ANDREI BARANGA

# CAPITOLE SPECIALE DE ALGEBRĂ UTILIZATE ÎN INFORMATICA TEORETICĂ

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI
2002

ANDREI BARANGA

# CAPITOLE SPECIALE DE ALGEBRĂ UTILIZATE ÎN INFORMATICA TEORETICĂ

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
2002

Referenţi ştiinţifici: Prof. dr. Sergiu Rudeanu
Prof. dr. Emil Căzănescu





Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon/Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro



**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale**
**BARANGA, ANDREI**
**Capitole speciale de algebră utilizate în informatica teoretică** / Andrei Baranga - Bucureşti: Editura Universităţii din Bucureşti, 2002
Bibliografie

ISBN 973-575-689-7

512(075.8)

# 1. INTRODUCERE

În prezenta lucrare încercăm, în principal, să venim în sprijinul studenţilor de la secţiile de Informatică ale Facultăţilor de Matematică, punându-le la dispoziţie o serie de instrumente algebrice des utilizate la modelarea matematică a fenomenelor informatice. Prezenta lucrare nu se adresează însă numai studenţilor de la secţiile sus amintite, ci tuturor acelora interesaţi în studiul capitolelor speciale de algebră prezentate aici, precum şi informaticienilor matematicieni în general. Scopul principal al lucrării este de a prezenta definiţiile şi teoremele din punct de vedere algebric. Totuşi vom încerca să subliniem pe parcurs utilitatea faptelor prezentate în studiul informaticii, în măsura posibilului. Scopul principal al acestei lucrări este acela de a "scuti" pe autorii lucrărilor de informatică teoretică de a începe invariabil cu preliminarii de teorie pur algebrică cum ar fi algebra universală sau teoria categoriilor.

În încheierea acestei scurte introduceri doresc sa dedic această lucrare domnilor Profesor Doctor Virgil Căzănescu, Profesor Doctor Sergiu Rudeanu, Profesor Doctor Gheorghe Ştefănescu, Profesor Doctor Dragoş Vaida care au avut, printre alţii, o contribuţie esenţială în îndrumarea mea către informatica teoretică.

Mulţumesc domnului Profesor Doctor Sergiu Rudeanu pentru preţioasele observaţii făcute în urma citirii manuscrisului.

# 2. Elemente de algebră universală

## 2.1. Motivaţii pentru studiul algebrei universale

În algebra clasică întâlnim o mare varietate de strucuri cum ar fi semigrupurile, monoizii sau grupurile. Toate aceste structuri sunt specificate prin desemnarea unei mulţimi $M$ şi a unei operaţii binare $*: MXM \to M$. Însă inelele şi corpurile sunt identificate prin specificarea suplimentară a unei a doua operaţii binare. O concluzie naturală este aceea de studia structuri algebrice generalizate, în care pe o mulţime dată să fie definite un număr arbitrar de operaţii, de un număr arbitrar de argumente, nu neapărat două. Pentru un număr natural n, o operatie n-ară pe o mulţime $M$ este o funcţie $f : M^n \to M$. O menţiune specială pentru cazul $n = 0$. $M^0$ este privit ca element neutru pentru produsul cartezian, în sensul că $M^0 XA$ este cardinal echivalent cu orice mulţime $A$. Din aceste considerente $M^0$ este interpretată ca o mulţime cu un element, deci o operaţie zero-ară este un element bine specificat al mulţimii $M$.

Dar în algebra clasică apar şi alte structuri cum ar fi modulele sau spaţiile vectoriale, în care apar două mulţimi suport şi pe lângă operaţiile interne aferente fiecărei mulţimi, o operaţie, produsul dintre un scalar şi un vector, având operanzi de tipuri diferite. Din nou apare ca natural un alt nivel de generalizare, în care avem mai multe mulţimi suport şi pentru fiecare tip de operaţie trebuie să specificăm, pe lângă numărul operanzilor şi natura acestora, precum şi natura rezultatului.

În informatică, în orice limbaj de programare, există mai multe tipuri de date, unele predefinite cum ar fi întreg, real, boolean, caracter, etc. În plus, programatorii pot defini noi tipuri de date (folosind **type** în **PASCAL**, **typedef** în **C** sau noi clase in limbajele orientate obiect cum ar fi **C++** sau **JAVA**). Scriind o funcţie, procedură, metodă (în funţie de limbaj) care admite $n$ argumente de intrare de tipuri diferite si are o singură ieşire, indiferent dacă este vorba de valoare returnată sau de parametru de ieşire, putem spune că s-a definit o nouă operaţie in sensul prezentat mai sus. Aceste considerente argumentează interesul arătat pentru algebra universală de cercetătorii in domeniul informaticii teoretice.

## 2.2 Mulţimi $S$-sortate

Considerăm o mulţime fixată $S$. Notăm cu $S^*$ monoidul liber generat de S, adică mulţimea $\{s_1s_2...s_n|n\in\mathbf{N}, s_1, s_2, ..., s_n\in S\}$. Notăm cu $\lambda$ cuvântul vid.

2.2.1 **Definiţie** Se numeşte *mulţime $S$-sortată* o familie de mulţimi $(X_s)_{s\in S}$ indexată după $S$. Aceata va fi notată cu $X$.

2.2.2 **Notaţie** Daca $w\in S^*$, $w = s_1, s_2, ..., s_n$ şi $X$ este o mulţime $S$-sortată, notăm cu $X^w = X_{s_1}\times X_{s_2}\times...\times X_{s_n}$. $X^\lambda$ este o mulţime cu un singur element.

2.2.3 **Notaţie** Fie $X$ şi $Y$ două mulţimi $S$-sortate. Notaţia $X\subseteq Y$ înseamnă că $X_s\subseteq Y_s$ pentru orice $s\in S$.

Se observă uşor că proprietăţile incluziunii de mulţimi se extind şi asupra relaţiei de incluziune între mulţimi $S$-sortate.

2.2.4 **Notaţie** Fie $(X^i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi $S$-sortate. Notăm cu $\bigcap_{i\in I}X^i$ mulţimea $S$-sortată, unde pentru orice $s\in S$, $(\bigcap_{i\in I}X^i)_s = \bigcap_{i\in I}X^i_s$.In mod similar se pot defini reuniunea, diferenţa de mulţimi $S$-sortate, precum şi alte operaţii cu mulţimile $S$-sortate, derivate din cele cu mulţimi.

Se observă uşor că proprietăţile operaţiilor cu mulţimi se extind şi asupra operaţiilor cu mulţimi $S$-sortate.

2.2.5 **Definiţie** O mulţime $S$-sortată $X$ se numeşte *finită* dacă $X_s$ este finită pentru orice $s\in S$.

2.2.6 **Definiţie** O *relaţie* pe o mulţime $S$-sortată $X$ este $\rho = (\rho_s)_{s\in S}$, o famile de relaţii pe mulţimile $X_s$, adică pentru orice $s\in S$, $\rho_s\subseteq X_s\times X_s$ este o relaţie pe mulţimea $X_s$. Relaţia $\rho$ este *de echivalenţă* dacă pentru orice $s\in S$, relaţia $\rho_s$ este de echivalenţă pe $X_s$. Dacă $w = s_1s_2...s_m\in S^*$, $x = (x_1, x_2, ..., x_m)\in X^w$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)\in X^w$, notaţia $x\rho^w y$ este echivalentă cu $x_i\rho_{s_i}y_i$ pentru orice $i = 1, 2...., m$. Se observă că dacă $\rho$ este relaţie de echivalenţă pe $X$, atunci $\rho^w$ este relaţie de echivalenţă pe $X^w$.

2.2.7 **Notaţie** Clasa de echivalenţă a unui element $x$ în raport cu o relaţie de echivalenţă $\rho$ va fi notată cu $[x]_\rho$ sau mai simplu cu $[x]$, dacă nu este pericol de confuzie.

2.2.8 **Notaţie** Dacă $X$ este o mulţime $S$-sortată, $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe ea şi $Y$ o submulţime a lui $X$ notăm cu

$Y_\rho = (\{[y_s]_{\rho_s}|y_s\in Y_s\})_{s\in S}$.

Reamintim următorul rezultat din teoria mulţimilor care se extinde imediat la mulţimi $S$-sortate.

2.2.9 **Lemă** Intersecţia unei familii arbitrare de relaţii de echivalenţă pe o mulţime dată este o relaţie de echivalenţă.

Lema de mai sus justifică faptul că următoarea definiţie este corectă.

2.2.10 **Definiţie** Fie $X$ o mulţime $S$-sortată şi $Y$ o submulţime a lui $X \times X$ (adică $Y_s \subseteq X_s \times X_s$ pentru orice $s \in S$). Numim *echivalenţa generată de* $Y$ intersecţia tuturor relaţiilor de echivalenţă pe X ce conţin pe $Y$. Observăm ca aceasta este cea mai mică relaţie de echivalenţă ce include pe $Y$ şi va fi notată cu $\theta_Y$.

2.2.11 **Observaţie** Fie $X$ o mulţime $S$-sortată şi $Y, Z$ o submulţimi ale lui $X \times X$. Atunci:

i) $Y \subseteq Z$ implică $\theta_Y \subseteq \theta_Z$

ii) $Y$ relaţie de echivalenţă dacă şi numai dacă $\theta_Y = Y$.

iii) $(\theta_\emptyset)_s = \{(a,a) | a \in X_s\}$ pentru orice $s \in S$.

Deci $\theta_\emptyset$ este egalitatea şi este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe $X$ care va fi notată cu $\Delta$. Cea mai mare relaţie de echivalenţă pe $X$ este $X \times X$ şi va fi notată cu $\Omega$.

În continuare vom prezenta o construcţie analitică a echivalenţei generate de o submulţime.

2.2.12 **Teoremă** Fie $X$ o mulţime $S$-sortată. Pentru orice submulţime $Y$ a lui $X \times X$ definim submulţimile $R(Y), S(Y), T(Y), I(Y)$ ale lui $X \times X$ astfel:

Pentru orice $s \in S$

- $(R(Y))_s = \{(x,x) | x \in X_s\}$
- $(S(Y))_s = \{(x,y) | (y,x) \in Y_s\}$
- $(T(Y))_s = \{(x,y) |$există $z \in X_s$ astfel încât $(x,z) \in Y_s$ şi $(z,y) \in Y_s\}$
- $I(Y) = Y \cup R(Y) \cup S(Y) \cup T(Y)$

Atunci $\theta_Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(Y)$.

**Demonstraţie** Notăm cu $Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(Y)$. Evident $I^n(Y) \subseteq I^{n+1}(Y)$ pentru orice $n$ natural.(1)

"$\subseteq$". Evident $Y \subseteq I(Y) \subseteq Z$. Este suficient să demonstrăm că $Z$ este relaţie de echivalenţă.

**Reflexivitatea**. Fie $s \in S$ şi $x \in X_s$. Atunci $(x,x) \in R(Y) \subseteq I(Y) \subseteq Z$

**Simetria**. Fie $s \in S$ şi $(x,y) \in Z_s$. Există $n$ natural astfel încât $(x,y) \in I^{(n)}(Y)$, deci $(y,x) \in I^{(n+1)}(Y) \subseteq Z$.

**Tranzitivitatea**. Fie $s \in S$ şi $(x,y),(y,z) \in Z_s$. Exista $m,n$ naturale astfel încât $(x,y) \in I^m(Y)$ şi $(y,z) \in I^n(Y)$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $m \leq n$ şi conform (1) deducem că

$(x,y),(y,z) \in I^n(Y)_s$, deci

$(x,z) \in T(I^{(n)}(Y)) \subseteq I^{(n+1)}(Y) \subseteq Z$.

"$\supseteq$" Demonstrăm prin inducţie după $n$ că $I^{(n)}(Y) \subseteq \theta_Y$ pentru orice $n$ natural.

$n = 0$ Evident $I^{(0)}(Y) = Y \subseteq \theta_Y$.

$n \rightarrow n+1$. Presupunem $I^{(n)}(Y) \subseteq \theta_Y$. Deoarece $\theta_Y$ este relaţie de echivalenţă atunci $R(I^{(n)}(Y)) \subseteq \theta_Y$, $S(I^{(n)}(Y)) \subseteq \theta_Y$ şi $T(I^{(n)}(Y)) \subseteq \theta_Y$, deci $I^{(n+1)}(Y) \subseteq \theta_Y$. ▪

2.2.13 **Definiţie** Fie $X, Y$ două mulţimi $S$-sortate. O *funcţie* de la $X$ la $Y$, notată $f : X \rightarrow Y$, este o familie de funcţii $f = (f_s)_{s \in S}$ unde $f_s : X_s \rightarrow Y_s$ pentru orice $s \in S$. Dacă $w = s_1 s_2 ... s_n \in S^*$ vom nota cu $f^w$ funcţia $f^w : X^w \rightarrow Y^w$ definită astfel $f^w(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_{s_1}(x_1), f_{s_2}(x_2), ..., f_{s_n}(x_n)$ pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^w$.

2.2.14 **Notaţii** Dacă $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ sunt două funcţii între mulţimi $S$-sortate, notăm cu $gf$ *compunerea* lor, adică funcţia $h : X \rightarrow Z$ definită prin $h_s = g_s f_s$ pentru orice $s \in S$, mai precis funcţia obţinută prin compunerea "componentă cu componentă". Funcţia *identitate* a unei mulţimi $S$-sortate $X$, notată cu $1_X$, este definită prin $(1_X)_s = 1_{X_s}$ pentru orice $s \in S$. O funcţie $f : X \rightarrow Y$ între mulţimi $S$-sortate se numeşte *bijectivă* (respectiv *injectivă, surjectivă*) dacă pentru orice $s \in S$, $f_s$ este bijectivă (respectiv injectivă, surjectivă). Dacă este bijectivă, *funcţia inversă* este funcţia $f^{-1} : Y \rightarrow X$, definită prin $(f^{-1})_s = f_s^{-1}$ pentru orice $s \in S$. Se observă uşor că regulile de calcul ale operaţiei de compunere de funcţii se extind si asupra compunerii de funcţii între mulţimi $S$-sortate.

2.2.15 **Definiţie** Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcţie între două mulţimi $S$-sortate. *Imaginea* sa este mulţimea $S$-sortată $Im(f) = (Im(f_s))_{s \in S}$.

2.2.16 **Definiţie**. Dacă $f : X \rightarrow Y$ este o funcţie între două mulţimi $S$-sortate definim *nucleul lui f* relaţia binară pe $X$, notată prin $ker(f)$, astfel:

$a(ker_f)b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

2.2.17 **Propoziţie**. Dacă $f : A \rightarrow B$ este o funcţie între două mulţimi $S$-sortate, atunci $ker(f)$ este o relaţie de echivalenţă pe $A$.

## 2.3. Signaturi şi algebre

2.3.1 **Definiţie** Se numeşte *signatură* sau *tip de algebră multisortată* o pereche $\Sigma = (S, (\Sigma_{w,s})_{w\in S^*, s\in S})$ unde $S$ este o mulţime, numită mulţimea sorturilor, iar pentru fiecare $w\in S^*$ şi $s\in S$, $\Sigma_{w,s}$ este o mulţime de simboli de operaţie şi anume dacă $w = s_1, s_2, ..., s_n$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ reprezintă un simbol de operaţie cu $n$ argumente, primul de sort $s_1$, al doilea de sort $s_2$, s.a.m.d, iar rezultatul de sort $s$. Daca $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, spunem ca $\sigma$ are *aritatea* $(w, s)$. Daca $\sigma\in\Sigma_{\lambda,s}$ spunem ca $\sigma$ este un *simbol de operaţie zero-ară* .

În continuare considerăm fixată mulţimea $S$.

2.3.2 **Definiţie** Fie o signatură $\Sigma = (S, (\Sigma_{w,s})_{w\in S^*, s\in S})$. Se numeşte $\Sigma$-*algebră* o pereche $A = (A, (\Sigma^A_{w,s})_{w\in S^*, s\in S})$ unde $A$ este o mulţime $S$-sortată, numită mulţimea suport, iar pentru fiecare $w\in S^*$ şi $s\in S$, $\Sigma^A_{w,s}$ este mulţimea operaţiilor de aritate $(w, s)$, mai precis mulţimile $\Sigma_{w,s}$ şi $\Sigma^A_{w,s}$ sunt in corespondenţă bijectivă, iar daca $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ atunci $\sigma^A\in\Sigma^A_{w,s}$ este o funcţie $\sigma^A : A^w \to A_s$. În cazul particular $w = \lambda$, conform 2.2.2. elementele lui $\Sigma^A_{w,s}$ pot fi identificate cu elemente ale lui $A_s$. Aceste operaţii se numesc *operaţii zero-are.*

2.3.3 **Observaţie** In cazul în care mulţimea $S$ are un singur element (cazul *monosortat*) notaţiile se pot simplifica substanţial. Deoarece, în acest caz, $\Sigma^*$ este în corespondenţă bijectivă cu mulţimea numerelor naturale avem că signatura se reduce la o familie de mulţimi de simboli de operaţie indexată dupa mulţimea numerelor naturale, $\Sigma = (\Sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$, iar o algebră monosortată de tip $\Sigma$ este $A = (A, (\Sigma^A_n)_{n\in\mathbf{N}})$, unde A este mulţimea suport, iar pentru fiecare $\sigma\in\Sigma_n$, $\sigma^A\in\Sigma^A_n$ este o funcţie $\sigma^A : A^n \to A$.

2.3.3 **Exemplu** Orice monoid $(M, *, e)$ este o algebră monosortată de tip $\Sigma$, unde $\Sigma_0 = \{e\}$, $\Sigma_2 = \{ * \}$ iar pentru $n\neq 0, 2$, $\Sigma_n = \emptyset$.

**Atenţie!** Nu orice algebră de tipul $\Sigma$ prezentat mai sus este monoid. Un monoid este o algebră de tipul $\Sigma$ care în plus trebuie să verifice ecuaţiile asociativităţii şi elementului neutru. Mulţimea numerelor întregi cu operaţia binară scădere si cu constanta 5 este algebră de tip $\Sigma$ dar nu este monoid.

În cele ce urmează vom considera, exceptând o menţiune expresă, $\Sigma$ o signatură fixată.

2.3.4. **Notaţie** Notăm cu $\mathbf{Alg}_\Sigma$ clasa tuturor $\Sigma-$ algebrelor.

## 2.4. Subalgebre, subalgebră generată de o submulţime

2.4.1 **Definiţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $B\subseteq A$ o submulţime a lui $A$. Spunem că $B$ este o *subalgebră* a lui $A$ dacă pentru orice $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, $x\in B^w$ avem $\sigma^A(x)\in B_s$, cu alte cuvinte $B$ este parte stabilă a lui $A$. În acest caz avem $\Sigma$-algebra $(B,(\Sigma_{(w,s)})^B_{w\in S^*,s\in S})$ unde pentru orice $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, $x\in B^w$, $\sigma^B(x)=\sigma^A(x)$, Daca $B$ este subalgebră a lui $A$ şi există $s\in S$ astfel încât $B_s\neq A_s$ spunem că $B$ este subalgebră *proprie* a lui $A$.

2.4.2 **Exemple**

a) Fie $(G,*,e,')$ un grup unde $*$ este operaţia multiplicativă, $e$ elementul neutru (operaţie de aritate zero), iar $'$ este operaţia unară de luare a inversului. Conform definiţiei 2.4.1 o submulţime $H$ a lui $G$ este subalgebră dacă şi numai dacă

i) pentru orice $x,y\in H$, avem $x*y\in H$

ii) $e\in H$

iii) pentru orice $x\in H$, avem $x'\in H$

Se poate verifica faptul că noţiunea de subgrup este echivalentă cu cea de subalgebră definită la 2.4.1 (Exerciţiu!). In mod analog se poate verifica faptul că noţiunea de subinel coincide cu cea de subalgebră.

b) Un caz interesant este noţiunea de submodul al unui modul $M$ peste un inel $A$. Privim modulul ca o algebră cu două sorturi : scalarii reprezentaţi de elementele inelului $A$ si vectorii reprezentaţi de elementele lui $M$. Un submodul este cazul particular de subalgebră în care submulţimea lui $A$ este însăşi $A$.

2.4.3 **Observaţie** Dacă $B$ şi $C$ sunt subalgebre ale lui $A$ şi $C\subseteq B$, atunci $C$ este subalgebră a lui $B$.

**Demonstraţie** Fie $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, $x\in A^w$. Atunci $\sigma^C(x)=\sigma^A(x)\in B$. ∎

2.4.4 **Definiţie** Fie $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{Alg}_\Sigma$ o clasă de $\Sigma$-algebre. $\mathbf{K}$ este *închisă la formarea de subalgebre* dacă pentru orice $A\in\mathbf{K}$, dacă $B$ este subalgebră a lui $A$ atunci $B\in\mathbf{K}$.

2.4.5 **Lemă** Intersecţia unei familii de subalgebre este subalgebră.

**Demonstraţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $(A^i)_{i\in I}$ o familie de subalgebre. Fie $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, $x\in(\bigcap_{i\in I}A^i)^w$. Deci $x\in(A^i)^w$ pentru orice $i\in I$. Deci $\sigma^A(x)\in A^i_s$ pentru orice $i\in I$, de unde deducem că $\sigma^A(x)\in(\bigcap_{i\in I}A^i)_s$.
∎

Această lemă asigură corectitudinea definiţiei următoare.

2.4.6 **Definiţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $X$ o submulţime a lui $A$. Numim *subalgebra generată de* $X$ *în* $A$ intersecţia tuturor subalgebrelor lui $A$ ce includ pe $X$. Aceasta va fi notată cu $< X >_A$ sau cu $< X >$ dacă nu există pericol de confuzie.

2.4.7 **Observaţie** Dacă $A$ este o $\Sigma$-algebră şi $X$ o submulţime a lui $A$, atunci $< X >$ este cea mai mică subalgebră a lui $A$ ce include pe $X$.

2.4.8 **Definiţie**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $B$ o subalgebră a sa. B se numeşte *finit generată* dacă există o submulţime $X$ finită a lui $A$ astfel încât $< X >= A$.

2.4.9 **Observaţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $X$, $Y$ două submulţimi ale lui $A$ astfel încât $X \subseteq Y$. Atunci $< X > \subseteq < Y >$. ($< Y >$ este subalgebră ce include pe $X$).

2.4.10 **Observaţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $B$ o submulţime a sa. Atunci B este subalgebră dacă şi numai dacă $< B >= B$. .

