$ ;

deci

$V = b \times i$
------------------

adică: *Măsura volumului unei prisme poligonale oarecare este egală cu produsul numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea prisme.*

**154. Aria laterală și totală a prisme.** Prin *aria laterală a unei prisme* se înțelege suma ariilor fețelor laterale.

Să considerăm prisma exagonală ABCDEFHGHIIJKL (fig. 184).

Insemnând cu  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  respectiv ariile fețelor laterale ABIH, BCJI, CDKJ, DELK, EFGL, FAGL și cu  $S$  aria laterală a prisme, avem

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6$$



Dacă la aria laterală a unei prisme, adăogăm ariile poligoanelor de bază obținem *aria totală* a prisme.

155. **Aria laterală a prisme drepte.** Fie prisma pentagonală dreaptă ABCDEFA'B'C'D' (fig. 185).

Dacă tăiem suprafața laterală a prisme în lungul unei muchii laterale, de exemplu AA', putem întinde fețele late-

rale una după alta, pe planul feței AEE'A' de exemplu; zicem că suprafața laterală a prisme s'a desfășurat pe planul feței AEE'A'. Prin desfășurarea suprafeței laterale, obținem dreptunghiul AA<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>, a cărui bază

AA<sub>1</sub> este egală cu suma laturilor sau perimetrul poligonului de bază și a cărui înălțime este muchia AA' a prisme drepte. Urmează că aria laterală a prisme considerate este aria dreptunghiului AA<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub> obținut prin desfășurare.

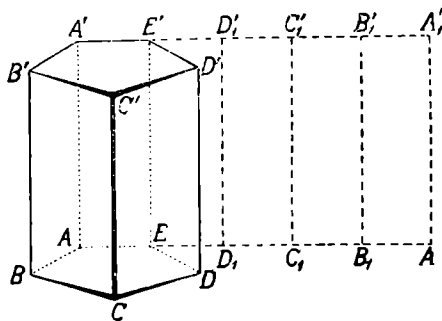


Fig. 185

Insemnând cu  $S$  aria laterală a prisme, cu  $p$  perimetrul bazei și cu  $i$  măsura înălțimii, avem

$$S = p \times i$$

În același fel, arătăm că se află aria laterală a oricărei prisme, adică în general:

*Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu pro-*

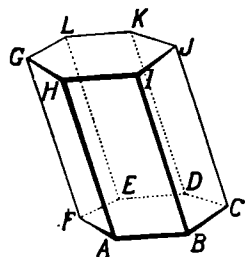


Fig. 184

dusul numerelor ce măsoară perimetrul bazei și înălțimea prisme.

156. **Observare.** Pentru a calcula aria totală a prisme drepte considerate, adunăm la aria laterală, ariile celor două baze. Dacă însemnăm aria totală cu  $St$ , apotema poligonului de bază cu  $a$ , avem

$$St = p \times i + 2 \frac{p \times a}{2} = p \times i + p \times a = p(i + a).$$

157. **Aria laterală a unei prisme oblice.** Fie prisma patrulateră oblică ABCDEFGH (fig. 186). Să aflăm aria ei laterală.

Pentru aceasta, facem în prisma oblică dată o secțiune dreaptă IJKL. Planul secțiunii fiind perpendicular pe muchiile laterale ale prisme, urmează că laturile secțiunii sunt perpendiculare pe muchiile laterale, adică fiecare latură a secțiunii este înălțimea feței paralelogramice corespunzătoare.

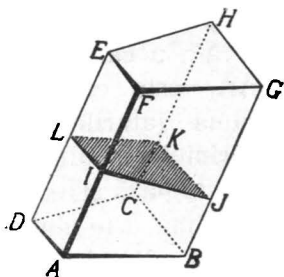


Fig. 186

Să însemnăm cu  $S$  aria laterală a prisme, cu  $a$  măsura muchiilor laterale ; după definiție :

$$S = \text{aria (ABGF')} + \text{aria (BCHG)} + \text{aria (CDEH)} \\ + \text{aria (DAFE)},$$

sau

$$S = a \times \overline{IJ} + a \times \overline{JK} + a \times \overline{KL} + a \times \overline{LI}$$

$$S = a (\overline{IJ} + \overline{JK} + \overline{KL} + \overline{LI});$$

însemnând cu  $p'$  perimetrul secțiunii drepte :

$$\boxed{S = a \times p'}$$

Demonstrația este aceeași pentru oricare fel de prismă poligonală oblică.

Putem deci enunța teorema :

*Aria laterală a unei prisme oblice este egală cu produsul numerelor ce măsoară perimetrul secțiunii drepte și muchia laterală a prisme.*

## **P r o b l e m e .**

1. Să se demonstreze direct că poliedrul care are toate fețele paralelograme este un paralelipiped.

2. Să se demonstreze direct că poliedrul care are toate fețele dreptunghiuri este un paralelipiped dreptunghiu.

3. Volumul unei prisme triunghiulare are ca măsură jumătatea produsului ariei unei fețe laterale prin distanța acestei fețe la muchia opusă.

R. Se va face legătura între prismă și paralelipiped.

4. Paralelipipedul cu diagonalele egale este dreptunghiu.

5. Pe trei drepte paralele care nu sunt în același plan, se iau trei segmente egale oricum așezate. Să se arate că volumul și aria laterală a prisme triunghiulare formate unind capetele segmentelor sunt constante.

R. Se va face legătură între această proprietate și teorema echivalenței.

6. Planul care trece prin mijloacele a trei muchii neparele și neconcurente ale unui cub determină o secțiune care este exagon regulat.

R. Trei mijloace determină acest plan. Se compară laturile secțiunii cu diagonalele cubului.

7. Să se demonstreze pe cale geometrică formula de ridicare la cub a unei sume sau diferențe.

R. Se va construi cubul care are muchia egală cu suma sau diferența dată.

8. Fiind date trei segmente de dreaptă concurente și neașezate în același plan, să se construiască un paralelipiped care să aibă ca muchii cele trei segmente.

R. Se vor duce drepte paralele.

9. Să se construiască un paralelipiped care să aibă ca diagonală un segment dat și muchiile după trei direcțiuni date.

R. Se duc printr'un capăt al diagonalei drepte cu direcțiunile date.

10. Se unesc centrele fețelor unui cub prin segmente de dreaptă. Ce este poliedrul care are cu muchii aceste segmente? Ce raport există între volumul lui și volumul cubului dat?

R. Octaedru regulat. Volumul octaedrului este  $\frac{1}{6}$  din volumul cubului.

11. O prismă dreaptă are baza un triunghi isoscel. Secțiunea plană în prismă printr'o dreaptă paralelă cu baza triunghiului isoscel, așezată în fața corespunzătoare este tot un triunghi isoscel.

R. Se observă că secțiunea este proiecția bazei pe planul secțiunii.

12. Se consideră o prismă exagonală regulată. ABCDEF'G'A'B'C'D'E' Fie AC' una din diagonalele cele mai scurte și AD' una din diagonalele cele mai lungi ale prisme.

1<sup>o</sup>. Să se arate că triunghiul AC'D' este dreptunghi.

2<sup>o</sup>. Dacă  $\overline{AC'} = b$  și  $\overline{AD'} = a$ , să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul prisme.

R. Insemnând latura bazei cu  $x$  și muchia cu  $y$ , avem  $4x^2 + y^2 = b^2$  și  $3x^2 + y^2 = a^2$ .

14. Dintr'o sârmă de lungime  $4l$ , să se construiască un paralelipiped dreptunghi care să aibă diagonala de lungime dată  $d$ .

1<sup>o</sup>. Să se arate că există o infinitate de paralelipipe dreptunghiuri în condițiunile problemei.

2<sup>o</sup>. Pânza necesară și suficientă pentru toate fețele unuia din paralelipipe este necesară și suficientă pentru oricare altul din ele. Aplicație  $4l = 48$ ,  $d = 36$ .

R. Insemnând muchiile cu  $x, y, z$ , ele verifică sistemul  $x + y + z = l$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$ . Sistem nedeterminat.  $S = l^2 - d^2 = \text{constantă}$ .

13. Dintr'o sârmă de lungime  $4l$ , să se construiască un paralelipiped dreptunghi având dimensiunile proporționale cu numerele  $a, b, c$ , date.

Aplicație:  $4l = 40$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ .

R. Dimensiunile paralelipipedului fiind  $x, y, z$ ,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{4l}{4a + 4b + 4c}$$

14. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghi care sunt în progresie aritmetică au suma egală cu  $15 \text{ dm}$ , iar aria totală este de  $132 \text{ dm}^2$ . Să se afle volumul paralelipipedului.

R. Insemnăm dimensiunile  $x - r, x, x + r$ ;  $x = 5$ ;  $80 \text{ dm}^3$ .

15. Să se calculeze aria totală a unui paralelipiped dreptunghi știind că: dimensiunile lui sunt în progresie geometrică; suma produselor dimensiunilor, două câte două este  $126 \text{ cm}^2$ ; produsul dimensiunilor este  $216 \text{ cm}^3$ .

R. Insemnăm dimensiunile  $\frac{x}{r}$ ,  $x, rx$ ;  $x = 6, r = 2$ ; aria totală  $252cm^2$ .

16. Să afle muchiile unui paralelipiped dreptunghiu știind că suma lor este  $a$ , lungimea diagonalei  $d$  și că una din muchii este medie proporțională între celelalte două.

Aplicație:  $a = 13, d = \sqrt{91}$ .

R. Insemnând cu  $x, y, z$  dimensiunile, ele sunt date de sistemul  $x+y+z = a, x^2+y^2+z^2 = d, y^2 = xz$ . Rădăcinile lui sunt

$$y = \frac{a^2-d^2}{2a}, \quad x, z = \frac{1}{4a} (a^2+d^2 \pm \sqrt{(3a^2-d^2)(3d^2-a^2)}).$$

Condițiuni  $a^2 > d^2$ ;  $(3a^2-d^2)(3d^2-a^2) > 0$ , care se reduc la  $3d^3 > a^3$ ; fiecare muchie mai mică decât  $d$  și  $a$ .

In cazul numeric,  $x = 9, y = 3, z = 1$ .

17. Cele trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghiu sunt proporționale cu trei numere  $m, n, p$ , iar volumul lui este  $V$ . Să se calculeze aria laterală și totală a paralelipipedului.

R. Se va insemna valoarea comună a rapoartelor de proporțio-

nalitate cu  $t$ ;  $t = \sqrt[3]{\frac{V}{mnp}}$ ;  $St = 2(mn + mp + np) \sqrt[3]{\frac{A^2}{m^2n^2p^2}}$ .

18. O prismă exagonală dreaptă are muchia bazei egală cu  $a$  și diagonala cea mai mică egală cu  $d$ . Să se afle volumul ei.

R. Se va ține seamă de ex. 12.

19. O prismă triunghiulară oblică are baza un triunghi echilateral cu latura egală cu  $a$  și muchiile laterale egale cu  $l$ . Muchiile laterale sunt inclinate pe bază cu  $30^\circ$ . Să se calculeze volumul prisme. Aplicație  $a = 8cm, l = 15cm$ .

$$R. \quad V = \frac{a^2 l \sqrt{3}}{8}; \quad 120\sqrt{3}cm^3.$$

20. O prismă oblică are baza un romb cu diagonalele egale cu  $a$  și  $b$  și muchiile laterale egale cu  $l$ . Să se calculeze volumul ei, știind că muchiile laterale sunt inclinate pe bază cu unghiul  $\alpha$ .

Aplicație  $a = 8\frac{1}{2}, b = 6\frac{2}{5}, l = 9, \alpha = 54^\circ 27'$ .

$$R. \quad V = \frac{abl \sin \alpha}{2}.$$

PIRAMIDA.

158. **Definițiuni.** Să considerăm un unghi poliedru convex oarecare, de ex. SMNOPQ (fig. 187). Dacă tăiem acest unghi poliedru printr'un plan S, care întâlnește toate muchiile lui, porțiunile din fețele unghiului poliedru și din planul T: SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, ABCDE mărginesc un poliedru numit *piramidă*.

Fețele triunghiulare SAB, SBC, SCD, SDE, SEA se nu-

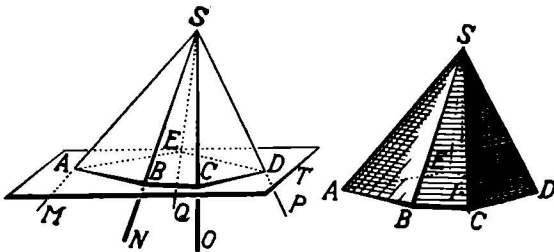


Fig. 187

mesc *fețele laterale* ale piramidei, iar poligonul ABCDE se numește *bază*.

Fețele laterale adiacente se taie după drepte numite *muchii laterale*; fețele laterale taie poligonul de bază după laturile poligonului de bază numite *muchii ale bazei*. Vârful unghiului poliedru considerat devine *vârful piramidei*. El este punctul comun *muchiiilor laterale*.

O piramidă se înseamnă cu o literă la vârful, de obicei S, sau T, sau V și cu câte o literă *la vârturile* poligonului de bază. Piramida din figura 187 se citește SABCDE.

Planul ce trece prin două muchii laterale, diferit de una din fețe, se numește *plan diagonal*.

Segmentul SI al perpendicularei coborite din vârful

piramidei pe planul bazei, cuprins între vârf și bază se numește *înălțimea piramidei*.

**59 Clasificarea piramidelor.** Din construcția piramidei, se vede că definiția ei se întemeiază pe două proprietăți: 1) *Muchiile laterale concurente*. 2) *Planul bazei taie toate muchiile laterale*.

Din această cauză, piramidele se clasifică după felul poligonului de bază. După cum baza este triunghi, patrulater, pentagon, exagon, etc., piramida se numește *triunghiulară, patrulateră, pentagonală, exagonală, etc.*

Piramida triunghiulară având toate fețele triunghiuri, putem lua ca bază oricare din fețele ei și avem tot o piramidă triunghiulară. Ea poartă și numele particular de *tetraedru*.

Piramida care are baza un poligon regulat și piciorul înălțimii este în centrul bazei se numește *piramidă regulată*.

**160. Observare.** La o piramidă regulată, piciorul înălțimii fiind în centrul poligonului de bază, muchiile laterale sunt oblice din același punct (vârful), la același plan (baza), cu picioarele egal depărtate de piciorul înălțimii. *Muchiile laterale sunt deci egale între ele.*

Această proprietate ne permite să verificăm practic dacă o piramidă este regulată.

**161. Secțiune plană în piramidă.** Fie piramida poligonală SABCD (fig. 188).

Să tăiem această piramidă cu un plan T care să întâlnească toate muchiile laterale. Planul P taie fiecare față laterală după un segment de dreaptă. Poligonul plan format de aceste segmente de dreaptă se numește *secțiune plană* în piramida SABCD.

**162. Teoremă.** Fie piramida poligonală SABCDE (fig. 189).

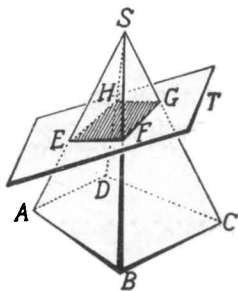


Fig. 188

Facem în ea o secțiune printr'un plan T paralel cu baza.

Secțiunea plană A'B'C'D'E' este un poligon asemenea cu poligonul de bază.

În adevăr, laturile secțiunii și bazei așezate pe aceeași față sunt paralele, ca intersecțiile a două plane paralele cu planul acelei fețe. Astfel, A'B' este paralelă cu AB, B'C' este paralelă cu BC, etc.

Două unghiuri ale secțiunii și bazei cu vârfurile pe aceeași muchie, de exemplu  $\sphericalangle E'A'B'$  și  $\sphericalangle EAB$  sunt egale, având laturile paralele și de același sens. Tot astfel,  $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle BCD$ , etc.

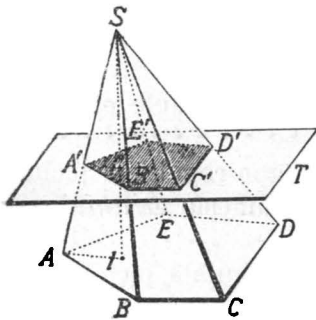


Fig. 189

De oarece în triunghiul SAB, avem A'B' paralelă cu AB, triunghiurile S'A'B' și SAB sunt asemenea.

Rezultă că laturile lor omoloage sunt proporționale, adică

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{S'B'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Aceeași proprietate aplicată celorlalte fețe ne permite să scriem

$$\begin{aligned} \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} &= \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}, \\ \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} &= \frac{\overline{SD'}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}, \\ \frac{\overline{SD'}}{\overline{SD}} &= \frac{\overline{SE'}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}}, \\ \frac{\overline{SE'}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}}. \end{aligned}$$

Observăm că fiecare din aceste cinci șiruri de rapoarte egale are câte un raport comun cu șirul urmă-



tor. Urmează că ele sunt egale între ele, adică putem scrie

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

ceea ce înseamnă că laturile omoloage ale secțiunii și bazei sunt proporționale.

Poligonul de secțiune  $A'B'C'D'E'$  și poligonul de bază  $ABCDE$  având unghiurile respectiv egale și laturile omoloage proporționale sunt asemenea.

Rezultă următoarea teoremă :

*Secțiunea plană determinată într'o piramidă printr'un plan paralel cu baza este un poligon asemenea cu poligonul de bază.*

Raportul de asemănare este egal cu raportul segmentelor de pe aceeași muchie, dela vârf la secțiune și bază.

**163. Consecințe.** 1. Din șirurile de rapoarte egale scrise mai sus, rezultă.

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SD'}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{SE'}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}},$$

adică : *un plan de secțiune paralel cu baza împarte muchiile laterale în părți proporționale (în același raport).*

Raportul de proporționalitate este egal cu raportul a două laturi omoloage ale secțiunii și bazei.

2. Dacă ducem din vârful  $S$  înălțimea  $SI$  a piramidei, înălțimea înțeapă secțiunea în punctul  $I'$ . Unind respectiv punctele  $A'$  cu  $I'$  și  $A$  cu  $I$ , dreptele  $A'I'$  și  $AI$  sunt paralele ca intersecții ale planelor paralele ale secțiunii și bazei cu planul determinat de muchia  $SA$  și înălțimea  $SI$ . Rezultă că triunghiul  $SA'I'$  este asemenea cu triunghiul  $SAI$ ; deci

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SI'}}{\overline{SI}},$$

adică: *Raportul segmentelor de pe aceeași muchie laterală, de la vârf până la secțiune și bază este egal cu raportul segmentelor de pe înălțime dela vârf, până la secțiune și bază.*

3. Secțiunea plană făcută într'o piramidă printr'un plan paralel cu baza fiind asemenea cu poligonul de bază, știm că raportul ariilor lor este egal cu pătratul raportului de asemănare al celor două poligoane.

Putem deci scrie

$$\frac{\text{aria } (A'B'C'D'E')}{\text{aria } (ABCDE)} = \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)^2$$

Insă raportul de asemănare al secțiunii și bazei este egal cu raportul segmentelor dela vârf până la secțiune și bază, măsurate pe aceeași muchie laterală sau pe înălțime. Rezultă

$$\frac{\text{aria } (A'B'C'D'E')}{\text{aria } (ABCDE)} = \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{SI'}}{\overline{SI}}\right)^2,$$

adică: *Raportul ariilor secțiunii și bazei este egal cu pătratul raportului a două laturi omoloage ale lor, sau cu pătratul raportului segmentelor dela vârf la secțiune și bază măsurate pe aceeași muchie laterală sau pe înălțime.*

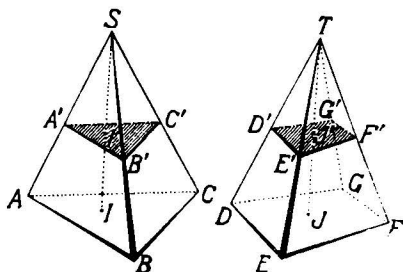


Fig. 190

**164. Teoremă.** Fie două piramide  $SABC$  și  $DEFG$  care au bazele echivalente și înălțimile egale (fig. 190).

Facem în fiecare piramidă câte o secțiune plană paralelă cu baza, la aceleași depărtare de vârf. Obținem

respectiv secțiunile plane  $A'B'C'$  și  $D'E'F'G'$ , care taie înălțimile corespunzătoare  $SI$  și  $TI$  în  $I'$  și  $J'$  respectiv.

Să arătăm că aceste secțiuni sunt echivalente.

După teorema precedentă, putem scrie pentru fiecare secțiune

$$\frac{\text{aria } (A'B'C')}{\text{aria } (ABC)} = \left(\frac{\overline{SI'}}{\overline{SI}}\right)^2; \quad \frac{\text{aria } D'E'F'G'}{\text{aria } DEFG} = \left(\frac{\overline{TJ'}}{\overline{TJ}}\right)^2.$$

Însă prin ipoteză  $\overline{SI} = \overline{TJ}$ ,  $\overline{SI'} = \overline{TJ'}$  și  $\text{aria } (ABCD) = \text{aria } (DEFG)$ . Rezultă că în aceste două proporții, trei termeni corespunzători sunt egali între ei. Prin urmare, termenii de al patrulea sunt egali, adică  $\text{aria } (A'B'C') = \text{aria } (D'E'F'G')$ , ceea ce arată că secțiunile sunt echivalente.

Am demonstrat astfel teorema :

*Dacă două piramide au bazele echivalente și înălțimile egale, secțiunile plane făcute paralel cu bazele, la aceeași depărtare de vârf sunt echivalente.*

### 165. Piramide echivalente. Teoremă pegătitoare I.

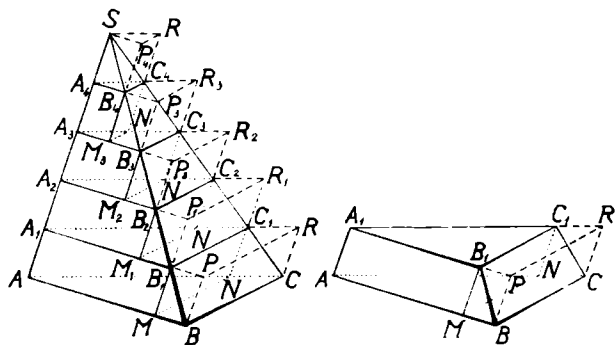


Fig. 191a

Fie piramida triunghiulară  $SABC$  cu vârful  $S$ , baza  $ABC$  și înălțimea  $SI$  (fig. 191a).

Putem măsura volumul acestei piramide cu aproximație dată, cunoscând modul de măsurare al volumului unei prisme oarecari.

Să împărțim, pentru aceasta, înălțimea SI într'un număr oarecare de părți egale, de ex. în cinci părți egale și prin punctele de diviziune să ducem plane de secțiune paralele cu baza. Aceste plane împart piramida în cinci solide, anume  $ABCC_1A_1B_1$ ,  $A_1B_1C_1C_2A_2B_2$ ,  $A_2B_2C_2C_3A_3B_3$ ,  $A_3B_3C_3C_4A_4B_4$ ,  $SA_4B_4C_4$ . Fiecare din aceste solide este limitat de două prisme: una înscrisă și alta exînscrișă, având ca direcție a muchiilor, direcția de ex. a muchiei SA, iar ca baze respectiv două secțiuni ale piramidei. Aceste solide se numesc *trunchiuri de piramidă*.

