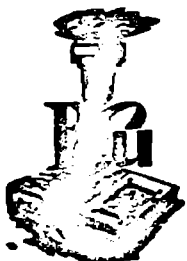


Andrei Belea

# OPTICA NELINIARA



Editura Universității din București  
1999

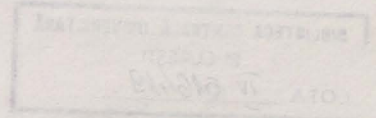


BIBLIOTECA CENTRALA  
UNIVERSITARA  
București

Cota IV 516 419  
Inventar C/9990438

200759

Recepție bibliotecă: 1001 de LANCU JOVA  
Colecția de LEONTINA NASTA



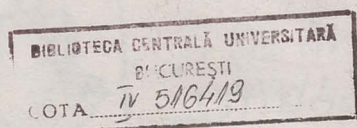
**Andrei Belea**

# **Optica neliniară**

**Editura Universității din București  
1998**



Referenți științifici: Prof. dr. IANCU IOVA  
Conf. dr. LEONTINA NASTA



544/99

**B.C.U. București**



C199904438

© Editura Universității din București  
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 298 - 0



# Cuvânt înainte

Acest volum este realizat pe baza notelor de curs redactate de către autor pe durata mai multor ani de predare a cursului de Optică neliniară.

Confruntarea cu dimensiunile reduse ale spațiului tipografic dar și cu limita strictă impusă timpului de redactare (în condițiile absenței oricărei sponsorizări), a impus decizia pragmatică de a încheia doar aproximativ jumătate (un semestru) din temele întregului curs.

O preocupare specială s-a îndreptat spre găsirea formei celei mai adecvate care să permită urmărirea îndeaproape a proiectul didactic al cursului. Am ajuns la concluzia că structura cerută trebuie să se bazeze pe următorii patru vectori:

1. Tratarea temei principale (aparținând opticii neliniare) folosind un cadru de tipul "problem solving", și punând accent egal pe sublinierea deciziilor de natură pur formală sau a celor a căror justificare se naște din rațiuni fizice;
2. Introducerea temelor de lucru individual, al căror scop este dublu: de a permite îmbunătățirea cunoașterii instrumentelor matematice și de a sugera unele teme teoretice a căror însușire este propusă pentru studiu individual;
3. Prezentarea subiectului "contingent", care urmărește să ilustreze modul în care aceleași instrumente matematice sunt aplicate la situații extrem de diferite;
4. prezentarea bibliografiei selectate cu scopul lărgirii perspectivei asupra problemelor discutate.

Pentru a exemplifica legătura temelor principale cu dezvoltările

”contingente” să arătăm următoarele asocieri.

- Prezentarea generală a Opticii neliniare este completată prin discuția asupra relațiilor Manley-Rowe;
- Capitolul consacrat complementelor de optică are ”prelungire” spre fasciculele ”extreme”;
- Fenomenul de autofocalizare este discutat împreună cu distribuțiile neomogene ale indicelui de refracție - altele decât parabolice;
- Absorbția saturată are alături o prezentare succintă a tehnicilor dinamicii neliniare.

Ținând seama de bogăția fenomenologică și a mijloacelor matematice aflate în patrimoniul Opticii neliniare, singura noastră grijă în privința alegerii temelor de curs a fost legată de dorința de a asigura prezența unei cât mai mari diversități de mijloace matematice cu aplicabilitate generală.

Este corect să recunoaștem și faptul că în anumite cazuri, alegerea unor subiecte a fost făcută cu scopul de a suplini lipsa unui curs de optică teoretică.

Adresat în special studenților din anul IV ai secției de fizică tehnologică, credem totuși că materialul acestui curs poate folosi tuturor studenților care urmează o specializare în optică, optoelectronică sau fizică teoretică.

Cu gândul la cititor, dar și în speranța unei cât mai bune șanse de comunicare, autorul a îngrijit până la detalii ținuta grafică a lucrării.

Pe această cale doresc să mulțumesc d-lor Adrian Blăgău și Octav Marghitu pentru sprijinul acordat.