2.4.11 **Lemă** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră. Atunci subalgebra generată de mulţimea vidă este cea mai mică subalgebră a lui $A$.

**Demonstraţie** Fie $B$ o subalgebră a lui $A$. Atunci $\emptyset \subseteq B$. Conform 2.4.9 şi 2.4.10 avem $< \emptyset > \subseteq < B >= B$. ▪

Vom prezenta în continuare o construcţie analitică a subalgebrei generate de o submulţime .

2.4.12 **Teoremă** Dacă $A$ este o $\Sigma$-algebră şi $X$ o submulţime a lui $A$. Definim şirul ascendent de submulţimi $(X_n)_{n \in N}$ ale lui $A$ astfel:

$X_{0,s} = X_s \cup \Sigma^A_{\lambda,s}$ pentru orice $s \in S$,

$X_{n+1,s} = X_{n,s} \cup \{\sigma^A(x) | x \in X^w_n, \sigma \in \Sigma_{w,s}, w \in S^*\}$, pentru orice $s \in S$.

Atunci $< X >= \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.

**Demonstraţie** Notăm $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. Evident, $X \subseteq X_0 \subseteq Y$

"$\subseteq$". Vom demonstra că $Y$ este subalgebră a lui $A$. Fie $w = s_1 s_2 ... s_m \in S^*$ $(s_1, s_2, ..., s_m \in S)$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in Y^w$. Există atunci numerele naturale $k_1, k_2, ..., k_m$ astfel încât $x_1 \in X_{k_1,s_1}$, $x_2 \in X_{k_2,s_2}, ..., x_m \in X_{k_m,s_m}$. Fie $n$ cel mai mare din aceste $m$ numere naturale. Atunci, evident, $x \in X^w_n$ şi deci $\sigma^A(x) \in X_{n+1,s} \subseteq Y$.

"$\supseteq$". Vom demonstra prin inducţie după $n$ că $X_n \subseteq < X >$ pentru orice număr natural n.

$n = 0$ Evident.

$n \rightarrow n+1$ Fie $s \in S$ şi $u \in X_{n+1,s}$. Dacă $u \in X_{n,s}$, concluzia rezultă din ipoteza de inducţie. Altfel, există $w \in S^*$, $x \in X_n^w$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, astfel încât, $u = \sigma^A(x)$. Conform ipotezei de inducţie, $x \in <X>^w$, de unde deducem că $u \in <X>$. ∎

**Interpretare intuitivă şi legătură cu informatica** Pe scurt, teorema de mai sus afirmă că elementele subalgebrei generate de o submulţime sunt exact acele elemente care se pot obţine în urma unui calcul oricât de complex, utilizând numai generatorii şi operaţiile algebrei (inclusiv cele zero-are).

În informatică, secvenţele de calcul se pot reprezenta prin arbori. Fie $s \in S$. Un arbore de sort $s$ se construieşte recursiv astfel:

- un singur nod, etichetat cu un element al mulţimii $A_s$ sau cu un simbol de operaţie zero-ară $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$.

- un arbore în care rădăcina este un nod etichetat cu un simbol de operaţie $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, unde $w = s_1 s_2 ... s_m \in S^*$. Rădăcina are exact $m$ descendenţi şi anume subarbori de sorturi $s_1, s_2, ..., s_m$.

Rezultatul evaluării calculului reprezentat de un arbore de sort $s$ este:

- dacă are un singur nod etichetat cu un element al lui $A_s$ atunci rezultatul este acel element

- altfel este rezultatul operaţiei cu care este etichetată rădăcina, având drept argumentele rezultatele evaluării subarborilor rădăcinii.

Observăm că elementele mulţimii $X_n$ din enunţul teoremei de mai sus pot fi privite ca acele elemente care pot fi obţinute printr-un calcul pornind de la generatori, calcul ce poate fi reprezentat printr-un arbore de adâncime cel mult $n$.

Următorul rezultat este un mod de raţionament ce generalizează principiul inducţiei complete şi este folosit foarte des în informatica teoretică..

2.4.13 **Teoremă. Principiul inducţiei structurale.**

Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $X$ o submulţime a lui $A$, $Y = <X>$ şi pentru orice $s \in S$ o funcţie $P_s : A_s \rightarrow \{0,1\}$. (Poate fi constantă egală cu 1). Presupunem că:

i. $P_s(x) = 1$ pentru orice $x \in X_s$.

ii. pentru orice $w = s_1 s_2 ... s_n \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A^w$, dacă pentru orice $i = 1, 2...., n$, $P_{s_i}(x_i) = 1$, atunci $P_s(\sigma^A(x)) = 1$.

Atunci pentru orice $s \in S$, $y \in Y_s$ avem $P_s(y) = 1$.

**Demonstraţie** Pentru orice $s \in S$, notăm $Z_s = \{x \in A_s | p_s(x) = 1\}$. Conform ii., $Z = (Z_s)_{s \in S}$ este subalgebră a lui $A$. Conform i., conţine generatorii, deci $Y \subseteq Z$. ■

2.4.14 **Exerciţiu** (Principiul inducţiei complete, caz particular al inducţiei structurale) Privim mulţimea numerelor naturale ca o algebră monosortată având o singură operaţie şi anume cea unară de succesor $n \longmapsto n+1$. Să se demonstreze că mulţimea $\{0\}$ generează pe $N$ şi să se deducă principiul inducţiei complete ca un caz particular al inducţiei structurale.

**Atenţie** Nu se poate folosi inducţia completa pentru a demonstra că $\{0\}$ generează pe $N$.

2.4.15 **Definiţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră. $A$ se numeşte *minimală* dacă $A$ este singura sa subalgebră.

## 2.5. Congruenţe şi algebre cât

2.5.1 **Definiţie**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe $A$. Spunem că $\rho$ este *congruenţă* dacă pentru orice $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ şi $x,y\in A^w$, $x\rho^w y$ implică $\sigma^A(x)\rho_s\sigma^A(y)$.

Cu alte cuvinte, o congruenţă pe o algebră este o relaţie de echivalenţă compatibilă cu operaţiile algebrei.

2.5.2 **Observaţie** Pentru o operaţie zero-ară, proprietatea de la 2.5.1 este verificată întotdeauna, ea rezultând imediat din proprietatea de reflexivitate a relaţiei de echivalenţă.

2.5.3 **Lemă**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $\rho$ o congruenţă pe $A$, $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ şi $x,y\in A^w$ astfel încât $[x]_{\rho^w} = [y]_{\rho^w}$. Atunci $[\sigma^A(x)]_{\rho_s} = [\sigma^A(y)]_{\rho_s}$.

**Demonstraţie** $[x]_{\rho^w} = [y]_{\rho^w}$ implică $x\rho^w y$ şi deoarece $\rho$ este congruenţă avem $\sigma^A(x)\rho_s\sigma^A(y)$, deci $[\sigma^A(x)]_{\rho_s} = [\sigma^A(y)]_{\rho_s}$. ▪

Această lemă demonstrează corectitudinea următoarei definiţii.

2.5.4 **Definiţie**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $\rho$ o congruenţă pe $A$. Atunci *algebra cât a lui $A$ prin $\rho$* , notată cu $A/\rho$, este :

- pentru fiecare $s\in S$, mulţimea suport de sort $s$, este mulţimea factor $(A/\rho)_s$ a lui $A_s$ prin relaţia de echivalenţă $\rho_s$.
- pentru orice $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ şi $x\in A^w$, $\sigma^{A/\rho}([x]_{\rho^w}) = [\sigma^A(x)]_{\rho_s}$

2.5.5 **Exemple**

a) Congruenţele triviale : $\Delta$ şi $\Omega$. De fapt $\Delta$ (respectiv $\Omega$) este cea mai mică (respectiv cea mai mare) congruenţă ce se poate defini pe o algebră.

**Exerciţiu** Caracterizaţi algebra cât obţinută prin factorizarea unei algebre la aceste două congruenţe.

b) **Exerciţiu** Folosim notaţiile de la 2.4.2.

i)Fie $H$ un subgrup normal al lui G. Atunci relaţia $\rho$ definită pe G prin $x\rho y\Longleftrightarrow xy'\in H$ este o congruenţă pe G.

ii)Dacă $\theta$ este o congruenţă pe G atunci $K = [e]$ este un subgrup normal al lui G.

iii)Corespondenţele stabilite la i) şi ii) între mulţimea congruenţelor pe $G$ şi mulţimea subgrupurilor normale ale lui $G$ sunt bijecţii inverse una alteia. Mai mult, grupul factor obţinut prin factorizarea la un subgrup normal coincide cu algebra cât obţinută prin factorizarea la congruenţa obţinută conform i)

Acest exerciţiu demonstrează faptul că, în cazul grupurilor, factorizarea în sensul definiţiei 2.5.4 coincide cu cea prezentată in mod uzual la studiul grupurilor.

c) **Exerciţiu** Formulaţi şi demonstraţi un rezultat asemănător în cazul inelelor. (Corespondenţa bijectivă între idealele bilaterale şi congruenţele pe un inel)

d) **Exerciţiu** Formulaţi şi demonstraţi un rezultat asemănător în cazul modulelor peste un inel privite ca algebre cu două sorturi, adică o corespondenţă bijectivă între submodule şi congruenţele pe modul cu proprietatea că pe sortul scalarilor echivalenţa este una trivială şi anume egalitatea.

2.5.6 **Definiţie** Fie $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{Alg}_\Sigma$ o clasă de $\Sigma$-algebre. $\mathbf{K}$ este *închisă la formarea de algebre cât* dacă pentru orice $A\in\mathbf{K}$, şi $\rho$ congruenţă pe $A$, avem $A/\rho\in\mathbf{K}$.

2.5.7 **Definiţie** O $\Sigma$-algebră $A$ se numeşte *simplă* dacă $\Delta$ şi $\Omega$ sunt singurele congruenţe pe $A$.

2.5.8 **Observaţie** Fie $\rho,\tau$ două relaţii de echivalenţă pe o mulţime $X$, astfel încât $\rho\subseteq\tau$. Atunci pentru orice $x\in X$ avem $[x]_\rho\subseteq[x]_\tau$.

**Demonstraţie** Fie $u\in[x]_\rho$, deci $u\rho x$, de unde $u\tau x$, deci $u\in[x]_\tau$. ▪

2.5.9 **Lemă** Fie $\rho$ şi $\theta$ relaţii de echivalenţă pe o mulţime $X$, astfel încât $\theta\subseteq\rho$. Definim pe $X/\theta$ relaţia $\rho/\theta$ astfel: $[x]_\theta\rho/\theta[y]_\theta\Longleftrightarrow x\rho y$. Atunci relaţia $\rho/\theta$ este bine definită şi este o relaţie de echivalenţă.

**Demonstraţie**. Fie $x,y,x',y'\in X$ astfel încât $x\theta x'$ şi $y\theta y'$, deci $x\rho x'$ şi $y\rho y'$, de unde deducem că $x\rho y\Longleftrightarrow x'\rho y'$, deci relaţia este bine definită. Faptul că este relaţie de echivalenţă este evident. ▪

Rezultatele de la 2.5.8 şi 2.5.9 se extind cu uşurinţă la mulţimi $S$-sortate.

2.5.10 **Lemă** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $\rho$ şi $\theta$ congruenţe pe $A$, astfel încât $\theta\subseteq\rho$. Atunci $\rho/\theta$ este o congruenţă pe $A/\theta$.

**Demonstraţie**. Trebuie demonstrată compatibilitatea cu operaţiile. Fie $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ şi $[x]_\theta,[y]_\theta\in A/\theta^w$ astfel încât $[x]_\theta\rho/\theta^w[y]_\theta$. Atunci $x\rho^w y$, deci $\sigma^A(x)\rho_s\sigma^A(y)$, de unde $[\sigma^A(x)]_\theta(\rho/\theta)_s[\sigma^A(y)]_\theta$, deci $\sigma^{A/\theta}([x]_\theta)(\rho/\theta)_s\sigma^{A/\theta}([x]_\theta)$. ▪

2.5.11 **Lemă** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $\rho$ o congruenţă pe $A$ şi $X$ o submulţime a lui $A$ astfel încât $< X >= A$. Atunci $A/\rho$ este generată de $X_\rho$.

**Demonstraţie** Folosim teorema 2.4.12. Fie $(X_n)_{n\in N}$ şi $((X_\rho)_n)_{n\in}N$ şirurile ascendente de mulţimi $S$-sortate definite în enunţul teoremei. Demonstrăm prin inducţie după $n$ că $(X_\rho)_n = (X_n)_\rho$.

$n = 0$ Evident.

$n \to n+1$ Fie $s\in S$ arbitrar.

$(X_\rho)_{n+1,s} =$ (definiţie)

$(X_\rho)_{n,s} \cup \{\sigma^{A/\rho}([x]_{\rho^w}) | x\in X_n^w, \sigma\in\Sigma_{w,s}, w\in S^*\} =$ (ipoteza de inducţie şi definiţia operaţiilor din algebra cât)

$((X_n)_\rho)_s \cup \{[\sigma^A(x)]_{\rho_s} | x\in X_n^w, \sigma\in\Sigma_{w,s}, w\in S^*\} =$ (2.2.8)

$((X_n)_\rho)_s \cup \{\sigma^A(x) | x\in X_n^w, \sigma\in\Sigma_{w,s}, w\in S^*\}_\rho =$ (definiţie)

$((X_{n+1})_\rho)_s$.

Prin urmare $< X_\rho >= \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_\rho)_n = (\bigcup_{n=0}^{\infty}X_n)_\rho = (< X >_A)_\rho = A_\rho = A/\rho$. ▪

2.5.12 **Lemă** Intersecţia unei familii arbitrare de congruenţe pe o $\Sigma$-algebră este congruenţă.

**Demonstraţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $(\rho^i)_{i\in I}$ o familie de congruenţe pe $A$. Fie $\rho = \bigcap_{i\in I}\rho^i$. Conform 2.2.9 $\rho$ este relaţie de echivalenţă. Fie $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ şi $x, y\in A^w$ astfel încât $x\rho^w y$. Atunci pentru orice $i\in I$ avem $x(\rho^i)^w y$. Cum $\rho^i$ este congruenţă avem că $\sigma^A(x)\rho_s^i\sigma^A(y)$ pentru orice $i\in I$, deci $\sigma^A(x)\rho_s\sigma^A(y)$. ▪

Lema de mai sus justifică corectitudinea următoarei definiţii.

2.5.13 **Definiţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $X$ o submulţime a lui $A\times A$. Numim *congruenţa generată de* $X$ intersecţia tuturor congruenţelor pe A ce includ pe $X$. Aceasta este cea mai mică congruenţă ce conţine pe $X$ şi va fi notată cu $\rho_X$.

2.5.14 **Observaţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $X, Y$ o submulţimi ale lui $A\times A$. Atunci:

i) $\rho_X \subseteq \rho_Y$.

ii) $X$ congruenţă dacă şi numai dacă $\rho_X = X$.

iii) $\rho_\emptyset = \Delta$.

În continuare vom prezenta o construcţie analitică a congruenţei generate de o submulţime.

2.5.15 **Teoremă** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $X$ o submulţime a lui $A\times A$. Definim $R(X), S(X), T(X)$ ca la 2.2.12 şi în plus $Q(X)$ astfel: pentru orice $s\in S$ :

$(Q(X))_s = \{(a, b) |$ există $w\in S^*, \sigma\in\Sigma_{w,s}, (x, y)\in X^w$ astfel încât $a =$

$\sigma^A(x), b = \sigma^A(y)\}$

Fie $I(X) = X \cup R(X) \cup S(X) \cup T(X) \cup Q(X)$. Atunci

$\rho_X = \bigcup_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(X)$.

Înaintea demonstraţiei să explicităm notaţia $(x,y) \in X^w$. Fie $w = s_1 s_2 ... s_k$. $x = (x_1, x_2, ... x_k)$, $y = (y_1, y_2, ... y_k)$ sunt elemente ale lui $A^w$ astfel încât $(x_i, y_i) \in X_{s_i}$ pentru orice $i = 1, ... k$.

**Demonstraţie** Demonstraţia este asemănătoare cu cea de la 2.2.12. Notăm cu $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(X)$. Evident, $I^n(X) \subseteq I^{n+1}(X)$ pentru orice $n$ natural.(1)

"$\subseteq$". Evident, $X \subseteq I(X) \subseteq Y$. Este suficient să demonstrăm că $Y$ este congruenţă. Faptul că este relaţie de echivalenţă se demonstrează ca la 2.2.12. Fie $w \in S^*$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ şi $(x,y) \in Y^w$. Există $n$ natural astfel încât $(x,y) \in I^{(n)}(X)^w$. Deci $(\sigma^A(x), \sigma^A(y)) \in (Q(I^{(n)}(X))_s \subseteq Y$.

"$\supseteq$" Demonstrăm prin inducţie după $n$ că $I^{(n)}(X) \subseteq \rho_X$ pentru orice $n$ natural.

$n = 0$ Evident, $I^{(0)}(X) = X \subseteq \theta_X$.

$n \to n+1$. Presupunem $I^{(n)}(X) \subseteq \rho_X$. Deoarece $\rho_X$ este congruenţă avem $R(I^{(n)}(X)) \subseteq \rho_X$, $S(I^{(n)}(X)) \subseteq \rho_X$, $T(I^{(n)}(X)) \subseteq \rho_X$ şi $Q(I^{(n)}(X)) \subseteq \rho_X$, deci $I^{(n+1)}(X) \subseteq \rho_X$. ∎

2.5.16 **Definiţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $\rho$ o congruenţă pe $A$, $\rho \neq \Omega$. $\rho$ se numeşte *maximală* dacă pentru orice congruenţă $\theta$ pe $A$, $\theta \neq \Omega$, $\rho \subseteq \theta$ implică $\rho = \theta$.

## 2.6. Morfisme de algebre

2.6.1 **Definiţie** Fie $A, B$ două $\Sigma$-algebre. O funcţie $f : A \rightarrow B$ se numeşte *morfism de algebre* daca pentru orice $w \in S^*$, $s \in S, \sigma \in \Sigma_{w,s}$ avem: $f_s \sigma^A = \sigma^B f^w$.

Dacă $w = s_1 s_2 ... s_n \in S^*, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^w$, ecuaţia de mai sus se scrie $f_s(\sigma^A(x_1, x_2, ..., x_n)) = \sigma^B(f_{s_1}(x_1), f_{s_2}(x_2), ..., f_{s_n}(x_n))$.

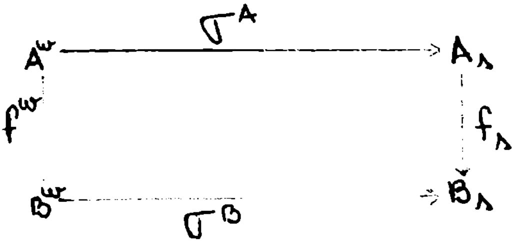

**fig. 1**

2.6.2 **Definiţie** Un morfism $f : A \rightarrow B$ de $\Sigma$-algebre se numeşte *izomorfism* dacă există un morfism $g : B \rightarrow A$ de $\Sigma$-algebre astfel încât $gf = 1_A$ şi $fg = 1_B$.

2.6.3 **Lemă** Fie $f : A \rightarrow B$ un morfism bijectiv de $\Sigma$-algebre. Atunci inversa este tot un morfism de $\Sigma$-algebre.

**Demonstraţie** Fie $w \in S^*$, $s \in S, \sigma \in \Sigma_{w,s}$. $f$ morfism implică $f_s \sigma^A = \sigma^B f^w$. Compunem la stânga cu $f_s^{-1}$ şi la dreapta cu $(f^w)^{-1}$ si obţinem $f_s^{-1} \sigma^B = \sigma^A (f^w)^{-1}$. ∎

2.6.4 **Corolar** Un morfism $f : A \rightarrow B$ de $\Sigma$-algebre este izomorfism dacă şi numai dacă este bijectiv şi în acest caz morfismul $g$ de la 2.6.2 este unic şi anume egal cu $f^{-1}$.

2.6.5 **Lemă** Fie un morfism $f : A \rightarrow B$ de $\Sigma$-algebre. Atunci imaginea sa, $Im(f) = (Im(f_s))_{s \in S}$, este subalgebră a lui $B$.

**Demonstraţie** Fie $w \in S^*$, $s \in S, \sigma \in \Sigma_{w,s}$, $y \in Im(f)^w$. Există deci $x \in A^w$ astfel încât $y = f^w(x)$. Deci $\sigma^B(y) = \sigma^B(f^w(x))$ =($f$ morfism)= $f_s(\sigma^A(x)) \in Im(f_s)$. ∎

2.6.6 **Definiţie** Fie $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Alg}_\Sigma$ o clasă de $\Sigma$-algebre. $\mathbf{K}$ este *închisă la imagini de morfisme* dacă pentru orice $A \in \mathbf{K}$, $B$ $\Sigma$-algebră şi $f : A \rightarrow B$ morfism avem $Im(f) \in \mathbf{K}$.

2.6.7 **Definiţie** Fie $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Alg}_\Sigma$ o clasă de $\Sigma$-algebre. $\mathbf{K}$ este *închisă la imagini izomorfe* dacă pentru orice $A \in \mathbf{K}$, $B$ $\Sigma$-algebră şi $f : A \rightarrow B$

izomorfism avem $Im(f)\in\mathbf{K}$.

Următoarea lemă demonstrează faptul că două morfisme care coincid pe o submulţime de generatori coincid peste tot.

2.6.8 **Lemă** Fie două morfisme $f, g : A \to B$ de $\Sigma$-algebre şi $X$ o mulţime de generatori pentru $A$. Atunci $f = g$ dacă şi numai dacă pentru orice $s\in S$, $x\in X_s$ avem $f_s(x) = g_s(x)$.

**Demonstraţie** Afirmaţia "numai dacă" este banală.

Demonstrăm reciproca prin induţie structurală (2.4.13) considerând pentru fiecare $s\in S$,$x\in A_s$, $P_s(x) = 1$ dacă şi numai dacă $f_s(x) = g_s(x)$ şi mulţimea de generatori $X$.