Fie, de ex. trunchiul  $ABCC_1A_1B_1$  (fig 191 a); să considerăm prisma înscrisă  $AMNC_1A_1B_1$  și prisma exînscrișă  $ABCR_1P$ , având ca direcție a muchiilor SA, iar ca baze respectiv bazele  $A_1B_1C_1$  și  $ABC$  ale trunchiului.

Dacă însemnăm cu  $V_1$  volumul trunchiului de piramidă,  $V_1^i$ ,  $V_1^e$  respectiv volumele prismelor înscrisă și exînscrișă aceluiași trunchiu, observăm că pentru a avea din trunchiul de piramidă, prisma înscrisă, trebuie să tăiem din trunchiu, solidul  $BB_1MNCC_1$ , deci  $V_1^i < V_1$ ; iar ca să avem prisma exînscrișă, trebuie să adăogăm trunchiului solidul  $BPB_1C_1CR$ , deci  $V_1 < V_1^e$ . Adică, volumul trunchiului de piramidă este cuprins între volumul prismei înscrise și volumul prismei exînscrișe, ceea ce arătam scriind

$$(1) \quad V_1^i < V_1 < V_1^e.$$

**Teorema pregătitoare II.** Dacă aplicăm aceeași proprietate celor patru trunchiuri de piramidă, însemnând respectiv cu  $V_n^i$ ,  $V_n$ ,  $V_n^e$  volumul prismei înscrise, volumul trunchiului de piramidă și volumul prismei exînscrișe, avem în mod general:

$$V_n^i < V_n < V_n^e.$$

Scriem această proprietate pentru cele patru trunchiuri de piramidă și pentru piramida dela vârf; avem

$$(2) \quad \begin{aligned} V_1^i &< V_1 < V_1^e, \\ V_2^i &< V_2 < V_2^e, \\ V_3^i &< V_3 < V_3^e, \\ V_4^i &< V_4 < V_4^e, \\ 0 &< V_5 < V_5^e. \end{aligned}$$

Dacă considerăm două trunchiuri de piramidă consecutive,  $V_p$  și  $V_{p+1}$  (numărarea începând dela bază), observăm că volumul prismei exinscrise  $V_{p+1}^e$  este egal cu volumul prismei înscrise  $V_p^i$ , de oarece au o bază comună și înălțimile egale (cât o diviziune a înălțimii). Prin urmare, în cazul nostru, avem :

$$V_2^e = V_1^i, \quad V_3^e = V_2^i, \quad V_4^e = V_3^i, \quad V_5^e = V_4^i.$$

Relațiunile (2) devin în acest caz :

$$(3) \quad \begin{aligned} V_1^i &< V_1 < V_1^e, \\ V_2^i &< V_2 < V_1^i, \\ V_3^i &< V_3 < V_2^i, \\ V_4^i &< V_4 < V_3^i, \\ 0 &< V_5 < V_4^i. \end{aligned}$$

Insumând aceste inegalități parte cu parte, obținem :

$$(4) \quad \begin{aligned} V_1^i + V_2^i + V_3^i + V_4^i &< V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 \\ &< V_1^e + V_1^i + V_2^e + V_3^e + V_4^e \end{aligned}$$

Însă  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$  este volumul piramidei date, a cărei măsură însemnând-o cu  $V$ , avem

$$(5) \quad V_1^i + V_2^i + V_3^i + V_4^i < V < V_1^e + V_1^i + V_2^e + V_3^e + V_4^e$$

Observăm că aproximația cu care am calculat volumul piramidei este mai mică decât diferența sumelor care cuprind între ele acest volum, adică în cazul nostru

$$V_1^e + V_1^i + V_2^e + V_3^e + V_4^e - (V_1^i + V_2^i + V_3^i + V_4^i) = V_1^e;$$

deci eroarea este mai mică decât numărul care măsoară volumul prismei exînscrie trunchiului de piramidă elementar, care are ca bază, baza piramidei și ca înălțime o parte a înălțimii piramidei considerate.

**Observare.** Dacă în loc să împărțim înălțimea piramidei în cinci părți egale, ca în cazul considerat, o împărțim într'un număr întreg  $n$  de părți egale și prin punctele de diviziune ducem plane de secțiune paralele cu baza, obținem  $n$  solide elementare.

Insemnând ca mai sus cu  $V_1^i, V_2^i, \dots, V_{n-1}^i$  numerele ce măsoară volumele prismelor înscrie; cu  $V_1, V_2, \dots, V_n$  numerele ce măsoară volumele trunchiurilor de piramidă elementare și a piramidei dela vârf; cu  $V_1^e, V_2^e, \dots, V_n^e$  numerele ce măsoară volumele prismelor exînscrie solidelor elementare, avem pe baza primei teoreme pregătitoare, relațiunile

$$\begin{aligned} V_1^i < V_1 < V_1^e, \\ V_2^i < V_2 < V_1^i, \end{aligned}$$

(3')

$$V_n^i < V_n < V_{n-1}^i,$$

pe care însumându-le parte cu parte, avem

$$(5') \quad V_1^i + V_2^i + \dots + V_n^i < V_1 + V_2 + \dots + V_n < V_1^e + V_1^i + V_2^i + \dots + V_{n-1}^i$$

Observăm că numărul ce măsoară volumul  $V$  al piramidei este cuprins între două sume de numere care diferă între ele cu  $V_i^e$ , adică cu numărul care măsoară volumul prisme exînscrie primului trunchiu de piramidă elementar, având ca bază, baza piramidei iar ca înălțime, a  $n^{-a}$  parte a înălțimii ei.

Putem deci alege pe  $n$  în așa fel, ca volumul piramidei să difere de una din cele două sume cu mai puțin decât  $\frac{1}{10^p}$ , de exemplu.

În adevăr, însemnând măsura bazei piramidei cu  $b$  și măsura înălțimii cu  $i$ , avem aproximația

$$V_i^e < \frac{1}{10^p},$$

adică

$$b \times \frac{i}{n} < \frac{1}{10^p},$$

care dă pentru  $n$  valoarea limită

$$n > b \times i \times 10^p.$$

Prin urmare, este de ajuns să luăm pe  $n$  mai mare decât  $(b \times i \times 10^p)$ , pentru ca volumul piramidei dat să difere cu mai puțin decât  $\frac{1}{10^p}$  de una din sumele

$$V^i = V_1^i + V_2^i + \dots + V_{n-1}^i \text{ și } V^e = V_1^e + V_1^i + \dots + V_{n-1}^i,$$

adică aproximația cu care calculăm volumul piramidei date, atât prin lipsă cât și prin adaos, este mai mică decât  $\frac{1}{10^p}$ .

**Teoremă.** Două piramide triunghiulare cu bazele echivalente și înălțimile egale sunt echivalente.

Fie piramidele SABC și TDEF care au bazele ABC

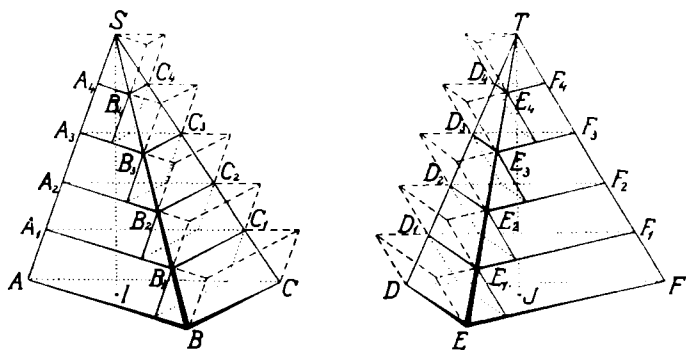


Fig. 191 b.

și DEF, două triunghiuri echivalente și înălțimile SI și TJ egale (fig. 191 b).

Dacă împărțim înălțimile celor două piramide în  $n$  părți egale și ducem prin punctele de diviziune plane de secțiune paralele cu bazele respective, ambele piramide se împart în câte  $n$  solide elementare.

Insemnând pentru piramida SABC, cu  $V_1^i, V_2^i, \dots, V_{n-1}^i; V_1, V_2, \dots, V_n; V_1^e, V_2^e, \dots, V_n^e$  respectiv numerele ce măsoară volumele prismelor înscrise în solidele elementare, volumele acestor solide și volumele prismelor exinscrise lor; pentru piramida TDEF, cu  $W_1^i, W_2^i, \dots, W_{n-1}^i; W_1, W_2, \dots, W_n; W_1^e, W_2^e, \dots, W_n^e$  numerele ce măsoară volumele prismelor înscrise, volumele solidelor elementare și volumele prismelor exinscrise în aceste solide; cu  $V$  și  $W$  numerele ce măsoară volumele piramidelor SABC și TDEF, avem

$$(1) V_1^i + V_2^i + \dots + V_{n-1}^i < V_1 + V_2 + \dots + V_n < V_1^e + V_2^e + \dots + V_{n-1}^e,$$

$$(2) W_1^i + W_2^i + \dots + W_{n-1}^i < W_1 + W_2 + \dots + W_n < W_1^e + W_2^e + \dots + W_{n-1}^e.$$

Observăm că secțiunile  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots; D_1E_1F_1, D_2E_2F_2, \dots$  sunt respectiv echivalente după teorema 164, căci

$$\frac{\text{aria } (A_1B_1C_1)}{\text{aria } (ABC)} = \left(\frac{SA_1}{SA}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

și

$$\frac{\text{aria } (D_1E_1F_1)}{\text{aria } (DEF)} = \left(\frac{TD_1}{TD}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Deci

$$\frac{\text{aria } (A_1B_1C_1)}{\text{aria } (ABC)} = \frac{\text{aria } (D_1E_1F_1)}{\text{aria } (DEF)}.$$

De oarece numitorii sunt egali, urmează că numărătorii rapoartelor egale sunt și ei egali, adică

$$\text{aria } (A_1B_1C_1) = \text{aria } (D_1E_1F_1).$$

În același fel, arătăm că

$$\text{aria } (A_2B_2C_2) = \text{aria } (D_2E_2F_2),$$

(3)

$$\text{aria } (A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}) = \text{aria } (D_{n-1} E_{n-1} F_{n-1}).$$



De altă parte, având

$$(4) \quad \overline{SI} = \overline{TJ}, \text{ avem și } \frac{SI}{n} = \frac{\overline{TJ}}{n}.$$

Prin urmare prismele înscrise respectiv în două solide elementare corespunzătoare au bazele echivalente și înălțimile egale; ele sunt deci echivalente, adică

$$(5) \quad V_1^i = W_1^i, V_2^i = W_2^i, \dots, V_{n-1}^i = W_{n-1}^i.$$

De asemenea, prismelele exinscrise în două solide elementare corespunzătoare, având bazele echivalente și înălțimile egale sunt echivalente, adică

$$(6) \quad V_1^e = W_1^e, V_2^e = W_2^e, \dots, V_n^e = W_n^e.$$

Revenind la inegalitățile (1) și (2) și ținând seamă de relațiunile (5) și (6), avem

$$(7) \quad \begin{aligned} V_1^i + V_2^i + \dots + V_{n-1}^i < V < V_1^e + V_1^i + \dots + V_{n-1}^i, \\ V_1^i + V_2^i + \dots + V_{n-1}^i < W < V_1^e + V_1^i + \dots + V_{n-1}^i, \end{aligned}$$

Așa dar, numerele ce măsoară volumele celor două piramide date sunt limitate de aceleași sume de numere. Dacă așezăm aceste valori pe o axă, vom pune, plecând dela origină, întâi valoarea  $(V_1^i + V_2^i + \dots + V_{n-1}^i)$ , apoi

$$\frac{V_1^i + \dots + V_{n-1}^i}{V} \quad \frac{V_1^e + V_1^i + \dots + V_{n-1}^i}{W}$$

numerele  $V$  și  $W$  și mai la dreapta lor, valoarea

$$(V_1^e + V_1^i + \dots + V_{n-1}^i).$$

Diferența numerelor  $V$  și  $W$  în valoare absolută este mai mică ca diferența sumelor ce le limitează, adică

$$(8) \quad |V - W| < V_1^e.$$

Dar,  $V$  și  $W$  fiind volumele celor două piramide date sunt numere fixe, diferența lor este tot un număr fix. Dacă ele nu sunt egale, acest număr fix trebuie să fie mai mic decât  $V_1^e$ , care devine din ce în ce mai mic, cu cât numărul părților egale ale înălțimii

crește. Și cum am văzut în observarea teoremei pregătitoare, dacă diferența volumelor celor două piramide ar fi diferită de zero, am putea alege pe  $n$  atât de mare, încât

$$V_1 e < |V - W|$$

contrar condiției (8).

Prin urmare, diferența numerelor  $V$  și  $W$  neputând fi diferită de zero, numerele  $V$  și  $W$  sunt egale.

Așa dar, piramidele date sunt echivalente, ceea ce trebuia să demonstrăm.

### Volumul piramidei.

**166. Teoremă.** *O piramidă triunghiulară este a treia parte dintr'o prismă care are aceeași bază și aceeași înălțime.*

Fie piramida triunghiulară  $SABC$  (fig. 192).

Ducem prin vârful  $S$  un plan paralel cu baza  $ABC$  și

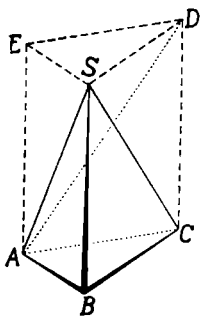


Fig. 192

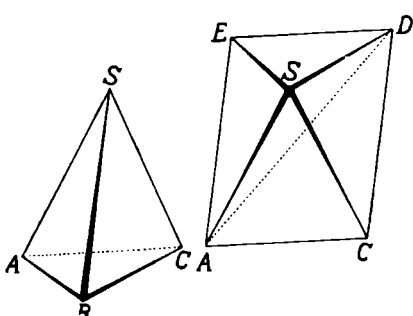


Fig. 193.

prin vârfurile  $A$  și  $C$  drepte paralele cu muchia  $SB$ . Aceste paralele taie planul dus prin vârful  $S$  în punctele  $E$  și  $D$ . Unind punctele  $D$  și  $E$  cu punctul  $S$ , obținem o prismă triunghiulară  $ABCDES$ , din care o parte este piramida dată  $SABC$ .

Ducând planul  $SAD$ , descompunem prisma  $ABCDES$  în două părți: piramida triunghiulară  $SABC$  și piramida

patrulateră SACDE cu vârful în S și baza ACDE (fig. 193). Tăiem acum piramida SACDE cu planul SAD, descompunând-o în două piramide triunghiulare SADE și SADC (figura 194). Aceste două piramide au bazele în planul feței ACDE a prismei, jumătăți ale paralelogramului ACDE și același vârf S. Piramidele SADE și SADC sunt deci echivalente având bazele egale și înălțimile egale. Putem scrie

$$\text{volum SAED} = \text{volum SADC}.$$

Luând însă vârful piramidei SADC în punctul A, avem piramida triunghiulară ADSE, cu baza DES. Piramidele triunghiulare SABC și ADES având bazele ABC și DES

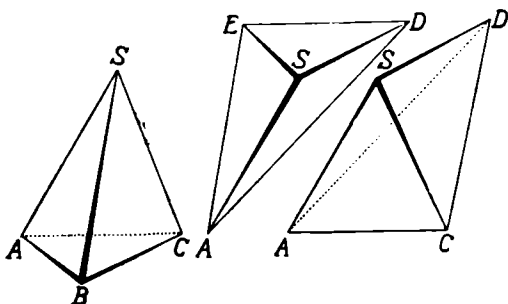


Fig. 194

egale, ca baze ale prisme și înălțimile egale, ca înălțimi ale prisme sunt echivalente, adică putem scrie

$$\text{volum SABC} = \text{volum ADES}.$$

Ținând însă seama că

$$\text{volum SADE} = \text{volum ADES},$$

rezultă

$$\text{volum SABC} = \text{volum ADES} = \text{volum SADC}.$$

Prin urmare, prisma ABCDES a fost descompusă în trei piramide echivalente SABC, SADE, SADC. Piramida dată SABC este deci o treime a prisme ABCDSE, care are aceeași bază și aceeași înălțime.

Teorema enunțată este deci demonstrată.

**167. Volumul piramidei triunghiulare.** O piramidă triunghiulară fiind a treia parte din prisma care are aceeași bază și aceeași înălțime, urmează că măsura volumului piramidei triunghiulare este a treia parte din măsura volumului prisme. Inșă măsura volumului prisme este produsul numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea. Rezultă că *măsura volumului piramidei triunghiulare este a treia parte din produsul numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea ei.*

Insemnând cu  $V, b, i$  numerele ce măsoară respectiv volumul, suprafața bazei și înălțimea piramidei, avem

$$V = \frac{b \times i}{3}$$

**168. Volumul piramidei poligonale.** Fie piramida poligonală  $SABCDE$  (fig. 195). Să aflăm măsura volumului ei.

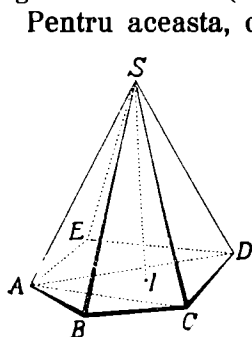


Fig. 195.

Pentru aceasta, ducem prin una din muchiile laterale, de ex.  $SA$ , planele diagonale  $SAC$  și  $SAD$ . Aceste plane împart piramida dată  $SABCDE$  în trei piramide triunghiulare  $SABC$ ,  $SACD$ ,  $SADE$ , care au bazele în planul bazei  $ABCDE$  și același vârf  $S$ ; ele au deci aceeași înălțime  $SI$  a piramidei date.

Să însemnăm cu  $V_1, b_1, V_2, b_2, V_3, b_3$  respectiv numerele ce măsoară volumul și suprafața bazei fiecăreia din piramidele  $SABC, SACD, SADE$  și cu  $i$  înălțimea piramidei poligonale date. Avem

$$V_1 = \frac{b_1 \times i}{3},$$

$$V_2 = \frac{b_2 \times i}{3},$$

$$V_3 = \frac{b_3 \times i}{3}.$$

Măsura  $V$  a volumului piramidei poligonale este egală cu suma măsurilor volumelor celor trei piramide triunghiulare, adică

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{b_1 \times i}{3} + \frac{b_2 \times i}{3} + \frac{b_3 \times i}{3} = \frac{i}{3} (b_1 + b_2 + b_3).$$

Însă

$$b_1 + b_2 + b_3 = b,$$

$b$  fiind aria bazei piramidei poligonale. Rezultă

$$V = \frac{b \times i}{3}$$

adică: *Măsura volumului unei piramide poligonale este egală cu a treia parte a produsului numerelor ce măsoară suprafața bazei și înălțimea ei.*

### Aria laterală și totală a piramidei.

**169. Aria laterală a piramidei.** Totalitatea fețelor laterale ale unei piramide formează *suprafața ei laterală*. Suma ariilor fețelor laterale ale unei piramide poligonale se numește *aria laterală* a piramidei.

Fie piramida poligonală  $SABCD$  (fig. 196). Însemnând cu  $S$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ ,  $s_4$  respectiv aria laterală a piramidei și ariile fețelor laterale  $SAB$ ,  $SAC$ ,  $SCD$ ,  $SDA$ , avem

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4.$$

Fețele laterale fiind triunghiuri, știm să calculăm aria fiecăreia.

**170. Aria totală a piramidei.** Dacă adăogăm la aria laterală a unei piramide, aria bazei, aflăm *aria totală* a piramidei. Însemnând cu  $St$  aria totală, avem

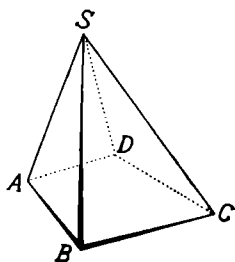


Fig. 196

$$St = S + b$$

171. **Aria laterală a piramidei regulate.** Fie piramida poligonală regulată  $SABCDE$  (fig. 197).

Presupunem că tăiem suprafața ei laterală dealungul unei muchii laterale  $SA$  și după muchiile bazei. Aducem fața  $SED$  în planul feței  $SAE$ , printr'o rotație în jurul muchiei  $SE$ , în poziția  $SED_1$ . Apoi rotim fața  $SCD$  în jurul muchiei  $SD$ , până se așterne în planul celor două dintâi, în poziția  $SD_1C_1$ , ș. a. m. d. pentru celelalte fețe. Muchia  $SA$  ajunge a doua oară în poziția  $SA_1$ .

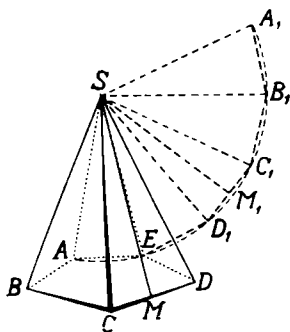


Fig. 197

Prin această operațiune, fețele laterale ale piramidei sunt așezate în același plan, al uneia din ele. Lucrarea aceasta poartă numele de *desfășurarea suprafeței laterale a piramidei pe un plan*.

Piramida dată fiind regulată, muchiile ei laterale sunt egale ca oblice din același punct  $S$  la planul bazei, care au picioarele egal depărtate de piciorul înălțimii. Rezultă că sectorul poligonal  $SAED_1C_1B_1A_1$  obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a piramidei este un sector poligonal regulat, de oarece  $\overline{AE} = \overline{ED_1} = \overline{D_1C_1} = \overline{C_1B_1} = \overline{B_1A_1}$ , ca laturi egale ale poligonului de bază regulat și  $\overline{SA} = \overline{SE} = \overline{SD_1} = \overline{SC_1} = \overline{SB_1} = \overline{SA_1}$  după cum am observat. Prin urmare, cercul cu centrul în punctul  $S$  și cu raza  $SA$  trece prin toate vârfurile liniei poligonale  $AED_1C_1B_1A_1$ . Iar linia poligonală  $AED_1C_1B_1A_1$  este regulată, având laturile egale și vârfurile pe același cerc.

Prin urmare, aria laterală a piramidei  $SABCDE$  este egală, cu aria sectorului poligonal regulat  $SAED_1C_1B_1A_1$ . Aria acestui sector poligonal este egală cu de atâtea ori aria unui triunghi, de ex. a triunghiului  $SCD$ , câte laturi are poligonul de bază.

Insemnând cu  $S$ ,  $l$ ,  $A$ , respectiv numerele ce măsoară suprafața laterală a piramidei, latura bazei și înălțimea feței  $SCD$ , avem în cazul considerat

$$S = 5 \times \frac{l \times A}{2} = \frac{5 \times l \times A}{2};$$

Însă  $5 \times l = p$ , perimetrul poligonului de bază. Rezultă.

$$S = \frac{p \times A}{2}$$

Înălțimea unei fețe a piramidei regulate se numește *apotema piramidei regulate*.

Prin urmare: *Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu jumătatea produsului dintre numerele ce măsoară perimetrul poligonului de bază și apotema piramidei regulate.*

**172. Aria totală a piramidei regulate.** Pentru a afla aria totală a unei piramide regulate, adunăm la aria laterală, aria poligonului de bază.