Autorul





# Cuprins

<b>I</b>	<b>Optica neliniară: prezentare generală</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Introducere</b>	<b>7</b>
1.1	Moduri de construcție: Optica clasică și Optica cuantică	7
<b>2</b>	<b>Locul Opticii neliniare</b>	<b>8</b>
2.1	Consecințele ecuațiilor lui Maxwell	8
2.2	Specificul Opticii neliniare	10
2.3	Vectorul de polarizare dielectrică	11
2.4	Polarizarea liniară	11
2.5	Polarizarea neliniară	26
<b>3</b>	<b>Medii neliniare</b>	<b>35</b>
3.1	Răspunsul unui mediu material la pompajul optic	36
<b>4</b>	<b>Principii de conservare</b>	<b>37</b>
4.1	Conservarea impulsului și energiei	37
4.2	Relațiile Manley-Rowe	39
<b>5</b>	<b>Cuprinderea fenomenologică</b>	<b>41</b>
5.1	Interacții neliniare de ordinul doi	42
5.2	Interacția de ordinul trei	43

5.3	Procese de ordin superior . . . . .	45
<b>II</b>	<b>Complemente de optică . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>1</b>	<b>Schița sistematică a opticii clasice . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>2</b>	<b>Legătura opticii geometrice cu ecuațiile Maxwell . . . . .</b>	<b>50</b>
2.1	Specificul opticii clasice . . . . .	50
2.2	Ecuția de undă pentru medii neomogene . . . . .	51
2.3	Tehnica funcției eiconale . . . . .	53
2.4	Ecuția eiconală. Indicele de refracție . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Acoperirea opticii geometrice prin ecuația eiconală . . . . .</b>	<b>57</b>
3.1	Ecuția razelor de lumină . . . . .	57
3.2	Principiul propagării rectilinii . . . . .	69
3.3	Principiul reversibilității mersului razelor . . . . .	69
3.4	Reflexia și refracția . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Acoperirea opticii geometrice prin ecuația de undă . . . . .</b>	<b>75</b>
4.1	Efectul teoriei eiconale . . . . .	75
4.2	Legea $1/r^2$ . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Fascicole extreme . . . . .</b>	<b>82</b>
5.1	Aspecte generale . . . . .	82
5.2	Fascicole gaussiene . . . . .	83
5.3	Fascicole fără difracție (diffraction free) . . . . .	96
<b>III</b>	<b>Autofocalizarea fasciculelor de lumină . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>1</b>	<b>Contextul general . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>2</b>	<b>Ecuția de propagare . . . . .</b>	<b>107</b>
2.1	Inițializarea modelului . . . . .	108
2.2	Procedurile matematice antrenate de WKB . . . . .	109



<b>3</b>	<b>Separarea ecuației eiconale</b>	<b>111</b>
3.1	Funcția eiconală asociată unui mediu omogen	112
3.2	Compatibilitatea cu funcția eiconală a opticii clasice (etalonări)	113
<b>4</b>	<b>Punctul crucial</b>	<b>116</b>
<b>5</b>	<b>Efectul soluțiilor pseudogaussiene</b>	<b>120</b>
<b>6</b>	<b>Aproximația opticii geometrice</b>	<b>121</b>
<b>7</b>	<b>Aproximația mediului slab parabolic</b>	<b>123</b>
<b>8</b>	<b>Aproximația ondulatorie</b>	<b>125</b>
<b>9</b>	<b>Interpretarea rezultatelor celor trei modele</b>	<b>131</b>
9.1	Cazul opticii geometrice	132
9.2	Cazul mediului slab parabolic	133
9.3	Cazul aproximației ondulatorii	134
<b>10</b>	<b>Cazuri integrabile compatibile cu WKB (fibre optice neomogene)</b>	<b>136</b>
10.1	Medii cu neliniaritate conică	136
10.2	Medii cu neomogenitate liniară	142
10.3	Relațiile de recurență ale funcțiilor Bessel	146
10.4	Demonstrația exactă	147
<b>11</b>	<b>În final</b>	<b>149</b>