Afirmaţia i. de la 2.4.13, rezultă direct din ipoteză. Demonstrăm ii. Fie $w\in S^*$, $s\in S, \sigma\in\Sigma_{w,s}$, $x\in A^w$ astfel încât $f^w(x) = g^w(x)$. Atunci $\sigma^B(f^w(x)) = \sigma^B(g^w(x))$. Deoarece $f$ este morfism avem $f_s(\sigma^A(x)) = g_s(\sigma^A(x))$. ∎

2.6.9 **Lemă** Compunerea de morfisme de $\Sigma$-algebre este morfism de $\Sigma$-algebre.

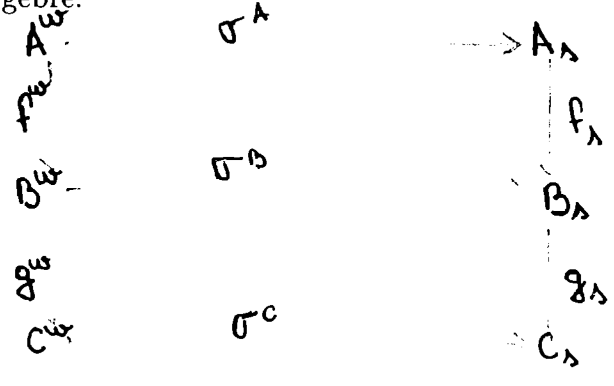


**fig 2**

**Demonstraţie**. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două morfisme de $\Sigma$-algebre. Fie $w\in S^*$, $s\in S, \sigma\in\Sigma_{w,s}$.

Atunci $(gf)_s\sigma^A = (g_s f_s)\sigma^A = g_s(f_s\sigma^A) =$ (f morfism)
$= g_s(\sigma^B f^w) = (g_s\sigma^B)f^w =$ (g morfism)
$(\sigma^C g^w)f^w = \sigma^C(g^w f^w) = \sigma^C(gf)^w$.∎

2.6.10 **Lemă** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră. Atunci $1_A : A \to A$ este morfism de $\Sigma$-algebre.

**Demonstraţie**. Pentru orice $w\in S^*$, $s\in S, \sigma\in\Sigma_{w,s}$ avem $1_{A_s}\sigma^A =$

$\sigma^A = \sigma^A(1_A)^w$. ∎

2.6.11 **Propoziţie**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră. Atunci:

i) Mulţimea morfismelor de la $A$ la $A$ cu operaţia de compunere formează un monoid.

ii) Mulţimea izomorfismelor de la $A$ la $A$ cu operaţia de compunere formează un grup.

**Demonstraţie** i) Evidentă.

ii) Imediată conform 2.6.4.

2.6.12 **Propoziţie**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră minimală (2.4.15). Atunci $1_A$ este singurul morfism de la $A$ la $A$. ∎

**Demonstraţie** Fie $f : A \to A$ un morfism de $\Sigma$-algebre. Cum $A$ este evident generată de mulţimea vidă şi $f$ şi $1_A$ coincid pe mulţimea vidă, atunci conform 2.6.8 avem că $f = 1_A$. ∎

2.6.13 **Teoremă**. Fie $A, B$ două $\Sigma$-algebre minimale. Dacă $f : A \to B$ şi $g : B \to A$ sunt morfisme de $\Sigma$-algebre, atunci $f$ şi $g$ sunt izomorfisme şi inverse una alteia.

**Demonstraţie** Conform 2.6.12 $gf = 1_A$ şi $fg = 1_B$. ∎

2.6.14 **Teoremă**. Dacă $f : A \to B$ este un morfism de $\Sigma$-algebre atunci $ker(f)$ este congruenţă pe $A$.

**Demonstraţie** Conform 2.2.17 $ker(f)$ este relaţie de echivalenţă. Fie $w \in S^*$, $s \in S, \sigma \in \Sigma_{w,s}$, $x \in A^w, y \in A^w$ astfel încât $x(ker(f))^w y$, adică $f^w(x) = f^w(y)$, deci $\sigma^B(f^w(x)) = \sigma^B(f^w(y))$. Cum $f$ este morfism avem $f_s(\sigma_A(x)) = f_s(\sigma_A(y))$, pentru orice $s \in S$, deci $\sigma_A(x) ker(f) \sigma_A(y)$. ∎

2.6.15 **Lemă** Fie un morfism $f : A \to B$ de $\Sigma$-algebre şi $C$ o subalgebră a lui $B$. Atunci $f^{-1}(C) = \{x \in A | f(x) \in C\}$, este subalgebră a lui $A$.

**Demonstraţie**. Fie $w \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $x \in (f^{-1}(C))^w$, deci

$f^w(x) \in C^w$. Atunci

$f_s(\sigma^A(x)) =$ ($f$ morfism)

$\sigma^B(f^w(x)) \in C_s$ ($C$ subalgebră a lui $B$). ∎

2.6.16 **Exerciţiu (Legatură cu structurile algebrice clasice)** Fie $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri şi $e$ elementul neutru al lui $G_2$. Să se verifice că subgrupul normal obţinut aplicând bijecţia de la 2.5.5 congruenţei $ker(f)$ este $f^{-1}(\{e\})$. Formulaţi şi rezolvaţi un exerciţiu asemănător în cazul inelelor şi modulelor peste un inel.

2.6.17 **Definiţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $\rho$ o congruenţă pe $A$. Notăm cu $[\rho] : A \to A/\rho$ funcţia defintă pentru orice $s \in S$, $x \in A_s$ prin $[\rho]_s(x) = [x]_{\rho_s}$ numită *surjecţia canonică.*

2.6.18 **Lemă**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $\rho$ o congruemţă pe $A$. Atunci surjecţia canonică este morfism surjectiv.

**Demonstraţie**.Surjectivitatea este evidentă.

Fie $w \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $x \in A^w$. Atunci $[\rho]_s(\sigma^A(x)) = [\sigma^A(x)]_{\rho_s} = \sigma^{A/\rho}([x]_{\rho^w}) = \sigma^{A/\rho}([\rho]^w(x))$. ∎

## 2.7. Teoreme de izomorfism

2.7.1 **Teoremă (Teorema fundamentală de izomorfism sau prima teoremă de izomorfism)**. Fie $f : A \rightarrow B$ un morfism surjectiv de $\Sigma$-algebre. Atunci $A/ker(f)$ este izomorfă cu $B$.

**Demonstraţie**. Definim funţia $\psi : A/ker(f) \rightarrow B$ astfel: pentru $s \in S$ şi $x \in A_s$ $\psi_s([x]_{(ker(f))_s}) = f_s(x)$. $\psi$ este corect definită. Într-adevăr, dacă

$x(ker(f)_s)y$, atunci $f_s(x) = f_s(y)$.

$\psi$ este morfism de $\Sigma$-algebre. Într-adevăr, dacă $w \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $x \in A^w$, atunci $\psi_s(\sigma^{A/ker(f)}([x]_{(ker(f))^w})) = \psi_s([\sigma^A(x)]_{(ker(f))_s}) = f_s(\sigma^A(x)) =$
$\sigma^B(f^w(x)) = \sigma^B(\psi^w([x]_{ker(f)^w}))$.

$\psi$ este surjectivă. Într-adevăr, dacă $s \in S$ şi $y \in B_s$, există $x \in A_s$ astfel încât $f_s(x) = y$, deci $\psi_s([x]_{(ker(f))_s}) = f_s(x) = y$.

$\psi$ este injectivă. Într-adevăr, dacă $s \in S$ şi $x, y \in B_s$ astfel încât $\psi_s([x]_{(ker(f))_s}) = \psi_s([y]_{(ker(f))_s})$ atunci $f_s(x) = f_s(y)$, deci $x(ker(f))_s y$, de unde deducem

$[x]_{(ker(f))_s} = [y]_{(ker(f))_s}$. ▪

2.7.2 **Propoziţie** O $\Sigma$-algebră $A$ este izomorfă cu $A/\Delta$.

**Demonstraţie** Surjecţia canonică este injectivă. Într-adevăr dacă $s \in S$, $x, y \in A_s$ avem $[x]_{\rho_s} = [y]_{\rho_s}$ implică $x = y$. ▪

2.7.3 **Propoziţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră minimală şi $\rho$ o congruenţă pe ea. Atunci $A$ este izomorfă cu $A/\rho$ dacă şi numai dacă $\rho = \Delta$.

**Demonstraţie** "dacă" Rezultă imediat din 2.7.2.

"numai dacă" Fie $\varphi : A/\rho \rightarrow A$ izomorfism. Conform 2.6.12. $\varphi[\rho] = 1_A$. Deci surjecţia canonică este injectivă. Fie $s \in S$, $x, y \in A_s$ astfel încât $x\rho_s y$. Atunci $[x]_{\rho_s} = [x]_{\rho_s}$ deci $[\rho]_s(x) = [\rho]_s(y)$ de unde $x = y$. ▪

2.7.4 **Teoremă Teorema a doua de izomorfism**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră şi $\rho, \theta$ două congruenţe pe ea astfel încât $\rho \subseteq \theta$. Atunci $\psi : (A/\theta)/(\rho/\theta) : \rightarrow A/\rho$ (2.5.9) definită pentru orice $s \in S$ şi $x \in A_s$ prin $\psi_s([[x]_{\theta_s}]_{\rho_s/\theta_s}) = [x]_{\rho_s}$ este izomorfism.

**Demonstraţie**. $\psi$ este corect definită. Într-adevăr dacă $s \in S$, $x, y \in A_s$, $[[x]_{\theta_s}]_{\rho_s/\theta_s} = [[y]_{\theta_s}]_{\rho_s/\theta_s}$ implică $[x]_{\theta_s}\rho_s/\theta_s[y]_{\theta_s}$ deci $x\rho_s y$.

$\psi$ este morfism de $\Sigma$-algebre. Într-adevăr, dacă $w \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $x \in A^w$, atunci $\psi_s(\sigma^{(A/\theta)/(\rho/\theta)}([[x]_{\theta^w})) \,]_{(\rho/\theta)^w} = \psi_s([\sigma^{A/\theta}([x]_{\theta^w})]_{\rho_s/\theta_s}) =$
$\psi_s([[\sigma^A(x)]_{\theta_s}]_{\rho_s/\theta_s}) = [\sigma^A(x)]_{\rho_s} = \sigma^{A/\rho}([x]_{\rho^w}) = \sigma^{A/\rho}(\psi^w([[x]_{\theta^w}]_{(\rho/\theta)^w}))$.

Evident, $\psi$ este surjectivă. Rămâne să demonstrăm injectivitatea. Fie $s{\in}S$, $x,y{\in}A_s$ astfel încât $[x]_{\rho_s} = [y]_{\rho_s}$ deci $x\rho_s y$ de unde $[x]_{\theta_s}\rho_s/\theta_s[x]_{\theta_s}$. ■

2.7.5 **Definiţie** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $B$ o subalgebră a sa şi $\rho$ o congruenţă pe ea. Notăm cu $\rho(B)$ submulţimea lui $A$ definită astfel: $\rho(B)_s = \bigcup_{b\in B_s}[b]_{\rho_s}$.

2.7.6 **Lemă** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $B$ o subalgebră a sa şi $\rho$ o congruenţă pe ea. Atunci $\rho(B)$ este subalgebră a lui $A$.

**Demonstraţie**. Fie $w = s_1s_2...s_n{\in}S^*$, $s{\in}S$, $\sigma{\in}\Sigma_{w,s}$,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n){\in}\rho(B)^w$. Atunci pentru orice $i = 1, ..., n$, există $b_i{\in}B_{s_i}$ astfel încât $x_i\rho_{s_i}b_i$. Deci $\sigma^A(x)\rho_s\sigma^B(b_1, b_2, ..., b_n) = b{\in}B_s$. Deci $\sigma^A(x){\in}[b]_{\rho_s}$. ■

2.7.7 **Teoremă A treia teoremă de izomorfism** Fie $A$ o $\Sigma$-algebră, $\rho$ o congruenţă pe ea şi $B$ o subalgebră a sa. Atunci restricţia lui $\rho$ la $B$ notată cu $\rho|B$ şi definită prin $(\rho|B)_s = \{(x,y){\in}B_s^2|x\rho_s y\}$ este congruenţă pe $B$ şi $B/\rho|B$ este izomorfă cu $\rho(B)/\rho|\rho(B)$.

**Demonstraţie**. Este evident faptul că $\rho|B$ este congruenţă pe $B$. Definim $\psi : B/\rho|B{\to}\rho(B)/\rho|\rho(B)$ astfel: fie $s{\in}S$ şi $b{\in}B_s$, atunci $\psi_s([b]_{(\rho|B)_s}) = [b]_{(\rho|\rho(B))_s}$

$\psi$ este corect definită. Într-adevăr, dacă $s{\in}S$, $x,y{\in}B_s$ dacă $x(\rho|B)_s y$ atunci $x\rho_s y$ deci $x(\rho|\rho(B))_s y$.

$\psi$ este morfism. Într-adevăr fie $w{\in}S^*$, $s{\in}S, \sigma{\in}\Sigma_{w,s}$, $x{\in}B^w$ Atunci

$\psi_s(\sigma^{B/\rho|B}([x]_{\rho|B})) = \psi_s([\sigma^B(x)]_{\rho|B}) = [\sigma^B(x)]_{\rho|\rho|B} = [\sigma^{\rho(B)}(x)]_{\rho|\rho(B)} = \sigma^{\rho(B)/\rho|\rho(B)}([x]_{\rho|\rho(B)}) = \sigma^{\rho(B)/\rho|\rho(B)}(\psi^w([x]_{\rho|B}))$.

$\psi$ este surjectivă. Într-adevăr fie $s{\in}S$, $y{\in}\rho(B)_s$. Există atunci $b{\in}B_s$ astfel încât $y\rho_s b$. Deci $\psi_s([b]_{(\rho|B)_s}) = [b]_{(\rho|\rho(B))_s} = [y]_{(\rho|\rho(B))_s}$

$\psi$ este injectivă. Într-adevăr fie $s{\in}S$, $x,y{\in}B_s$ astfel încât $[x]_{(\rho|\rho(B))_s} = [y]_{(\rho|\rho(B))_s}$, deci $x\rho_s y$ de unde deducem $[x]_{(\rho|B)_s} = [y]_{(\rho|B)_s}$. ■

## 2.8. Algebre produs

2.8.1 **Definiţie** Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Numim *produsul direct* al familiei $(A_i)_{i\in I}$ mulţimea $\prod_{i\in I}A_i = \{f : I\to\bigcup_{i\in I}A_i | f(i)\in A_i, \forall i\in I\}$ De asemenea definim proiecţia pe componenta $j$ ($j\in I$) $p_j : \prod_{i\in I}A_i\to A_j$ prin $p_j(f) = f(j)$.

2.8.2 **Teoremă (Proprietatea de universalitate a produsului direct)** Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi, $B$ o mulţime şi pentru orice $i\in I$ o funcţie $f_i : B\to A_i$. Atunci există o unică funcţie $g : B\to\prod_{i\in I}A_i$ cu proprietatea $p_jg = f_j$ pentru orice $j\in I$. Funcţia $g$ se notează cu $[f_i]_{i\in I}$ şi pentru orice $x\in B$, $j\in I$, $[f_i]_{i\in I}(x)(j) = f_j(x)$.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_i \arrow[rr, "p_j"] & & A_j \\
& B \arrow[ul, "{[f_i]_{i\in I}}"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

**fig 3**

**Demonstraţie**. Fie $j\in J$, $x\in B$ atunci $p_j([f_i]_{i\in I}(x)) = [f_i]_{i\in I}(x)(j) = f_j(x)$. Reciproc, fie $g : B\to\prod_{i\in I}A_i$ astfel încât $p_ig = f_i$ pentru orice $i\in I$. Atunci pentru orice $x\in B$, $j\in I$, avem $f_j(x) = p_j(g(x)) = g(x)(j)$. ▪

2.8.3 **Corolar** Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi, $f, g : B\to\prod_{i\in I}A_i$. Atunci $p_if = p_ig$ pentru orice $i\in I$ implică $f = g$.

**Demonstraţie**. Fie $u_i = p_if = p_ig$, $i\in I$. Atunci $p_if = u_i$, $p_ig = u_i$. Conform 2.8.2 avem $f = g$. ▪

Se verifică uşor că 2.8.1-3 se extind în mod natural şi asupra mulţimilor $S$-sortate.

2.8.4 **Teoremă** Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de $\Sigma$-algebre. Există atunci pentru orice $i\in I$, $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ o unică operaţie $\sigma^{\prod_{i\in I}A_i}$ pe $\prod_{i\in I}A_i$ astfel încât proiecţiile $(p_i)_{i\in I}$ să fie morfisme.

**Demonstraţie**. Fie $i\in I$, $w\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$. $(p_i)_{i\in I}$ morfisme implică $(p_i)_s\sigma^{\prod_{i\in I}A_i} = \sigma^{A_i}(p_i^w)$. Conform 2.8.3 $\sigma^{\prod_{i\in I}A_i} = [\sigma^{A_i}(p_i^w)]_{i\in I}$. ▪

2.8.5 **Teoremă** Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de $\Sigma$-algebre, $(p_i)_{i\in I}$ proiecţiile canonice, $B$ o $\Sigma$-algebră şi pentru orice $i \in I$ un morfism $\Sigma$-algebre $f_i : B \to A_i$. Atunci $[f_i]_{i\in I} : B \to \prod_{i\in I} A_i$ este morfism de $\Sigma$-algebre

**Demonstraţie** Fie $w \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$. Pentru orice $j \in I$, $(p_j)_s([f_i]_{i\in I})_s \sigma^B = (f_j)_s \sigma^B = \sigma^{A_j}(f_j)^w = \sigma^{A_j} p_j^w([f_i]_{i\in I})^w = (p_j)_s \sigma^{\prod_{i\in I} A_i}([f_i]_{i\in I})^w$. ∎

2.8.6 **Observaţie** Unica operaţie definită la 2.8.4 este operaţia "pe componente".

2.8.7 **Definiţie** Fie $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Alg}_\Sigma$ o clasă de $\Sigma$-algebre. **K** se numeşte *închisă la produse directe* dacă pentru orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de $\Sigma$-algebre din **K**, algebra produs este tot din **K**.

2.8.8 **Definiţie** Fie $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Alg}_\Sigma$ o clasă de $\Sigma$-algebre. **K** se numeşte *varietate* dacă este închisă la formarea de subalgebre, imagini de morfisme şi produse directe.

## 2.9. Algebre libere

2.9.1 **Definiţie** Fie $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{Alg}_\Sigma$ o clasă de $\Sigma$-algebre şi $X$ o mulţime $S$-sortată. O $\Sigma$-algebră $\overline{X}$ astfel încât $X\subseteq\overline{X}$ este *liber generată de* $X$ dacă pentru orice $\Sigma$-algebră $B\in\mathbf{K}$ şi orice funcţie $f : X\to B$ există un unic morfism $\overline{f} : \overline{X}\to B$ astfel încât $\overline{f}i = f$, unde $i : X\to\overline{X}$ este incluziunea.

2.9.2 **Lemă** i). Dacă $f, g : \overline{X}\to B$ sunt morfisme de algebre astfel încât $fi = gi$, atunci $f = g$.

ii). Algebra liber generată de o mulţime este unică abstraţie făcând de un izomorfism.

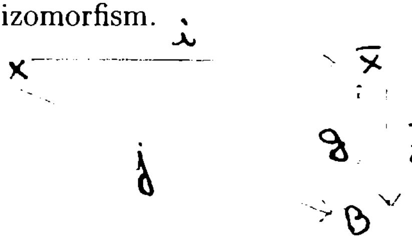

**fig. 4**

**Demonstraţie** i. este evidentă.

ii) Fie $B$ altă algebră liber generată de $X$. Notăm cu $j : X\to B$ incluziunea. Există atunci $\overline{j} : \overline{X}\to B, g : B\to\overline{X}$ morfisme de algebre astfel încât $\overline{j}i = j, gj = i$. Atunci $g\overline{j}i = gj = i, \overline{j}gj = \overline{j}i = j$. Conform i., $g$ şi $\overline{j}$ sunt izomorfime inverse unul altuia. ▪

În continuare vom demonstra existenţa algebrei libere în cazul $\mathbf{K} = \mathbf{Alg}_\Sigma$. Vom folosi elemente de teoria limbajelor formale ([4]). Există şi construcţii care folosesc doar elemente de algebră ([16])

Fie $X$ o mulţime $S$-sortată. Definim următoarea gramatică $G$ independentă de context:

Mulţimea neterminalelor este $S$.

Mulţimea terminalelor este $V_T = \bigcup_{s\in S}X_s\bigcup\bigcup_{w\in S^*,s\in S}\Sigma_{w,s}$

Mulţimea producţiilor:

Dacă $x\in X_s$ avem producţia $s\to x$.

Dacă $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ şi $w = s_1s_2...s_n$ avem producţia $s\to\sigma s_1s_2...s_n$.

Observăm că spre deosebire de biblografia specifică teoriei limbajelor formale, în acest material noţiunea de gramatică este generalizată, în sensul că mulţimile de neterminale, terminale şi producţii nu mai sunt finite şi nici nu definim simbol de start deoarece acesta nu prezintă interes în acest material.

2.9.3 **Observaţie** $G$ este neambiguă.

**Demonstraţie** Se observă că în orice derivare stângă aplicarea a două producţii distincte aceluiaşi cuvânt duce la cuvinte distincte formate din neterminale în final. ▪

2.9.4 **Notaţie**. Pentru $s{\in}S$ notăm cu $T(\Sigma, X)_s = \{w{\in}V_T^*|s{\Rightarrow}w\}$. $T(\Sigma, X)$ este organizată ca $\Sigma$-algebră astfel:

Dacă $\sigma{\in}\Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_n, s}$ dacă $w_1{\in}T(\Sigma, X)_{s_1}, w_2{\in}T(\Sigma, X)_{s_2}, \ldots, w_n{\in}T(\Sigma, X)_{s_n}$ atunci $\sigma^{T(\Sigma,X)}(w_1, \ldots, w_n) = \sigma w_1, \ldots, w_n$. Operaţia este corect definită. Într-adevăr, dacă $s_i{\Rightarrow}w_i$ pentru orice $i = 1, \ldots n$ atunci $s{\Rightarrow}\sigma s_1 \ldots s_n{\Rightarrow}$ $\sigma w_1 \ldots w_n$

2.9.5 **Teoremă**. Fie $A{\in}\mathbf{Alg}_{\boldsymbol{\Sigma}}, \varphi : X{\rightarrow}A$ o funţie. Atunci există un unic morfism $\overline{\varphi} : T(\Sigma, X){\rightarrow}A$ astfel încât $\overline{\varphi}_{|X} = \varphi$.