Dacă însemnăm aria totală cu  $St$  și apotema poligonului de bază cu  $a$ , avem

$$St = \frac{p \times A}{2} + \frac{p \times a}{2} = \frac{p}{2} (A + a),$$

adică: *Putem calcula mai repede aria totală a unei piramide regulate înmulțind semiperimetrul bazei cu suma numerelor ce măsoară apotema piramidei și apotema bazei.*

**173. Trunchiul de piramidă.** Fie piramida poligonală  $SABDE$  (fig. 198). Să tăiem din această piramidă, printr'un plan  $P$

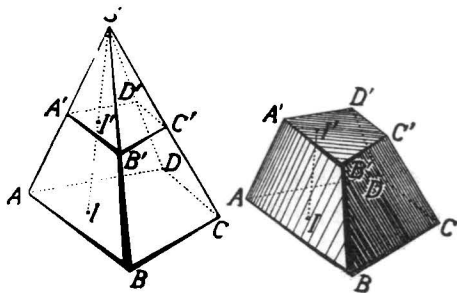


Fig. 198

paralel cu planul bazei, piramida

$S'A'B'C'D'$ . Solidul rămas  $ABCDD'A'B'C'$  se numește *trunchiu de piramidă*.

Poligonul de bază  $ABCD$  al piramidei se numește *baza mare*, iar poligonul de secțiune  $A'B'C'D'$  se numește *baza mică* a trunchiului. Distanța  $\overline{H'}$  dintre cele două baze se numește *înălțimea* trunchiului.

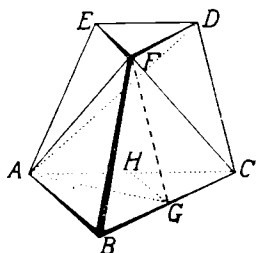


Fig. 199

Dacă piramida poligonală din care am obținut trunchiul este regulată, trunchiul de piramidă este *regulat*.

**174. Volumul trunchiului de piramidă triunghiulară.** Fie trunchiul de piramidă triunghiulară  $ABCDEF$  (fig. 199).

Să arătăm că acest trunchiu este echivalent cu trei piramide triunghiulare cu înălțimile egale cu înălțimea trunchiului și având respectiv ca baze, bazele trunchiului și media proporțională între cele două baze.

Ducem prin vârful  $F$  și muchia  $AC$  planul  $FAC$ , care împarte trunchiul  $ABCDEF$  în piramida triunghiulară  $FABC$  și piramida patrulateră  $FACDE$  (fig. 200).

Ducem apoi prin vârfurile  $A, D, F$  planul  $ADF$ , care împarte piramida  $FACDE$  în alte două piramide triunghiulare  $FADE$  și  $FACD$ .

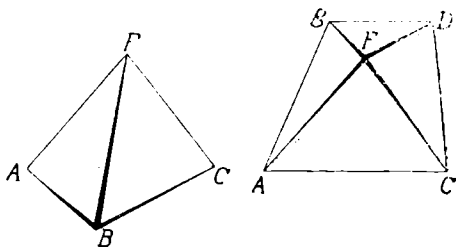


Fig. 200

Trunchiul  $ABCDEF$  s'a descompus astfel în cele trei piramide triunghiulare  $FABC$ ,  $FADE$ ,  $FACD$  (fig. 201).

Piramida  $FABC$  are ca bază, baza de jos  $ABC$  a trun-



chiului și înălțimea egală cu înălțimea trunchiului, căci vârful  $F$  este în baza de sus a trunchiului.

Piramida  $FADE$  privită cu vârful în  $A$  și baza  $DEF$  are ca bază, baza de sus  $DEF$  a trunchiului și înălți-

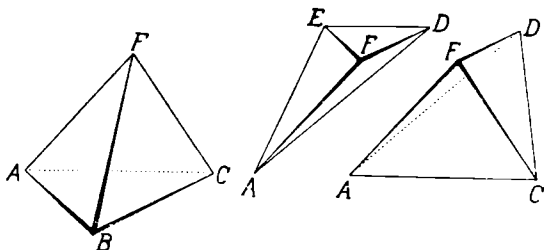


Fig. 201

mea egală cu înălțimea trunchiului, căci vârful  $A$  este în baza de jos a trunchiului.

Pentru a afla mărimea celei de a treia piramide  $FACD$ , facem următoarea construcție: Ducem prin vârful  $F$  și în fața  $BCDF$  (fig. 199),  $FG$  paralelă cu muchia  $CD$ , care taie muchia  $BC$  în punctul  $G$ .

Dreapta  $FG$  fiind paralelă cu muchia  $CD$  din planul feței  $ACDE$  este paralelă cu fața  $ACDE$ . Dacă construim piramida  $GACD$ , ea este echivalentă cu piramida  $FACD$  având aceeași bază și înălțimi egale (vârfurile pe o paralelă la planul bazei) și deci echivalentă și cu piramida  $DAGC$ .

Piramida  $DAGC$  având vârful în baza de sus și baza în baza de jos a trunchiului de piramidă are înălțimea egală cu înălțimea trunchiului.

Patrulaterul  $FGCD$  este un paralelogram, căci are laturile opuse paralele. Urmează că  $\overline{FD} = \overline{GC}$ .

Ducem acum prin punctul  $G$  și în planul bazei  $ABC$ , paralela  $GH$  cu muchia  $AB$  și dreptele  $GA$  și  $GD$ .

Triunghiurile  $GCH$  și  $FDE$  sunt egale având câte o latură egală ( $\overline{FD} = \overline{GC}$ ) cuprinsă între unghiuri respectiv egale ( $\sphericalangle FDE = \sphericalangle GCH$ ,  $\sphericalangle EFD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle HGC$  au laturi

respectiv paralele). Triunghiurile GCH și AGC, care au același vârf G și bazele pe dreapta AC, au înălțimile egale. Ariile lor sunt proporționale cu bazele lor, adică

$$(1) \quad \frac{\text{aria (GCH)}}{\text{aria (AGC)}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CA}}.$$

Același lucru putem spune despre triunghiurile AGC și ABC care au același vârf A și bazele pe aceeași dreaptă BC, adică

$$(2) \quad \frac{\text{aria (AGC)}}{\text{aria (ABC)}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CB}}.$$

Însă GH este paralelă cu latura AB în triunghiul ABC; urmează că

$$(3) \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CA}}.$$

După egalitatea (3), ținând seama de egalitățile (1) și (2), rezultă

$$\frac{\text{aria (GCH)}}{\text{aria (AGC)}} = \frac{\text{aria (AGC)}}{\text{aria (ABC)}},$$

egalitate care arată că *aria trunchiului AGC este media proporțională a ariilor celor două baze ale trunchiului.*

În felul acesta, piramida DAGC are aceeași înălțime ca trunchiul dat, iar baza este media proporțională a celor două baze ale trunchiului.

Prin urmare, enunțăm următoarea teoremă:

*Un trunchiu de piramidă triunghiulară este echivalent cu trei piramide triunghiulare, care au înălțimile egale și ca baze respectiv bazele trunchiului și media lor proporțională.*

**Observare.** Să însemnăm cu  $V$ ,  $B$ ,  $b$ ,  $i$  respectiv numerele care măsoară volumul, aria bazei mari, aria bazel mici și înălțimea trunchiului. Scriem că volumul

trunchiului este egal cu suma volumelor celor trei piramide în care a fost descompus, adică:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot i + \frac{1}{3} b \cdot i + \frac{1}{3} \sqrt{B \cdot b} \cdot i$$

sau

$$V = \frac{1}{3} i (B + b + \sqrt{B \cdot b})$$

egalitate care arată că: *Numărul care măsoară volumul unui trunchiu de piramidă triunghiulară este egal cu a treia parte a numărului care măsoară înălțimea, înmulțit cu suma numerelor ce măsoară aria bazei mari, aria bazei mici și media lor proporțională.*

**Observare.** Formula măsurii volumului trunchiului de piramidă se poate afla și pe cale algebrică. (Vezi Geometria în spațiu pentru clasa IV-a de O. Țîno, M. Theohari, V. Bădulescu).

**176. Volumul trunchiului de piramidă poligonală.** Fie trunchiul de piramidă poligonală ABCDD'A'B'C' (fig. 202).

Să arătăm că acest trunchiu este echivalent cu un trunchiu de piramidă triunghiulară.

Pentru aceasta, construim piramida SABCD din care a fost obținut trunchiul dat. În planul bazei ABCD, construim un triunghi EFG echivalent cu poligonul de bază al piramidei SABCD. Apoi luăm în spațiu un punct T la aceeași depărtare de planul bazei ABCD ca S și construim piramida Tefg. La depărtarea bazei de sus a trunchiului dat de vârful S facem în piramida Tefg, secțiunea plană E'F'G' paralelă cu baza EFG.

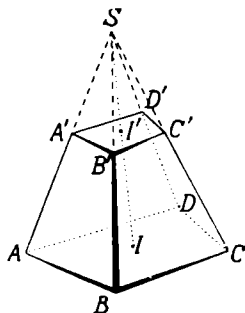


Fig. 202.

Piramidele SABCD și Tefg având bazele echivalente

și înălțimele egale sunt echivalente, iar secțiunile  $A'B'C'D'$  și  $E'F'G'$  paralele cu bazele respective și la aceeași depărtare de vârf sunt echivalente. Urmează că piramidele tăiate  $SA'B'C'D'$  și  $TE'F'G'$  sunt echivalente.

Piramidele întregi fiind echivalente, cele tăiate de asemenea, rezultă că trunchiurile de piramidă  $ABCD'A'B'C'$  și  $EFGG'E'F'$ , unul poligonal, celălalt triunghiular, sunt echivalente.

Enunțăm dar, teorema :

*Orice trunchiu de piramidă poligonală este echivalent cu un trunchiu de piramidă triunghiulară cu baza echivalentă și aceeași înălțime.*

Teorema poate fi enunțată și astfel : *Două trunchiuri pe piramidă, unul poligonal, altul triunghiular, care au bazele echivalente și înălțimile egale sunt echivalente.*

Prin urmare, formula măsurii volumului unui trunchiu de piramidă triunghiulară se aplică oricărui fel de trunchiu poligonal, adică

$$V = \frac{1}{3} (B + b + \sqrt{B \cdot b})$$

**177. Aria laterală a trunchiului de piramidă regulată.** Fie trunchiul de piramidă poligonală regulată

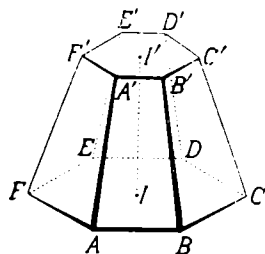


Fig. 203.

$ABDDE'F'A'B'C'D'$  (fig. 203). Fețele laterale ale trunchiului dat sunt trapeze isoscele egale între ele. Este destul să calculăm aria uneia din fețe și s'o înmulțim cu numărul lor.

Dacă  $l$  și  $l'$  înseamnă numerele care măsoară lungimile a două laturi corespunzătoare, de ex.  $\overline{AB}$  și  $\overline{A'B'}$  și  $a$  numărul care măsoară înălțimea aceleiași fețe,

$$\text{aria } (ABB'A') = \frac{l+l'}{2} \times a$$

În cazul trunchiului pentagonal considerat,

$$S = 5 \times \frac{l+l'}{2} \times a = \frac{5l+5l'}{2} \times a = \frac{p+p'}{2} \times a$$

Deci

$$S = \frac{p+p'}{2} \times a$$

adică : *Aria laterală a unui trunchiu de piramidă regulată este egală cu semisuma numerelor ce măsoară perimetrele bazelor, înmulțită cu înălțimea unei fețe.*

Înălțimea unei fețe a trunchiului de piramidă se numește *apotema trunchiului*.

**178. Aria totală a trunchiului de piramidă regulată** se obține adăugând la aria laterală, ariile celor două baze. Însemnând măsurile lor cu  $b$  și  $b'$ , avem :

$$St = \frac{p+p'}{2} \times a + b + b'$$

**179. Aplicațiuni. 1. Volumul trunchiului de prismă triunghiulară.** Să considerăm trunchiul de prismă triunghiulară ABCDEF (fig. 204).

Să aflăm măsura volumului lui.

Prin muchia AC și prin vârful F, ducem planul ACF, care desparte trunchiul luat în piramida triunghiulară FABC și piramida patrulateră FACDE (fig. 205).

Ducem acum planul ADF, care desparte piramida FACDE în două piramide triunghiulare FACD și FADE (fig. 206).

Piramida FABC are vârful F și baza ABC a trunchiului.

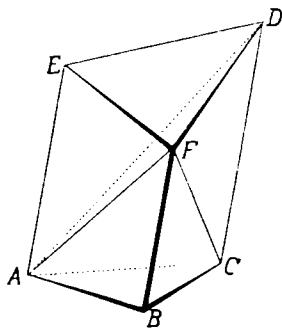


Fig. 204.

Piramida  $FACD$  este echivalentă cu piramida  $BACD$ , căci au aceeași bază  $CAD$  și înălțimile egale, vârfurile fiind

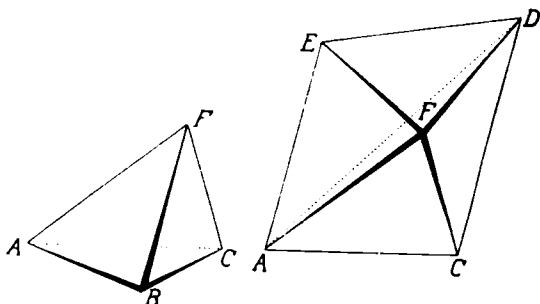


Fig. 205.

pe paralela  $FB$  cu baza  $ACD$ . La piramida  $BADE$ , considerând vârful în  $D$ , obținem piramida  $DABC$  cu vârful  $D$  și baza  $ABC$ , care este de asemenea echivalentă cu piramida  $FACD$ .

Piramida  $FADE$  este echivalentă cu piramida  $BADE$

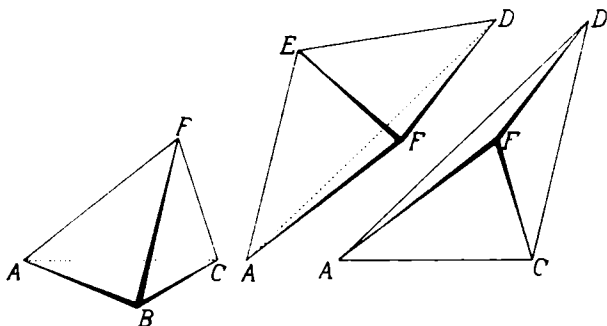


Fig. 206.

de oarece au aceeași bază și înălțimile egale, vârfurile lor fiind pe paralela  $FB$  cu baza  $ADE$ . La piramida  $BADE$ , să considerăm vârful în  $D$  și baza  $ABE$ ; avem piramida  $DABE$ . La rândul ei, piramida  $DABE$  este echivalentă cu piramida  $CABE$ , căci au aceeași bază  $ABE$  și înălți-

mile egale, vârfurile D și C fiind pe paralela CD cu baza. Iar în loc de piramida CABE, considerând vârful în E, avem piramida EABC cu vârful E și baza ABC a trunchiului dat. După cele spuse, urmează că piramida FADE este echivalentă cu piramida EABC.

Am descompus astfel trunchiul de prismă trunchiulară ABCDEF, în cele trei piramide triunghiulare DABC, EABC și FABC, care au ca bază, baza ABC a trunchiului și vârfurile în vârfurile celeilalte baze.

Rezultă dar, următoarea teoremă :

*Un trunchiu de prismă triunghiulară este echivalent cu trei piramide triunghiulare, care au ca baze una din bazele trunchiului dat și vârfurile în vârfurile celeilalte baze.*

Dacă însemnăm cu  $b$  aria bazei comune și cu  $i_1, i_2, i_3$  depărtările vârfurilor celeilalte baze la cea dintâi, măsura  $V$  a volumului trunchiului este dată de

$$V = b \times \frac{i_1 + i_2 + i_3}{3}.$$

2. Dacă trunchiul de prismă este poligonal, îl descompunem întâi în trunchiuri de prismă triunghiulară și apoi îi aplicăm descompunerea în piramide. Teorema este deci generală.

3. Să considerăm un trunchiu de prismă triunghiulară dreaptă ABCDEF (fig. 207). După proprietatea precedentă, acest trunchiu este echivalent cu trei piramide triunghiulare, care au ca bază una din bazele trunchiului și vârfurile în vârfurile celeilalte baze.

Să luăm ca bază comună, baza ABC al cărei plan este perpendicular pe muchiile laterale ale trunchiului. În acest caz, înălțimile celor trei piramide sunt chiar muchiile laterale.

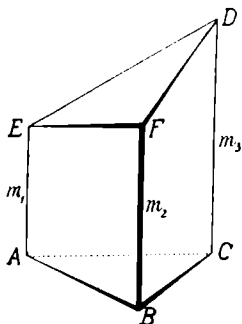


Fig. 207

Insemnând cu  $b$  aria bazei și cu  $m_1, m_2, m_3$ , numerele ce măsoară respectiv cele trei muchii laterale, măsura volumului trunchiului considerat este

$$V = b \times \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3}.$$

4. Fie trunchiul de prismă triunghiulară oblică ABCDEF (fig. 208).

Dacă facem în trunchiul dat o secțiune dreaptă, IJK, îl despărțim în două trunchiuri de prismă triunghiulară drepte, cărora le aplicăm cele arătate mai sus.

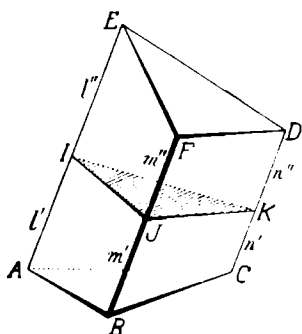


Fig. 208

Să insemnăm cu  $s$  aria secțiunii drepte făcute, cu  $l', l''$ ;  $m', m''$ ;  $n', n''$ , părțile respective ale muchiilor laterale, cu  $v_1$  și  $v_2$  măsurile volumelor trunchiurilor IJKCAB și IJKDEF. Avem

$$v_1 = s \times \frac{l' + m' + n'}{3}, \quad v_2 = s \times \frac{l'' + m'' + n''}{3}$$

Făcând suma acestor două egalități, obținem

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= s \times \frac{l' + m' + n'}{3} + s \times \frac{l'' + m'' + n''}{3} \\ &= s \times \frac{l' + l'' + m' + m'' + n' + n''}{3} \end{aligned}$$

Însă  $v_1 + v_2 = V$ ,  $V$  fiind măsura volumului trunchiului,  $l' + l'' = l$ ,  $m' + m'' = m$ ,  $n' + n'' = n$ ,  $l, m, n$ , fiind numerele ce măsoară muchiile laterale ale trunchiului. Egalitatea de mai sus devine

$$V = s \times \frac{l + m + n}{3},$$

adică: Măsura volumului unui trunchiu de prismă triunghiulară oblică este egală cu produsul ariei sec-



țiunii drepte prin media aritmetică a numerelor ce măsoară muchiile laterale.

5. Volumul unei grămezi de pietriș. Când pietrișul se întrebuințează în cantitate mare, se depozitează în grămezi ca în fig. 209, mărginite de două baze dreptunghiulare paralele și neegale și de fețe laterale în formă de trapez. Un astfel de solid poartă numele de *prismatoid*.

Fie  $a, b, a', b'$  respectiv numerele ce măsoară dimensiunile bazelor și  $i$  numărul ce măsoară înălțimea grămezii.

Dacă facem o secțiune KLMN paralelă cu bazele, prin mijlocul înălțimii (*secțiune mijlocie*), ea este un dreptunghi care are ca dimensiuni

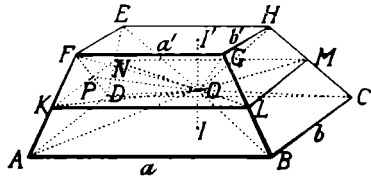


Fig. 209.

$$\frac{1}{2} (a+a'), \quad \frac{1}{2} (b+b').$$

Unim un punct oarecare O al secțiunii mijlocii cu vârfurile bazelor. Solidul considerat se descompune în piramide ce au vârful în O și ca baze, bazele solidului sau fețele lui laterale.

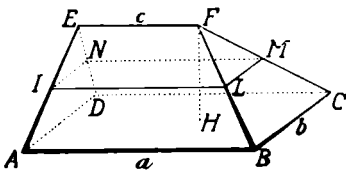


Fig. 209 (a)

Piramida OABCD are ca măsură a volumului ei

$$V_1 = \frac{1}{3} (\text{ABCD}) \times \frac{i}{2} = \frac{1}{6} abi.$$

Piramida OEFHG care are ca bază, baza de sus a solidului, are ca măsură a volumului ei

$$V_2 = \frac{1}{3} \text{aria (EFGH)} \times \frac{i}{2} = \frac{1}{6} a'b'i.$$

Piramida OADEF, care are ca bază fața laterală ADEF

este despărțită în două piramide triunghiulare OADF și ODEF prin planul OFD, adică

$$\text{pir. OADEF} = \text{pir. OADF} + \text{pir. ODEF}$$

Fie P punctul în care diagonala FD taie segmentul KN. După o proprietate a trapezului ADEF, știm că P este mijlocul diagonalei FD. Astfel,

piramida OADF = 4 × piramida OFKP = 4 × piramida FKOP,

piramida ODEF = 4 × piramida ONDP = 4 × piramida DONP.

Dacă însemnăm cu V' și V'' măsurile volumelor celor două piramide OADF și ODEF, avem

$$\begin{aligned} V' &= 4 \times \text{vol. FKOP} = 4 \times \frac{\text{aria (KOP)}}{3} \times \frac{i}{2} \\ &= 4 \times \frac{\text{aria (KOP)} \times i}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'' &= 4 \times \text{vol. DONP} = 4 \times \frac{\text{aria (ONP)}}{3} \times \frac{i}{2} \\ &= 4 \times \frac{\text{aria (ONP)} \times i}{6}; \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} V' + V'' &= 4 \times \frac{\text{aria (KOP)} \times i}{6} + 4 \times \frac{\text{aria (ONP)} \times i}{6} \\ &= 4 \times \frac{\text{aria (KON)} \times i}{6}, \end{aligned}$$

adică măsura volumului piramidei care are ca bază fața laterală ADEF și vârful O este egală cu patru șesimi din aria porțiunii din secțiunea mijlocie cuprinsă în interiorul piramidei înmulțită cu înălțimea grămezii.

Dacă calculăm în același fel, măsurile volumelor celorlalte piramide ce au vârful O și ca bază fețele laterale ale grămezii și facem suma lor, găsim ca rezultat patru șesimi din produsul ariei secțiunii mijlocii prin înălțimea grămezii.