## **IV Transparența indusă** **151**

<b>1</b>	<b>Aspecte generale</b>	<b>153</b>
<b>2</b>	<b>Teoria absorbției (legea Beer-Lambert)</b>	<b>153</b>
2.1	Coeficientul liniar de absorbție	158
<b>3</b>	<b>Deducerea legii absorbției pe baza teoriei cinetice</b>	<b>160</b>

<b>4</b>	<b>Efectul unui zgomot local . . . . .</b>	<b>161</b>
4.1	Coeficientul neliniar de absorbție . . . . .	163
<b>5</b>	<b>Dinamica locală descrisă prin ecuații de rată . . . . .</b>	<b>164</b>
5.1	Forma coeficientului neliniar de absorbție . . . . .	168
5.2	Echilibrul dinamic la intensități luminoase mari . . . . .	170
5.3	Specificul echilibrului dinamic . . . . .	171
<b>6</b>	<b>Funcția de transmisie . . . . .</b>	<b>174</b>
<b>7</b>	<b>Analiza ecuațiilor de rată . . . . .</b>	<b>175</b>
7.1	Soluțiile ecuațiilor de rată pentru intensitate constantă . . . . .	176
7.2	Dinamica neliniară descrisă prin ecuațiile de rată . . . . .	181
7.3	Conceptele dinamicii neliniare . . . . .	185
7.4	Laserul cu două nivele de energie. . . . .	191





# **I. Optica neliniară: prezentare generală**

<b>1</b>	<b>Introducere</b>	<b>7</b>
1.1	Moduri de construcție: Optica clasică și Optica cuantică	7
<b>2</b>	<b>Locul Opticii neliniare</b>	<b>8</b>
2.1	Consecințele ecuațiilor lui Maxwell	8
2.2	Specificul Opticii neliniare	10
2.3	Vectorul de polarizare dielectrică	11
2.4	Polarizarea liniară	11
2.4.1	Polarizarea liniară ca sursă de unde electromagnetice	12
2.4.2	Introducerea relațiilor de dispersie	15
2.5	Polarizarea neliniară	26
2.5.1	Comentariu	27
2.5.2	Exemplu: dublarea frecvenței	29
2.5.3	Amestecuri de frecvență, generarea parametrică	34
<b>3</b>	<b>Medii neliniare</b>	<b>35</b>
3.1	Răspunsul unui mediu material la pompajul optic	36
<b>4</b>	<b>Principii de conservare</b>	<b>37</b>
4.1	Conservarea impulsului și energiei	37
4.2	Relațiile Manley-Rowe	39

<b>5</b>	<b>Cuprinderea fenomenologică</b>	<b>41</b>
5.1	Interacții neliniare de ordinul doi	42
5.1.1	Fenomene care implică două unde	43
5.1.2	Fenomene care implică trei unde	43
5.2	Interacția de ordinul trei	43
5.3	Procese de ordin superior	45



# 1. Introducere

Desfășurarea tuturor proceselor optice, cu excepția cazului propagării în vid, presupune prezența mediilor materiale (chiar atunci când această prezență nu este mai consistentă decât o simplă suprafață de separare). Tocmai din acest motiv, diversele procese ale opticii fenomenologice pot fi "descompuse" în șiruri de interacții locale, unde parteneri sunt "substratul" material și câmpurile optice. Este important de remarcat că din perspectiva consecințelor, în cadrul Opticii clasice, toate interacțiile dintre cei doi participanți sunt unilaterale, în sensul că numai câmpurile optice pot suferi modificări.

Ideea identificării (ori, la nevoie, a inventării) unor mecanisme locale, care să opereze "în spatele" fenomenelor optice pe care le "explică", reprezintă un procedeu teoretic atât de puternic, încât poate fi aplicat fără nici o adaptare specială până și mediilor transparente.

## 1.1 Moduri de construcție: Optica clasică și Optica cuantică

Dat fiind că dispune de o bogată colecție de procese "elementare", din care se pot structura interacții cu proprietăți complexe, formalismul cuantic reprezintă un instrument bine articulat pentru modelarea diverselor fenomene optice. Exploatarea consecventă a acestei trăsături revine *Opticii cuantice*.