**Demonstraţie** Definim pentru orice $s{\in}S$ şi $w{\in}T(\Sigma, X)_s$ $\overline{\varphi}_s(w)$ după lungimea lui $w$ prin:

Dacă $w = x{\in}X_s$ atunci $\overline{\varphi}_s(w) = \varphi_s(x)$

Dacă $w = \sigma{\in}\Sigma_{\lambda,s}$ atunci $\overline{\varphi}_s(w) = \sigma^A$.

Dacă $\sigma{\in}\Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$ şi $w = \sigma w_1 \ldots w_n$ $w_i{\in}T(\Sigma, X)_{s_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots n$ atunci $\overline{\varphi}_s(w) = \sigma^A(\overline{\varphi}_{s_1}(w_1), \ldots, \overline{\varphi}_{s_n}(w_n))$.

Demonstrăm că $\overline{\varphi}$ este morfism de algebre. Fie $\sigma{\in}\Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_n, s}$, $w_1{\in}T(\Sigma, X)_{s_1}, w_2{\in}T(\Sigma, X)_{s_2}, \ldots, w_n{\in}T(\Sigma, X)_{s_n}$. Atunci $\overline{\varphi}_s(\sigma^{T(\Sigma,X)}(w_1, \ldots, w_n)) = \overline{\varphi}_s(\sigma w_1 w_2 \ldots w_n) =$ $\sigma^A(\overline{\varphi}_{s_1}(w_1), \overline{\varphi}_{s_2}(w_2), \ldots, \overline{\varphi}_{s_n}(w_n))$. Unicitatea se demonstrează uşor prin inducţie după lungimea cuvintelor. ▪

2.9.6 **Observaţie**. $T(\Sigma, X)$ este algebra liber generată în clasa tuturor $\Sigma$-algebrelor de mulţimea $X$,

2.9.7 **Lemă**. Dacă clasa **K** este închisă la subalgebre, în sensul că orice subalgebră a unei algebre din **K** este tot în **K**, atunci algebra liber generată de $X$ în **K** este generată de $X$.

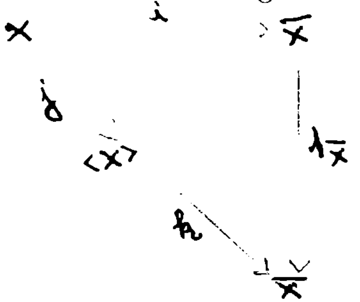

**fig 5**

**Demonstraţie**. Fie $\overline{X}$ algebra liber generată de $X$, $i : X \to \overline{X}$ incluziunea, $\langle X \rangle$ subalgebra generată de $X$, $j : X \to \langle X \rangle$ incluziunea, $k : \langle X \rangle \to \overline{X}$ incluziunea. Evident $\overline{kj} = 1_{\overline{X}}$. Conform 2.9.2 $\overline{kj} = k\overline{j} = 1_{\overline{X}}$, de unde deducem $k$ surjectivă. ▪

2.9.8 **Observaţie**. Algebra liber generată de mulţimea vidă este *algebra iniţială* adică o algebră $T$ din clasa $\mathbf{K}$ cu proprietatea că pentru orice algebră $A$ din clasa $\mathbf{K}$ există un unic morfism $f : T \to A$. ▪

2.9.9 **Teoremă**. Fie $A$ o $\Sigma$-algebră cu proprietatea că pentru orice $s \in S$ $card(X_s) \geq card(A_s)$. Atunci există o congruenţă $\rho$ pe $T(\Sigma, X)$ astfel încât $A$ este izomorfă cu $T(\Sigma, X)/\rho$.

**Demonstraţie**. Există o funcţie surjectivă $\varphi : X \to A$, de unde rezultă că $\overline{\varphi} : T(\Sigma, X) \to A$ este morfism surjectiv. Din teorema de izomorfism avem $T(\Sigma, X)/ker\overline{\varphi}$ este izomorfă cu $A$. ▪

Pentru $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Alg}_\Sigma$ şi $(X_s)_{s \in S}$ definim:

$\equiv_\mathbf{K} = \bigcap \{ker\varphi | A \in \mathbf{K}, \varphi : T(\Sigma, X) \to A \text{ morfism } \}$

Dacă $s \in S$, $(\sim_\mathbf{K})_s = \{(t, t') \in T(\Sigma, X)_s^2 |$ pentru orice $A \in \mathbf{K}, \varphi : X \to A$ avem $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}(t')\}$

2.9.10 **Lemă**. $\equiv_\mathbf{K} = \sim_\mathbf{K}$.

**Demonstraţie**. Fie $s \in S$. Atunci

$(\sim_\mathbf{K})_s = \{(t, t') \in T(\Sigma, X)_s^2 | (t, t') \in ker\varphi$ pentru orice $A \in \mathbf{K}$ şi orice morfism $\varphi : T(\Sigma, X) \to A\}$. În concluzie $\equiv_\mathbf{K} = \sim_\mathbf{K}$ ▪

2.9.11 **Notaţie**. Pentru $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Alg}_\Sigma$ notăm cu $T_\mathbf{K}(\Sigma, X) = T(\Sigma, X)/\equiv_\mathbf{K}$

2.9.12 **Teoremă**. Fie $(X_s)_{s \in S}$, $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Alg}_\Sigma$. Atunci $T_\mathbf{K}(\Sigma, X)$ este liber generată în $\mathbf{K}$ de $X/\equiv_\mathbf{K}$.

**Demonstraţie**. Fie $i : X \to T(\Sigma, X), j : X/\equiv_\mathbf{K} \to T(\Sigma, X)/\equiv_\mathbf{K}$ incluziunile, $p : X \to X/\equiv_\mathbf{K}, q : T(\Sigma, X) \to T(\Sigma, X)\equiv_\mathbf{K}$ surjecţiile canonice. Fie o $\Sigma$-algebră $A \in \mathbf{K}$ şi $\alpha : X/\equiv_\mathbf{K} \to A$ o funcţie. Există atunci un unic morfism $\overline{\beta} : T(\Sigma, X) \to A$ astfel încât $\overline{\beta} i = \alpha p$. Fie $\overline{\alpha} : T_\mathbf{K}(\Sigma, X) \to A$ definită astfel: pentru orice $s \in S, t \in T_\mathbf{K}(\Sigma, X)_s$, $\overline{\alpha}([t]_{(\equiv_\mathbf{K})_s}) = \overline{\beta}_s(t)$. Cu alte cuvinte $\overline{\alpha} q = \overline{\beta}$.

$\overline{\alpha}$ este bine definită. Fie $s \in S$ şi $(t, t') \in (\equiv_\mathbf{K})_s$. Dar $\equiv_\mathbf{K} \subseteq ker\overline{\beta}$, deci $(t, t') \in (ker\beta)_s$ de unde $\overline{\beta}_s(t) = \overline{\beta}_s(t')$.

$\overline{\alpha} j = \alpha$. Fie $s \in S$ şi $x \in X_s$. Atunci $\overline{\alpha}_s(j_s([x])_{(\equiv_\mathbf{K})_s}) = \overline{\alpha}_s(j_s(p_s(x))) = \overline{\alpha}_s(q_s(i_s(x))) = \overline{\beta}_s(i_s(x)) = \alpha_s(p_s(x)) = \alpha_s([x]_{(\equiv_\mathbf{K})_s})$.

$\overline{\alpha}$ este morfism de $\Sigma$-algebre. Fie $w = s_1 s_2 ... s_n \in S^*, s \in S, \sigma \in \Sigma_{w,s}$. Atunci $\overline{\alpha}_s(\sigma^{T_\mathbf{K}(\Sigma,X)}([t_1]_{s_1}, [t_2]_{s_2}, ..., [t_n]_{s_n}) = \overline{\alpha}_s([\sigma^{T(\Sigma,X)}(t_1, ..., t_n)]_s) =$

$\overline{\beta}_s(\sigma^{T_{\mathbf{K}}(\Sigma,X)}(t_1,...t_n) = \sigma^A(\overline{\beta}_{s_1}(t_1),...,\overline{\beta}_{s_n}(t_n)) =$
$\sigma^A(\overline{\alpha}_{s_1}([t_1])_{s_1},...,[t_n])_{s_n})$ (toate clasele de echivalenţă sunt considerate în raport cu echivalenţa $\equiv_{\mathbf{K}}$).

Demonstrăm unicitatea lui $\overline{\alpha}$. $X$generează pe $T(\Sigma, X)$. Este suficient să demonstrăm că $X/{\equiv_{\mathbf{K}}}$ generează pe $T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X)$. Pentru aceasta considerăm o subalgebră $A$ a lui $T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X)$ ce include pe $X/{\equiv_{\mathbf{K}}}$. Demonstrăm prin inducţie după lungimea lui $t\in T(\Sigma, X)$ că $[t]_{\equiv_{\mathbf{K}_s}}\in A_s$ pentru orice $s\in S$. Fie $m$ un număr natural, $w = s_1...s_n\in S^*$, $s\in S$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, $t = t_1...t_n\in T(\Sigma, X)^w$ astfel încât $|t_i|\leq m$ pentru orice $i\in\{1, ..., n\}$, Deci $t_i\in A_{s_i}$ pentru orice $i\in\{1, ..., n\}$. Atunci $[\sigma t_1...t_n]_{\equiv_{\mathbf{K}_s}} = \sigma^{T_{\mathbf{K}}(\Sigma,X)}([t_1]_{\equiv_{\mathbf{K}_{s_1}}}, ...,$ $[t_n]_{\equiv_{\mathbf{K}_{s_n}}})\in A_s$. ∎

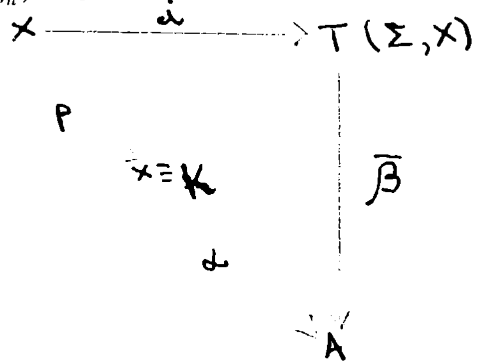

**fig. 6**

2.9.13 **Definiţie**. O clasă $\mathbf{K}$ de algebre se numeşte *varietate* dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

a) Dacă $A\in\mathbf{K}$ şi $B\subseteq A$ subalgebră atunci $B\in\mathbf{K}$

b) Dacă $\varphi : A\to B$ este un morfism de $\Sigma$-algebre şi $A\in\mathbf{K}$ atunci $Im(\varphi)\in\mathbf{K}$.

c) Pentru orice familie de $\Sigma$-algebre din $\mathbf{K}$ produsul lor direct este în $\mathbf{K}$.

2.9.14 **Teorema lui Birkhoff**. Fie $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{Alg}_\Sigma$ o varietate. Atunci $T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X)\in\mathbf{K}$.

**Demonstraţie**. Fie $I = \{\rho|\rho$ congruenţă pe $T(\Sigma, X)$ astfel încât există $A\in\mathbf{K}$ cu proprietatea că $T(\Sigma, X)/\rho$ este izomorfă cu o subalgebră a lui $A\}$. Conform teoremei de izomorfism avem că $\equiv_{\mathbf{K}} = \bigcap\{\rho|\rho\in I\}$.

Pentru orice $\rho\in I$ notăm cu $\varepsilon^\rho : T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X)\to T(\Sigma, X)/\rho$ funcţia definită prin: pentru orice $s\in S, x\in X_s$, $\varepsilon^\rho_s([x]_{\equiv_{\mathbf{K}_s}}) = [x]_{\rho_s}$. Deoarece $\equiv_{\mathbf{K}}\subseteq\rho$

avem că definiţia este corectă. Putem atunci extinde în mod unic pe $\varepsilon^\rho$ la un morfism de la $T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X)$ la $T(\Sigma, X)/\rho$. Conform proprietăţii de universalitate a algebrei produs am definit un morfism $\varepsilon : T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X) \rightarrow \prod_{\rho \in I} T(\Sigma, X)/\rho$.

$\varepsilon$ este injectiv. Fie $t, t' \in T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X)_s$ astfel încât $\varepsilon_s([t]_{\equiv_{\mathbf{K}_s}}) = \varepsilon_s([t']_{\equiv_{\mathbf{K}_s}})$. Atunci pentru orice $\rho \in I$ avem $\varepsilon^\rho_s([t]_{\equiv_{\mathbf{K}_s}}) = \varepsilon^\rho_s([t']_{\equiv_{\mathbf{K}_s}})$ deci $[t]_{\rho_s} = [t']_{\rho_s}$ pentru orice $\rho \in I$, deci $[t]_{\equiv_{\mathbf{K}_s}} = [t']_{\equiv_{\mathbf{K}_s}}$.

Pentru orice $\rho \in I$, $T(\Sigma, X)/\rho \in \mathbf{K}$, deci $\prod_{\rho \in I} T(\Sigma, X)/\rho \in \mathbf{K}$ şi deoarece $\varepsilon$ este injectiv avem că $T_{\mathbf{K}}(\Sigma, X) \in \mathbf{K}$. ∎

## 2.10. Clase ecuaţionale de algebre

Considerăm $X$ o mulţime fixată.

2.10.1 **Definiţie**. Fie $s \in S$. Se numeşte *ecuaţie de sort* $s$ o pereche $(L, R) \in T(\Sigma, X)_s^2$. Numim pe scurt *ecuaţie* o ecuaţie de orice sort $s \in S$. Notăm cu $\mathbf{Eqn}(\Sigma, X)_s$ mulţimea ecuaţiilor de sort $s \in S$. Notăm cu $\mathbf{Eqn}(\Sigma, X) = \bigcup_{s \in S} \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)_s$.

2.10.2 **Definiţie**. Se numeşte *teorie ecuaţională* orice mulţime $E \subseteq \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$.

2.10.3 **Definiţie**. O ecuaţie $(t, t')$ de sort $s$ se numeşte *validă* într-o $\Sigma$-algebră $A$ dacă pentru orice funcţie $\alpha : X \rightarrow A$ avem $\overline{\alpha}_s(t) = \overline{\alpha}_s(t')$. În acest caz notăm $A \models t = t'$.

2.10.4 **Definiţie**. Dacă $E \subseteq \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$, o $\Sigma$-algebră $A$ se numeşte *model al lui* $E$ (se notează $A \models E$) dacă $A \models t = t'$ pentru orice $(t, t') \in E$. Notăm cu $\mathbf{Mod}(E)$ modelele lui $E$, anume $\{A \in \mathbf{Alg}_\Sigma | A \models E\}$.

2.10.5 **Notaţie**. Fie $\mathbf{K}$ o clasă de $\Sigma$-algebre. $(t, t') \in \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)_s$. Spunem că $\mathbf{K} \models t = t'$ dacă $A \models t = t'$ pentru orice $A \in \mathbf{K}$. Pentru $E \subseteq \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$, notăm $\mathbf{K} \models E$ dacă $\mathbf{K} \models t = t'$ pentru orice $(t, t') \in E$. Notăm prin $\mathbf{Eqn}(\mathbf{K})(\Sigma, X) = \{e \in \mathbf{Eqn}(\Sigma, X) | \mathbf{K} \models e\}$ *teoria ecuaţională* a lui $\mathbf{K}$. În concluzie o clasă $\mathbf{K}$ de $\Sigma$-algebre este *clasă ecuaţională* dacă există $E \subseteq \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$ astfel încât $\mathbf{K} = \mathbf{Mod}(E)$.

## 2.11. Calcul ecuaţional

2.11.1 **Definiţie**. Fie $s', s"\in S, t'\in T(\Sigma, X)_{s'}, x\in X_{s"}, t"\in T(\Sigma, X)_{s"}$. Notăm cu $t'[x/t"]$ *termenul obţinut în urma substituţie lui $x$ cu $t"$ în $t'$*. Fie $\alpha : X\to T(\Sigma, X)$ definită astfel pentru orice $s\in S$ şi $y\in X_s$:

$\alpha_s(y) = t"$ dacă $s = s"$ şi $y = x$, $y$ altfel. Fie $\overline{\alpha} : T(\Sigma, X)\to T(\Sigma, X)$ unicul morfism de algebre ce extinde pe $\alpha$. Atunci evident $t'[x/t"] = \overline{\alpha}(t')$. Demonstraţie prin inducţie structurală după $t'$. Exerciţiu!

2.11.2 **Definiţie. Regulile calculului ecuaţional**. Fie $E$ o mulţime de ecuaţii şi $t = t'$ o ecuaţie. Spunem că $t = t'$ *se deduce din $E$* şi notăm $E\vdash t = t'$, dacă $t = t'\in E$ sau se deduce din următoarele reguli de deducţie:

1. **reflexivitate** $\emptyset\vdash t = t$.
2. **simetrie** $E\vdash t = t'$ implică $E\vdash t' = t$.
3. **tranzitivitate** $E\vdash t = t', E\vdash t' = t"$ implică $E\vdash t = t"$.
4. **Legea substituţiei**. Dacă $t_1 = t'_1$ este o ecuaţie de sort $s$, iar $t_2 = t'_2$ este o ecuaţie de sort $s'$ şi $x\in X_{s'}$ şi $E_1\vdash t_1 = t'_1, E_2\vdash t_2 = t'_2$ atunci $E_1\cup E_2\vdash t_1[x/t_2] = t'_1[x/t'_2]$.

Pentru $E\subseteq \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$ notăm $\equiv^E_s\subseteq T(\Sigma, X)^2_s$ relaţia definită prin $t\equiv^E_s t'$ dacă şi numai dacă $E\vdash t = t'$. Evident, $\equiv^E_s$ este relaţie de echivalenţă.

2.11.3 **Lemă**. Relaţia $\equiv^E$ este congruenţă.

**Demonstraţie**. Fie $s\in S$, $w = s_1...s_n\in S^*$, $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ şi pentru orice $i = 1, ...n$, $t_i, t'_i\in T(\Sigma, X)_{s_i}$ astfel încât $t_i\equiv^E_{s_i} t_i$ pentru orice $i = 1, ..., n$. Fie pentru orice $i = 1, ..., n$, $x_i\in T(\Sigma, X)_{s_i}$. Din reflexivitate avem $\sigma^T(x_1, ..., x_n)\equiv^E_{s_i}\sigma^T(x_1, ..., x_n)$. Conform legii substituţiei obţinem că $\sigma^T(t_1, ..., t_n)\equiv^E_{s_i}\sigma^T(t'_1, ..., t'_n)$. ▪

2.11.4 **Definiţie**. Fie $(P, \leq), (Q, \leq)$ două mulţimi parţial ordonate. Se numeşte *conexiune Galois* de la $P$ la $Q$ o pereche de funcţii crescătoare $(g, d)$, $g : P\to Q, d : Q\to P$ cu proprietatea că $1_P\leq dg$ şi $gd\leq 1_Q$. comparaţia funcţiilor făcându-se punctual, adică $f\leq g\Leftrightarrow f(x)\leq g(x)$ pentru orice $x$.

2.11.5 **Lemă**. Fie $(P, \leq), (Q, \leq)$ două mulţimi parţial ordonate şi $(g, d)$ o conexiune Galois de la $P$ la $Q$. Atunci $d = dgd$ şi $g = gdg$.

**Demonstraţie**. $d = d1_Q\geq dgd$ şi $d = 1_P d\leq dgd$ de unde rezultă că $d = dgd$. Cealaltă relaţie se demonstrează analog. ▪

2.11.6 **Lemă**. Considerăm $\mathcal{P}(\mathbf{Eqn}(\Sigma, X))$ ordonată prin incluziune, iar $\mathcal{P}(\mathbf{Alg}_\Sigma)$ ordonată prin incluziune inversă. Atunci funcţiile

$\mathbf{Mod} : \mathcal{P}(\mathbf{Eqn}(\Sigma, X)) \to \mathcal{P}(\mathbf{Alg}_\Sigma)$ şi $\mathbf{Eqn} : \mathcal{P}(\mathbf{Alg}_\Sigma) \to \mathcal{P}(\mathbf{Eqn}(\Sigma, X))$ formează o conexiune Galois. Mai precis:

i. $E_1 \subseteq E_2$ implică $\mathbf{Mod}(E_2) \subseteq \mathbf{Mod}(E_1)$.

ii. $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2$ implică $\mathbf{Eqn}(\mathbf{K}_2) \subseteq \mathbf{Eqn}(\mathbf{K}_1)$

iii. $E \subseteq \mathbf{Eqn}(\mathbf{Mod}(E))$

iv. $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Mod}(\mathbf{Eqn}(\mathbf{K}))$

v. $\mathbf{Mod}(E) = \mathbf{Mod}(\mathbf{Eqn}(\mathbf{Mod}(E)))$.

vi. $\mathbf{Eqn}(\mathbf{K}) = \mathbf{Eqn}(\mathbf{Mod}(\mathbf{Eqn}(\mathbf{K})))$.

2.11.7 **Lemă**. Orice clasă ecuaţională de $\Sigma$-algebre este varietate.