Insemnând cu  $V$  numărul care măsoară volumul grămezii, avem :

$V = V_1 + V_2 +$  suma volumelor piramidelor laterale, sau

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} abi + \frac{1}{6} a'b'i + \frac{4}{6} \left( \frac{a+a'}{2} \right) \left( \frac{b+b'}{2} \right) i \\ &= \frac{1}{6} abi + \frac{1}{6} a'b'i + \frac{1}{6} (a+a') (b+b')i \\ &= \frac{1}{6} i [ab + a'b' + (a+a') (b+b')] \end{aligned}$$

Dacă grămada de pietriș sau nisip are o singură bază și o muchie superioară de mărime  $c$  (fig. 109 a), măsura volumului este

$$V = \frac{1}{6} i [ab + (a+c)b]$$

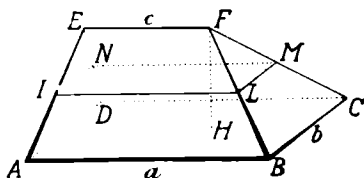


Fig. 109 a.

## P r o b l e m e

1. Să se arate că mijloacele muchiilor unui tetraedru regulat sunt vârfurile unui octaedru regulat.

R. Segmentele ce unesc mijloacele muchiilor sunt egale ca jumătăți ale muchiilor.

2. Cele patru drepte ce unesc vârfurile unui tetraedru cu punctul de intersecție al medianelor feței opuse sunt concurente la  $\frac{3}{4}$  din fiecare din aceste drepte, începând dela vârf.

R. Se vor considera câte două din cele patru drepte.

3. Prin fiecare vârf al unui tetraedru, se duce un plan paralel cu fața opusă. Ce este noul poliedru format? Care este raportul volumelor lor?

R. Tetraedru.

4. Prin fiecare muchie a unui tetraedru se duce un plan paralel cu muchia opusă. Ce fel de poliedru se formează? Să se afle raportul volumelor lor.

R. Paralelipiped. Raportul este  $\frac{1}{6}$ .

5. Să se taie o piramidă patrulateră oarecare printr'un plan, astfel ca secțiunea să fie un paralelogram.

R. Planul trebuie să fie paralel cu dreptele de intersecție ale fețelor opuse. Prelungim muchiile opuse ale bazelor, care se taie respectiv în două puncte. Secțiunea printr'un plan paralel cu planul ce trece prin vârf și aceste două puncte este paralelogram.

6. Se dau trei drepte  $D_1, D_2, D_3$ , paralele, neașezate în același plan. Pe dreapta  $D_1$  luăm un segment  $\overline{AB}$  de lungime dată, pe  $D_2$  un punct oarecare  $C$ , iar pe  $D_3$  un punct oarecare  $D$ . Să se arate că dacă punctele  $C$  și  $D$  alunecă oricum pe dreptele  $D_2$  și  $D_3$  respectiv, iar segmentul  $\overline{AB}$  lunecă în lungul dreptei  $D_1$ , volumul tetraedrului  $ABCD$  rămâne același.

R. Toate punctele dreptei  $D_2$  sunt depărtate de  $D_1$  ca punctul  $C$ ; aria  $ABC$  este constantă. Distanța lui  $D$  la planul dreptelor  $D_2, D_3$  este constantă. Volumul e constant.

7. Un tetraedru  $OABC$  este tridreptunghi în  $O$ . Să se arate că proiecția vârfului  $O$  pe planul bazei  $ABC$  este punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului  $ABC$ . Dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral și are latura  $a$ , să se arate că muchiile laterale sunt egale și să se afle volumul tetraedrului.

R. Se folosește teorema celor trei perpendiculare. Oblice egale

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

8. Un tetraedru tridreptunghi în  $O$  are muchiile laterale egale cu  $a$ . Să se calculeze volumul lui, aria bazei  $ABC$  și înălțimea  $\overline{OH}$ . Pe muchiile laterale  $OA, OB, OC$  se iau lungimile  $OD, OE, OF = x$  și se construiește prisma dreaptă  $DEF D'E'F'$  cu baza  $DEF$  și înălțimea distanța dela  $DEF$  la  $ABC$ . Să se determine  $x$ , astfel ca aria

laterală a prisme să fie de  $\frac{1}{\sqrt{6}}$  ori aria laterală a tetraedrului.

$$R. \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a\sqrt{2}; \text{ aria } (ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2};$$

$$V = \frac{1}{6} \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC}; \overline{OH} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Inlocuind pe } a \text{ cu } x, \text{ avem } \overline{DE},$$

$$\overline{EF} = \overline{FD} = x\sqrt{2}; \text{ aria } (DEF) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}. \text{ Piramidele } OABC, ODEF$$

$$\text{dau } \frac{S}{s} = \frac{I^2}{i^2}, \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3i^2}, i = \frac{3\sqrt{3}}{3}.$$

Înălțimea prismei =  $(a-x) \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Aria laterală a piramidei  $\frac{3a^2}{2}$ ; aria laterală a prisme  $x(a-x)\sqrt{6}$

Avem ecuația  $x(a-x)\sqrt{6} = \frac{3a^2}{2} \frac{\sqrt{6}}{6}$ ;  $x = \frac{a}{2}$ .

9. Dacă un trunchiu de piramidă are bazele paralelograme, diagonalele se taie în același punct.

R. Se consideră câte două diagonale și se observă că punctul de intersecție împarte fiecare în raportul de asemănare al bazelor.

10. Să se calculeze aria și volumul unui tetraedru regulat a cărui muchie este egală cu  $a$ .

$$R. S = a^2\sqrt{3}; V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

11. Să se calculeze aria și volumul unui octaedru regulat a cărui muchie are lungimea  $a$ .

$$R. S = 2a^2\sqrt{3}; V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

12. O piramidă triunghiulară are ca bază un triunghi cu laturile  $a, b, c$  și muchiile laterale egale cu o lungime  $d$ . Să se calculeze volumul acestei piramide. Piciorul înălțimii este centrul cercului circumscris bazei.

Aria bazei  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ . Înălțimea este cateta unui triunghi dreptunghi care are laturile  $d$  și  $R$ . Se știe că  $abc = 4RS$ .

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)d^2 - a^2b^2c^2}.$$

13. Un paralelipiped dreptunghi are dimensiunile  $a, b, c$ . Se unește punctul de întâlnire al diagonalelor bazei de sus cu vârfurile bazei de jos. Să se afle aria laterală, aria totală și volumul solidului format. Aplicație  $a=140$  mm,  $b=20$  mm,  $c=15$  mm.

$$R. \text{ Muchia laterală } = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}}{2}; S = \frac{a\sqrt{b^2 + 4c^2} + b\sqrt{a^2 + 4c^2}}{2};$$

$$St = \frac{a\sqrt{b^2 + 4c^2} + b\sqrt{a^2 + 4c^2} + 2ab}{2}; V = \frac{abc}{3}.$$

14. Pe fiecare față a unui cub de muchie  $a$ , se construiește în afară câte o piramidă triunghiulară regulată cu muchia egală cu muchia cubului. Să se găsească aria și volumul solidului format.

$$R. S = 6a^2\sqrt{3}; V = a^3(\sqrt{2} + 1).$$

15. Aceeași problemă, însă muchiile laterale ale piramidelor sunt

egale cu diagonala cubului.

$$R. S=6a^2\sqrt{11}; V=a^3(\sqrt{10}+1).$$

16. Un paralelipiped dreptunghiu are dimensiunile  $a, b, c$ . Unim centrele bazelor cu mijloacele muchiilor laterale. Să se calculeze aria și volumul solidului format. Să se afle raportul ariilor și volumelor solidului format și paralelipipedului dat.

R. Insemnăm cu  $S$  și  $V$  aria și volumul paralelipipedului;  $S'$ ,  $V'$  aria și volumul solidului.

$$S' = a\sqrt{b^2+c^2} + b\sqrt{a^2+c^2}; V' = \frac{abc}{3}; \frac{S'}{S} = \frac{a\sqrt{b^2+c^2} + b\sqrt{a^2+c^2}}{2(ab+bc+ac)};$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}.$$

17. Să se găsească expresia unui trunchiu de piramidă când se dă aria  $b$  a bazei mari și raportul  $\frac{l'}{l}$  de asemănare al bazelor.

R. Se ține seamă de proprietatea bazelor

$$V = \frac{i}{3} b \left( 1 + \frac{l'}{l} + \frac{l'^2}{l^2} \right).$$

18. O piramidă exagonală regulată are muchia bazei egală cu 8,2 dm și muchiile laterale înclinate cu  $48^{\circ}39'16''$  pe planul bazei. Să se afle aria totală și volumul piramidei. Generalizare luând  $l$  și  $\alpha$ .

$$R. St=402,5538 \text{ dm}^2; V=542,017269 \text{ dm}^3.$$

19. Diferența dintre apotema unei piramide exagonale regulate și apotema bazei este 4, iar diferența pătratelor lor este 40. Să se găsească aria laterală și volumul acestei piramide.

$$R. x \text{ și } y \text{ fiind apotemele, } x-y=4, x^2-y^2=40; x=7, y=3.$$

$$S=42\sqrt{3}; V=12\sqrt{30}.$$

20. O piramidă pătrată regulată are latura bazei  $l$  și muchia laterală  $m$ . La ce distanță dela vârf măsurată pe muchie, trebuie făcută o secțiune paralelă cu baza, pentru ca piramida să fie împărțită în două părți care să aibă arii laterale egale.

R. Insemnând cu  $x$  segmentul căutat de pe muchie și cu  $y$  latura secțiunii, avem  $\frac{x}{m} = \frac{y}{l}$ ,  $y\sqrt{4x^2-y^2} = (l+y)\sqrt{4m^2-l^2}$ . Rezol-

$$\text{văm sistemul prin metoda substituției și găsim } x = \frac{m}{2}(\sqrt{5}+1),$$

$$y = \frac{l}{2}(\sqrt{5}+1)$$

21. O piramidă exagonală regulată are volumul de  $18 \text{ dm}^3$  și muchia laterală egală cu  $\sqrt{15} \text{ dm}$ . Să se afle suprafața ei laterală

R. Insemnăm cu  $x$  latura bazei. Ecuația problemei este  $x^2\sqrt{15-y^2} = \frac{36}{\sqrt{3}}$ . Pentru rezolvare, punem  $x^2=y$ . Ecuația devine  $y^3-15y^2+432=0$ , care se rezolvă prin încercări;  $y=12$ , de unde  $x=2\sqrt{3}$ . Apoi  $z=\sqrt{3}$ .

22. Se dă un trunchi de piramidă triunghiulară regulată. Latura bazei mari întrece latura bazei mici cu o lungime egală cu apotema trunchiului, iar suma acestor trei segmente este de 14 dm. Aria laterală a trunchiului este de 60 dm<sup>2</sup>. Să se afle volumul trunchiului de piramidă dat și la ce depărtare de baza mare se întâlnesc dreptele muchiilor lui.

R.  $x, y, z$  fiind respectiv latura bazei mari, latura bazei mici, apotema, sistemul problemei este  $x-y=z$ ,  $x+y+z=14$ ,

$3(x+y)z=120$ ;  $x=7, y=3, z=4$ . Înălțimea  $l$  a trunchiului este  $\frac{2\sqrt{33}}{3}$ .

$V = \frac{79\sqrt{11}}{6}$ . Insemnăm cu  $d$  distanța la baza mică;  $\frac{d}{d+1} = \frac{3}{7}$ ;

de unde  $d = \frac{\sqrt{33}}{2}$ .

## CILINDRUL.

80. **Suprafața cilindrică.** Să considerăm în spațiu o curbă oarecare  $C$  și o direcțiune  $D$  (fig. 210).

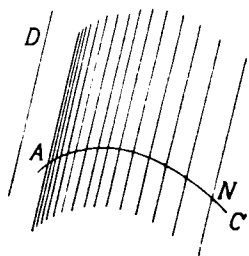


Fig. 210.

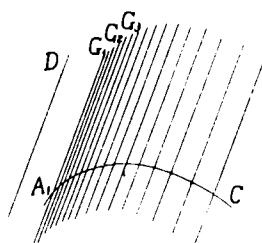


Fig. 211.

Dacă prin fiecare punct al curbei  $C$ , ducem câte o

dreaptă care să aibă direcțiunea  $D$ , ele formează în totalitatea lor o suprafață  $S$  numită *suprafață cilindrică*.

Oricare din dreptele duse se numește *generatoare* a suprafeței cilindrice, iar curba  $C$  se numește *directoarea* suprafeței.  $D$  este în acest caz direcția generatoarelor.

Mai putem defini suprafața cilindrică prin mișcarea unei drepte.

Dacă se dă în spațiu o curbă  $C$  și o direcțiune  $D$ , o

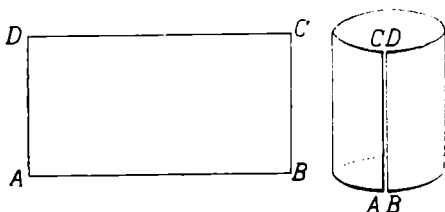


Fig. 212

dreaptă  $AG$  care se mișcă sprijinindu-se pe curba  $C$  și având direcțiunea  $D$  naște o suprafață cilindrică (fig 211).

Dreapta  $G$  care se mișcă este generatoarea suprafeței cilindrice, iar curba  $C$  este directoarea ei. Generatoarea ia în mișcarea ei diferite poziții  $G_1, G_2, G_3...$

**Cazuri particulare.** 1. Suprafața cilindrică care are ca directoare o curbă închisă, de ex. un cerc, este o *suprafață cilindrică închisă*.

2. Suprafața cilindrică care are ca directoare o dreaptă este un *plan*.

**Exemplu.** Tăiem o foaie de hârtie sau tablă subțire în forma unui dreptunghi  $ABCD$  (fig. 212). Îndoind-o ca muchia  $BC$  să se alăture muchiei  $AB$ , avem imaginea unei suprafețe cilindrice.

**181. Cilindrul.** Să considerăm o suprafață cilindrică închisă (fig. 213) și o tăiem cu două plane paralele, care să întâlnească toate generatoarele. Cele două plane taie suprafața cilindrică după două curbe plane paralele.

*Corpul solid mărginit de suprafața cilindrică și de cele două curbe plane paralele se numește cilindru.*

Curbele plane paralele care mărginesc cilindrul se



numesc *baze*. Generatoarele suprafeței cilindrice se numesc *generatoarele* cilindrului. Suprafața cilindrică care mărginește cilindrul este *suprafața laterală* a lui. Segmentul perpendicularei pe baze, cuprins între baze se numește *înălțimea* cilindrului. De ex. II'.

În cazul când curbele de bază ale cilindrului sunt

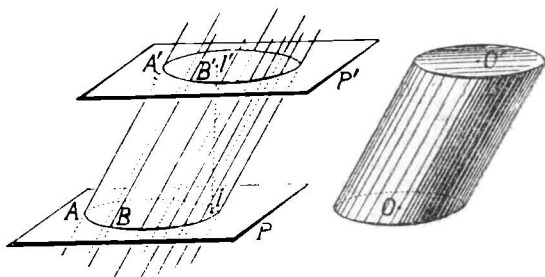


Fig. 213

cercuri, cilindrul poartă numele de *cilindru circular*.

Dacă direcția generatoarelor este perpendiculară pe planele de bază, cilindrul se numește *drept*; dacă direcțiunea generatoarelor este oblică, cilindrul se numește *oblic*.

**182. Cilindrul circular drept.** Cilindrul drept ale cărui baze sunt cercuri se numește cilindru circular drept.

Fie cilindrul circular drept  $OO'$  (fig. 214). Un plan oarecare, care trece prin dreapta  $OO'$  ce unește centrele bazelor, taie suprafața cilindrului, după un dreptunghi, de ex.  $ABB'A'$ .

Segmentul de dreaptă  $\overline{OO'}$  unind mijloacele  $O$  și  $O'$  ale laturilor  $AB$  și  $A'B'$  este paralel cu generatoarele  $AA'$  și  $BB'$  și egal cu ele. Urmează că segmentul  $\overline{OO'}$  este perpendicular pe planele bazelor. Segmentul  $\overline{OO'}$  este deci înălțimea cilindrului.

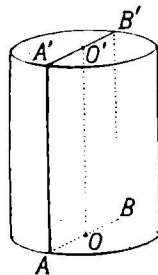


Fig. 214

Dreapta  $OO'$  este *axa* cilindrului. În adevăr, cilindrul circular drept  $OO'$  poate fi considerat

ca născut prin rotirea dreptunghiului plin  $OBB'O'$  în jurul laturii  $OO'$ . Latura  $OO'$  este axa de rotație, latura  $BB'$  naște suprafața laterală a cilindrului, fiind generatoarea ei, laturile  $OB$  și  $O'B'$  nasc bazele cilindrului.

De aceea, *un cilindru circular drept este un cilindru de rotație.*

**183 Volumul cilindrului circular.** Fie cilindrul circular  $OO'$  și o generatoare  $AA'$  a lui (fig. 215).

Incepând din punctele  $A$  și  $A'$  respectiv, să împărțim cercurile de bază  $O$  și  $O'$  în același număr de părți egale, de exemplu patru. Unind consecutiv punctele de diviziune din fiecare cerc, obținem câte un pătrat înscris în cercul de bază respectiv,  $ABCD$  și  $A'B'C'D'$ . Ducem generatoarele  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ . Obținem o prismă pătrată, înscrisă în cilindrul circular. Volumul prismei înscrise este mai mic decât volumul cilindrului,

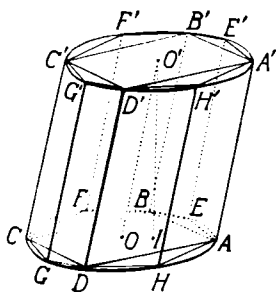


Fig. 215.

pentru că din cilindru trebuie să tăiem solidul alipit în afara fiecărei fețe laterale a prisme, pentru a obține prisma.

Dacă împărțim arcele întinse de laturile pătratelor în câte două părți egale și unim punctele de diviziune, ca mai înainte, obținem două poligoane regulate cu opt laturi, înscrise în cercurile de bază ale cilindrului. Unind prin generatoare vârfurile respective ale poligoanelor, obținem o prismă octogonală, înscrisă în cilindrul circular și circumscrisă prismei pătrate.

Volumul prisme octogonale construită este mai mare ca volumul prisme pătrate, fiindcă pentru a obține prisma octogonală trebuie să alipim câte o prismă triunghiulară pe fiecare față a prisme pătrate. Inșă, volumul prisme octogonale este mai mic ca volumul ci-

lindrului, deoarece trebuie să tăiem din cilindru solidele cuprinse între fețele laterale ale prisme și suprafața laterală a cilindrului pentru a obține prisma. Urmează că diferența dintre volumul cilindrului și volumul prisme octogonale este mai mică ca diferența dintre volumul cilindrului și volumul prisme pătrate.

Impărțim din nou în câte două părți egale, arcele întinse de laturile octogonelor de bază și unim succesiv punctele de diviziune. Obținem poligoane regulate cu 16 laturi, înscrise în cercurile de bază.

Unind prin generatoare punctele corespunzătoare ale celor două poligoane, obținem o prismă poligonală cu 16 laturi înscrisă în cilindrul circular dat și circumscrisă prisme octogonale.

Volumul prisme poligonale cu 16 laturi este mai mare ca volumul prisme octogonale, însă mai mic ca volumul cilindrului. Urmează că diferența dintre volumul cilindrului și volumul prisme poligonale cu 16 laturi este mai mică ca diferența dintre volumul cilindrului și volumul prisme octogonale.

Urmând după același procedeu, obținem prisme poligonale înscrise în cilindru și circumscrise fiecare celei anterioare, care au tot mai multe laturi. Volumele lor cresc din ce în ce, însă sunt mai mici ca volumul cilindrului. Iar diferența dintre volumul cilindrului și volumul prisme înscrise este cu atât mai mică, cu cât numărul laturilor bazei este mai mare. Putem merge cu subdiviziunea, până obținem o prismă poligonală înscrisă în cilindru, al cărei volum să difere de volumul cilindrului cu o cantitate neglijabilă.

Zicem că *cilindrul considerat este limita șirului de prisme înscrise, când numărul, laturilor poligonului de bază crește necontenit.*

Măsura volumului fiecărei prisme înscrise în cilindru se calculează înmulțind numărul care măsoară suprafața bazei cu numărul care măsoară înălțimea ei. Când pris-

mele înscrise tind către cilindru, suprafața poligonului de bază tinde către suprafața cercului de bază, înălțimea rămânând aceeași.

La limită, măsura volumului cilindrului se calculează în același fel, înmulțind numărul  $b$  care măsoară suprafața cercului de bază cu numărul  $i$  care măsoară înălțimea cilindrului, adică

$$\boxed{V = b \times i}$$

Însă  $b = \pi R^2$ ,  $R$  fiind lungimea razei cercului de bază; urmează că

$$\boxed{V = \pi R^2 i}$$

Așa dar: *Măsura volumului unui cilindru este egală cu produsul numerelor ce măsoară aria bazei și înălțimea lui.*

**184. Aria laterală și totală a cilindrului circular drept.** Fie cilindrul circular drept  $OO'$  (fig. 215).

Presupunem că tăiem suprafața laterală a cilindrului

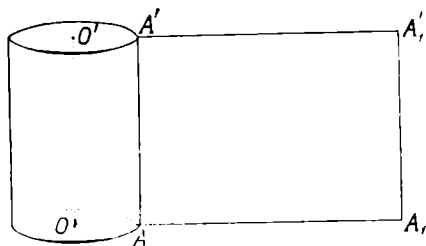


Fig. 215

dat în lungul unei generatoare  $AA'$  și în lungul cercurilor de bază. Putem întinde suprafața laterală a cilindrului pe un plan și obținem dreptunghiul  $AA_1A_1'A'$ . Suprafața laterală a cilindrului este deci desfășurabilă.

Aria laterală a cilindrului este aria dreptunghiului obținut prin desfășurare. Aria dreptunghiului  $AA_1A_1'A'$

este egală cu produsul numerelor  $l$  și  $i$  ce măsoară baza  $\overline{AA_1}$  și înălțimea  $\overline{AA'}$ , adică

$$S=l \times i.$$

Însă măsura  $l$  a bazei este lungimea  $L$  a cercului de bază al cilindrului, iar măsura  $i$  a înălțimii este măsura  $g$  a generatoarei. Rezultă că

$$S=L \times g,$$

adică: *Aria laterală a unui cilindru circular drept este produsul numerelor ce măsoară lungimea cercului de bază și generatoarea lui.*

Dar  $L=2\pi R$ ; urmează că

$$\boxed{S=2\pi Rg}$$

Dacă la aria laterală a unui cilindru circular drept, adăugăm ariile cercurilor de bază, obținem *aria totală* a cilindrului.

Insemnând cu  $St$  aria totală a cilindrului și păstrând celelalte notațiuni, avem

$$\boxed{St=2\pi Rg + 2\pi R^2 = 2\pi R(g + R)}$$

**Observări.** 1. Cilindrul circular drept fiind limita unui șir de prisme regulate înscrise în cilindru, când numărul laturilor poligonului de bază crește necontenit, aria laterală a cilindrului este limita către care tind ariile laterale ale prismelor înscrise.

Știm că aria laterală a unei prisme regulate este

$$S=p \times i,$$

în care  $p$  și  $i$  sunt respectiv numerele ce măsoară perimetrul bazei și înălțimea prisme. Când prisma tinde către cilindru, perimetrul bazei tinde către lungimea cercului de bază,  $2\pi R$ , iar înălțimea rămâne aceeași și egală cu generatoarea. Rezultă că

$$S=2\pi Rg,$$

rezultat găsit mai înainte.