**Demonstraţie**. Este suficient să verificăm condiţiile a), b), c) de la 2.9.13. Fie $E$ o mulţime de ecuaţii.

a). Fie $i : X \to T(\Sigma, X)$ incluziune. Fie $j : A \to B$ incluziunea, $B \in \mathbf{Mod}(E)$ şi $(t, t') \in E$. Fie $\alpha : X \to A$. Atunci $j\alpha : X \to B$ deci $\overline{j\alpha}(t) = \overline{j\alpha}(t')$. Evident $\overline{j\alpha} = j\overline{\alpha}$ prin compunere la dreapta cu $i$. Cum $\overline{j\alpha}(t) = \overline{j\alpha}(t')$, avem $j\overline{\alpha}(t) = j\overline{\alpha}(t')$ deci $\overline{\alpha}(t) = \overline{\alpha}(t')$.

b) Fie $A \in \mathbf{Mod}(E)$, $f : A \to B$ un morfism surjectiv de $\Sigma$-algebre, $(t, t') \in E$, $\beta : X \to B$ o funcţie. Definim $\alpha : X \to A$ cu proprietatea $f\alpha = \beta$ astfel: pentru $s \in S$, $x \in X_s$ alegem $a \in A_s$ astfel încât $\beta_s(x) = f_s(a)$. Luăm $\alpha_s(x) = a$. Dacă $i : X \to T(\Sigma, X)$ este incluziunea atunci $f\overline{\alpha}i = f\alpha = \beta$ deci $f\overline{\alpha} = \overline{\beta}$. Deoarece $\overline{\alpha}(t) = \overline{\alpha}(t')$ obţinem $\overline{\beta}(t) = \overline{\beta}(t')$.

c) Fie $(A_j)_{j \in J}$ o familie de $\Sigma$-algebre din $\mathbf{Mod}(E)$, $(t, t') \in E$, $\alpha : X \to \prod_{j \in J} A_j$. Ca să demonstrăm că $\overline{\alpha}(t) = \overline{\alpha}(t')$ este suficient să demonstrăm că pentru orice $k \in J$ $p_k(\overline{\alpha}(t)) = p_k(\overline{\alpha}(t'))$ unde $p_k : \prod_{j \in J} A_j \to A_k$ este proiecţia canonică. Dacă $i : X \to T(\Sigma, X)$ este incluziunea, notăm $\alpha_k = p_k \alpha$. Atunci $p_k \overline{\alpha} i = p_k \alpha = \alpha_k$, deci $\overline{\alpha}_k = p_k \overline{\alpha}$ de unde obţinem că $p_k(\overline{\alpha}(t)) = p_k(\overline{\alpha}(t'))$. ▪

2.11.10 **Lemă**. Fie $E \subseteq \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$. Dacă $E \vdash t = t'$ dacă şi numai dacă $T(\Sigma, X)/{\equiv^E} \models t = t'$.

**Demonstraţie.** "numai dacă". Fie

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\alpha"] & T(\Sigma,X) \arrow[d, "\overline{\alpha}"] \arrow[dl, "\overline{\alpha}'"'] \\ T(\Sigma,X) \arrow[r] & T(\Sigma,X) \end{tikzcd}$$

**fig. 7**

$\alpha : X \to T(\Sigma, X)/\equiv^E$. Definim $\alpha' : X \to T(\Sigma, X)$ astfel: pentru $s \in S, x \in X_s$, fie $\alpha(x) = [t]_{\equiv^E}$. Luăm $\alpha'(x) = t$. Evident $[.]_{\equiv^E}\alpha' = \alpha$. Atunci $[.]_{\equiv^E}\overline{\alpha}' = \overline{\alpha}$ deoarece ambele morfisme coincid pe $X$. Deoarece $E \vdash t = t', E \vdash \overline{\alpha}'_s(x) = \overline{\alpha}'_s(x)$ pentru orice $x \in X_s$, conform substituţiei avem $E \vdash \overline{\alpha}'_s(t) = \overline{\alpha}'_s(t')$, deci $[\overline{\alpha}'_s(t)]_{\equiv^E} = [\overline{\alpha}'_s(t')]_{\equiv^E}$, de unde deducem $\overline{\alpha}_s(t) = \overline{\alpha}_s(t')$.

"dacă" Presupunem $E \vdash t = t'$ falsă şi considerăm surjecţia canonică de la $T(\Sigma, X)$ la $T(\Sigma, X)/\equiv^E$. Evident $[t]_{\equiv^E} \neq [t']_{\equiv^E}$, deci $T(\Sigma, X)/\equiv^E \models t = t'$ este falsă. ▪

2.11.11 **Teoremă**. Fie $X$ o mulţime $E \subseteq \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$. Atunci pentru orice $e \in \mathbf{Eqn}(\Sigma, X)$ avem $E \vdash e$ dacă şi numai dacă $\mathbf{Mod}(E) \models e$.

**Demonstraţie**. "numai dacă". Fie $A \in \mathbf{Mod}(E)$ şi $\alpha : X \to A$. Dacă $e \in E$ atunci evident $A \models e$. Evident $A \models t = t$, $A \models t = t'$ implică $A \models t' = t$ şi $A \models t = t'$, $A \models t' = t''$ implică $A \models t = t''$.

Presupunem că $A \models t_1 = t_1'$ şi $A \models t_2 = t_2'$. Fie $s \in S$ sortul ecuaţiei $t_2 = t_2'$ şi $x \in X_s$. Definim $\beta, \gamma : X \to T(\Sigma, X)$ astfel: dacă $s' \in S$ şi $y \in X_{s'}$ $\beta_{s'}(y) = t_2$ dacă $s' = s$ şi $y = x$, $y$ altfel, iar $\gamma_{s'}(y) = t_2'$ dacă $s' = s$ şi $y = x$, $y$ altfel. Evident $\overline{\alpha}\beta = \overline{\alpha}\gamma$, deci $\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\alpha\gamma}$ (compunerea la dreapta cu incluziunea dă egalitate !). Atunci $\overline{\alpha}(t_1[x/t_2]) = \overline{\alpha}(\overline{\beta}(t_1)) = \overline{\alpha}(\overline{\beta}(t_1')) = \overline{\alpha}(\overline{\gamma}(t_1')) = \overline{\alpha}(t_1'[x/t_2'])$.

"dacă". Evident, $T(\Sigma, X)/\equiv^E$ este model al lui $E$. Fie $(t, t') \in E$, deci $T(\Sigma, X)/\equiv^E \models t = t'$. Aplicând 2.11.10 obţinem $E \vdash t = t'$. ▪

# 3. Elemente de teoria categoriilor

## 3.1. Definiţii de bază

3.1.1 **Definiţie** Spunem că s-a dat o *categorie* notată $\mathcal{C}$ dacă s-au definit:

i) o clasă $|\mathcal{C}|$ numită *clasa de obiecte* a categoriei $\mathcal{C}$

ii) pentru orice două obiecte $A, B$ ale lui $\mathcal{C}$ o mulţime $\mathcal{C}(A, B)$ numită mulţimea morfismelor de la $A$ la $B$ sau altfel zis de sursă $A$ şi destinaţie $B$. Notaţia $f : A \rightarrow B$ este echivalentă cu $f \in \mathcal{C}(A, B)$

iii) pentru orice trei obiecte $A, B, C$ ale lui $\mathcal{C}$ o operaţie de *compunere* $\circ_{ABC} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ de morfisme. (în continuare compunerea morfismelor se va nota prin simpla juxtapunere, adică dacă $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ atunci $gf \in \mathcal{C}(A, C)$)

cu proprietăţile :

a) compunerea morfismelor este asociativă, adică $f(gh) = (fg)h$ pentru orice morfisme $f, g, h$ din $\mathcal{C}$ pentru care compunerea are sens.

b) pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ există un morfism $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ astfel încât $f1_A = f$, $1_A g = g$ ori de câte ori compunerile au sens.

c) dacă $A, B, A', B'$ sunt obiecte ale lui $\mathcal{C}$ astfel încât $(A, B) \neq (A', B')$ atunci $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \emptyset$.

3.1.2 **Observaţie** Axioma c) de la 3.1.1 spune că în orice categorie nu există morfisme care au mai multe surse şi destinaţii simultan. În cazul când $\mathcal{C}$ satisface doar a) şi b) dar nu şi c), situaţia se poate remedia uşor redefinind mulţimea morfismelor de la $A$ la $B$ ca fiind mulţimea tripletelor de forma $(A, f, B)$ unde $f \in \mathcal{C}(A, B)$, compunerea efectuându-se astfel: $(B, g, C)(A, f, B) = (A, gf, C)$. Lăsăm pe seama cititorului verificarea corectitudinii definiţiei. În continuare dacă definiţia unei categorii satisface axiomele a), b) dar nu şi c) de la 3.1.1 presupunem implicit aplicat principiul expus mai sus.

3.1.3 **Observaţie** În orice categorie $\mathcal{C}$, pentru orice obiect $A$ al său morfismul $1_A$ de la 3.1.1 b) este unic şi va fi denumit în continuare *identitatea* obiectului $A$

**Demonstraţie** Fie $u : A \rightarrow A$ un morfism cu aceleaşi proprietăţi ca $1_A$ (3.1.1 b). Avem atunci $u = u1_A = 1_A$. ▪

3.1.4 **Exemple** Vom da doar obiectele, morfismele, modul de compunere a acestora, lăsând pe seama cititorului verificarea corectitudinii definiţiei.

i) Categoria **Set**. Obiecte: mulţimile. Morfisme: funcţiile. Compunerea: compunerea funcţiilor.

ii) Categoria **Top**. Obiecte: spaţiile topologice. Morfisme: funcţiile continue. Compunerea: compunerea funcţiilor.

iii) Categoria **Grp**. Obiecte: grupurile. Morfisme: morfismele de grupuri. Compunerea: compunerea funcţiilor.

iv) Fie $K$ un corp comutativ. Categoria $\mathbf{Vect_K}$. Obiecte: spaţiile vectoriale peste $K$. Morfisme: morfismele de spaţii vectoriale. Compunerea: compunerea funcţiilor.

v) Categoria **Po**. Obiecte: mulţimile parţial ordonate. Morfisme: funcţiile crescătoare. Compunerea: compunerea funcţiilor.

vi) Fie $\Sigma$ o signatură. Categoria $\mathbf{Alg_\Sigma}$. Obiecte: $\Sigma$-algebrele. Morfisme: morfismele de $\Sigma$-algebre. Compunerea: compunerea funcţiilor.

**Atenţie!** În literatura de specialitate se obişnuieşte să se definească o categorie definind doar clasa de obiecte. Putem defini clasa de obiecte ca fiind clasa mulţimilor ca la i) dar cu aceeaşi clasă de obiecte putem defini la fel de bine alte categorii cum ar fi:

vii) Categoria **Pfn**. Obiecte: mulţimile. Morfisme: funcţiile parţiale. Compunerea: compunerea funcţiilor parţiale.

viii) Categoria **Rel**. Obiecte: mulţimile. Morfisme: Relaţiile binare. Compunerea: compunerea relaţiilor binare, adică dacă $\rho \subseteq A \times B$, $\theta \subseteq B \times C$, $\theta\rho = \{(x,z) \in (A,C) | \exists y \in B (x,y) \in \rho, (y,z) \in \theta\}$.

Observăm că pentru orice două mulţimi $A, B$ ,

$\mathbf{Set}(A,B) \subseteq \mathbf{Pfn}(A,B) \subseteq \mathbf{Rel}(A,B)$ compunerea efectuându-se la fel în **Set**, **Pfn** şi **Rel**.

**Atenţie!** În literatura de specialitate exemplele de mai sus sunt cele mai frecvent enunţate. De aici există pericolul de a se trage concluzia complet greşită că în orice categorie obiectele sunt mulţimi înzestrate cu anumite structuri şi că morfismele sunt funcţii compatibile cu structurile respective. Următoarele două exemple vor demonstra exact contrariul.

ix) Fie $(P, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Definim categoria **P** astfel: obiecte $P$, morfisme: pentru orice $x, y \in P$, $\mathbf{P}(x,y) = \{(x,y)\}$ dacă $x \leq y$, $\mathbf{P}(x,y) = \emptyset$ altfel. Compunerea $(y,z)(x,y) = (x,z)$. Observăm că în această categorie orice ecuaţie este verificată în sensul că orice două morfisme cu aceeaşi sursă şi destinaţie coincid.

x) Fie $(X, d)$ un spaţiu metric. Definim categoria **X** astfel: obiecte

$X$, morfisme $x, y \in X$, $\mathbf{X}(x,y) = \{(x,\alpha,y) | \alpha \geq d(x,y)\}$. Compunerea $(y,\beta,z)(x,\alpha,y) = (x,\alpha+\beta,z)$.

3.1.5 **Definiţie** Fie $\mathcal{C}$ o categorie. O categorie $\mathcal{D}$ se numeşte *subcategorie* a lui $\mathcal{C}$ şi se notează $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ dacă :

i) $|\mathcal{D}| \subseteq |\mathcal{C}|$

ii) pentru orice $A, B \in |\mathcal{D}|$ avem $\mathcal{D}(A,B) \subseteq \mathcal{C}(A,B)$

iii) compunerea în $\mathcal{D}$ se face ca şi în $\mathcal{C}$

O subcategorie $\mathcal{D}$ a lui $\mathcal{C}$ se numeşte *plină* dacă pentru orice $A, B \in |\mathcal{D}|$ avem $\mathcal{D}(A,B) = \mathcal{C}(A,B)$.

**Atenţie! Grp** nu este subcategorie a lui **Set**, deorece pe aceeaşi mulţime se pot defini mai multe operaţii binare care să determine o structură de grup. La fel, **Top** nu este subcategorie a lui **Set**, **Po** nu este subcategorie a lui **Set**, etc. În schimb **Rel** este subcategorie a lui **Pfn**, care la rândul său este subcategorie a lui **Set**.

3.1.6 **Definiţie** Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Definim categoria $\mathcal{C}^o$, numită *duala lui* $\mathcal{C}$ astfel

i) $|\mathcal{C}^\circ| = |\mathcal{C}|$

ii) pentru orice $A, B \in |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}^\circ(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$

iii) pentru orice $A, B, C \in |\mathcal{C}|$, $f \in \mathcal{C}^\circ(A,B) = \mathcal{C}(B,A), g \in \mathcal{C}^\circ(B,C) = \mathcal{C}(C,B)$, $g \circ_{\mathcal{C}^\circ} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$.

3.1.7 **Definiţie** Pentru orice definiţie sau enunţ într-o categorie arbitrară, definim *duala* acesteia definiţia sau enunţul obţinute din cele iniţiale inversând sursa cu destinaţia la toate morfismele care intervin. Observăm că dualele sunt definiţiile sau enunţurile iniţiale exprimate în categoria duală.

3.1.8 **Propoziţie. (Principiul dualităţii)** Dacă un enunţ $P$ este adevărat în orice categorie atunci şi duala sa $P^\circ$ este adevărată în orice categorie.

**Demonstraţie** Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Atunci $P$ este adevărat în $\mathcal{C}^\circ$, deci $P^\circ$ este adevărat în $\mathcal{C}$. ∎

3.1.9 **Exemple (Continuare)** a) Fie $\mathcal{C}$, şi $\mathcal{D}$ două categorii. *Categoria produs* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ se defineşte astfel:

- $|\mathcal{C} \times \mathcal{D}| = |\mathcal{C}| \times |\mathcal{D}|$
- dacă $(A,B), (A',B') \in |\mathcal{C} \times \mathcal{D}|$ atunci $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})((A,B),(A',B')) = \mathcal{C}(A,A') \times \mathcal{D}(B,B')$
- dacă $(f,g) : (A,B) \rightarrow (A',B')$ şi $(u,v) : (A',B') \rightarrow (A", B")$ atunci $(u,v)(f,g) = (uf, vg)$, compunerile din membrul drept facându-se în $\mathcal{C}$

şi respectiv $\mathcal{D}$.

b) Fie $\mathcal{C}$ o categorie $A$ un obiect al său. Categoria *virgulă* a lui $\mathcal{C}$ prin $A$, notată prin $\mathcal{C}\downarrow A$, se defineşte astfel:

- $|\mathcal{C}\downarrow A| = \{(B, f)|B\in\mathcal{C}, f\in\mathcal{C}(B, A)\}$
- $(\mathcal{C}\downarrow A)((B, f), (C, g)) = \{u\in\mathcal{C}(B, C)|gu = f\}$
- compunerea morfismelor se face ca în $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

**fig. 8**

*Exerciţiu* Să se verifice corectitudinea operaţiei de compunere a morfismelor definită mai sus.

## 3.2. Obiecte şi morfisme distinse

3.2.1 **Definiţie** Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi $f \in \mathcal{C}(A, B)$. $f$ se numeşte:

a) *inversabil la stânga* dacă există $g \in \mathcal{C}(B, A)$ astfel încât $gf = 1_A$;

b) *inversabil la dreapta* dacă există $g \in \mathcal{C}(B, A)$ astfel încât $fg = 1_B$;

c) *epimorfism* dacă $uf = vf$ implică $u = v$;

d) *monomorfism* dacă $fu = fv$ implică $u = v$;

e) *izomorfism* dacă există $g \in \mathcal{C}(B, A)$ astfel încât $gf = 1_A, fg = 1_B$.

3.2.2 **Observaţie** Între noţiunile definite la 3.2.1 există următoarele relaţii:

i) a)$\Rightarrow$d)

ii) b)$\Rightarrow$c)

iii) a) şi b) echivalent e)

**Demonstraţie** i) Presupunem $fu = fv$. Compunem la stânga cu $g$ şi obţinem u=v.

ii) Asemănător cu i).

iii) Evident, $f$ izomorfism implică $f$ inversabil atât la stânga cât şi la dreapta. Invers, presupunem $f$ inversabil atât la stânga cât şi la dreapta. Există deci $g, h \in \mathcal{C}(B, A)$ astfel încât $gf = 1_A, fh = 1_B$. Rămâne să arătăm că $g = h$. Avem $g = g1_B = gfh = 1_A h = h$. ∎

**Exemple** În **Set** monomorfismele şi morfismele inversabile la stânga sunt injecţiile, iar epimorfismele şi morfismele inversabile la dreapta sunt surjecţiile. Izomorfismele sunt bijecţiile. La fel în $\mathbf{Alg}_{\mathbf{\Sigma}}$ izomorfismele sunt morfismele bijective conform 2.6.4.

3.2.3 **Observaţie** $g$ de la 3.2.1.e), dacă există, este unic si va fi numit *inversul lui* $f$ şi notat cu $f^{-1}$.

**Demonstraţie** Fie $h \in \mathcal{C}(B, A)$ cu aceleaşi proprietăţi ca şi $g$. Atunci ca şi la 3.2.2.iii) avem $g = g1_B = gfh = 1_A h = h$ ∎

**Atenţie!** Într-o categorie ale cărei obiecte sunt mulţimi înzestrate cu o anumită structură, morfismele funcţiile compatibile cu structura respectivă, iar compunerea morfismelor este compunerea funcţiilor (**Set**, **Top**, **Po**, **Grp**, $\mathbf{Alg}_{\mathbf{\Sigma}}$ etc) orice izomorfism este o funcţie bijectivă, dar inversa nu este adevărată. Un morfism bijectiv este izomorfism dacă inversa sa ca funcţie este tot morfism. Echivalenţa între noţiunile de izomorfism şi morfism bijectiv are loc în categorii cum ar fi **Set**, **Grp**, $\mathbf{Alg}_{\mathbf{\Sigma}}$ dar nu în **Top**, **Po**.

3.2.4 **Definiţie** Două obiecte $A, B$ ale unei categorii $\mathcal{C}$ se numesc *izomorfe* dacă există $f : A \to B$ izomorfism.

3.2.5 **Observaţie** Dacă $f : A \to B$ este izomorfism atunci $f^{-1} : B \to A$ este izomorfism.

3.2.6 **Observaţie** Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sunt izomorfisme atunci $gf : A \to C$ este izomorfism şi $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ (compunerea de izomorfisme este izomorfism)

**Demonstraţie** Se demonstrează că $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. ∎

3.2.7 **Propoziţie** Relaţia de izomorfism pe obiectele unei categorii este o relaţie de echivalenţă

**Demonstraţie**. Evident, $1_A$ este izomorfisn de la $A$ la $A$. Conform 3.2.6 relaţia de izomorfism este tranzitivă şi conform 3.2.5 este simetrică. ∎

3.2.8 **Definiţie** Dacă $f : B \to A$, $g : C \to A$ spunem că $f \leq g$ dacă există un monomorfism $u : B \to C$ astfel încât $gu = f$.

3.2.9 **Observaţie** Compunerea oricăror două monomorifsme este monomorfism. Dual, compunerea oricăror două epimorifsme este epimorfism

**Demonstraţie** Fie $f : A \to B$, $g : B \to C$ monomorfisme. Presupunem $gfu = gfv$. $g$ monomorfism implică $fu = fv$. $f$ monomorfism implică $u = v$. ∎

3.2.10 **Observaţie** Relaţia $\leq$ definită pe obiectele lui $\mathcal{C}\downarrow A$ la 3.2.8 este reflexivă şi tranzitivă.

**Demonstraţie** $f = f1_B$ pentru orice morfism $f : B \to A$. Presupunem $f : B \to A$, $g : C \to A$, $h : D \to A$ astfel încât exista monomorfismele $u : B \to C$, $v : C \to D$ astfel încât $gu = f$ şi $hv = g$. Atunci $hvu = gu = f$ iar $vu$ este monomorfism conform 3.2.9. ∎

3.2.11 **Definiţie** Pe $\mathcal{C}\downarrow A$ definim relaţia $f \sim g \Longleftrightarrow f \leq g, g \leq f$. Conform 3.2.10 $\sim$ este relaţie de echivalenţă. Clasele de echivalenţă se numesc *subobiectele lui A*.

3.2.12 **Definiţie** a) Un morfism $u : A \to B$ se numeşte *principal* dacă pentru orice morfism $f : A \to B$ există un morfism $g : A \to A$ astfel încât $f = ug$

b) Obiectul $A$ este *retractă* a obiectului $B$ dacă există morfismele $f : A \to B$, $g : B \to A$ astfel încât $gf = 1_A$.

3.2.13 **Propoziţie** i) Dacă $f : A \to B$, $g : B \to A$ astfel încât $gf = 1_A$ atunci $f$ este monomorfism iar $g$ epimorfism şi principal.

ii) Dacă $g : B \to A$ este principal şi $k : B \to A$ epimorfism atunci $g$ este epimorfism.

iii) Dacă $f : A \to B$, $g : B \to A$ astfel încât $gf = 1_A$ şi $g' : B \to A$ principal atunci există $f' : A \to B$ astfel încât $g'f' = 1_A$

**Demonstraţie** i) Conform 3.2.2 rămâne de demonstrat că $g$ este principal. Fie $h : B \to A$. Atunci $h = g(fh)$.

ii) Presupunem $ug = vg$. Fie $k' : B \to B$ cu proprietatea $gk' = k$. Atunci $ugk' = vgk'$. Deci $uk = vk$. Deoarece $k$ epimorfism avem $u = v$.

iii) Fie $s : B \to B$ astfel încât $g's = g$, deci $g'sf = gf = 1_A$. ▪

3.2.14 **Definiţie** Un obiect $\perp$ al unei categorii $\mathcal{C}$ se numeşte *iniţial* dacă pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ există un unic morfism $\perp_A : \perp \to A$. Noţiunea duală este cea de *obiect final*, adică un obiect $\top$ astfel încât pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ există un unic morfism $\top_A : A \to \top$

**Exemple** În **Set** mulţimea vidă este obiect iniţial, pe când mulţimile cu un singur element sunt obiecte finale. În **Pfn** şi **Rel** mulţimea vidă este atât obiect iniţial cât şi final. Grupul cu un singur element, elementul neutru, este obiect iniţial şi final în **Grp**. Inelul întregilor este obiect iniţial în categoria inelelor.

Fie $(P, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. În categoria **P** există obiect iniţial (resp. final) dacă $P$ are un cel mai mic (respectiv cel mai mare) element.

Următoarea propoziţie spune că obiectele iniţiale (respectiv finale), dacă există, formează o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de izomorfism. (3.2.7)

3.2.15 **Propoziţie** i) Dacă $A, B$ sunt două obiecte iniţiale atunci ele sunt izomorfe.

ii) Fie $\perp$ un obiect iniţial şi $A$ un obiect izomorf cu el. Atunci $A$ este obiect iniţial.

**Demonstraţie** i) Există morfismele $f : A \to B$ şi $g : B \to A$. Atunci $gf : A \to A$ deci $gf = 1_A$ ($A$ iniţial). Analog $fg = 1_B$.

ii) Fie $f : \perp \to A$, $g : A \to \perp$ izomorfisme reciproc inverse şi $B$ un obiect arbitrar. Atunci $\perp_B g : A \to B$. Fie $u : A \to B$. Atunci $u\perp_A : \perp \to B$ deci $u\perp_A = \perp_B$. Evident $\perp_A = f$ şi compunând la dreapta cu g obţinem $u = \perp_B g$. ▪

## 3.3. Functori. Definiţie şi exemple

3.3.1 **Definiţie** Fie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ două categorii. Spunem că s-a dat un *functor* de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{D}$ notat $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dacă s-au definit:

- o funcţie $F_o : |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ numită acţiunea functorului pe obiecte

- pentru orice două obiecte $A, B$ ale lui $\mathcal{C}$ o funcţie

$F_{AB} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F_o(A), F_o(B))$ numită acţiunea functorului pe morfisme cu proprietăţile:

i) comută cu compunerea morfismelor, adică dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sunt morfisme în $\mathcal{C}$ atunci $F_{AC}(gf) = F_{BC}(g)F_{AB}(f)$.

ii) comută cu identităţile: pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ avem $F_{AA}(1_A) = 1_{F_o(A)}$.

În cele ce urmează vom omite indicii lui $F$, desemnând prin $F$ atât acţiunea functorului pe obiecte, cât şi cea pe morfisme. În acest fel, formulele de la 3.3.1 i) şi ii) devin : $F(gf) = F(g)F(f)$ şi $F(1_A) = 1_{F(A)}$

**Exemple** i) Fie $\mathcal{C}$ o subcategorie a lui $\mathcal{D}$. Functorul incluziune $i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este definit astfel: $i(A) = A$ pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ şi $i(f) = f$ pentru orice morfism $f$ al lui $\mathcal{C}$.

ii) Functorul uituc $U$ : $\mathbf{Alg}_{\boldsymbol{\Sigma}} \to \mathbf{Set}^S$ definit astfel $U(A, \Sigma^A) = A$ pentru orice $\Sigma$-algebră $A$ şi $U(f) = f$ pentru orice morfism de $\Sigma$-algebre $f$. Analog se pot defini functori uituci de la **Top** la **Set**, de la **Po** la **Set**, de la **Grp** la **Set**, de la categoria **Grp** la categoria monoizilor, de la categoria inelelor la categoria grupurilor abeliene sau a monoizilor, etc. În esenţă un functor uituc "uită" din proprietăţi.

iii) Fie $P, Q$ două mulţimi parţial ordonate şi $f : P \to Q$ o funcţie crescătoare. Atunci se poate defini în mod unic un functor $F : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ a cărui acţiune pe obiecte coincide cu $f$.

## 3.4. Limite

3.4.1 **Definiţie** O categorie $\mathcal{C}$ se numeşte *categorie mică* dacă obiectele sale formează o mulţime.

În cele ce urmează vom considera **I** o categorie mică şi vom nota cu $I$ mulţimea obiectelor sale. De asemenea vom considera $\Delta : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$ un functor. Vom nota cu $A_i = \Delta(i)$ pentru orice $i \in I$.

3.4.2 **Definiţie** Se numeşte *con* sau *con proiectiv* peste $\Delta$ o familie $(f_i)_{i\in I}$ de morfisme $f_i : A \to A_i$ (obiectul $A$ se numeşte vârful conului) cu proprietatea că pentru orice morfism $\alpha : i \to j$ din **I** avem $\Delta(\alpha) f_i = f_j$. Conul se mai notează $(A, (f_i)_{i\in I})$.

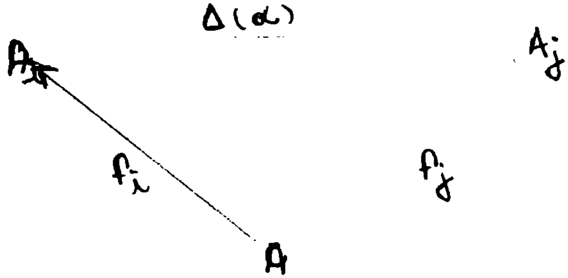


**fig. 9**

3.4.3 **Observaţie** Proprietatea din definiţia de mai sus este verificată totdeauna pentru $\alpha$ identitate.

Noţiunea duală se numeşte *co-con* sau *con inductiv* care se notează $((f_i)_{i\in I}, A)$.

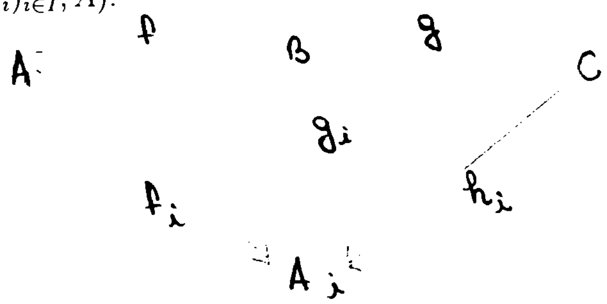


**fig. 10**

3.4.4 **Definiţie** Fie $(A,(f_i)_{i\in I})$, $(B,(g_i)_{i\in I})$ două conuri peste $\Delta$. Se numeşte *morfism de conuri* de la $(A,(f_i)_{i\in I})$ la $(B,(g_i)_{i\in I})$ un morfism $f: A\to B$ din $\mathcal{C}$ cu proprietatea $g_i f = f_i$ pentru orice $i\in I$. Fie $(C,(h_i)_{i\in I})$ alt con peste $\Delta$ şi $g$ un morfism de conuri de la $(B,(g_i)_{i\in I})$ la $(C,(h_i)_{i\in I})$. *Compunerea* morfismelor de conuri se defineşte ca fiind compunerea morfismelor $f$ şi $g$ efectuată ca în $\mathcal{C}$.

3.4.5 **Propoziţie** i) Compunerea de morfisme de conuri este tot morfism de conuri.

ii) $1_A$ este morfism de conuri de la $(A,(f_i)_{i\in I})$ la $(A,(f_i)_{i\in I})$.

**Demonstraţie** i) Cu notaţiile de la 3.4.4 avem $h_i(gf) = (h_i g)f = g_i f = f_i$. ii) este evidentă. ▪

3.4.6 **Definiţie** Definim *categoria conurilor peste* $\Delta$ notată $Cone(\Delta)$ astfel:

- obiecte: conurile peste $\Delta$
- morfisme: morfismele de conuri
- compunerea: compunerea morfismelor de conuri

3.4.7 **Definiţie** Un con peste $\Delta$ se numeşte *con limită* sau *limită a lui* $\Delta$ sau *limită proiectivă a lui* $\Delta$ dacă este obiect final în categoria $Cone(\Delta)$. Noţiunea duală se numeşte *co-limită a lui* $\Delta$ sau *limită inductivă a lui* $\Delta$. Cu alte cuvinte un con limită este un con $(A,(f_i)_{i\in I})$ cu proprietatea că pentru orice alt con $(B,(g_i)_{i\in I})$ există un unic morfism $u: B\to A$ astfel încât $f_i u = g_i$ pentru orice $i\in I$.

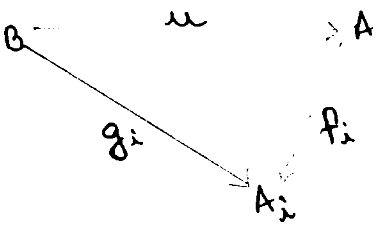


**fig. 11**

3.4.8 **Propoziţie (Teorema de unicitate a limitelor)** Fie $(A,(f_i)_{i\in I})$ un con limtă a lui $\Delta$. Atunci orice alt con limită al lui $\Delta$ este de forma $(B,(uf_i)_{i\in I})$ unde $u: A\to B$ este izomorfism în $\mathcal{C}$.

**Demonstraţie** Imediată din definiţia limitei şi din 3.2.15. ▪

3.4.9 **Exemple** Lăsăm pe seama cititorului verificarea corectitudinii definiţiilor.

i) Fie $I$ o mulţime. Definim categoria **I** astfel:

- obiecte: elementele lui $I$

- morfisme: identităţile

A defini un functor $\Delta$ de la **I** la o categorie $\mathcal{C}$, revine la a defini doar acţiunea sa pe obiecte, adică o familie $(A_i)_{i\in I}$ de obiecte ale lui $\mathcal{C}$. A defini un con peste $\Delta$ revine la a defini o familie de morfisme $(f_i : A\to A_i)_{i\in I}$. Limita unui astfel de functor se numeşte *produsul direct* al familiei $(A_i)_{i\in I}$ adică un obiect $\prod_{i\in I}A_i$ împreună cu o familie de morfisme $(p_i : \prod_{i\in I}A_i\to A_i)_{i\in I}$, numite *proiecţiile canonice* cu proprietatea că pentru orice orice obiect $B$ al lui $\mathcal{C}$ şi orice familie de morfisme $(f_i : B\to A_i)_{i\in I}$ există un unic morfism $f : B\to\prod_{i\in I}A_i$ astfel încât $p_i f = f_i$ pentru orice $i\in I$.

ii) Noţiunea duală celei de produs direct se numeşte *sumă directă* sau *co-produs* şi celei de proiecţie canonică *injecţie canonică.*

iii) Dacă $I$ este mulţimea vidă atunci produsul direct (respectiv suma directă), dacă există, este obiect final (respectiv iniţial) în $\mathcal{C}$.

iv) Conform 2.8.2 categoria **Set** are produse directe.

v) Conform 2.8.5 categoria $\mathbf{Alg}_{\mathbf{\Sigma}}$ este cu produse directe ce se calculează la fel ca în **Set**. Acelaşi lucru se petrece şi în alte categorii cum ar fi categoria monoizilor, grupurilor, inelelor, mai precis în orice subcategorie plină a lui $\mathbf{Alg}_{\mathbf{\Sigma}}$ ale cărei obiecte sunt o clasă ecuaţională de $\Sigma$-algebre. La fel şi în **Po** sau **Top**.

vi) **Set** are sume directe. Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Definim *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ notată $\coprod_{i\in I}A_i$ mulţimea

$\{(a,i)|i\in I, a\in A_i\}$. Injecţiile canonice $k_i : A_i\to\coprod_{i\in I}A_i$ sunt definite astfel $k_i(a) = (a,i)$ pentru orice $i\in I$ şi $a\in A_i$. Dacă $B$ este o mulţime şi pentru orice $i\in I$ $f_i : A_i\to B$ o familie de funcţii, atunci funcţia $f$ : $\coprod_{i\in I}A_i\to B$ definită prin $f(a,i) = f_i(a)$ este unica funcţie $g : \coprod_{i\in I}A_i\to B$ cu proprietatea $gk_i = f_i$ pentru orice $i\in I$.

La v) am arătat că în multe categorii produsele directe se calculează ca în **Set**. Situaţia nu se prezintă la fel în cazul sumelor directe.

vii) Fie **Ab** subcategoria plină a lui **Grp** ale cărei obiecte sunt grupurile abeliene. **Ab** este cu sume directe finite. De exemplu, fie $G_i, i = 1,2$ două grupuri abeliene. Folosim notaţia aditivă. Suma directă este formată din grupul produs $G_1\times G_2$ (acelaşi obiect ca şi la produsul direct!) şi din injecţiile $k_1(x) = (x,0), k_2(y) = (0,y)$. Dacă $G$ este un grup abelian şi $f_i : G_i\to G$ atunci $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$ este unicul morfism $g : G_1 \times G_2 \to G$ cu proprietatea $gk_i = f_i$ pentru orice $i = 1, 2$. Lăsăm pe seama cititorului cazul unui număr finit arbitrar de grupuri abeliene.

3.4.10 **Definiţie** Dacă $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ sunt două familii de obiecte pentru care există produsul direct cu proiecţiile canonice $(p_i)_{i \in I}$ şi respectiv $(q_i)_{i \in I}$ şi $f_i : A_i \to B_i$ $i \in I$, definim $\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$ unicul morfism $g : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$ cu proprietatea $q_i g = f_i p_i$ pentru orice $i \in I$.

3.4.11 **Definiţie** O categorie $\mathcal{C}$ se numeşte *carteziană* dacă are toate produsele directe finite (inclusiv obiectul final).

3.4.12 **Definiţie** O categorie carteziană $\mathcal{C}$ se numeşte *cartezian închisă* dacă pentru orice două obiecte $A, B$ avem un obiect notat $B^A$ şi un morfism $e_{A,B} : B^A \times A \to B$ astfel încât pentru orice obiect $C$ şi $f : C \times A \to B$ există un unic morfism $f' : C \to B^A$ astfel încât $e_{A,B}(f' \times 1_A) = f$.

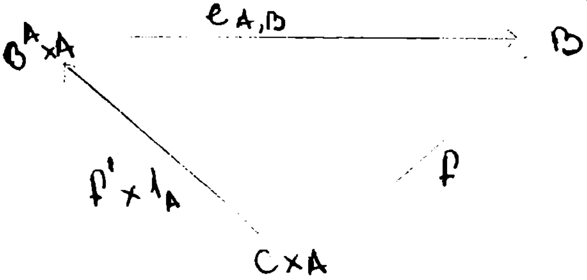


**fig 12**

3.4.13 **Exemple (Continuare)** i) Fie $(P, \leq)$ o mulţime parţial ordonată, $\Delta : \mathbf{I} \to \mathbf{P}$ un functor. Atunci un con (respectiv co-con) peste $\Delta$ este un minorant (respectiv majorant) al imaginii functorului pe obiecte. Conul (respectiv co-conul) limită, dacă există, este cel mai mare minorant (respectiv cel mai mic majorant), adică infimumul (respectiv supremumul) imaginii functorului pe obiecte.

ii) Fie $(P, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Categoria asociată $\mathbf{P}$ este cartezian inchisă dacă şi numai dacă $P$ este semilatice inferioară cu prim element si pentru orice $a, b \in P$ mulţimea $\{z \in P | z \wedge a \leq b\}$ are prim element. O asemenea mulţime parţial ordonată se numeşte *algebră Heyting*.

iii) **Set**, **Grp**, **Po**, sau mai bine zis orice categorie în care pentru orice două obiecte ale sale mulţimea morfismelor între ele este mulţimea suport al unui obiect al aceleiaşi categorii, este cartezian închisă.

iv). Fie $I$ o mulţime cu două elemente $a, b$. În categoria **I**, în afara identităţilor, avem doar două morfisme $i, j : a \to b$. A defini un functor $\Delta : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$, revine la a da două obiecte $A, B$ împreună cu două morfisme $f, g : A \to B$. A defini un con peste $\Delta$, revine la a da un obiect $C$ şi un morfism $u : C \to A$ cu proprietatea că $fu = gu$. În acest caz particular, conul (respectiv co-conul) limită se numeşte *egalizatorul*, respectiv *co-egalizatorul* morfismelor $f, g$. Mai precis, egalizatorul lui $f, g$ este un morfism $u : U \to A$ astfel încât $fu = gu$ şi pentru orice morfism $h : C \to A$ cu proprietatea $fh = gh$ există un unic morfism $\varphi : C \to U$ astfel încât $u\varphi = h$.

v) Categoria **Set** are egalizatori. Într-adevăr, cu notaţiile de mai sus, fie $U = \{x \in A | f(x) = g(x)\}$, $u : U \to A$ incluziunea. Dacă $h : C \to A$ are proprietatea $fh = gh$ definim $\varphi : C \to U$ prin $\varphi(c) = h(c)$. Într-adevăr $\varphi(c) \in U$. $\varphi$ este unicul morfism cu proprietatea de la iv).

vi) Categoria **Set** are co-egalizatori. Într-adevăr, cu notaţiile de mai sus, fie $\rho$ relaţia de echivalenţă generată de $\{(f(x), g(x)) \in B^2 | x \in A\}$, $U$ mulţimea cât a lui $B$ obţinută prin factorizare la $\rho$, $u : B \to U$, $u(b) = [b]_\rho$. Dacă $h : B \to C$ este o funcţie cu proprietatea că $hf = hg$, definim $\varphi : U \to C$ prin $\varphi([b]_\rho) = h(b), b \in B$. $\varphi$ este corect definită. Într-adevăr, $\{(f(x), g(x)) \in B^2 | x \in A\} \subseteq ker(h)$ deci $\rho \subseteq ker(h)$. $\varphi$ este unica funcţie $\psi : U \to C$ cu proprietatea că $\psi u = h$.

vii) Fie $I$ o mulţime cu trei elemente $a, b, c$. În categoria $\mathbf{I}$, în afara identităţilor, avem doar două morfisme $i : b \to a$, $i : c \to a$. A defini un functor $\Delta : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$ revine la a da trei obiecte $A, B, C$ împreună cu două morfisme $f : B \to A$, $g : C \to A$. A defini un con peste $\Delta$ revine la a da un obiect $X$ şi două morfisme $u : X \to B$, $v : X \to C$ cu proprietatea că $fu = gu$. Conul limită se numeşte *pullback-ul* morfismelor $f, g$. Noţiunea duală se numeşte *pushout*.

viii) **Exerciţiu** Demonstraţi că **Set** are toate pullback-urile şi toate pushout-urile.

3.4.14 **Teoremă**. Fie $(A, (f_i)_{i \in I})$ con limită al unui functor $\Delta : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$, $g, h : B \to A$ astfel încât $f_i g = f_i h$ pentru orice $i \in I$. Atunci $g = h$.

**Demonstraţie** $(B, (f_i g)_{i \in I})$ este con, iar $g, h$ sunt morfisme de la $(B, (f_i g)_{i \in I})$ la $(A, (f_i)_{i \in I})$. ▪

3.4.15 **Teoremă (de completitudine)**. O categorie $\mathcal{C}$ cu produse directe si egalizatori are toate limitele.

**Demonstraţie**. Fie $\Delta : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$ un functor. Notăm cu $H$ mulţimea morfismelor din **I**. Pentru fiecare morfism $\alpha$ din $H$ notăm cu $s(\alpha)$ sursa şi cu $d(\alpha)$ destinaţia sa (Mai precis $\alpha : s(\alpha) \to d(\alpha)$). Fie $(A, (p_i)_{i \in I})$ produsul direct al familiei de obiecte $(A_i)_i \in I$ şi $(B, (q_\alpha)_{\alpha \in H})$ produsul direct al familiei $(A_{d(\alpha)})_{\alpha \in H}$. Din proprietatea de universalitate a produselor directe există morfismele $f, g : A \to B$ astfel încât $q_\alpha f = p_{d(\alpha)}$ şi $q_\alpha g = \Delta(\alpha) p_{s(\alpha)}$ pentru orice $\alpha \in H$.

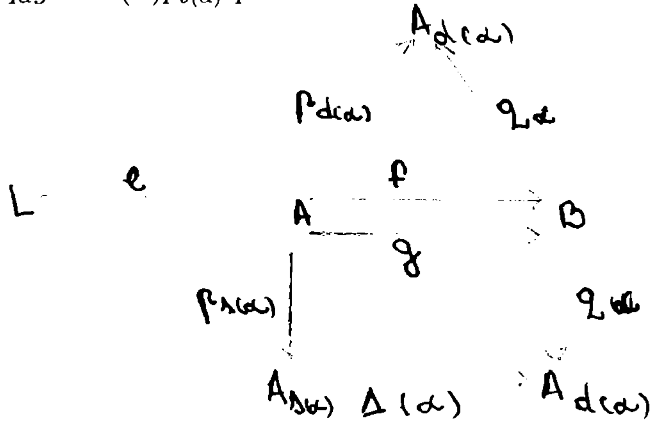

**fig 13**

Fie $e : L \to A$ egalizatorul lui $f, g$. Demonstrăm că $(L, (p_i e)_{i \in I})$ este con. Fie $\alpha : s(\alpha) \to d(\alpha)$ un morfism din **I**. Atunci $\Delta(\alpha) p_{s(\alpha)} e = q_\alpha g e = q_\alpha f e = p_{d(\alpha)} e$.

Demonstrăm că $(L, (p_i e)_{i \in I})$ este con limită. Fie $(C, (\mu_i)_{i \in I})$ un alt con. Fie $\mu : C \to A$ unicul morfism cu proprietatea $p_i \mu = \mu_i$ pentru orice $i \in I$. Demonstrăm că $f\mu = g\mu$. Aplicăm 3.4.14. Fie $\alpha \in H$. Atunci $q_\alpha f \mu = p_{d(\alpha)} \mu = \mu_{d(\alpha)} = \Delta(\alpha) \mu_{s(\alpha)} = \Delta(\alpha) p_{s(\alpha)} \mu = q_\alpha g \mu$. Din proprietatea de universalitate a egalizatorului avem ca există un unic morfism $\mu' : C \to L$ astfel încât $e\mu' = \mu$. Fie $i \in I$. Avem $p_i e \mu' = p_i \mu = \mu_i$, deci $\mu'$ este morfism de conuri. Fie $\nu : C \to L$ un morfism cu proprietatea că pentru orice $i \in I$ avem $p_i e \nu = \mu_i$. Atunci $e\nu = \mu$ deci $\nu = \mu'$.■

3.4.16 **Corolar**. **Set** are toate limitele si co-limitele.