2. Dacă facem într'un cilindru circular drept, o sec-

țiune paralelă cu baza, prin mijlocul înălțimii, secțiunea este un cerc egal cu cercul de bază. Această secțiune poartă numele de *secțiune mijlocie* (*mediană*).

Insemnând cu  $R'$  măsura razei secțiunii mijlocii,  $R'=R$ : înlocuind acum în expresia ariei laterale a cilindrului circular drept, avem

$$S=2\pi R'g,$$

adică: *Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu numărul care măsoară lungimea cercului mijlociu, înmulțit cu generatoarea.*

### P r o b l e m e .

1. Să se arate că trei drepte paralele care nu sunt în același plan sunt generatoarele unui cilindru de rotație. Câte cilindre de rotație sunt în aceste condițiuni ?

R. Axa cilindrului este paralelă cu dreptele date în centrul cercului circumscris secțiunii drepte. Unul singur.

2. Să se afle raportul volumelor a două cilindre de rotație care au ariile laterale egale.

$$R. \frac{R_1}{R_2}.$$

3. Care este raportul ariilor laterale a două cilindre de rotație echivalente ?

$$R. \frac{R_2}{R_1}.$$

4. Un dreptunghi se rotește succesiv în jurul a două laturi adiacente. Să se afle raportul volumelor născute.

R. Dimensiunile dreptunghiului fiind  $a$  și  $b$ , raportul este  $\frac{a}{b}$ .

5. Volumele născute de același dreptunghi în jurul a două laturi adiacente fiind  $a$  și  $b$ , să se calculeze diagonala dreptunghiului.

R. Insemnând cu  $x$  și  $y$  dimensiunile dreptunghiului,

$$x = \sqrt[3]{\frac{a^2}{\pi b}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{\pi a}}.$$

6. Se duc prin axa unui cilindru circular drept, două plane. Ce unghi trebuie să facă cele două plane, pentru ca solidul tăiat de ele să fie o cincime din cilindrul dat ?

R. Se scrie condiția problemei. Unghiul este de  $72^\circ$ .

7. Măsura volumului unui cilindru de rotație este egală cu aria lui laterală înmulțită cu jumătatea razei.

$$R.V = \pi R^2 l = 2\pi R l \times \frac{R}{2}.$$

8. La un cilindru circular drept, raportul dintre suprafața laterală și suma suprafețelor bazelor este egal cu raportul dintre înălțime și rază.

$$R. \frac{2\pi R l}{2\pi R^2} = \frac{l}{R}.$$

9. Dacă înălțimea unui cilindru circular drept este egală cu diametrul bazei, măsura volumului lui este egală cu aria totală înmulțită cu treimea razei.

$$R. V = \pi R^2 l = 2\pi R^3 = 6\pi R^2 \times \frac{R}{3}.$$

10. Dacă  $V, S$  și  $St$  au semnificațiile obișnuite la cilindru, să se arate că

$$8\pi V^2 = S^2(St - S).$$

R.  $V = \pi R^2 l$ , de unde  $8\pi V^2 = 8\pi^3 R^4 l^2$ . Calculăm  $(St - S)$ .

11. La un cilindru de rotație, pătratul razei mărit cu produsul dintre rază și înălțime este 60, pe când pătratul înălțimii mărit cu același produs dă 84. Să se afle aria laterală și măsura volumului aceluși cilindru.

$$R. \text{Raza} = x, \text{ înălțimea} = y; \quad x^2 + xy = 60, \quad y^2 + xy = 84; \quad x = 5, \quad y = 7. \\ V = 70\pi, \quad V = 135\pi.$$

12. Câtul dintre măsura volumului unui cilindru drept și aria lui laterală este  $\frac{3}{4}$ . Care este raza aceluși cilindru?

$$R = 1 \frac{1}{2}.$$

13. Diferența dintre cubul măsurii înălțimii și cubul măsurii razei bazei la un cilindru de rotație este 61, iar produsul aceluiași măsuri 20. Să se afle volumul cilindrului luând ca unitate dm.

$$R. \text{Sistemul problemei este } x^3 - y^3 = 61, \quad xy = 20. \quad V = 80\pi.$$

## C O N U L

**185. Suprafața conică.** Să considerăm în spațiu o curbă oarecare  $C$  și un punct  $O$  (fig. 217).

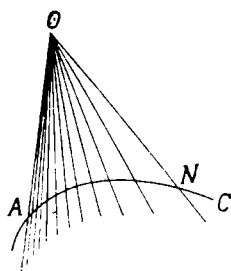


Fig. 217

Dacă din punctul  $O$ , ducem semidrepte care să treacă prin fiecare punct al curbei  $C$ , toate semidreptele duse în număr înfinit formează o suprafață numită *suprafață conică*.

Oricare din dreptele duse se numește *generatoare* a suprafeței conice, iar curba  $C$  se numește *directoarea* suprafeței.

Punctul  $O$  din care am dus semidreptele se numește *vârful* suprafeței conice.

Mai putem defini o suprafață conică prin mișcarea unei drepte.

Dacă se dă în spațiu, o curbă  $C$  și un punct  $O$ , (fig. 218) semidreapta  $OG$  dusă din punctul  $O$ , care se mișcă sprijinindu-se pe curba  $C$ , naște o suprafață conică cu vârful în  $O$ .

Dreapta  $OG$  este generatoarea suprafeței conice, iar curba  $C$  este directoarea ei. Generatoarea sa în diferite poziții  $OG_1, OG_2, OG_3, \dots$

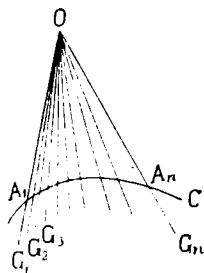


Fig. 218

**Cazuri particulare.** 1. Dacă directoarea unei suprafețe conice este o curbă închisă, de ex. un cerc, avem o *suprafață conică închisă*.



2. Planul este o suprafață conică a cărei directoare este o linie dreaptă.

186. **Observări.** 1. Dacă generatoarea unei suprafețe conice este o dreaptă ce trece prin punctul  $O$ , (fig. 219), prin mișcarea ei naște o suprafață conică formată din două părți, care au punctul  $O$  comun.

Cele două părți ale suprafeței conice sunt numite *pânze*. Zicem în acest caz, că suprafața conică are două pânze.

2. Dacă vârful unei suprafețe conice se depărtează indefinit în direcția uneia din generatoarele ei, generatoarele devin paralele și suprafața conică se preface într-o suprafață cilindrică. Putem defini suprafața cilindrică ca o suprafață conică cu vârful la infinit.

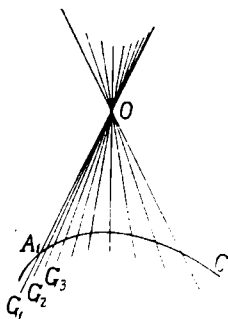


Fig. 219

**Exemplu.** Tăiem dintr'o foaie de hârtie sau de tablă subțire în forma unui cerc, un sector circular  $OAB$  (fig. 220). Îndoind foaia ca raza  $OA$  să se alăture razei  $OB$ , avem imaginea unei suprafețe conice cu o pânză.

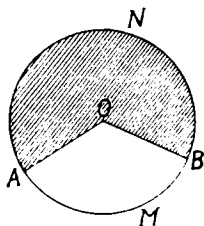


Fig. 220

187. **Conul.** Să considerăm o suprafață conică închisă cu vârful  $S$  (fig. 221) și s'o tăiem cu un plan  $P$ , care să întâlnească toate generatoarele. *Corpul solid mărginit de suprafața conică și de porțiunea de plan cuprinsă înduntru curbei plane de intersecție se numește con.*

Fața plană a conului se numește *bază*, iar fața curbă se numește *suprafața laterală*. Generatoarele suprafeței conice se numesc *generatoarele conului*. Vârful suprafeței conice devine *vârful conului*.

Segmentul perpendicularei coborite din vârf pe planul bazei, până la ea, se numește *înălțimea* conului.

Dacă baza unui con este cerc și piciorul înălțimii este

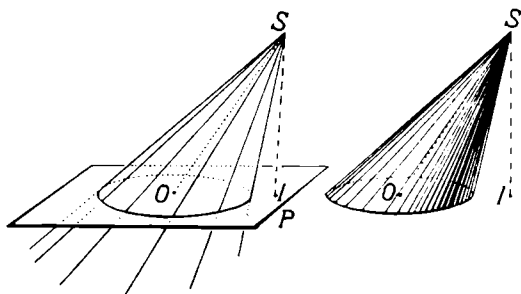


Fig. 221

în centrul cercului de bază, conul se numește *circular drept*.

**Observare.** La un con circular drept, generatoarele sunt egale ca oblice din vârf până la planul bazei, care au picioarele egal depărtate de piciorul înălțimii.

188. **Con de rotație.** Fie conul circular drept SO (fig. 222). Un plan oarecare T, care trece prin dreapta

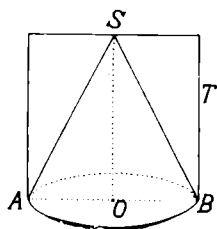


Fig. 222

SO, taie suprafața conului după un triunghi SAB, care este un triunghi isoscel, deoarece generatoarele SA și SB sunt egale după cum am observat. Dreapta SO este înălțimea vârfului în triunghiul isoscel; ea este deci și mediană și bisectoare.

Dreapta SO este astfel o *axă* a conului, deoarece el poate fi considerat ca născut prin rotirea triunghiului dreptunghiu plin SOA, în jurul catetei SO. Latura SA este axa de rotație; latura SA naște suprafața laterală a conului, fiind astfel generatoarea ei; latura OA naște baza conului.

Din această cauză, un con circular drept este un con *de rotație*.

**189. Volumul conului cu baza un cerc.** Fie conul  $SO$ , care are ca bază cercul  $O$  și generatoarea  $SA$  a lui (fig. 223).

Începând din punctul  $A$ , să împărțim cercul de bază într'un număr oarecare de părți egale, de ex. patru. Unind consecutiv punctele  $A, B, C, D$ , obținem pătratul  $ABCD$  înscris în cercul de bază. Dacă ducem și generatoarele  $SB, SC, SD$ , obținem o piramidă pătrată înscrisă în conul considerat. Volumul piramidei înscrise este mai mic decât volumul conului, pentru că din con trebuie să tăiem solidele alipite pe fețele piramidei, pentru a obține piramida.

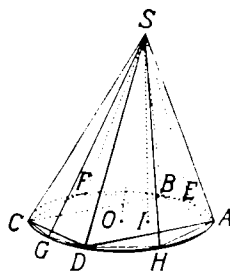


Fig. 223

Dacă împărțim arcele întinse de laturile pătratului în câte două părți egale și unim consecutiv punctele de diviziune, obținem un octogon regulat înscris în cercul de bază. Unind prin generatoare vârful conului cu vârfurile octogonului, obținem o piramidă octogonală înscrisă în con și circumscrisă piramidei pătrate.

Volumul piramidei octogonale este mai mare ca volumul piramidei pătrate, deoarece pentru a obține piramida octogonală trebuie să alipim câte o piramidă triunghiulară pe fiecare față a piramidei pătrate. Însă, volumul piramidei octogonale este mai mic decât volumul conului, fiindcă trebuie să tăiem din con solidele cuprinse între fețele laterale ale piramidei și suprafața laterală a conului, pentru a obține piramida. Urmează că diferența dintre volumul conului și volumul piramidei octogonale este mai mică decât diferența dintre volumul conului și volumul piramidei pătrate.

Împărțim din nou în câte două părți egale, arcele întinse de laturile octogonului înscris și unim succesiv punctele de diviziune. Obținem un poligon regulat cu 16 laturi înscris în cercul de bază al conului.

Ducând apoi generatoarele punctelor de diviziune, obținem o piramidă poligonală cu 16 laturi înscrisă în con și circumscrisă piramidei octogonale.

Volumul piramidei cu 16 laturi este mai mare ca volumul piramidei octogonale, însă mai mic ca volumul conului. Urmează că diferența dintre volumul conului și volumul piramidei cu 16 laturi este mai mică decât diferența dintre volumul conului și volumul piramidei octogonale.

Urmând după același procedeu, obținem piramide poligonale înscrise în con și circumscrise fiecare celei anterioare, care au tot mai multe laturi. Volumele lor cresc necontenit, însă în fiecare caz sunt mai mici decât volumul conului. Iar diferența dintre volumul conului și volumul piramidei înscrise este cu atât mai mică, cu cât numărul laturilor bazei este mai mare. Putem merge cu subdiviziunea până obținem o piramidă poligonală înscrisă în con, al cărei volum să difere de volumul conului cu o cantitate neglijabilă.

*Zicem că un con este limita șirului de piramide înscrise, când numărul laturilor poligonului de bază crește necontenit.*

Măsura volumului fiecărei piramide înscrise în con se calculează înmulțind numerele care măsoară respectiv suprafața bazei și înălțimea și împărțind produsul la 3.

Când piramidele înscrise tind către con, suprafața poligonului de bază tinde către suprafața cercului de bază, înălțimea rămânând aceeași.

La limită, măsura  $V$  a volumului conului se calculează în același fel, înmulțind numărul  $b$  care măsoară suprafața cercului de bază cu numărul  $i$  care măsoară înălțimea și împărțind produsul prin 3, adică

$$V = \frac{b \times i}{3}$$

Însă  $b = \pi R^2$ ,  $R$  fiind lungimea razei cercului de bază ;  
urmează că

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

**190. Aria laterală și totală a conului circular drept.**  
Fie conul circular drept  $SO$  (fig. 224).

Presupunem că tăiem suprafața laterală dealungul unei generatoare, de ex.  $SA$  și dealungul cercului de bază. Putem întinde suprafața laterală a conului pe un plan. Astfel, obținem un sector circular, pentru că toate generatoarele conului circular drept sunt egale și deci toate punctele cercului de bază sunt egal depărtate de vârful  $S$  al conului.

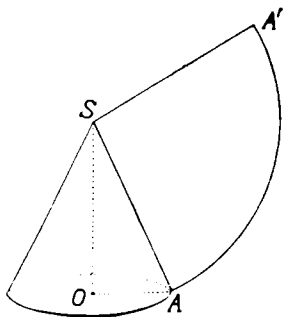


Fig. 224

Suprafața laterală a conului este suprafața sectorului circular  $SAA'$  căpătat prin desfășurare.

Știm că aria unui sector circular se află înmulțind numărul  $l$  ce măsoară lungimea arcului cu jumătatea numărului  $r$  ce măsoară raza sectorului, adică

$$S = l \times \frac{r}{2}.$$

Însă lungimea  $l$  a arcului este lungimea cercului de bază al conului, iar raza sectorului este generatoarea conului. Însemnând numerele care măsoară lungimile lor cu  $R$  și  $g$ , avem

$$l = 2\pi R, \quad r = g,$$

de unde înlocuind în egalitatea de mai sus,

$$S = 2\pi R \times \frac{g}{2} = \pi Rg$$

Dacă la aria laterală a unui con circular drept, adunăm aria cercului de bază, aflăm *aria totală* a conului. Cu aceleași notațiuni, avem

$$\boxed{St = \pi Rg + \pi R^2 = \pi R(g + R)}$$

**Observări.** 1. Conul circular drept fiind limita unui șir de piramide regulate înscrise în con, când numărul laturilor poligonului de bază crește indefinit, aria laterală a conului circular drept este limita către care tind ariile laterale ale piramidelor înscrise.

Însă, aria laterală a piramidei regulate este dată de

$$S_{pir} = \frac{p \times a}{2},$$

în care  $p$  și  $a$  sunt respectiv numerele ce măsoară perimetrul bazei și apotema piramidei. Când piramida tinde către con, poligonul de bază tinde către cerc, deci perimetrul lui tinde către lungimea cercului; iar bazele fețelor laterale tinzând către zero, apotema piramidei tinde către generatoarea  $g$  a conului. Prin urmare

$$\boxed{S_{con} = \frac{2\pi R \times g}{2} = \pi Rg}$$

rezultat găsit mai înainte.

2. Dacă facem într'un con circular drept, o secțiune paralelă cu baza prin mijlocul înălțimii, *secțiunea mijlocie* este un cerc. După proprietatea (162), avem

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2},$$

sau însemnând cu  $R$  și  $R'$  măsurile razelor bazei și secțiunii,

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{2},$$

de unde

$$R = 2R'.$$

Să înlocuim pe  $R$  din expresiunea ariei laterale a conului circular drept prin această valoare; obținem

$$S=2\pi R'.g,$$

adică: *Aria laterală a unui con circular drept este egală cu produsul numărului ce măsoară lungimea cercului mijlociu, prin numărul ce măsoară generatoarea.*

**191. Secțiunea plană în conul circular drept.** Fie conul circular drept  $SO$  (fig. 225), pe care să-l tăiem cu un plan  $P$  paralel cu baza.

Să arătăm că secțiunea plană făcută este un cerc.

Dacă ducem prin axa  $SO$  a conului un plan  $T$ , acesta taie planul  $P$  și planul bazei după două drepte paralele  $A'B'$  și diametrul  $AB$ . Dreapta  $A'B'$  taie axa  $SO$ , într'un punct  $O'$ , căci planul  $T$  trece prin această axă.

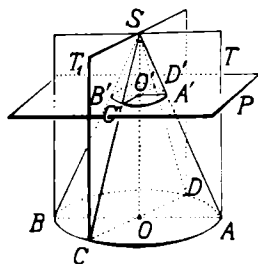


Fig. 225

Triunghiurile  $S'O'A'$  și  $SOA$  sunt asemenea, având unghiurile respectiv egale; rezultă că laturile lor omoloage sunt proporționale, adică

$$(1) \quad \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}$$

Dacă luăm o altă poziție  $T_1$  a planului  $T$ , planul  $T_1$  taie planul bazei după un diametru  $CD$  și planul de secțiune  $P$  după o dreaptă  $C'D'$  paralelă cu  $CD$ , care trece prin punctul  $O'$ .

Triunghiurile  $SO'C'$  și  $SOC$  sunt asemenea pentru același motiv; rezultă

$$(2) \quad \frac{\overline{O'C'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}$$

Din proporțiile (1) și (2), deducem

$$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{O'C'}}{\overline{OC}}$$

Însă, numitorii acestor două rapoarte sunt egali; rezultă că și numărătorii sunt egali, adică

$$\overline{O'A'} = \overline{O'C'}$$

În același fel, arătăm că toate punctele secțiunii sunt egal depărtate de punctul  $O'$ , adică formează un cerc.

Prin urmare, enunțăm teorema:

*Secțiunea plană într'un con circular drept, printr'un plan paralel cu baza, este un cerc.*

**192. Observare.** Dacă planul de secțiune este dus prin mijlocul  $O''$  al înălțimii  $SO$ , (secțiune mediană) avem

$$\frac{\text{lung cerc } O''}{\text{lung cerc } O} = \frac{R}{R''} = \frac{\overline{SA''}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SO''}}{\overline{SO}} = \frac{1}{2};$$

de unde

$$R = 2R''.$$

Înlocuind pe  $R$  din expresiunea ariei laterale a conului circular drept prin această valoare, avem

$$S = 2\pi R''g.$$

Deci aria laterală a conului circular drept se poate calcula cu ajutorul razei secțiunii mediane.

**193. Trunchiul de con circular drept.** Să considerăm conul circular drept

$SO$  (fig. 226).

Facem o secțiune paralelă cu baza și luăm conul  $SO'$ . Solidul rămas din con, cuprins între bază și secțiune se numește *trunchiul de con circular drept*.

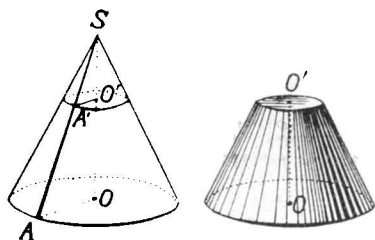


Fig. 226

Cercurile  $O$  și  $O'$  se numesc respectiv *baza mare* și *baza mică* a trunchiului. Distanța  $OO'$  între baze se numește *înălțime*.

Segmentul  $\overline{AA'}$  al unei generatoare oarecari  $SA$  este *generatoarea trunchiului*.



**Observare.** Un trunchiu de con circular drept se obține prin rotirea unui trapez dreptunghiu în jurul laturii perpendiculare pe baze.

**194. Volumul trunchiului de con.** Procedând în același fel ca la volumul cilindrului și al conului, arătăm că putem înscrie într'un trunchiu de con, un șir de trunchiuri de piramidă, ale căror volume se apropie de volumul trunchiului de con, când numărul laturilor poligonului de bază crește necontenit (fig. 227).

*Trunchiul de con este deci limita șirului de trunchiuri de piramide înscrise, când numărul laturilor bazei crește indefinit.*

Știm că volumul unui trunchiu de piramidă îl calculăm cu formula

$$V_{tr. pir.} = \frac{i}{3} (B + b + \sqrt{Bb})$$

Când trunchiul de piramidă înscris tinde către trunchiul de con, poligoanele de bază ale celui dintâi tind către cercurile de bază ale celui de al doilea; deci ariile  $B$  și  $b$  tind către ariile  $\pi R^2$  și  $\pi r^2$  ale cercurilor de bază,  $i$  rămânând același. Deducem că măsura  $V$  a volumului trunchiului de con este

$$V_{tr. con} = \frac{i}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2})$$

sau

$$V_{tr. con} = \frac{\pi}{3} i (R^2 + r^2 + Rr)$$

**195. Aria laterală și totală a trunchiului de con circular drept.** Un trunchiu de con circular drept fiind limita unui șir de trunchiuri de piramidă regulată înscrise, când numărul laturilor poligonului de bază crește indefinit, aria laterală a trunchiului de con circular drept

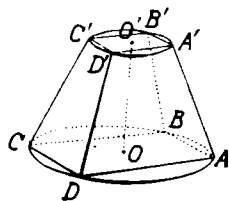


Fig. 227

se deduce din aria laterală a trunchiului de piramidă regulată.

Știm că 
$$S_{tr. pir. reg.} = \frac{P+p}{2} \times A,$$

care la limită devine

$$S_{tr. con circ. dr.} = \frac{\text{lung. cerc } O + \text{lung cerc } O'}{2} \times g,$$

sau

$$S = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times g = \pi(R+r)g$$

Iar aria totală a trunchiului de con circular drept este

$$St_{tr. con circ. dr.} = \pi(R+r)g + \pi R^2 + \pi r^2$$

**Observare.** Dacă într'un trunchiu de con, facem o secțiune mijlocie, această secțiune este un cerc, a cărui rază este cuprinsă între razele bazelor trunchiului. Insemnând cu  $R'$  măsura razei cercului mijlociu, deducem cu ușurință

$$R' = \frac{R+r}{2}, \text{ de unde } 2R' = R+r.$$

Să înlocuim suma  $(R+r)$  din expresia ariei laterale a trunchiului de con prin  $2R'$ ; avem

$$S = 2\pi R'. g,$$

adică : *Aria laterală a unui trunchiu de con circular drept este egală cu numărul care măsoară lungimea cercului mijlociu înmulțit cu numărul care măsoară generatoarea.*

Comparând acest rezultat cu cele obținute la cilindru și con, tragem concluzia că el este general, adică : *Aria laterală a unui cilindru, con sau trunchiu de con circular drept este egală cu numărul ce măsoară lungimea cercului mijlociu înmulțit cu numărul ce măsoară generatoarea.*

## Probleme

1. Să se arate că trei drepte concurente în spațiu, care nu sunt în același plan, pot fi luate ca generatoare a patru conuri de rotație.