3.4.17 **Exerciţiu** i) Fie $\Delta : \mathbf{I} \to \mathbf{Set}$ un functor. Utilizând construcţia din demonstraţia teoremei 3.4.15, avem că limita lui $\Delta$ este conul ce are drept vârf mulţimea $A = \{x \in \prod_{i \in I} A_i | \Delta(\alpha)(x(i)) = x(j)\}$ pentru orice morfism $\alpha : i \to j$ din **I**, iar drept morfisme structurale restricţiile proiecţiilor $p_j : \prod_{i \in I} A_i \to A_j$ la $A$ pentru orice $j \in J$.

ii) Conform 3.4.9-13, în multe categorii produsele directe şi egalizatorii există şi se construiesc ca în **Set**. În concluzie, toate aceste categorii au limite care se construiesc la fel ca în **Set**.

iii) Caracterizaţi, utilizând construcţia din demonstraţia teoremei 3.4.15 şi principiul dualităţii, co-limitele în **Set**.

3.4.18 **Propoziţie**. O categorie $\mathcal{C}$ cu obiect final $\top$ şi cu pulback-uri are produse directe finite.

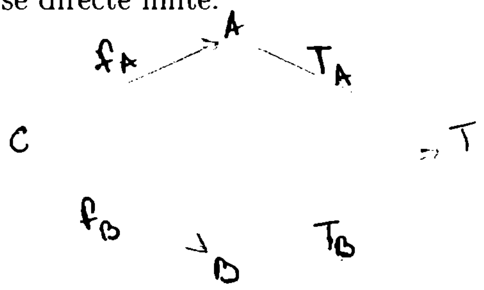


**fig 14**

**Demonstraţie**. Fie $A, B$ două obiecte ale lui $\mathcal{C}$. Fie $(C, f_A : C \to A, f_B : C \to B)$ pullback-ul lui $(\top_A : A \to \top, \top_B : B \to \top)$. Demonstrăm că $(C, f_A, f_B)$ este produs direct al lui $A$ cu $B$. Fie $g_A : D \to A, g_B : D \to B$ două morfisme din $\mathcal{C}$.Atunci $\top_A g_A = \top_B g_B$ deoarece $\top$ este obiect final. Din proprietatea de universalitate a pullback-ului avem că există un unic morfism $u : D \to C$ astfel încât $f_A u = g_A$ şi $f_B u = g_B$. ▪

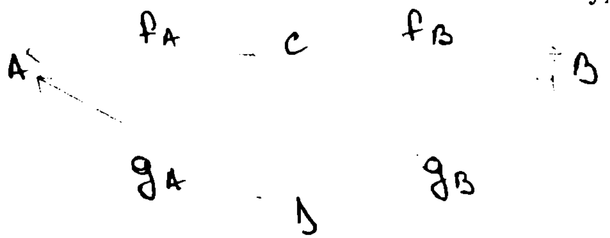


**fig. 15**

3.4.19 **Corolar**. O categorie cu obiect final, pullback-uri şi egalizatori are toate limitele finite (adică pentru $I$ finită şi pentru orice $i, j \in I$ mulţimea $\mathbf{I}(i, j)$ este finită).

3.4.20 **Propoziţie**. Dacă $A, B, C$ sunt obiecte ale unei categorii $\mathcal{C}$, $f : B \to A$, $g : C \to A$, $(B \times C, p : B \times C \to B, q : B \times C \to C)$ produs direct, $(B \times C, p, q)$ pullback-ul lui $f, g$, atunci $g$ monomorfism implică

$p$ monomorfism.

**Demonstraţie**.Dacă $pu = pv$ pentru $u, v : D \to B \times C$ atunci $fpu = fpv$, $gqu = gqv$. Deoarece $g$ este monomorfism avem că $qu = qv$. Deoarece $pu = pv$, din proprietatea de universalitate a produsului direct avem că $u = v$. ■

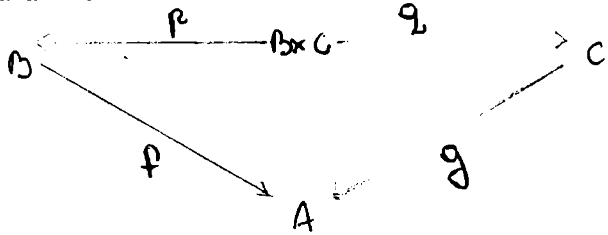


**fig. 16**

3.4.21 **Definiţie** Fie $\Delta : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ doi functori, $(A, (p_j)_{j \in J})$ con peste $\Delta$. Se verifică că $(F(A), (F(p_j))_{j \in J})$ este con peste $F\Delta$. Spunem că $F$ *comută cu limitele* dacă pentru orice functor $\Delta : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ şi orice con limită $(A, (p_j)_{j \in J})$ peste $\Delta$ avem că $(F(A), (F(p_j))_{j \in J})$ este con limită peste $F\Delta$.

## 3.5. Transformări naturale

3.5.1 **Definiţie** Fie $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ doi functori. Spunem că s-a dat o *transformare naturală* sau un *morfism functorial* de la $F$ la $G$ notată $\tau : F \to G$ dacă pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ s-a definit câte un morfism $\tau(A) : F(A) \to G(A)$ cu proprietatea că pentru orice morfism $f : A \to B$ din $\mathcal{C}$ avem $\tau(B)F(f) = G(f)\tau(A)$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau(A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau(B)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

**fig. 17**

3.5.2 **Definiţie** Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ două categorii. Definim categoria $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ astfel:

- obiecte : functorii $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

- morfisme : un morfism de la $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ la $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este o transformare naturală $\tau : F \to G$

- compunere : dacă $\tau : F \to G$, $\varepsilon : G \to H$, $A$ obiect al lui $\mathcal{C}$ atunci $(\varepsilon\tau)(A) = \varepsilon(A)\tau(A)$.

Compunerea este corect definită. Fie $f : A \to B$ un morfism din $\mathcal{C}$. Atunci $H(f)\varepsilon(A)\tau(A) = \varepsilon(B)G(f)\tau(A) = \varepsilon(B)\tau(B)F(f)$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau(A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & {} \arrow[r, "\varepsilon(A)"] \arrow[d] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau(B)"'] & G(B) \arrow[r, "\varepsilon(B)"'] & H(B)
\end{tikzcd}$$

**fig. 18**

Dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un functor, atunci $1_F(A) = 1_{F(A)}$ defineşte o transformare naturală de la $F$ la $F$.

3.5.3 **Propoziţie** Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ două categorii. Atunci $\tau : F \to G$ este izomorfism în $\mathbf{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ dacă şi numai dacă $\tau(A)$ este izomorfism pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$.

**Demonstraţie** "numai dacă". Fie $\varepsilon : G \to F$ inversa lui $\tau$. Atunci pentru obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ avem $\varepsilon(A)\tau(A) = 1_{F(A)}$, $\tau(A)\varepsilon(A) = 1_{G(A)}$

"dacă" Pentru fiecare obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ definim $\varepsilon(A) = \tau^{-1}(A)$. $\varepsilon$ este transformare naturală. Într-adevăr fie $f : A \to B$ un morfism din $\mathcal{C}$. Atunci $G(f)\tau(A) = \tau(B)F(f)$. Prin compunere la stânga, respectiv la dreapta, cu $\varepsilon(B)$, respectiv cu $\varepsilon(A)$, obţinem că $F(f)\varepsilon(A) = \varepsilon(B)G(f)$. Evident, $\varepsilon\tau = 1_F$ şi $\tau\varepsilon = 1_G$ ▪

3.5.4 **Definiţie**. Spunem că functorii $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ şi $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ formează o *echivalenţă* dacă $FG$ este izomorf cu $1_{\mathcal{D}}$ şi $GF$ este izomorf cu $1_{\mathcal{C}}$.

3.5.5 **Propoziţie**. Fie $H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, F, G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}, K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functori şi $\tau : F \to G$ o transformare naturală. Pentru fiecare obiect $A$ al lui $\mathcal{B}$ definim $(K\tau)(A) = K(\tau(A))$ şi pentru fiecare obiect $A$ al lui $\mathcal{A}$ definim $(\tau H)(A) = \tau(H(A))$. Atunci $K\tau : KF \to KG$ şi $\tau H : FH \to GH$ sunt transformări naturale.

**Demonstraţie**. Fie $f : A \to B$ un morfism din $\mathcal{B}$. Atunci $\tau(B)F(f) = G(f)\tau(A)$. Aplicând functorul $K$ obţinem $(K\tau)(B)K(F(f)) =$
$K(G(f))(K\tau)(A)$.

Fie $f : A \to B$ un morfism din $\mathcal{A}$. Atunci $H(f) : H(A) \to H(B)$, deci $G(H(f))(\tau H)(A) = (\tau H)(B)F(H(f))$, deoarece $\tau$ este transformare naturală. ▪

3.5.6 **Definiţie**. Fie $F, G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ şi $K, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ doi functori, $\tau : F \to G, \sigma : H \to K$ transformări naturale. Definim *compunerea pe verticală a lui $\sigma$ cu $\tau$ notată $\sigma \circ \tau$* prin $(\sigma \circ \tau)(B) = \sigma(G(B))H(\tau(B))$ pentru orice obiect $B$ al lui $\mathcal{B}$.

3.5.7 **Propoziţie**. Cu notaţiile de la 3.5.5, pentru orice obiect $B$ al lui $\mathcal{B}$ avem $(\sigma \circ \tau)(B) = K(\tau(B))\sigma(F(B))$.

**Demonstraţie**. Evidentă, deoarece $\sigma$ este transformare naturală. ▪

3.5.8 **Propoziţie**. Cu notaţiile de la 3.5.5, $\sigma \circ \tau$ este transformare naturală de la $HF$ la $KG$.

**Demonstraţie**. Fie $A, B$ obiecte ale lui $\mathcal{B}$ şi $f : A \to B$ un morfism. Atunci $(\sigma \circ \tau)(B)H(F(f)) =$

$\sigma(G(B))H(\tau(B))H(F(f)) =$

$\sigma(G(B))H(\tau(B)F(f)) =$

$$\sigma(G(B))H(G(f)\tau(A)) =$$
$$\sigma(G(B))H(G(f))H(\tau(A)) =$$
$$K(G(f))\sigma(G(A))H(\tau(A)) =$$
$$K(G(f))K(\tau(A))\sigma(F(A)) =$$
$$K(G(f))(\sigma\circ\tau)(A). \blacksquare$$

## 3.6. Săgeţi universale şi functori adjuncţi

3.6.1 **Definiţie**. Fie $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor, $D$ un obiect al lui $\mathcal{D}$. Numim *săgeată universală pentru* $G, D$ un cuplu $\langle u, C_D \rangle$ unde $C_D$ este un obiect din $\mathcal{C}$ şi $u : D \to G(C_D)$ cu proprietatea că pentru orice obiect $C'$ din $\mathcal{C}$ şi $f : D \to G(C')$ există un unic morfism $\overline{f} : C_D \to C'$ astfel încât $G(\overline{f})u = f$.

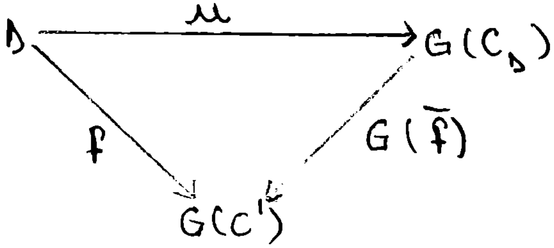


**fig. 19**

3.6.2 **Propoziţie. Unicitatea săgeţii universale**. Fie $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor, $D$ un obiect al lui $\mathcal{D}$, $\langle u, C_D \rangle$ o săgeată universală pentru $G, D$. Atunci $\langle v : D \to G(K), K \rangle$ este săgeată universală pentru $G, D$ dacă şi numai dacă există $\varphi : C_D \to K$ izomorfism astfel încât $v = G(\varphi)u$.

**Demonstraţie**. Notăm $\mathcal{A}(G, D)$ următoarea categorie:

- obiecte: $\langle f, C \rangle$ unde $C$ este un obiect al lui $\mathcal{C}$ iar $f : D \to G(C)$

- morfisme $u : \langle f, C \rangle \to \langle g, C' \rangle$ este un morfism $u \in \mathcal{C}(C, C')$ cu propietatea că $G(u)f = g$

- compunerea morfismelor se face ca în $\mathcal{C}$.

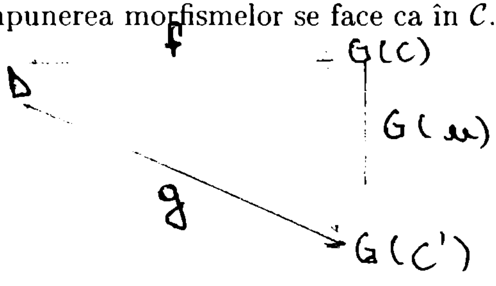


**fig. 20**

Compunerea este corect defintă. Într-adevăr dacă $u : \langle f, C \rangle \to \langle g, C' \rangle$, $v : \langle g, C' \rangle \to \langle h, C" \rangle$ atunci $G(vu)f = G(v)G(u)f = G(v)g = h$. Pentru orice obiect $C$ al lui $\mathcal{C}$ $1_C : \langle f, C\rangle \to \langle f, C\rangle$ este morfism identitate.

Săgeata universală este obiect iniţial în $\mathcal{A}(G, D)$. Enunţul rezultă acum din 3.2.15. ▪

3.6.3 **Teoremă**. Fie $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor, $D$ un obiect al lui $\mathcal{D}$. Atunci $\langle u, C_D\rangle$ este săgeată universală pentru $G, D$ dacă şi numai dacă pentru orice obiect $C$ al lui $\mathcal{C}$ există o funcţie $\tau(C) : \mathcal{D}(D, G(C)) \to \mathcal{C}(C_D, C)$ cu proprietatea că pentru orice morfisme $f : D \to G(C)$, $h : C_D \to C$ avem $G(\tau(C)(f))u = f$ şi $\tau(C)(G(h)u) = h$.

**Demonstraţie**. "numai dacă". Fie $C$ obiect al lui $\mathcal{C}$. Pentru orice $f : D \to G(C)$, definim $\tau(C)(f) = \overline{f}$, $\overline{f}$ fiind definit la 3.6.1. Dacă $h : C_D \to C$ avem $\overline{G(h)u} = h$. Concluzia rezultă din 3.6.1.

"dacă". Fie $C$ obiect al lui $\mathcal{C}$ şi $f : D \to G(C)$. Fie $f' = \tau(C)(f)$. Atunci $G(f')u = f$. Am demonstrat astfel existenţa. Pentru unicitate, fie $g : C_D \to C$ astfel încât $G(g)u = f$. Este suficient să arătăm că $g = f'$. Avem că $g = \tau(C)(G(g)u) = \tau(C)(f) = f'$. ▪

3.6.4 **Exemple de functori (continuare)**. Fie $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{C}', \mathcal{D}'$ categorii.

i. $Hom_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{C} \to$ **Set** definit astfel:

- $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$.

- dacă $f : A' \to A, g : B \to B'$ sunt două morfisme din $\mathcal{C}$ atunci $Hom_{\mathcal{C}}(f, g) : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A', B')$ este funcţia definită prin $Hom_{\mathcal{C}}(f, g)(u) = guf$.

ii. Functorul identitate $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definit astfel :

- $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$.

- $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ pentru orice morfism $f$ al lui $\mathcal{C}$.

iii. Dacă $B \in |\mathcal{D}|$ avem functorul constant $K_B : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ prin:

- $K_B(A) = B$ pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$.

- $K_B(f) = 1_B$ pentru orice morfism $f$ al lui $\mathcal{C}$.

iv. Dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ doi functori. Definim functorul $F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ prin:

- $(F \times G)(A, B) = (F(A), G(B))$

- $(F \times G)(f, g) = (F(f), G(g))$

3.6.5 **Exerciţiu**. Verificaţi corectitudinea deifiniţiilor de la 3.6.4.

3.6.6 **Teoremă**. Fie $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $D \in \mathcal{D}$, $C_D \in \mathcal{C}$. Există $u : D \to G(C_D)$ săgeată universală dacă şi numai dacă $Hom_{\mathcal{C}} \circ (K_{C_D} \times 1_{\mathcal{C}})$ este izomorf cu $Hom_{\mathcal{D}} \circ (K_D \times G)$, ambii functori având sursa $\mathcal{D}^{\circ} \times \mathcal{C}$ şi destinaţia **Set**.

**Demonstraţie**. "numai dacă" Fie $C'\in\mathcal{C}, D'\in\mathcal{D}$. Definim funcţia $\tau(D',C'):\mathcal{C}(C_D,C')\to\mathcal{D}(D,G(C'))$ prin $\tau(D',C')(f)=G(f)u$.

$\tau$ este transformare naturală. Într-adevăr dacă $f: D''\to D', g: C'\to C'', \alpha: C_D\to C'$ avem $(Hom_{\mathcal{D}}\circ(K_D\times G)(f,g))(\tau(D',C')(\alpha))=$

$(Hom_{\mathcal{D}}\circ(K_D\times G)(f,g))(G(\alpha)u)=G(g)G(\alpha)u=G(g\alpha)u$. Pe cealaltă parte avem

$\tau(D'',C'')((Hom_{\mathcal{C}}\circ(K_{C_D}\times 1_{\mathcal{C}})(f,g))(\alpha))=$

$\tau(D'',C'')(g\alpha)=G(g\alpha)u$.

Arătăm că pentru orice obiecte $D'$, respectiv $C'$ ale lui $\mathcal{D}$, respectiv $\mathcal{C}$, $\tau(D',C')$ este bijecţie cu inversa $\tau^{-1}(D',C')(g)=\overline{g}$ pentru orice $g: D\to G(C')$. Într-adevăr $\tau^{-1}(D',C')(\tau(D',C')(f))=\overline{G(f)u}=f$. $\tau(D',C')(\tau^{-1}(D',C')(g))=G(\overline{g})u=g$

"dacă" Fie $u=\tau(D,C_D)(1_{C_D}): D\to G(C_D)$. Fie $f: D\to G(C)$. Demonstrăm unicitatea. Fie $\overline{f}: C_D\to C$ astfel încât $G(\overline{f})u=f$. Cum $\tau$ este transformare naturală avem că

$(Hom_{\mathcal{D}}\circ(K_D\times G)(1_D,\overline{f}))(\tau(D,C_D)(1_{C_D}))=$

$\tau(D,C)(Hom_{\mathcal{C}}(K_{C_D}\times 1_{\mathcal{C}})(1_D,\overline{f}))(1_{C_D})$, deci $G(\overline{f})u=\tau(D,C)(\overline{f})$ de unde deducem că $\overline{f}=\tau^{-1}(D,C)(f)$. Demonstrăm acum existenţa. Atunci $G(\overline{f})u=$

$(Hom_{\mathcal{D}}\circ(K_D\times G)(1_D,\overline{f})(\tau(D,C_D)(1_{C_D})=$

$\tau(D,C)(Hom_{\mathcal{C}}(K_{C_D}\times 1_{\mathcal{C}})(1_D,\overline{f}))(1_{C_D})=$

$\tau(D,C)(\overline{f})=\tau(D,C)(\tau^{-1}(D,C)(f))=f$. ∎

3.6.7 **Teoremă**. Dacă $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ este un functor şi pentru orice obiect $C$ al lui $\mathcal{C}$ există $(u_C,D_C)$ săgeată co-universală (duala noţiunii de săgeată universală) atunci există un unic functor $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ astfel încât

1) $G(C)=D_C$

2) $Hom_{\mathcal{C}}(F\times 1_{\mathcal{C}})$ este izomorf cu $Hom_{\mathcal{D}}(1_{\mathcal{D}}\times G)$

**Demonstraţie**. Definim $G(C)=D_C$ pe obiecte şi pentru orice morfism $f: C\to C'$ definim $G(f)=\overline{fu_C}$, adică $u_{C'}F(G(f))=fu_C$.

Demonstrăm că $G$ este functor. Fie $g: C'\to C''$. Atunci $G(gf)=\overline{gfu_C}$, deci $u_{C''}F(G(gf))=gfu_C$. Dar

$u_{C''}F(G(g)G(f))=u_{C''}F(G(g))F(G(f))=gu_{C'}F(G(f))=gfu_C$.

$G(1_C)=\overline{u}_C$. Dar evident avem $u_CF(\overline{u}_C)=u_C$. Dar $u_CF(1_{D_C})=u_C$, deci $G(1_C)=1_{G(C)}$.

Arătăm că $\tau: Hom_{\mathcal{D}}(1_{\mathcal{D}}\times G)\to Hom_{\mathcal{C}}(F\times 1_{\mathcal{C}})$ definită pentru orice $g: D\to g(C)$ prin $\tau(D,C)(g)=u_CF(g)$ este izomorfism functorial. Din definiţia săgeţii universale avem că $\tau(D,C)$ este bijecţie pentru orice $D,C$.

Arătăm că $\tau$ este transformare naturală. Fie $f : D' \to D$ şi $g : C \to C'$ două morfisme din $\mathcal{D}$ şi respectiv $\mathcal{C}$ şi $\alpha : D \to G(C')$. Atunci

$\tau(D',C')(Hom_{\mathcal{D}} \circ (1_{\mathcal{D}} \times G)(f,g)(\alpha)) = \tau(D',C')(G(g)\alpha f) =$
$u_{C'}F(G(g))F(\alpha)F(f)$. Pe de altă parte
$(Hom_{\mathcal{C}} \circ (F \times 1_{\mathcal{C}}))(f,g)(\tau(D,C)\alpha) = (Hom_{\mathcal{C}} \circ (F \times 1_{\mathcal{C}}))(f,g)(u_C F(\alpha)) =$
$g u_C F(\alpha) F(f)$. Din definiţia lui $G$ avem că $g u_C = u_{C'} F(G(g))$.

Rămâne să demonstrăm unicitatea lui $G$. Fie $\tau$ izomorfismul de la 2). Fie $g : C \to C'$, $f : D' \to D$. Dacă $\alpha : D \to G(C)$ avem

$Hom_{\mathcal{C}} \circ (F \times 1_{\mathcal{C}})(f,g)(\tau(D,C)(\alpha)) = g\tau(D,C)(\alpha)F(f)$,
$\tau(D',C')(Hom_{\mathcal{D}} \circ (1_{\mathcal{D}} \times G)(f,g)(\alpha)) = \tau(D',C')(G(g)\alpha f)$. Pentru $D = D'$, $f = 1_D$, $D = G(C)$ şi $\alpha = 1_D$ obţinem

$G(g) = \tau^{-1}(D,C')(g(\tau(D,C)(1_D)))$, ceea ce dovedeşte unicitatea lui $G$. ∎

3.6.8 **Definiţie**. O pereche de functori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se numeşte *adjuncţie* dacă $Hom_{\mathcal{C}} \circ (F \times 1_{\mathcal{C}})$ este izomorf cu $Hom_{\mathcal{D}} \circ (1_{\mathcal{D}} \times G)$. În acest caz $F$ se numeşte *adjunct la stânga* al lui $G$, iar $G$ *adjunct la dreapta* al lui $F$.

În cele ce urmează vom nota cu $\varphi$ izomorfismul functorial între $Hom_{\mathcal{C}} \circ (F \times 1_{\mathcal{C}})$ şi $Hom_{\mathcal{D}} \circ (1_{\mathcal{D}} \times G)$ iar adjuncţia cu $\langle F, G, \varphi \rangle$. De asemenea, vom nota pentru orice $f : F(A) \to B$ cu $\varphi(f) : A \to G(B)$ în loc de $\varphi(A,B)(f) : A \to G(B)$, perechea $(A,B)$ fiind dedusă din context.

3.6.9 **Teoremă**. Orice adjuncţie $\langle F, G, \varphi \rangle$ determină

i). O transformare naturală $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to GF$ cu proprietatea că $\eta(X)$ este săgeată universală pentru orice obiect $X$ al lui $\mathcal{C}$ şi dacă $f : F(X) \to A$ atunci $\varphi(f) = G(f)\eta(X)$.

ii). O transformare naturală $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{D}}$ cu proprietatea că $\varepsilon(A)$ este săgeată co-universală pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{D}$ şi dacă $g : X \to G(A)$ atunci $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon(A)F(g)$.

iii) Mai mult, $(G\varepsilon)(\eta G) = 1_G$ şi $(\varepsilon F)(F\eta) = 1_F$

**Demonstraţie**. Pentru orice $k \in \mathcal{C}(A, A')$, $h \in \mathcal{D}(X', X)$, $f \in \mathcal{C}(F(X), A)$ avem $\varphi(fF(h)) = \varphi(f)h, \varphi(kf) = G(k)\varphi(f)$.

Definim $\eta(X) = \varphi(1_{F(X)})$. Arătăm că $\eta$ este transformare naturală. Fie $h : X' \to X$. Atunci $G(F(h))\eta(X') = G(F(h))\varphi(1_{F(X')}) = \varphi(F(h)1_{F(X')}) = \varphi(1_{F(X)}F(h)) = \varphi(1_{F(X)})h = \eta(X)h$. Mai mult, $\varphi(f) = \varphi(f 1_{F(X)}) =$

$G(f)\varphi(1_{F(X)}) = G(f)\eta(X)$.

Definim $\varepsilon(A) = \varphi^{-1}(1_{G(A)})$. Deci

$1_{G(A)} = \varphi(\varepsilon_A) = G(\varepsilon_A)\eta_{G(A)}$. ▪

3.6.10 **Teoremă**. Orice adjuncţie $\langle F, G, \varphi\rangle$ este complet determinată de fiecare din următoarele elemente:

i) Functorii $F, G$ şi o transformare naturală $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to GF$ astfel încât pentru orice obiect $X$ al lui $\mathcal{C}$ $\eta(X) : X \to G(F(X))$ este săgeată universală de la $G$ la $X$. $\varphi$ este definită de 3.6.9.i).

ii) Functorul $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ şi pentru orice obiect $X$ al lui $\mathcal{C}$ un obiect $F(X)$ al lui $\mathcal{D}$ şi o săgeată universală $\eta(X) : X \to G(F(X))$ de la $X$ la $G$. Functorul $F$ este definit pe morfisme astfel: pentru orice morfism $h : X \to X'$ din $\mathcal{C}$, $F(h)$ este unicul morfism $u : F(X) \to F(X')$ cu proprietatea $G(u)\eta(X) = \eta(X')h$.

iii) Functorii $F, G$ şi o transformare naturală $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{D}}$ astfel încât pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{D}$, $\varepsilon(A) : F(G(A)) \to A$ este săgeată universală de la $F$ la $A$. $\varphi^{-1}$ este definită de 3.6.9.ii).

iv) Functorul $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ şi pentru orice obiect $A$ al lui $\mathcal{D}$ un obiect $G(A)$ al lui $\mathcal{C}$ şi o săgeată universală $\varepsilon(A) : F(G(A)) \to A$ de la $F$ la $A$.

v) Functorii $F, G$ şi două transformări naturale $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to GF, \varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{D}}$ care verifică 3.6.9 iii).

**Demonstraţie**. Exerciţiu. ▪

3.6.11 **Exemple**. i) Fie $P, Q$ două mulţimi parţial ordonate. O adjuncţie între categoriile mici asociate lor este determinată de două funcţii crescătoare $f : P \to Q, g : Q \to P$ cu proprietatea că $1_P \leq gf$ şi $fg \leq 1_Q$. Se verifică uşor conform 3.6.10.v). Perechea $(f, g)$ este conexiune Galois(2.11.4). Multe alte alte proprietăţi ale conexiunilor Galois se pot deduce din proprietăţile functorilor adjuncţi. Se poate consulta [13].

ii) Fie $\Sigma$ o signatură şi $U : \mathbf{Alg}_\Sigma \to \mathbf{Set}^\mathbf{S}$ functorul uituc. Definim functorul *liber* $L : \mathbf{Set}^\mathbf{S} \to \mathbf{Alg}_\Sigma$ astfel:

Pentru orice mulţime $S$-sortată $A$, $L(A) = \overline{A}$, algebra liber generată de $A$. Notăm $i_A : A \to \overline{A}$ incluziunea.

Fie $f : A \to B$ o funcţie. Atunci $L(f) : \overline{A} \to \overline{B}$ este unicul morfism de algebre cu proprietatea $L(f)i_A = i_B f$.

Evident, $1_{\overline{A}} i_A = i_A 1_A$ deci $L(1_A) = 1_{L(A)}$.

Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ atunci $L(g)L(f)i_A = L(g)i_B f = i_C g f$ deci $L(gf) = L(g)L(f)$, Definim $i : 1_{\mathbf{Sets}} \to UL$ prin $i(A) = i_A$. Pentru orice funcţie $f : A \to B$ avem $L(f)i_A = i_B f$ (definiţia lui $L$) deci $i$ este transformare naturală. Definiţia algebrei libere conduce la faptul că $U, L$ sunt functori adjuncţi. Analog se pot da exemple de adjuncţii pentru varietăţi.

3.6.12 **Teoremă**. Fie $\langle F, G, \varphi\rangle$ o adjuncţie de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{D}$. Atunci $F$ comută cu co-limitele iar $G$ cu limitele.

**Demonstraţie**. Demonstrăm că $G$ comută cu limitele. Fie $\Delta : \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ un functor şi $(D, (p_j)_{j\in J})$ un con limită al lui $\Delta$ şi $(C, (q_j)_{j\in J})$ un con peste $G\Delta$. Este suficient să găsim un unic morfism $u : C \to G(D)$ cu proprietatea că $G(p_j)u = q_j$ pentru orice $j\in J$.

Fie $\varphi : Hom_{\mathcal{D}} \circ (F \times 1_{\mathcal{D}}) \to Hom_{\mathcal{C}} \circ (1_{\mathcal{C}} \times G)$ izomorfism functorial. Pentru orice $j\in J$ definim $t_j = \varphi^{-1}(C, D_j)(q_j) : F(C) \to D_j$. Demonstrăm că $(F(C), (t_j)_{j\in J})$ este con peste $\Delta$. Fie $\alpha : i \to j$ un morfism din $\mathcal{J}$. $Hom_{\mathcal{C}}((1_{\mathcal{C}} \times G)(1_C, \Delta(\alpha))((\varphi(C, D_i))(t_i)) = Hom_{\mathcal{C}}((1_{\mathcal{C}} \times G)(1_C, \Delta(\alpha))(q_i) =$
$G(\Delta(\alpha))q_i = q_j = \varphi(C, D_j)(t_j)$. Pe de altă parte
$\varphi(C, D_j)(Hom_{\mathcal{D}}((F \times 1_{\mathcal{D}})(1_C, \Delta(\alpha))(t_i)) = \varphi(C, D_j)(\Delta(\alpha)t_i)$. Deoarece $\varphi$ este izomorfism functorial avem $t_j = \Delta(\alpha)t_i$. Există deci un unic morfism $u : F(C) \to D$ cu proprietatea că $p_j u = t_j$ pentru orice $j\in J$. Fie $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to GF$ transformarea naturală de la 3.6.10.i). Atunci $G(p_j)G(u)\eta(C) = G(p_j u)\eta(C) = G(t_j)\eta(C) = q_j$ conform 3.6.9.i. Atunci $G(u)\eta(C) : C \to G(D)$ satisface proprietaea dorită. Fie $v : C \to G(D)$ cu proprietatea că $G(p_j)v = q_j$ pentru orice $j\in J$. Fie $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{D}}$ transformarea naturală de la 3.6.9.iii. Atunci $p_j\varepsilon(D)F(v) = \varepsilon(D_j)F(G(p_j))F(v) = \varepsilon(D_j)F(G(p_j)v) = \varepsilon(D_j)F(q_j) = t_j$ conform 3.6.9.ii. Deci
$\varphi(C, G(D))^{-1}(v) =$(cf. 3.6.9.ii) $\varepsilon(D)F(v) = u$ de unde $v = \varphi(u) =$(cf. 3.6.9.i)$G(u)\eta(C)$ conform 3.6.10. ∎

## 3.7. O teoremă de punct fix în teoria categoriilor şi aplicaţii

3.7.1 **Definiţie**. Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Numim *$F$-algebră* o pereche $(A, \alpha)$ unde $A$ este un obiect al lui $\mathcal{C}$ şi $\alpha : F(A) \rightarrow A$ un morfism din $\mathcal{C}$. Definim categoria $\mathbf{Alg}(F)$ astfel:

- obiecte: $F$-algebrele

- morfisme: dacă $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$ sunt două $F$-algebre un morfism de $F$-algebre $f : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ este un morfism $f : A \rightarrow B$ din $\mathcal{C}$ cu proprietatea că $f\alpha = \beta F(f)$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\
F(B) \arrow[r, "\beta"'] & B
\end{tikzcd}$$

**fig. 21**

- compunerea morfismelor din $\mathbf{Alg}(F)$ se face ca în $\mathcal{C}$. Verificăm corectitudinea definiţiei compunerii morfismelor din $\mathbf{Alg}(F)$. Fie $f : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$, $g : (B, \beta) \rightarrow (C, \gamma)$ morfisme de $F$-algebre. Atunci $gf\alpha = g\beta F(f) = \gamma F(g) F(f) = \gamma F(gf)$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\
F(B) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "F(g)"'] & B \arrow[d, "g"] \\
F(C) \arrow[r, "\gamma"'] & C
\end{tikzcd}$$

**fig. 22**

Se verifică imediat că $1_A : (A, \alpha) \rightarrow (A, \alpha)$ este morfism de $F$-algebre.

3.7.2 **Lemă**. Dacă $F$-algebra $(A, \alpha)$ este obiect iniţial în $\mathbf{Alg}(F)$ atunci $\alpha$ este izomorfism.

**Demonstraţie**. Există morfismul $f : (A, \alpha) \rightarrow (F(A), F(\alpha))$. Evident,

$\alpha \in \mathbf{Alg}(F)((F(A), F(\alpha)), (A, \alpha))$, deci $\alpha f \in \mathbf{Alg}(F)((A, \alpha), (A, \alpha))$, deci $\alpha f = 1_A$.

Din condiţia de morfism de $F$ algebre a lui $f$ obţinem: $f\alpha = F(\alpha)F(f) = F(\alpha f) = F(1_A) = 1_{F(A)}$. ▪

Notăm cu $\omega$ categoria mică ataşată mulţimii ordonate a numerelor naturale. Un functor $\Delta : \omega \rightarrow \mathcal{C}$ este definit de un şir $(A_n)_{n\geq 0}$ de obiecte din $\mathcal{C}$ împreună cu un şir de morfisme $(f_n)_{n\geq 0}$ din $\mathcal{C}$ astfel încât $f_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$. Un co-con peste $\Delta$ este o pereche $((\mu_n)_{n\geq 0}, A)$ unde $A$ este un obiect din $\mathcal{C}$ şi $\mu_n : A_n \rightarrow A$ un morfism din $\mathcal{C}$ astfel încât $\mu_{n+1} f_n = \mu_n$ pentru orice $n$.

3.7.3 **Teoremă**. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu co-limite şi obiect iniţial $\perp$. Dacă $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ este un functor ce comută cu toate co-limitele, atunci există $F$-algebra iniţială. În particular există un obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ astfel încât $F(A)$ este izomorf cu $A$ (cf. 3.7.2). $F$-algebra iniţială se construieşte astfel:

Pentru un obiect $A$ al lui $\mathcal{C}$ notăm cu $\alpha_A : \perp \rightarrow A$ unicul morfism de la $\perp$ la $A$. Fie functorul $\Delta = (F^n(\perp), F^n(\alpha_{F(\perp)}))_{n\geq 0} : \omega \rightarrow \mathcal{C}$ având co-limita $((\mu_n)_{n\geq 0}, A)$. $F$-algebra iniţială este $(A, \alpha)$ unde $\alpha : F(A) \rightarrow A$ este unicul morfism cu proprietatea $\alpha F(\mu_n) = \mu_{n+1}$. $((F(\mu_n))_{n\geq 0}, F(A))$ este co-limită a lui $F\Delta$).

**Demonstraţie**. Fie $(B, \beta)$ o $F$-algebră. Fie $\nu = (\nu_n : F^n(\perp) \rightarrow B)_{n\geq 0}$ definit astfel:

$\nu_0 = \alpha_B$

$\nu_{n+1} = \beta F(\nu_n)$.

Demonstrăm prin inducţie după $n$ că $\nu$ este co-con, adică

$\nu_{n+1} F^n(\alpha_{F(\perp)}) = \nu_n$ pentru orice $n$ natural.

Pentru $n = 0$, $\nu_1 \alpha_{F(\perp)} = \alpha_B$ deoarece morfismele din ambii membrii au sursa $\perp$.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n$. Atunci

$\nu_{n+2} F^{n+1}(\alpha_{F(\perp)}) = \beta F(\nu_{n+1}) F^{n+1}(\alpha_{F(\perp)}) = \beta F(\nu_{n+1} F^n(\alpha_{F(\perp)})) = \beta F(\nu_n) = \nu_{n+1}$.

Există atunci un unic morfism $f : A \rightarrow B$ astfel încât $f\mu_n = \nu_n$ pentru orice $n$ natural.

Arătăm că unicul morfism $f : A \rightarrow B$ cu proprietatea $f\mu_n = \nu_n$ este morfism de $F$-algebre, adică $f\alpha = \beta F(f)$. Pentru aceasta este suficient, conform 3.4.14, să demonstrăm că pentru orice $n$ natural

$f\alpha F(\mu_n) = \beta F(f)F(\mu_n)$. Într-adevăr, $f\alpha F(\mu_n) = f\mu_{n+1} = \nu_{n+1} = \beta F(\nu_n) = \beta F(f\mu_n) = \beta F(f)F(\mu_n)$.

Fie $f : (A,\alpha)\to(B,\beta)$ un morfism de $F$-algebre. Demonstrăm prin inducţie după $n$ că $f\mu_n = \nu_n$ pentru orice $n$ natural ceea ce dovedeşte unicitatea lui $f$.

Pentru $n = 0$. $f\mu_0 = f\alpha_A = \alpha_B = \nu_0$. Presupunem că $f\mu_n = \nu_n$. Atunci $f\mu_{n+1} = f\alpha F(\mu_n) = \beta F(f)F(\mu_n) = \beta F(f\mu_n) = \beta F(\nu_n) = \nu_{n+1}$.

∎

În continuare vom demonstra teorema de punct fix a lui S. C. Kleene drept un caz particular al teoremei de mai sus.

3.7.4 **Definiţie**. O mulţime parţial ordonată $P$ se numeşte *$\omega$-completă* dacă orice şir crescător de elemente din $P$ are un cel mai mic majorant (supremum) în $P$ notat cu $\bigvee_{n=0}^{\infty} x_n$.

3.7.5 **Definiţie**. Fie $P, Q$ două mulţimi parţial ordonate. O funcţie $f : P\to Q$ se numeşte *$\omega$-continuă* dacă aceasta comută cu supremumurile, adică pentru orice şir crescător $(x_n)_{n\geq 0}$ ce are supremum, şirul $f(x_n)_{n\geq 0}$ are supremum şi $f(\bigvee_{n\geq 0} x_n) = \bigvee_{n\geq 0} f(x_n)$.

3.7.6 **Propoziţie**. Orice funcţie $f : P\to Q$ $\omega$-continuă este crescătoare.

**Demonstraţie**. Fie $x, y\in P$ astfel încât $x\leq y$. Considerăm şirul $x, y, y, y, ...$ şi obţinem $f(x)\leq f(y)$. ∎

3.7.7 **Teorema de punct fix a lui S. C. Kleene**. Fie o mulţime parţial ordonată $P$ $\omega$-completă cu prim element $\perp$ şi $f : P\to P$ o funcţie $\omega$-continuă. Atunci $\bigvee_{n\geq 0} f^n(\perp)$ este punct fix al lui $f$ şi cel mai mic element al mulţimii $\{x\in P | f(x)\leq x\}$.

**Demonstraţie**. Aplicăm 3.7.3 categoriei mici ataşate mulţimii parţial ordonate $P$ şi endo-functorului determinat de $f$. ∎

3.7.8 **Definiţie** Fie $\Sigma$ o signatură. Definim functorul $F$ : $\mathbf{Set}^S\to\mathbf{Set}^S$ astfel:

Pe obiecte: dacă $F((A_s)_{s\in S}) = ((B_s)_{s\in S})$ unde pentru orice $s\in S$, $B_s = \coprod_{w\in S^*, \sigma\in\Sigma_{w,s}} A^w$.

Pe morfisme: Fie $f : A\to B$. Notăm pentru orice $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, $i_{\sigma^A} : A^w\to F_\Sigma(A)$ injecţia canonică. Atunci $F(f)$ este unica funcţie cu proprietatea $F(f)i_{\sigma^A} = i_{\sigma^B} f^w$.

Verificăm corectitudinea definiţiei: Este evident că $F$ permută cu identităţile. Fie $g : B\to C$. Atunci $F(g)F(f)i_{\sigma_A} = F(g)i_{\sigma_B} f^w = i_{\sigma_C} g^w f^w = i_{\sigma_C}(gf)^w$.

Se observă că o $F$-algebră $(A, \alpha)$ este o $\Sigma$-algebră, unde pentru orice $s \in S, w \in S^*, \sigma \in \Sigma_{w,s}$, $\sigma^A = \alpha_s i_{\sigma_A}$. Atunci orice morfism de $F$-algebre este un morfism între $\Sigma$-algebrele corespunzătoare. Într-adevăr, fie $f : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ un morfism de $F$-algebre şi $s \in S, w \in S^*, \sigma \in \Sigma_{w,s}$. Atunci $f_s \sigma^A = f_s \alpha_s i_{\sigma_A} = \beta_\sigma F(f)_s i_{\sigma_A} = \beta_s i_{\sigma_B} f^w = \sigma^B f^w$. Demonstrând că $F$ comută cu co-limitele (Exerciţiu !), obţinem existenţa $\Sigma$-algebrei iniţiale.

# Bibliografie

[1] J. A. Goguen, J. W. Thatcher, E. G. Wagner, J. B. Wright *Initial Algebra Semantics and Continous Algebras.* J. Assoc. Comput. Math, 24, 1, 1977.

[2] J. A. Goguen, J. W. Thatcher, E. G. Wagner, J. B. Wright *A Uniform Approach to Inductive Posets and Inductive Closure.* Theoretical Computer Science, Nr. 7, 1982.

[3] J. A. Goguen, J. W. Thatcher, E. G. Wagner, J. B. Wright *More on Advice on Structuring Compilers and Proving them Correct.* Lectures Notes in Computer Science, Nr. 71, pp. 596-615, 1982.

[4] M. A. Arbib and E. G. Manes, *Algebraic Approaches to Program Semantics.* Springer Verlag, 1986.

[5] G. Birkhoff, J. D. Lipson, *Heterogenous Algebras.* J. Combinatorial Theory, 8, 1970.

[6] I Bucur, A. Deleanu, *Introduction to the Theory of Categories and Functors.*. London-New York-Sidney, John Wiley and Sons Ltd., 1968.

[7] Virgil Căzănescu, *Curs de Scheme de programe. Latici Continue.*. Tipografia Universităţii Bucureşti, 1980.

[8] Virgil Căzănescu, *Curs de Scheme de programe. Ecuaţii Recursive cu Domenii.*. Tipografia Universităţii Bucureşti, 1980.

[9] Virgil Căzănescu, *Curs de Bazele Informaticii. Vol I-II.*. Tipografia Universităţii Bucureşti, 1983.

[10] P. M. Cohn, *Universal Algebra.* Harper Row, New York 1965.

[11] P. Grätzer, *Universal Algebra.* Van Nostrand, Princeton 1967.

[12] Iréne Guessarian, *Algebraic Semantics.* Springer 1981.

[13] F. W. Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50(1963), pp. 869-872..

[14] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1988.

[15] R. S. Pierce, *Introduction to the Theory of Abstract Algebras.* Holt, Reinhart and Winston, New York 1968.

[16] Sergiu Rudeanu, *Curs de Bazele Informaticii. Logica Matematica. Fascicula I-a. Elemente de algebră universală.* Tipografia Universităţii Bucureşti, 1977.

[17] Sergiu Rudeanu, *Fundamentele Algebrice ale Informaticii. Note de Curs.* Nepublicate.

[18] J. Schmidt, *Allgemeine Algebra.* Wintersemeste 1965-1966 (litografiat).

[19] M. B. Smyth, G. D. Plotkin, *Category Theoretic Solution of Recursive Domain Equations.* Theory of Computation Report No. 14, Department of Computer Science, University of Warwick, 1976.

[20] Gheorghe Ştefănescu, *Fundamentele Algebrice ale Informaticii. Note de Curs.* Nepublicate.

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 968/2002 la
Tipografia Editurii Universității din București

37 000 lei

ISBN 973-575-689-7

Lei 37.000