R. Există patru drepte (intersecțiile planelor duse prin bisectoarele fiecărui fețe și perpendiculare pe acele fețe) care sunt axe ale conurilor.

2. Să se arate că planul determinat de tangenta într'un punct la cercul de bază al unui con de rotație și de generatoarea acelui punct are comune cu conul numai punctele generatoarei.

R. Dacă ar mai avea un punct comun în afara generatoarei, ar avea comună generatoarea acestui punct și tangenta ar tăia cercul de bază în două puncte.

3. Să se afle rapoartele ariilor laterale și volumelor conurilor născute prin rotirea unui triunghiu dreptunghiu cu catetele  $a$  și  $b$ , în jurul fiecărei catete.

$$R. 1; \frac{a}{b}$$

4. Să se afle raportul volumelor născute prin rotirea unui paralelogram, succesiv în jurul a două laturi adiacente.

R. Volumul născut de paralelogram este echivalent cu volumul născut de dreptunghiu cu aceeași arie. Raportul este  $\frac{a}{b}$ .

5. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul unui con echilateral (diametrul egal cu generatoarea), în funcție de generatoare.

$$R. S = \frac{1}{2} \pi g^2; \quad St = \frac{3}{4} \pi g^2; \quad V = \frac{\sqrt{3}}{24} \pi g^3.$$

6. Un con de rotație are raza bazei  $R$  și generatoarea  $g$ . Să se împartă suprafața lui laterală în două părți echivalente, printr'un plan paralel cu baza.

R. Insemnând distanțele planului de secțiune la vârf cu  $x$ , ținând seamă de triunghiurile asemenea ale figurii, ecuația problemei este  $x^2 = g^2 - Rg - R^2 + (R-g)\sqrt{g^2 - R^2}$ .

7. Volumul unui con circular drept este egală cu aria laterală înmulțită cu o treime din distanța centrului bazei la generatoare.

R. Insemnăm depărtarea centrului la generatoare cu  $d$ ;

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 i = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{dg}{R} = \pi R g \times \frac{d}{3}.$$

8. Volumul unui con de rotație este o treime din suprafața triunghiului generator, înmulțită cu lungimea cercului de bază.

$$R. V = \frac{1}{3} \pi R^2 i = \frac{1}{3} \cdot \frac{Ri}{2} \times 2 \pi R.$$

9. Insemnând cu  $V$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ , numerele ce măsoară volumele născute prin rotirea unui triunghi care se rotește succesiv în jurul ipotenuzei și în jurul fiecărei catete, avem relația

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$

R. Dacă insemnăm cu  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , laturile triunghiului și cu  $i$  înălțimea lui,  $V = \frac{\pi i^2 a}{3}$ ,  $V_1 = \frac{\pi bc^2}{3}$ ,  $V_2 = \frac{\pi b^2 c}{3}$ .

10. Dacă insemnăm cu  $V$ ,  $S$ , și  $St$  măsura volumului, aria laterală și aria totală a unui con de rotație, avem

$$9 \pi V^2 = St (St - S)(2S - St).$$

R. Insemnăm raza bazei cu  $R$  și înălțimea cu  $i$ .  $V = \frac{\pi R^2 i}{3}$ ,  $S = \pi R \sqrt{R^2 + i^2}$ ,  $St = \pi R \sqrt{R^2 + i^2} + \pi R^2$ . Calculăm  $9\pi V^2$ ,  $St - S$ ,  $2S - St$ .

11. Se dă raza  $R$  și generatoarea  $g$  a unui con de rotație. Să se afle depărtarea la care trebuie să facem o secțiune paralelă cu baza, pentru ca cele două părți să aibă suprafețe totale egale.

Aplicație  $R = 3 \frac{1}{3}$ ,  $g = 6$ .

R.  $x$  fiind depărtarea planului de secțiune la vârf, ecuația problemei este  $x = (R + g) \sqrt{\frac{g - R}{2g}}$  Condiția  $g > 0$ . Pentru aplicație

$$x = \frac{19}{28} \sqrt{70}.$$

12. Diferența pătratelor razei și înălțimii unui con de rotație este 16, iar produsul lor 15. Să se afle aria totală și volumul conului.

R. Insemnăm raza bazei cu  $x$ , înălțimea cu  $y$ . Sistemul problemei este  $x^2 - y^2 = 16$ ,  $xy = 15$ ;  $x = 5$ ,  $y = 3$ .

$$St = 5 \pi (5 + \sqrt{34}), V = 75 \pi.$$

## S F E R A

**196. Generarea sferei.** Să considerăm în spațiu, un semicerc AMB de diametru AB, așezat într'un plan și să-l rotim în jurul dreptei AB, până ajunge în poziția dela început (fig. 228). Suprafața plană închisă de semicercul AMB naște un corp solid numit *sferă*.

În timpul mișcării de rotație, toate punctele semicercului AMB rămân la aceeași distanță egală cu raza, de punctul O. Urmează că punctele suprafeței sferei sunt egale depărtate de punctul O.

Punctul O este numit *centrul sferei*. Distanța dela centru la oricare punct al suprafeței sferei se numește *raza sferei*. Segmentul de dreaptă care unește două puncte ale suprafeței sferei și trece prin centru se numește *diametrul sferei*.

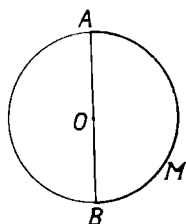


Fig. 228

Rezultă că *sfera este corpul solid mărginit de o suprafață ale cărei puncte sunt egal depărtate de un punct dat numit centru*.

Sfera este un corp de rotație.

Raza unei sfere este deci raza semicercului care a născut sfera printr'o rotațiune continuă.

Pentru a reprezenta pe planul tablei sau al foi de desen o sferă, figurăm cercul care ni se pare că mărginește suprafața ei. Acest cerc poartă numele de *cerc de contur aparent al sferei*. Sfera se înseamnă cu o literă, de obicei O, scrisă la centru.

**Exemple.** O minge de gumă, o bilă de sticlă, de lemn sau de metal sunt sfere.

**197.** Din definiția sferei, rezultă că suprafața ei împarte spațiul în două regiuni: una care cuprinde centrul numită *regiunea interioară a sferei* și cealaltă care se numește *regiunea exterioară a sferei*.

Fie  $N$  un punct din regiunea exterioară sferei  $O$  (fig. 229).

Segmentul  $\overline{ON}$  determinat de centrul  $O$  al sferei și punctul  $N$  înțeapă sfera într'un punct  $N'$  așezat între  $O$  și  $N$ . Urmează că  $\overline{ON} > \overline{ON'}$  (raza).

Fie un punct  $L$  din regiunea interioară sferei  $O$  (fig. 229). Semidreapta  $OL$  înțeapă sfera într'un punct  $L'$  dincolo de punctul  $L$ . Urmează că  $\overline{OL} < \overline{OL'}$  (raza).

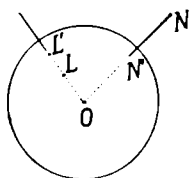


Fig. 229

Așa dar : a) *Punctele de pe suprafața unei sfere sunt la aceeași distanță egală cu raza de centrul ei ;* b) *Punctele exterioare sferei sunt depărtate de centru cu o distanță mai mare decât raza ;*

c) *Punctele interioare sferei sunt depărtate de centru cu o distanță mai mică decât raza.*

Rezultă că *suprafața unei sfere este locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct dat numit centru.*

198. **Observări.** 1. O sferă este determinată când se dă centrul și raza ei.

2. Locul punctelor spațiului astfel că o parte din ele sunt la distanța  $R$  de un punct  $O$  și altă parte la distanța  $R'$  de același punct  $O$  este format din suprafețele a două sfere cu același centru  $O$  (*sfere concentrice*).

3. Față de un punct dat în spațiu, putem avea un număr nelimitat de sfere cu centrul în punctul dat, însă cu raze diferite.

4. O sferă care se reduce la centrul ei este o sferă cu raza zero.

199. **Secțiune plană în sferă.** Fie sfera  $O$  de rază  $R$  și planul  $P$  care taie sfera (fig. 230).

a) Dacă planul de secțiune trece prin centrul sferei (*plan diametral*), curba de secțiune are toate punctele

in același plan P, la aceeași distanță R de centrul O al sferei. Rezultă că *secțiunea plană a sferei cu un plan diametral este un cerc*, cu centrul în centrul sferei și cu raza egală cu raza sferei.

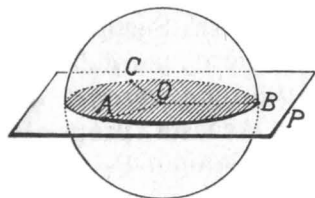


Fig. 230

b) Dacă planul de secțiune S nu trece prin centrul sferei (fig. 231), secțiunea este o linie curbă plană ale cărei puncte sunt egal depărtate, cât raza sferei, de centrul O.

Considerând diferite puncte A, B, C,... ale secțiunii, razele  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,... sunt oblice egale duse din punctul O la planul P. Urmează că picioarele lor A, B, C, sunt egal depărtate de piciorul I al perpendicularei OI, dusă din același punct O la planul P.

Punctele secțiunii fiind puncte ale planului P, egal depărtate de punctul I sunt pe un cerc, cu centrul în punctul I și având ca rază depărtarea dela unul din puncte la piciorul I al perpendicularei OI pe plan.

Rezultă că oricare ar fi planul de secțiune:

*Secțiunea plană a unei sfere este un cerc.*

**200. Cerc mare. Cerc mic. Paralele.** Dacă planul de secțiune al unei sfere trece prin centrul ei, cercul de secțiune se numește *cerc mare al sferei* (fig. 230).

Dacă planul de secțiune al unei sfere nu trece prin centrul ei, cercul de secțiune se numește *cerc mic al sferei* (fig. 231).

Perpendiculara OP din centrul sferei pe planul S al unui cerc de secțiune de pe sferă înțeapă sfera în două puncte P, P' diametral opuse numite *polii cercului de secțiune*.

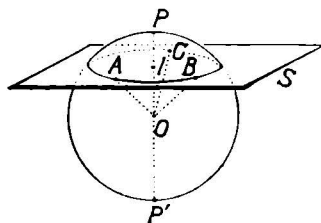


Fig. 231

**Observare.** Deoarece, prin centrul unei sfere putem

duce o infinitate de plane diametrale, urmează că *există o infinitate de cercuri mari trase pe sferă*.

De asemenea, putem duce o infinitate de plane paralele cu planul de secțiune S (fig. 231). Secțiunile corespunzătoare sunt cercuri mici ale sferei, paralele între ele. Urmează că *există o infinitate de cercuri mici trase pe sferă, paralele între ele*. Această proprietate este adevărată oricare ar fi poziția planului P.

Cercurile de pe o sferă determinate de plane paralele se numesc *paralele*.

201. **Teoremă.** Fie sfera O de rază R și planul P care taie sfera (fig. 232). Fie A un punct oarecare al secțiunii cu centrul în punctul I.

Insemnăm cu  $r$  raza cercului de secțiune și cu  $d$  distanța  $\overline{OI}$  a planului P la centrul O.

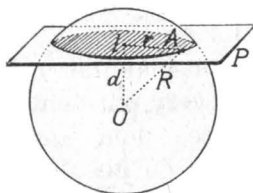


Fig. 232

Aplicând triunghiului dreptunghiu OIA teorema lui Pitagora, avem

$$\overline{OA}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IA}^2$$

sau

$$R^2 = d^2 + r^2;$$

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

(1)

de unde

Observăm că raza R a sferei fiind constantă, dacă planul de secțiune se mișcă depărtându-se de centru, depărtarea  $d$  a planului de secțiune la centrul sferei crește, raza  $r$  a cercului se micșorează, căci scăzătorul din partea a doua a egalității (1) se mărește, iar descăzutul rămâne constant.

Când depărtarea  $d$  devine egală cu raza R, raza cercului de secțiune

$$r^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

adică cercul de secțiune se reduce la un punct (fig. 233).

Planul P, în această poziție T, are un singur punct co-

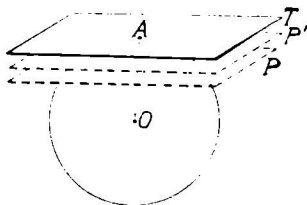


Fig. 233



mun cu sfera și se numește *plan tangent la sferă*.

Punctul comun planului tangent și sferei se numește *punct de contact*.

În mișcarea lui, planul de secțiune P, păstrând aceeași direcțiune, rămâne paralel cu el însuși și deci perpendicular pe raza OA. La limită, când planul secant devine plan tangent la sferă în punctul A, el este perpendicular pe raza OA.

Așa dar, avem proprietatea :

*Planul perpendicular pe raza unei sfere, la extremitatea ei este plan tangent la sferă.*

**202. Teoremă reciprocă.** Fie sfera O și planul T tangent la sferă în punctul A (fig. 234).

Planul tangent T este perpendicular pe raza punctului de contact.

În adevăr, orice alt punct, de exemplu B, al planului tangent este exterior sferei, deoarece numai punctul A este comun planului T și sferei O. Urmează că  $\overline{OB} > \overline{OA}$ . Raza OA este deci mai mică decât orice alt segment dus din punctul A la orice punct al planului T. Raza OA este deci perpendiculară pe planul T sau invers, planul T este perpendicular pe raza OA.

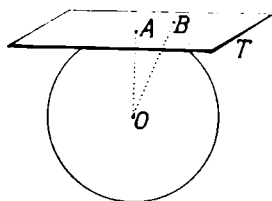


Fig. 234.

Am demonstrat astfel teorema reciprocă următoare :  
*Planul tangent la o sferă este perpendiculară pe raza punctului de contact.*

**Observare.** Relațiunea găsită

$$R^2 = r^2 + d^2,$$

cuprinde trei mărimi : R raza sferei, r raza cercului de secțiune, d depărtarea planului cercului de secțiune la centrul sferei.

După cum luăm ca necunoscută R, r sau d, rezolvăm una din următoarele trei probleme :

1) Determinarea razei unei sfere care trece printr'un cerc dat și având centrul într'un punct dat.

2) Determinarea razei unui cerc de secțiune, al cărui plan este la o distanță dată de centrul sferei ( $d < R$ ).

3) Determinarea depărtării centrului unui cerc mic la centrul sferei, când se dă raza sferei și raza cercului mic, adică construirea unui cerc mic al sferei ( $r < R$ ).

**203. Tangenta la sferă.** Să considerăm sfera  $O$  și planul  $T$  tangent la sferă în punctul  $A$  (fig. 235).

Ducem prin diametrul  $AA'$  al punctului de contact, un plan de secțiune  $S$ . Planul  $S$  taie sfera după un cerc mare, care trece prin punctul  $A$ . De asemenea, planul  $S$  taie planul tangent  $T$ , după o dreaptă  $BC$ , care trece prin punctul  $A$ . Dreapta  $BC$  fiind în planul tangent la sferă în punctul  $A$  și trecând prin acest punct este perpendiculară pe raza  $OA$ . Urmează că dreapta  $BC$  este tangentă la cercul de secțiune în punctul  $A$ . Ea nu are comun cu cercul decât punctul  $A$ ; ea nu are deci comun cu sfera decât punctul  $A$ .

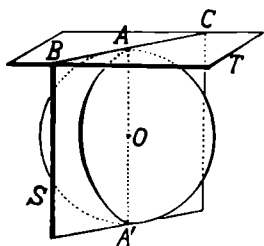


Fig. 235

*Dreapta care are un singur punct comun cu sfera se numește tangentă la sferă.*

**204. Observări.** 1. Dacă planul de secțiune  $S$  se rotește în jurul diametrului  $AA'$ , cercul corespunzător de secțiune cu sfera se rotește în jurul diametrului  $AA'$ , iar tangenta  $BC$  se rotește în planul tangent, în jurul punctului  $A$ .

Cum planul de secțiune poate ocupa o infinitate de poziții, urmează că tangenta la sferă poate avea o infinitate de poziții, adică: *Printr'un punct al sferei, se pot duce o infinitate de drepte tangente la sferă în acel punct.*

2. Planul de secțiune  $S$ , rotindu-se în jurul diametrului  $AA'$ , tangenta la fiecare cerc mare de secțiune este cuprinsă în planul tangent la sferă în punctul  $A$ . Așa dar: *Tangentele la cercurile mari care au comun diametrul  $AA'$  corespunzător punctului  $A$  sunt cuprinse în planul tangent la sferă în punctul  $A$ .*

*Reciproc:* Fie sfera  $O$  și diametrul  $AA'$  al acestei sfere (fig. 235). Ducând prin diametrul  $AA'$  toate planele de secțiune, ele taie sfera  $O$  după cercuri mari, ce trec prin

punctul A. Tangentele la aceste cercuri mari în punctul A comun lor, fiind perpendiculare în acest punct pe diametrul  $AA'$ , determină, după cum știm, un plan perpendicular pe diametrul  $AA'$  în punctul A, adică un plan tangent la sferă în acest punct.

Rezultă de aci proprietatea : *Tangentele într'un punct comun tuturor cercurilor mari trase pe o sferă, ce trec prin acel punct, sunt cuprinse în planul tangent la sferă în acel punct.*

Planul tangent la o sferă într'un punct al ei poate fi considerat ca *locul geometric al tangentelor la toate cercurile mari duse pe sferă, prin acel punct.*

3. Dacă printr'un punct oarecare A al unei sfere O trece un cerc mic cu centrul în punctul I (fig. 236), planul P al acestui cerc taie planul T tangent la sferă în punctul A, după o dreaptă BC tangentă la cercul I, în punctul A.

În adevăr, dreapta OI este perpendiculară pe planul S al cercului I, iar OA este perpendiculară pe planul tangent T în punctul A și deci și pe dreapta BC din acest plan. După reciproca teoremei celor trei

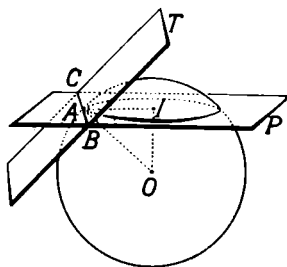


Fig. 236

perpendiculare, urmează că dreapta AI este perpendiculară pe dreapta BC. Dreapta BC, fiind perpendiculară pe raza punctului A, este tangentă la cercul I în acest punct.

Așa dar : *Tangenta la o sferă într'un punct al ei este tangentă la orice cerc mic al sferei care trece prin acest punct.*

*Reciproc :* Dacă I este un cerc mic care trece printr'un punct A al unei sfere O (fig. 236), tangenta BC în punctul A, la acest cerc este cuprinsă în planul cercului I și perpendiculară pe raza AI a punctului A. După teorema celor trei perpendiculare, tangenta BC la cercul I este perpendiculară pe raza OA a punctului A.

Dacă considerăm un alt cerc mic  $I'$  trecând prin punctul  $A$ , deducem în aceeași fel, că tangenta  $B'C'$  la el în punctul  $A$  este perpendiculară pe raza  $OA$  a punctului  $A$ .

Urmează că tangentele la toate cercurile mici ce trec prin același punct unei al sferei sunt perpendiculare la extremitatea razei acestui punct. Ele sunt cuprinse deci în planul tangent la sferă în acest punct.

Așa dar: *Locul tangențelor la toate cercurile mici de pe o sferă, care trec prin același punct al ei este planul tangent la sferă în acest punct.*

**205. Sfera determinată de patru puncte.** Fie patru puncte în spațiu  $A, B, C, D$ , care nu sunt în același plan (fig. 237).

Să arătăm că prin aceste puncte trece o sferă și numai una.

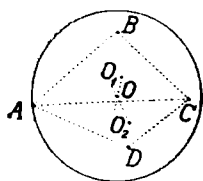


Fig. 237

Dacă luăm trei din cele patru puncte, de ex.  $A, B, C$ , un punct egal depărtat de ele se află pe perpendiculara ridicată pe planul lor, în centrul  $O_1$  al cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .

Luând acum punctele  $A, C, D$ , un punct egal depărtat de ele se află pe perpendiculara ridicată pe planul lor, în centrul  $O_2$  al cercului circumscris triunghiului  $ACD$ .

Însă, aceste două perpendiculare se găsesc în același plan perpendicular pe mijlocul segmentului  $AC$ . Ele se taie deci într'un punct, egal depărtat de cele patru puncte date.

Sfera cu centrul în punctul  $O$  și cu raza, de ex.  $OA$ , trece prin cele patru puncte date. Ea este deci sfera determinată din cele patru puncte date.

Perpendicularele în punctele  $O_1$  și  $O_2$  respectiv pe planele  $ABC$  și  $ACD$  neputând avea decât un punct comun, urmează că sfera  $O$  este unică.

Așa dar: *Patru puncte din spațiu determină o sferă.*

**206. Zonă sferică.** Să tăiem o sferă  $O$  cu două plane paralele  $P$  și  $P'$  (fig. 238).

Porțiunea din suprafața sferei cuprinsă între cercurile de secțiune respective se numește *zonă sferică*.

Cele două cercuri de secțiune sunt *bazele zonei*, iar depărtarea  $\overline{P'P}$  dintre planelor bazelor este *înălțimea zonei*.

Dacă unul din planele de secțiune este tangent la

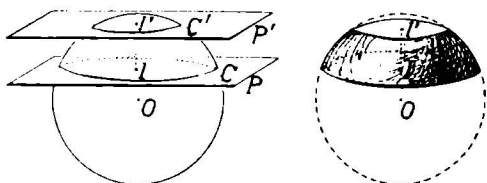


Fig. 238

sferă, porțiunea din suprafața sferei, cuprinsă între ele se numește *calotă sferică*.

**Observare.** Un plan secant împarte o sferă în două calote

Dacă planul secant trece prin centrul sferei, cele două calote determinate de el sunt egale; fiecare calotă este o *emisferă*. În caz contrar, calotele determinate sunt neegale.

**207. Meridiane.** Să considerăm o sferă O și un diametru  $PP'$  al ei (fig. 239).

Orice plan care trece prin diametrul  $PP'$  taie sfera după un cerc mare, numit *meridian* al sferei.

Fie un cerc mic I, al cărui pol este în punctul P. Coardele arcelor cuprinse între polul P și cercul I sunt egale ca oblice duse din punctul P la planul cercului I, având picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei duse din același punct P pe planul cercului. Rezultă că *arcele meridianelor cuprinse între polul P și cercul I sunt egale*.

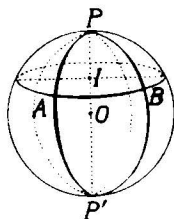


Fig. 239

De aceea, putem trage pe o sferă, un cerc mic având ca pol un punct P, folosind un compas cu brațele curbe, numit *compas sferic*.

### Aria sferei.

208. Aria suprafeței născute prin rotirea unui segment de dreaptă în jurul unei axe așezate în același plan. Fie în același plan, axa de rotație Oz și segmentul de dreaptă  $\overline{AB}$  (fig. 240).

a) Dacă segmentul  $\overline{AB}$  este paralel cu axa, prin rotire continuă până la poziția inițială, naște o suprafață cilindrică de rotație, a cărei bază este cercul de rază  $\overline{Bb}$  și a cărei generatoare este  $\overline{AB}$ .

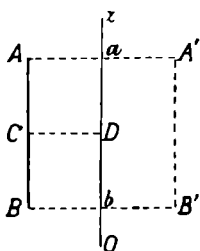


Fig. 240

Aria este egală, după cele arătate la cilindru, cu numărul ce măsoară lungimea cercului mijlociu cu raza  $\overline{CD}$ , înmulțit cu numărul ce măsoară

generatoarea  $\overline{AB}$ , adică

$$\text{aria } (AB) = 2\pi \overline{CD} \times \overline{AB}.$$

b) Dacă segmentul  $\overline{AB}$  întâlnește axa Oz în punctul A (fig. 241), suprafața născută prin rotirea segmentului  $\overline{AB}$  până la poziția inițială este o suprafață conică de rotație, având ca rază a bazei depărtarea  $\overline{Bb}$  a punctului B de axă și ca generatoare  $\overline{AB}$ . Aria ei este egală cu numărul ce măsoară lungimea cercului mijlociu cu raza CE, înmulțită cu numărul ce măsoară generatoarea AB, adică

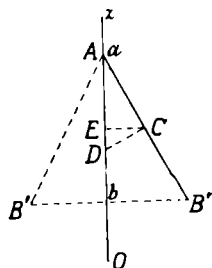


Fig. 241

$$\text{aria } (AB) = 2\pi \overline{CE} \times \overline{AB}.$$

c) Dacă segmentul  $\overline{AB}$  are o poziție oarecare față de axă (fig. 242), suprafața născută prin rotirea segmen-

tului  $\overline{AB}$  până la poziția inițială este o suprafață conică trunchiată, având ca rază a bazei mari  $\overline{Bb}$ , ca rază a bazei mici  $\overline{Aa}$  și ca generatoare  $\overline{AB}$ . Aria ei este egală cu numărul ce măsoară lungimea cercului mijlociu cu raza  $CE$  înmulțită cu numărul ce măsoară generatoarea  $AB$ , adică

$$\text{aria } (AB) = 2\pi \overline{CE} \times \overline{AB}.$$

Rezultă că în general: *Aria suprafeței născute prin rotirea unui segment de dreaptă, în jurul unei axe din același plan este egală cu numărul ce măsoară lungimea cercului mijlociu înmulțit cu numărul ce măsoară generatoarea.*

Să arătăm că putem da expresiunii ariei o formă nouă, folosind segmentul perpendicularei ridicate pe mijlocul segmentului până la axă și proiecția segmentului dat pe axă.

Considerăm cazul general al segmentului într'o poziție oarecare față de axă (fig. 242).

În mijlocul  $C$  al segmentului  $\overline{AB}$ , ridicăm perpendiculara  $\overline{CD}$ , care întâlnește axa  $Oz$  în punctul  $D$ . Proiectăm apoi segmentul  $\overline{AB}$  pe axa  $Oz$ , după  $\overline{ab}$  și ducem prin  $A$  paralela  $\overline{AF}$  cu axa  $Oz$ .

Triunghiurile dreptunghice  $AFB$  și  $CED$  sunt asemenea ( $\sphericalangle C = \sphericalangle A$  ca unghii cu laturi perpendiculare); rezultă

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CE}},$$

de unde

$$(2) \quad \overline{AB} \cdot \overline{CE} = \overline{CD} \cdot \overline{AF}$$

Însă  $\overline{AF} = \overline{ab}$  ca paralele cuprinse între paralele; iar

$$\overline{CE} = \frac{\overline{Bb} + \overline{Aa}}{2},$$

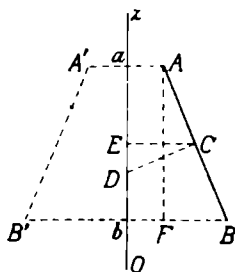


Fig. 242

după proprietatea segmentului ce unește mijloacele laturilor neoparalele ale trapezului  $ABba$ .

Relațiunea (2) devine

$$(3) \quad \overline{AB} (\overline{Bb} + \overline{Aa}) = 2\overline{CD}.$$

Înlocuind produsul  $\overline{AB} (\overline{Bb} + \overline{Aa})$  din (1), prin valoarea dată de (3), egalitatea (1) devine

$$\text{aria (AB)} = 2\pi \overline{CD} \times \overline{ab},$$

adică în general: *Aria născută prin rotirea unui segment în jurul unei axe de rotație este egală cu lungimea cercului care are ca rază perpendiculara ridicată pe mijlocul segmentului până la axă, înmulțită cu lungimea proiecției segmentului pe axă,*

**209. Aria suprafeței născută prin rotirea unei linii poligonale regulate în jurul unei axe din același plan.** Fie linia poligonală regulată

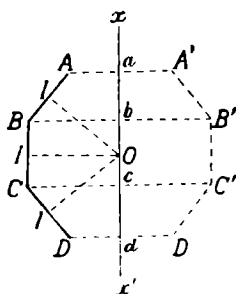


Fig. 243

ABCD, care se rotește în jurul unei axe  $x'x$  în același plan cu ea, ce trece prin centrul ei O (fig. 243).

Aria suprafeței născute prin rotirea liniei ABCD este egală cu suma ariilor născute de fiecare latură a liniei poligonale. Însă, OI fiind apotema liniei poligonale,

$$\text{aria } (\overline{AB}) = 2\pi \overline{OI} \times \overline{ab},$$

$$\text{aria } (\overline{BC}) = 2\pi \overline{OI} \times \overline{bc},$$

$$\text{aria } (\overline{CD}) = 2\pi \overline{OI} \times \overline{cd}.$$

Adunăm aceste trei egalități:

$$\text{aria } (\overline{AB}) + \text{aria } (\overline{BC}) + \text{aria } (\overline{CD}) = 2\pi \overline{OI} \times (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd})$$

sau 
$$\text{aria (ABCD)} = 2\pi \overline{OI} \times \overline{ad},$$

adică: *Aria suprafeței născută prin rotirea unei linii poligonale regulate, în jurul unei axe care trece prin centrul ei este egală cu lungimea cercului care are ca rază apotema liniei poligonale, înmulțită cu numărul ce măsoară proiecția liniei poligonale pe axă.*

**210. Aria zonei sferice.** O zonă sferică poate fi considerată ca născută prin rotirea unui arc de cerc AB



(fig. 244), în jurul diametrului  $x'x$ . Însă arcul AB este limita unei linii poligonale regulate  $A\dots B$  înscrisă în el, când numărul laturilor crește îndefinit. Știm că

$$\text{aria } (A\dots B) = 2\pi \overline{OJ} \times \overline{ab}.$$

La limită, linia poligonală  $A\dots B$  devine arcul AB, apotema devine raza  $r$ ,  $\overline{ab}$  este înălțimea  $i$  a zonei; deci

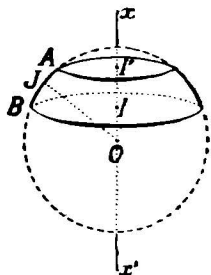


Fig. 244.

$$\text{aria zonei} = 2\pi r \times i = 2\pi r i$$

adică: *Aria unei zone sferice este egală cu lungimea unui cerc mare înmulțită cu măsura înălțimii ei.*

**211. Aria sferei.** Suprafața sferei poate fi privită ca o zonă a cărei înălțime este egală cu diametrul sferei. Putem deci aplica rezultatul precedent; astfel

$$\text{aria sferei} = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$$

adică: *Aria sferei este egală cu lungimea unui cerc mare al sferei înmulțită cu măsura unui diametru.*

**Observare.** Aria unei sfere este egală cu de patru ori aria unui cerc mare al ei.

### Volumul sferei

**212. Volumul născut prin rotirea suprafeței unui**

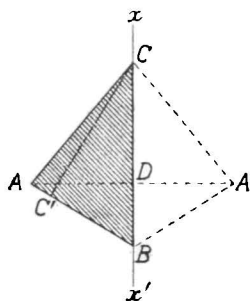


Fig. 245.

**triunghiului. Cazul. 1.** Fie triunghiul ABC, care se rotește în jurul axei  $x'x$  ce se confundă cu una din laturile lui, de ex. cu BC (fig. 245). Ducem înălțimea  $CC'$  a vârfului C și perpendiculara AD din vârful A, pe axa  $x'x$ . Volumul născut prin rotirea triunghiului ABC este suma volumelor conurilor de rotație născute de triunghiurile dreptunghice ADC și ADB, adică

$$\begin{aligned} \text{vol (ABC)} &= \text{vol (ADC)} + \text{vol (ADB)} \\ &= \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{CD} + \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{DB} \\ &= \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 (\overline{CD} + \overline{DB}) = \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}. \end{aligned}$$

Însă produsul  $\overline{AD} \cdot \overline{BC}$  este egal cu înălitul ariei triunghiului ABC. Luând ca bază latura AB a triunghiului și ca înălțime  $\overline{CC'}$ , putem scrie

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{CC'}.$$

Atunci, măsura volumului născut de triunghiul ABC devine

$$\text{vol (ABC)} = \frac{1}{3} \pi \overline{AD} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CC'}.$$

În această relație, produsul  $\pi \overline{AD} \cdot \overline{AB}$  este aria laterală a conului BDA. Însemnând-o cu aria  $(\overline{AB})$ , măsura volumului născut este

$$\text{vol (ABC)} = \frac{1}{3} \text{aria } (\overline{AB}) \cdot \overline{CC'},$$

adică: *Măsura volumului născut este egală cu a treia parte a produsului ariei născute de una din laturi prin înălțimea corespunzătoare.*

**Cazul 2.** Fie triunghiul ABC, care se rotește în jurul unei axe  $x'x$  din planul lui, ce trece prin unul din vârfurile lui, de ex. prin C (fig. 246).

Prelungim latura AB până taie axa  $x'x$ , în punctul M. Volumul născut prin rotirea triunghiului ABC este diferența volumelor născute prin rotirea triunghiurilor AMC și BMC, adică

$$\text{vol(ABC)} = \text{vol(AMC)} - \text{vol(BMC)}.$$

Să scriem, după cazul precedent, măsurile volumelor născute de triunghiurile AMC

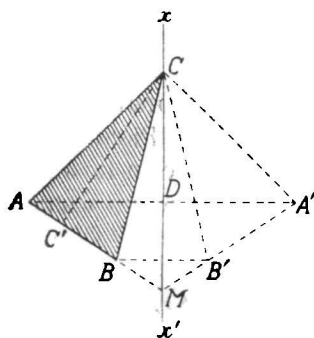


Fig. 246

și BMC, care au câte o latură pe axa de rotație; căpătăm

$$\begin{aligned} \text{vol (ABC)} &= \frac{1}{3} \text{ aria } (\overline{AM}). \overline{CC'} - \frac{1}{3} \text{ aria } (\overline{BM}). \overline{CC'} \\ &= \frac{1}{3} \overline{CC'} [\text{aria } (\overline{AM}) - \text{aria } (\overline{BM})]. \\ &= \frac{1}{3} \text{ aria } (\overline{AB}). \overline{CC'}, \end{aligned}$$

adică, măsura volumului născut se află ca în cazul precedent.

*Cazul 3.* Fie triunghiul ABC, care se rotește în jurul unei axe  $x'x$  din planul lui, ce trece prin vârful C, rîunghiul avînd una din laturi, AB, paralelă cu axa (fig. 247).

Coborîm din punctul C perpendiculara  $CC'$  pe latura AB.

Volumul născut prin rotirea triunghiului ABC este diferența volumelor născute prin rotirea triunghiurilor  $CC'B$  și  $CC'A$ , adică  $\text{vol (ABC)} = \text{vol (CC'B)} - \text{vol (CC'A)}$ .

Observăm că în rotirea triunghiului ABC, dreptunghiul  $CC'BE$  naște un cilindru, avînd raza bazei  $\overline{CC'}$  și înălțimea  $\overline{BC'}$ ; de asemenea, dreptunghiul  $CC'AD$  naște un cilindru, avînd raza bazei  $\overline{AD}$  și înălțimea  $\overline{AC'}$ .

Astfel,  $\text{vol (CC'B)} = \frac{2}{3} \text{ vol. (CC'BC')}$  și

$\text{vol. (CC'A)} = \frac{2}{3} \text{ vol. (CC'AD)}$ . Rezultă

$$\begin{aligned} \text{vol (ABC)} &= \frac{2}{3} \text{ vol (CC'BE)} - \frac{2}{3} \text{ vol (CC'AD)} \\ &= \frac{2}{3} \pi \overline{CC'}^2 \cdot \overline{BC'} - \frac{2}{3} \pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{AC'}. \end{aligned}$$

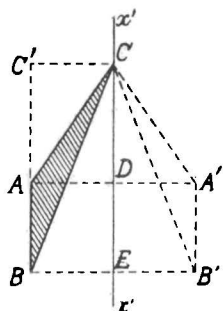


Fig. 247

Însă  $\overline{CC'} = \overline{AD}$ ; urmează:

$$\begin{aligned} \text{vol}(ABC) &= \frac{2}{3} \pi \overline{AD}^2 (\overline{BC'} - \overline{AC'}) \\ &= \frac{2}{3} \pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{AB}. \\ &= \frac{1}{3} \overline{AD} \times 2 \pi \overline{AD} \cdot \overline{AB}. \end{aligned}$$

Produsul  $2\pi \overline{AD} \cdot \overline{AB}$  este aria laterală a cilindrului născut de dreptunghiul ABED sau latura AB a triunghiului ABC. Înlocuind în expresiunea volumului născut de triunghiul ABC, avem

$$\text{vol}(ABC) = \frac{1}{3} \text{aria}(\overline{AB}) \cdot \overline{AD} = \frac{1}{3} \text{aria}(\overline{AB}) \cdot \overline{CC'},$$

rezultat găsit și în celelalte cazuri.

Putem deci enunța teorema generală: *Măsura volumului născut prin rotirea unui triunghi în jurul unei axe din planul său, ce trece printr'unul din vârfuri este egală cu produsul ariei născută de latura opusă vârfului de pe axă, prin măsura înălțimii corespunzătoare ei.*

#### 214. Măsura volumului născut prin rotirea unui sector polygonal regulat.

Fie sectorul polygonal regulat OABCD, care se rotește în jurul unei axe de rotație  $x'x$  din planul său, ce trece prin centrul lui (fig. 248).

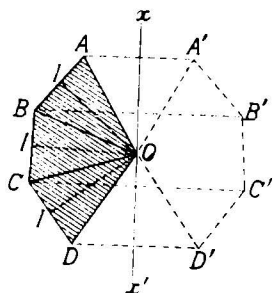


Fig. 248

Volumul născut de acest sector polygonal este egal cu suma volumelor născute de fiecare din triunghiurile isoscele ce formează sectorul, adică

$$\begin{aligned} \text{vol}(OABCD) &= \text{vol}(AOB) \\ &+ \text{vol}(BOC) + \text{vol}(COD) \end{aligned}$$

Însă

$$\text{vol}(\text{AOB}) = \frac{1}{3} \text{ aria } (\overline{\text{AB}}) \cdot \overline{\text{OI}},$$

$$\text{vol}(\text{BOC}) = \frac{1}{3} \text{ aria } (\overline{\text{BC}}) \cdot \overline{\text{OI}},$$

$$\text{vol}(\text{COD}) = \frac{1}{3} \text{ aria } (\overline{\text{CD}}) \cdot \overline{\text{OI}}.$$

Urmează că:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{OABCD}) &= \frac{1}{3} \overline{\text{OI}} [\text{aria } (\overline{\text{AB}}) + \text{aria } (\overline{\text{BC}}) + \text{aria } (\overline{\text{CD}})] \\ &= \frac{1}{3} \text{ aria } (\text{ABCD}) \cdot \overline{\text{OI}}, \end{aligned}$$

adică: *Măsura volumului născut de un sector poligonal regulat, care se rotește în jurul unei axe din planul lui ce trece prin centrul lui, este egală cu produsul ariei născute de linia poligonală prin măsura apotemei ei.*

### 215. Măsura volumului sectorului sferic.

*Sectorul sferic* este porțiunea din volumul sferei limitată de o zonă a sferei și două conuri, care au vârfurile în centrul sferei și ca baze respectiv cele două baze ale zonei. El poate fi considerat ca născut prin rotirea unui sector circular în jurul unui diametru exterior lui.

Fie sectorul circular OAB, care se rotește în jurul diametrului  $x'x$  (fig. 249). Să aflăm măsura volumului sectorului sferic născut.

Sectorul circular OAB este limita unui sector poligonal regulat înscris în el, când numărul laturilor liniei poligonale crește nemărginit. Putem deci să aplicăm măsura volumului născut prin rotirea unui sector poligonal:

$$\text{vol}(\text{sect. polig.}) = \frac{1}{3} \text{ aria}(\text{liniei polig.}) \wedge \text{apotema.}$$

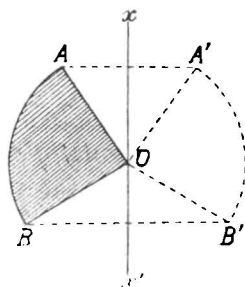


Fig. 249

Această relațiune devine la limită

$$\text{vol sect. sferic} = \frac{1}{3} \text{ aria zonei} \times \text{raza.}$$

Dacă  $R$  este măsura razei sferei și  $i$  măsura înălțimii zonei, avem

$$\text{vol sect. sf.} = \frac{1}{3} 2\pi R i \times R = \frac{2}{3} \pi R^2 i,$$

adică: *Măsura volumului unui sector sferic este egală cu o treime din aria zonei corespunzătoare, înmulțită cu raza sferei.*

**216. Volumul sferei.** Sfera poate fi considerată ca un sector sferic născut prin rotirea unui sector circular egal cu un semicerc plin. In acest fel.

$$\begin{aligned} \text{vol. sferei} &= \frac{1}{3} \text{ aria sect. circ.} \times R \\ &= \frac{1}{3} \text{ aria sferei} \times R \\ &= \frac{1}{3} 4\pi R^2 \times R. \end{aligned}$$

sau

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

adică: *Măsura volumului unei sfere este o treime din aria ei înmulțită cu numărul ce măsoară raza ei.*

**Observare.** Fie două sfere cu razele  $R$  și  $R'$ . Raportul volumelor lor  $V$  și  $V'$  este

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R'^3} = \left( \frac{R}{R'} \right)^3,$$

adică: *Raportul volumelor a două sfere este egal cu cubul raportului razelor.*

## P r o b l e m e.

1. Să se arate că o dreaptă înțeapă o sferă în două puncte.  
R. Se va duce prin dreaptă un plan.
2. Să se arate că intersecția a două sfere este un cerc.  
R. Punctele intersecției sunt la distanțe date de centrele lor.
3. Să se afle locul geometric al vârfurilor unghiurilor drepte ale  
căror laturi trec prin două puncte fixe în spațiu.  
R. O sferă.
4. Locul geometric al secțiunilor plane făcute într'o sferă prin  
plane paralele.  
R. Un diametru al sferei.
5. Locul geometric al centrelor secțiunilor plane făcute într'o  
sferă, prin plane care trec printr'o dreaptă dată.
6. Locul geometric al punctelor ce sunt la distanța  $a$  de punc-  
tul  $A$  și la distanța  $b$  de punctul  $B$ .  
R. Un cerc. Nu totdeauna problema este cu puțință.
7. Dintr'un punct  $M$  exterior unei sfere, ducem două semidrepte,  
care înțeapă sfera cu centrul  $O$  și raza  $R$  în punctele  $A, B$  și  
 $C, D$ . Să se arate că avem relația

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MO}^2 - R^2.$$

- R. Se formează triunghiuri asemenea.
8. Să construiască o sferă de rază dată, care să treacă prin  
trei puncte date.
9. Să se construiască o sferă de rază dată, care să treacă prin  
două puncte date și să fie tangentă la un plan dat.
10. Să se ducă printr'un punct dat, un plan tangent la două  
sfere date.
11. Fiind date două sfere  $O$  și  $O'$ , ducem razele  $OM$  și  $O'M'$  pa-  
ralele și de același sens. Să se arate că dreapta  $MM'$  trece prin-  
tr'un punct fix din spațiu.  
R. Se aplică o teoremă din Geometria plană.
12. Aceeași problemă, când razele duse sunt paralele și de sens  
contrar.
13. Intr'o sferă cu raza  $R$ , se fac două secțiuni prin plane pa-  
ralele depărtate respectiv cu  $d$  și  $2d$  de capetele diametrului per-  
pendicular pe planele lor. Să se calculeze ariile zonei și calotelor  
determinate în sferă de cele două plane.  
R. Aria zonei  $= 2\pi R(2R - 3d)$ ; aria unei calote  $= 2\pi R d$ ; aria ca-  
lotei a doua  $= 4\pi R d$ .
14. Intr'o sferă cu raza  $R$ , se duce un plan de secțiune depăr-  
tat de centrul sferei cu  $d$ . Să se determine ariile secțiunii și ariile  
calotelor formate.

Aplicație  $R=6$  cm,  $d=3,6$  cm.

R. Aria secțiunii =  $\pi(R^2-d^2)$ . Ariile calotelor  $2\pi R(R-d)$ ,  $2\pi R(R+d)$ .

15. O sferă are raza egală cu 12 cm. Să se ducă un plan de secțiune care să împartă sfera în două părți, astfel ca aria uneia să fie  $\frac{2}{3}$  din aria celeilalte.

R. Insemnăm depărtarea secțiunii la centru cu  $x$ ;  $x = \frac{12}{5}$ .

16. O sferă este echivalentă cu cilindrul de rotație cu raza  $R$  și înălțimea  $i$ . Să se afle raza sferei. Aplicație  $R=4,35$  dm,  $i=3,2$  dm.

R. Raza sferei fiind  $x$ ,  $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4} R^2 i}$ . Se calculează prin logaritmi.

17. Un con de rotație este născut de un triunghi dreptunghiu cu catetele  $a$  și  $b$ . Să se găsească raza semicercului care naște sfera cu aceeași suprafață ca suprafața totală a conului. Aplicație  $a=4,2$  m,  $b=5,6$  m.

B. Insemnăm raza sferei cu  $x$ . Dacă  $a$  este raza bazei, aria totală a conului este  $\pi a(a + \sqrt{a^2+b^2})$ . Aria sferei  $4\pi x^2$ ;

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{a(a + \sqrt{a^2+b^2})}.$$

18. Care este raza sferei echivalentă cu conul de rotație având raza bazei  $R$  și generatoarea  $g$ ? Aplicație  $R=4,2$  dm;  $g=8,4$  dm.

R.  $x$  fiind raza sferei,  $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4} R^2 \sqrt{g^2 - R^2}}$ . Calculul numeric prin logaritmi.

19. Să se afle raportul suprafeței unei sfere și a suprafeței totale a unui con echilateral circumscris sferei. Să se arate că acest raport este egal cu raportul volumelor lor. (Archimede).

R. Raza sferei fiind  $R$ , raza bazei conului este  $R\sqrt{3}$ . Raportul suprafețelor este  $\frac{4}{9}$ .

20. Unei sfere de rază  $R$ ,  $i$  se circumscrie un con.

a) Să se exprime volumul și aria laterală a conului în funcție de raza conului. b) Să se determine raza conului astfel ca aria lui laterală să fie odată și jumătate aria sferei. c) Să se calculeze volumul și aria conului, luând  $R=2$  dm.

R. Insemnăm raza conului cu  $x$ , înălțimea lui cu  $y$ .

$$a) S = \frac{\pi x^2(x^2 + R^2)}{x^2 - R^2}, V = \frac{\pi}{3} \frac{2Rx^4}{x^2 - R^2}, b) x' = R\sqrt{2}, x'' = R\sqrt{3}.$$



21. Un tetraedru regulat este înscris într'o sferă de rază  $R$ . Să se calculeze aria totală și volumul tetraedrului, cunoscând raza sferei. Aplicație  $R=2$ .

R. Insemnând cu  $a$  muchia tetraedrului, avem  $St=a^2\sqrt{3}$ ,

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

22. Să se înscrie o sferă într'un tetraedru regulat. Să se calculeze aria și volumul tetraedrului în funcție de raza  $r$  a sferei.

R.  $St = \frac{24}{25} r^2$ ;  $V = \frac{8\sqrt{3}}{125} r^3$ .

23. Intr'o sferă cu centrul  $O$  și raza  $R$ , se înscrie un con circular drept cu înălțimea  $\frac{3R}{2}$ . a) Să se calculeze volumul conului. b) Să se afle raportul dintre volumul conului și volumul sferei. c) Să se ducă un plan paralel cu baza conului, care să taie sfera și conul după două cercuri, ale căror arii să difere cu  $\pi a^2$ .

R.  $Vc = \frac{3}{8} \pi R^3$ ;  $\frac{Vc}{Vs} = \frac{9}{32}$ . Se înseamnă distanța planului la cen-

trul sferei cu  $x$  și se determină  $x$ .

24. Să se înscrie într'o sferă dată cu raza  $R$ , un con circular drept, astfel ca aria laterală a conului să fie egală cu aria calotei cu aceeași bază ca și conul.

R. Insemnăm cu  $x$  înălțimea conului. Ecuația problemei este:  $2R(2R-x)(x^2+2Rx-4R^2)=0$ , care dă  $x=2R$ ,  $x=-R \pm R\sqrt{5}$ . Soluția  $x=R(\sqrt{5}-1)$  este bună.

### Probleme recapitulative.

1. Dintr'un punct  $A$ , la un plan  $P$ , sunt construite două segmente de dreaptă  $AB$  și  $AC$  de lungime  $l$ .

Știind că unghiul  $BAC$  are măsura  $2\alpha$  și că unghiul medianei  $AM$  a triunghiului  $BAC$  cu proiecția ei pe planul  $P$  are măsura  $\beta$ , să se afle: a) distanța cea mai scurtă dela punctul  $A$  la planul  $P$ ; b) unghiul pe care-l face fiecare din oblicele  $AB$  și  $AC$  cu planul  $P$ ; c) distanța cea mai scurtă între punctele  $B$  și  $C$ .

R. Insemnând cu  $O$  proiecția punctului  $A$  pe plan, cu  $\gamma$

unghiul ABO, se scriu relațiunile trigonometrice în triunghiurile dreptunghice formate

$$AO = \frac{l \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}{\cos \alpha}, \quad BC = 2l \sin 2\alpha.$$

2. a) Să se afle suprafața laterală și volumul unui con circular drept, știind că generatoarea lui are lungimea  $l$ , iar unghiul ei cu planul bazei are măsura  $\alpha$ .

b) Să se determine unghiul generatoarei SA cu tangenta AM la cercul de bază al conului.

c) Planul determinat de tangenta AM și bisectoarea unghiului SAO taie înălțimea SO în I, iar generatoarea opusă SA' în L. Să se determine raportul  $\frac{\overline{LA}}{\overline{LI}}$ . Aplicație:

$$l = 64\text{m}, \quad \alpha = 75^\circ.$$

R.  $Sl = \pi l^2 \cos \alpha$ ,  $V = \frac{\pi}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ ; unghiul generatoarei

SA cu AM este  $\beta = \pi - \frac{3\alpha}{2}$ , raportul  $\frac{\overline{LA}}{\overline{LI}} = \frac{r}{l} \frac{\sin \frac{2\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}$ .

3. Intr'o piramidă SABC, care are baza un triunghi echilateral ABC cu latura  $a$ , vârful S se proiectează în I pe una din înălțimile triunghiului de bază. Știind că proiecțiunea muchiei laterale SC pe planul bazei este jumătate din lungimea ei, să se afle, însemnând muchiile  $\overline{SA} = \overline{SB} = m$ :

a) Relațiunea care leagă lungimile celor trei muchii laterale SA, SB, SC.

b) Volumul piramidei, însemnând cu  $l$  lungimea muchiei SC.

c) Măsura unghiurilor diedre ale piramidei cu muchiile AB, BC, CA.

$$\text{R. a) } m^2 = l^2 + a^2 - \frac{al\sqrt{3}}{2}, \quad \text{b) } V = \frac{a^2 l}{8}.$$

4. Intr'o sferă O de rază R, se dă un diametru AB și o coardă AM, care face un unghi de  $75^\circ$  cu AB. Să se afle:

a) Aria laterală și volumul conului care are ca generatoare AM, vârful în punctul A și ca bază cercul I de secțiune, obținut prin ducerea prin M a planului perpendicular pe AB.

b) Aria laterală și volumul conului cu vârful în S, tangent sferei în lungul cercului de bază al conului precedent și având aceeași bază. Aplicație pentru  $R=48$  cm.

R. I fiind centrul cercului de bază al conului AMM', se găsește

$$r = \overline{MI} = R \sin 30^\circ, \overline{OI} = R \cos 30^\circ; \overline{AM} = \overline{MI} : \sin 75^\circ \\ = \frac{R}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

$$\overline{SM} = \overline{MI} : \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}, \overline{SI} = \overline{MI} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{6}.$$

5. Intr'o sferă dată O de rază R, este înscris un con circular drept SBC, având unghiul de deschidere (unghiul generatoarei cu axa) de măsura  $\alpha = 15^\circ$ . Se consideră sfera I înscrisă în conul SBC. Să se calculeze:

a) Aria și volumul solidului cuprins între cele două sfere.

b) Aria și volumul conului SBC.

c) Aria și volumul solidului cuprins între cele două sfere pentru  $\alpha = 30^\circ$  și  $R = 50$  cm.

R. Dacă E este centrul cercului de bază al conului înscris în sfera dată, I centrul sferei înscrise așezat pe SE, avem  $\sphericalangle BOE = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle OBE = 60^\circ$ . Găsim

$$\text{raza BE} = \frac{R}{2}, \text{SE} = \frac{R}{2} (2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{SB} = \frac{R}{2} (1 + \sqrt{3}) \text{ și } \text{IE} = \frac{R}{2} \operatorname{tg} \frac{75^\circ}{2}.$$

6. Intr'o prismă dreaptă ABCDEF, prin vârful D se duce un plan care determină în prisma dreaptă secțiunea DGH, astfel că unghiul format de DG cu AB are ca măsură  $\alpha$ , iar unghiul format de DH cu AC are ca măsură  $\beta$ .

Să se calculeze aria totală și volumul fiecăruia din

cele două volume obținute, când tăiem prisma după secțiunea DGH.

Aplicație pentru cazul particular când :

$$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{DF} = a, \overline{DA} = h; \alpha = 30^\circ \text{ și } \beta = 45^\circ.$$

Asemenea pentru cazul :

$$\overline{DE} = a, \overline{EF} = 2a, \overline{DF} = 3a, \overline{DA} = 4a, \alpha = 75^\circ, \beta = 15^\circ.$$

Asemenea pentru cazul :  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{DF} = \overline{DA} = a$  și  $\alpha = \beta$ .

$$R. \overline{EG} = \overline{DE} \operatorname{tg} \alpha; \overline{FH} = \overline{DF} \operatorname{tg} \beta.$$

7°. Se consideră o prismă dreaptă ABCDEF cu baza un triunghi echilateral cu latura  $a$  și având ca lungime a muchiilor laterale  $b$ .

Se duc diagonalele feței laterale BEFC și fie O punctul de întâlnire al lor.

Să se calculeze : a) Volumul și aria totală a piramidei OABED ;

b) Unghiurile muchiilor laterale OA, OE, OB, OD cu planul bazei ABED.

8°. Se consideră un con circular drept având raza bazei  $R$  și înălțimea  $h$ . Să se ducă un plan de secțiune între vârf și bază, astfel ca aria laterală a conului dela vârf față de aria laterală a trunchiului de con să fie într'un raport dat  $k$ . Să se examineze cazurile particulare  $k=1$ , și  $k=2$ .

$$R. \text{ Găsim sistemul } \frac{x}{h} = \frac{y}{R}; 2x^2 = kh^2 - kx^2.$$

9°. Un vas cilindric circular drept cu raza bazei  $R$  și înălțimea  $h$  are un fund conic circular drept. Dacă tăiem cilindrul și conul prin un plan trecând prin axa comună, vedem că unghiul  $\alpha$  pe care-l face diagonala dreptunghiului de contur aparent cu axa este jumătate din unghiul  $\beta$  de deschidere al conului (al generatoarei cu axa).

Să se calculeze :

a) Volumul vasului.

b) Aria interioară a vasului.

c) Aceeași problemă când unghiul  $\alpha$  este o treime a unghiului  $\beta$ . Discuțiune.

$$R. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2R}{h}, \quad \overline{SI} = \frac{R(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha} \text{ etc.}$$

10. Ce dimensiuni trebuie să aibă un paralelipiped dreptunghiu construit dintr'o sârmă de lungime  $36a$ , pentru ca aria lui totală să fie  $18a^2$ , iar volumul său  $a^3$ ? Discuțiune.

R. Găsim sistemul:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9a \\ xy + xz + yz &= 9a^2 \\ xyz &= a^3; \\ z^3 - 9az^2 + 9a^2z - a^3 &= 0 \\ \left(\frac{z}{a}\right)^3 - 9\left(\frac{z}{a}\right)^2 + 9\left(\frac{z}{a}\right) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

11. Care sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghiu înscris într'o sferă dată de rază  $R$ , a cărei arie totală este  $2a^2$ , dacă una din fețele adiacente unui vârf este medie geometrică a celorlalte două? Discuțiune.

R. Avem sistemul:

$$\begin{aligned} xy + yz + xz &= a^2 \\ x^2y^2 &= xyz^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4R^2; \\ z^2 &= xy, \\ x^2 + y^2 &= 4R^2 - xy, \\ z^2(x+y)^2 &= a^4 + x^2y^2 - 2a^2zy, \\ xy(4R^2 + xy) &= a^4 + x^2y^2 - 2a^2xy, \text{ etc.} \end{aligned}$$

12. Intr'un semicerc de diametru  $AA'$ , este înscris un triunghi  $ABC$ , laturile  $AC$  și  $AB$  făcând respectiv cu diametrul  $AA'$  unghiurile ascuțite  $\alpha$  și  $\beta$ .

Rotind figura în jurul diametrului  $AA'$ , suprafața  $ABC$  naște un solid. Să se afle:

a) aria solidului născut;

b) volumul solidului născut. Discuțiune.

Aplicație pentru cazul când:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ .

R. Fie M și N proiecțiile lui B și C pe AA'.

$$\overline{AC} = 2 R \cos \alpha,$$

$$\overline{AB} = 2 R \cos \beta,$$

$$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM},$$

$$\overline{AN} = 2 R \cos^2 \alpha,$$

$$\overline{AM} = 2 R \cos^2 \beta,$$

$$\overline{MN} = 2 R (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta).$$

$$\overline{CN} = 2 R \sin \alpha \cos \alpha = R \sin 2\alpha,$$

$$\overline{BM} = 2 R \sin \beta \cos \beta = R \sin 2\beta,$$

$$\overline{BP} = \overline{BM} - \overline{CN} = R(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)$$

$$tg \gamma = tg BCP = \frac{BP}{CP} = \frac{R(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)}{2(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)} = \frac{1}{2} \frac{\cos(\beta + \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}$$

$$tg \gamma = \frac{1}{2} \cotg(\beta + \alpha); \quad \overline{BC} = \overline{MN} \sec \gamma.$$

13°. Se consideră un unghi  $XOY$  de măsură  $\alpha$  și în  $O$  pe planul unghiului, o perpendiculară  $OA$  de lungime  $l$ .

În planele  $AOX$  și  $AOY$ , se duc dreptele  $AB$  și  $AC$  întâlnind pe  $OX$  și  $OY$  în  $B$  și  $C$  respectiv. Știind că măsurile fețelor  $OAB$  și  $OAC$  ale tetraedrului sunt respectiv  $\alpha$  și  $\beta$ , să se găsească măsurile celorlalte fețe ale triedrelor cu vârfurile în  $A, B, C$ . Să se calculeze:

a) Volumul tetraedrului  $OABC$ ;

b) Aria totală a tetraedrului  $OABC$ ;

c) Înălțimile tetraedrului corespunzătoare vârfurilor  $O, B, C$ . Aplicație pentru:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ .

R. Se rezolvă triunghiurile dreptunghiuri  $AOB$  și  $AOC$ ; apoi triunghiul  $BOC$ , în care avem două laturi și unghiul cuprins; apoi calculăm unghiurile triunghiului ale cărui laturi sunt aflate. Cunoscând ariile fețelor și volumul, putem afla înălțimile cerute.

14°. Pe muchiile unui triedru tridreptunghi  $OXYZ$ , mă-

surăm aceeași lungime :  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = l$ . Să se calculeze aria totală a tetraedrului astfel construit. Să se determine măsurile tuturor fețelor triedrelor A, B, C, precum și distanța planului ABC la vârful O.

15. Se dă o piramidă SABCD cu baza un pătrat cu latura  $4a$ .

Proiecția  $s$  a vârfului S pe bază se află la distanța  $a$  de laturile AB și AD. Având înălțimea piramidei  $6a$ , să se calculeze : 1) unghiurile plane ale diedrelor cu muchiile AB și BC ; 2) ariile fețelor laterale ; 3) unghiurile plane ale diedrelor cu muchiile SA, SB, SC ; 4) Să se arate că punctele A, B, C, D, S sunt pe o sferă. 5) Să se calculeze raza sferei.

R. 1. Insemnând unghiurile respectiv cu  $\alpha$  și  $\beta$ , găsim  $\cotg \alpha = \frac{1}{6}$ ,  $\cotg \beta = \frac{1}{2}$ . 2. Ariile sunt  $2a^2\sqrt{37}$ ,  $6a^2\sqrt{5}$ . Un-

ghiurile plane ale unghiurilor diedre SA, SC se obțin ducând plane perpendiculare pe muchii, prin dreapta ce unește picioarele apotemelor fețelor adiacente.

16. Se circumscrie un cerc O unui triunghi echilateral ABC ; se ridică în O perpendiculara la planul triunghiului și se consideră piramida SABC, cu vârful în S pe această perpendiculară. Printr'un punct A' situat între S și A pe muchia SA, ducem un plan paralel cu ABC, care determină secțiunea A'B'C'. Se dau A'B' =  $a$ , AB =  $3a$  și distanța celor două plane egală cu  $2a$ . Să se calculeze :

1) Înălțimile celor două piramide, lungimile muchiilor laterale și volumele lor.

2) Sinusul unghiului ce face planul unei fețe laterale cu planul ABC și sinusul unghiului ce face muchia AS cu planul ABC.

3) Se unește mijlocul I al muchiei BC cu un punct oarecare M de pe muchia SA între A și A'.

Să se determine sinusul unghiului AMI =  $x$ , astfel ca segmentul IM să aibă o lungime  $l$ . Discuție.

R. 1) Înălțimile piramidelor  $i = a$ ,  $l = 3a$ ;  $SA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$   
 $SA = 2a\sqrt{3}$ .  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ ;  $V' = \frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$ . 2) În triunghiul  $SIO$ ,  
 avem:  $SO = SI \sin m$ ,  $m \sphericalangle$  plan al unghiului diedru  
 (SCB, ABC),  $\sin m = \frac{2\sqrt{3}}{13}$ ;  $\sin(AS, ABC) = \sin(AS, OA)$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Deci  $\sphericalangle(AS, ABC) = 60^\circ$ . 3) În triunghiul  $AMI$ , avem  
 $\sin x = \frac{3a}{4l}$ . Deducem  $l > \frac{3a}{4}$ .

17. Să se arate că suprafața născută de un triunghi echilateral înscris într'un cerc de rază  $R$ , rotindu-se în jurul unei axe așezate în planul său, la o distanță  $d > R$  de centrul cercului circumscris este independentă de unghiul  $\alpha$  ce face una din laturile triunghiului cu axa.

R. Se determină elementele suprafeței născute exprimate prin  $\cos \alpha$  și  $\sin \alpha$ . Se găsește, însemnând  $l$  lungimea laturii triunghiului,  $S = 6\pi ld$ .

18. Se dă un cerc de diametru  $AB$ . Se duce pe acest diametru perpendiculara  $MI$  dintr'un punct al cercului.

1) Să se calculeze raportul suprafeței totale a conului născut prin învârtirea triunghiului  $MAI$  în jurul diametrului, către suprafața triunghiului  $MAI$ , exprimat prin unghiul  $MAB = x$ . 2) Să se calculeze acest unghi, astfel ca raportul suprafețelor să fie egal cu  $2\pi m$  ( $m$  un număr pozitiv) 3). Să se afle valoarea numerică a lui  $x$  când  $m = \sqrt{3}$ .

R. 1). Raportul  $= \frac{2\pi(1 + \sin x)}{\cos x}$ ; 2) unghiul  $x$  este dat de ecuația  $\sin^2 x (1 + m^2) + 2\sin x + 1 - m^2 = 0$  3)  $x = 30^\circ$ .

19. Se consideră un triunghi isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ) circumscris unui cerc  $O$  de rază  $R$ . Se rotește figura în jurul înălțimii  $AH$ . Să se calculeze tangenta unghiului  $x = \sphericalangle CBO$ , astfel ca volumul conului născut de triunghiul



ABH să fie egal cu produsul volumului sferei de rază  $R$  printr'un număr dat  $m$ . Discuție.

R. Raza conului  $R \cot g x$ , înălțimea  $\frac{2R \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ ; găsim

$$2m = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

20. Intr'un con circular drept cu raza  $a$ , în care generatoarea face unghiul  $2x$  cu baza, se înscrie o sferă. Să se determine raza sferei, raza cercului de contact al conului cu sfera și unghiul  $x$ , știind că raportul suprafețelor celor două calote determinate pe sferă este 4.

R. Unghiul  $x$  este dat de  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ , raza sferei  $\frac{a}{2}$ , a cercului de contact  $\frac{2a}{5}$ , cele două calote au respectiv ariile:  $\frac{4\pi a^2}{5}$ ,  $\frac{\pi a^2}{5}$ .

21. La distanța  $x$  de centrul  $O$  al unui semicerc  $AB$ , se duce coarda  $A'B'$  paralelă cu  $AB$ . Tangentele în  $A'$  și  $B'$  la semicerc se taie în  $S$ , iar tangenta paralelă cu  $A'B'$  taie tangentele  $SA'$  și  $SB'$ , respectiv în  $C$  și  $D$ . Să se exprime: 1) Volumul conului născut de triunghiul  $SA'B'$  rotit în jurul lui  $OS$ . 2) Volumul trunchiului de con născut de trapezul  $A'B'DC$  rotit tot în jurul lui  $OS$ . 3) Se dă raza  $R$  a semicercului. Să se determine  $x$  astfel ca suprafața laterală a trunchiului să fie jumătate din suprafața laterală a conului.

$$R. \quad 1. \quad V_{con} = \frac{\pi}{3} \frac{(R^2 - x^2)}{x};$$

$$2) \quad V_{tr. con} = \frac{\pi}{3} \frac{(R-x)^2}{R+x} (3R^2 + 3Rx + x); \quad 3) \quad x = R(\sqrt{2} - 1).$$



# T A B L A D E M A T E R I I

## CAPITOLUL I.

### *Linia dreaptă*

	Pag.
Linia dreaptă . . . . .	3

## CAPITOLUL II.

### *Planul*

Definițiuni . . . . .	7
Determinarea planului . . . . .	8
Pozițiile relative ale unei drepte și unui plan în spațiu . . . . .	13
Pozițiile relative ale unui punct și unui plan în spațiu . . . . .	15
Pozițiile relative a două plane în spațiu . . . . .	17
Pozițiile relative a două drepte în spațiu . . . . .	18
Drepte paralele. Drepte paralele cu planul . . . . .	20
Unghiuri cu laturi paralele în spațiu . . . . .	25
Dreapta perpendiculară pe plan . . . . .	29
Perpendicularare și oblice la un plan . . . . .	43
Plane paralele . . . . .	47
Unghiuri diedre . . . . .	56
Plane perpendiculare . . . . .	67
Proiecțiuni . . . . .	74
Unghiuri triedre, unghiuri poliedre . . . . .	88
Probleme . . . . .	94

## CAPITOLUL III.

### *Corpuri geometrice*

Definițiuni . . . . .	103
Prisma . . . . .	105
Paralelipipedul . . . . .	110
Volumul și aria prisme . . . . .	116

	<u>Pag.</u>
Probleme . . . . .	133
Piramida . . . . .	136
Volumul piramidei . . . . .	148
Aria laterală și totală a piramidei .	151
Trunchiul de piramidă . . . . .	153
Probleme . . . . .	165
Cilindrul . . . . .	169
Volumul și aria cilindrului circular	172
Probleme . . . . .	176
Conul . . . . .	178
Volumul și aria cilindrului circular	181
Probleme . . . . .	189
Sfera . . . . .	191
Probleme . . . . .	209
Probleme recapitulative . . . . .	211

---







DE ACEIAȘI AUTORI:

Aritmetica, clasa I-a secundară, normală, seminarială.

” ” II-a ” ” ”

” ” III-a ” ” ”

Geometria plană, clasa II-a sec. ” ”

” ” III-a ” ” ”

Geometrie în spațiu, cl. IV-a sec. ” ”

Algebra, clasa V-a secundară ” ”

” ” VI-a secundară ” ”

” ” VII-a secundară științifică ” ”

Geometria în spațiu, clasa VI-a secundară

Algebra, cl. IV de prof. *Ovidiu N. Țino*.

**Vor apărea:**

Geometria plană, cl. V-a

Trigonometria, cl. V-a

Geometria descriptivă, cl. VII-a

Algebra cl. VIII-a secundară științifică

Geometria analitică cl. VIII-a ” ”

Mecanica clasa VIII a ” ”

TAXA TIMBRULUI DIDACTIC DE 5 %  
PENTRU ACEST MANUAL SA PLATIT  
DIRECT CASEI CORPULUI DIDACTIC  
CONFORM DECIZIUNEI N°17436/932

Prețul cărții Lei 484.—

Taxa 5% C. C. D. „ 26.—

Total Lei 510.—