Alternativ acestei abordări care pornește de la scară atomică, avem la dispoziție demersul fenomenologic, în cadrul căruia modelele și argumentele își păstrează ținuta macroscopică. O asemenea cale este urmată de *Optica clasică*, a cărei structură conceptuală derivă din *teoria electromagnetică a luminii*.

Cum este de așteptat, o comparație între cele două maniere de investigare a fenomenelor optice este de natură să ilustreze atât avantaje cât și dezavantaje.

De exemplu, *formalismul cuantic*, datorită faptului că privește direct în "miezul" lucrurilor, pare mai "temeinic", mai "profund" și mai bine situat pentru a proiecta asupra rezultatelor sale un caracter definitiv.

Din cealaltă perspectivă, *teoria macroscopică*, guvernând peste un impresionant teritoriu experimental, invocă în propriul avantaj faptul de a nu se sprijini decât pe acei parametri care constituie în mod efectiv pârghiile de comandă ale proceselor descrise.

De asemenea, urmându-și țelul ambițios de a se confunda cu spațiul experimental, teoria macroscopică ne atrage printr-o caracteristică extrem de seducătoare, pe care o descoperim observând că atât corpul teoretic (privit ca întreg) cât și diversele sale componente simbolice (luate aparte) sunt înzestrate cu sensuri lipsite de echivoc. De aici decurge și faptul că teoria macroscopică îmbracă un aspect atât de intuitiv.

Teoria cuantică, opusă principiului de observabilitate directă, se încheie într-un nivel formal și simbolic, lăsând ca previziunile ei să fie accesibile doar unor evaluări "mecanice", oglindite în algoritmi și proceduri. Dacă însă privim aceste trăsături din perspectiva unui interes de generalizare, atunci exact asemenea caracteristici sunt de dorit.

Lăsând deschis șirul comparațiilor, să încheiem prin următorul enunț sibilinic: dacă deosebirile celor două moduri de abordare le îndepărtează asemenea unui potențial repulsiv, atunci raportul lor de complementaritate le apropie.

## 2. Locul Opticii neliniare

Pentru a evidenția specificul fenomenelor din domeniul Opticii neliniare, avem nevoie de un reper. Cel mai bun sistem de referință este furnizat de ecuațiile lui Maxwell.

În fond, sistemul celor patru ecuații "de o universală importanță și de o impresionantă frumusețe", după caracterizarea lui Sommerfeld, reușesc să guverneze gigantul câmp al fenomenelor electromagnetice (între care se află și fenomenele luminoase).

Formatul uimitor de compact în care Maxwell a înglobat esența universului electromagnetic reprezintă o realizare aproape miraculoasă. Forța celor patru ecuații a produs atâta admirație, încât până și un geniu de talia lui Boltzmann nu s-a sfiit să le glorifice așezând la începutul celui de-al doilea volum din "Cursul asupra teoriei lui Maxwell despre electricitate și lumină" (apărut în 1893) următorul motto: "Numai un Zeu le-ar fi putut dicta...".

### 2.1 Consecințele ecuațiilor lui Maxwell

Referințele precedente beneficiază de întreaga autoritate necesară pentru a constitui dovada că ecuațiile lui Maxwell reprezintă o modelare perfectă (izomorfă) a "realității fizice".

Deoarece diversele fenomene electromagnetice se desfășoară în matca unor soluții particulare ale acestor ecuații, este clar că izomorfismul se transmite "genetic" și trebuie recunoscut fiecărei soluții a ecuațiilor Maxwell.

Astfel, realitatea fizică are și fenomene descrise de soluția de *unde plane monocromatice*. Inițial, teoria lui Maxwell s-a folosit de acest tip de unde pentru a demonstra posibilitatea propagării câmpurilor electromagnetice cu viteza luminii în vid. În mod evident, această demonstrație urmărea să încadreze undele luminoase între undele electromagnetice.

Pentru o undă monocromatică plană, care se propagă printr-un mediu izotrop, caracterizat prin indicele de refracție  $n$ , după direcția specificată de versorul

$\vec{\tau}$ , desemnând prin  $\omega$  pulsația undei și prin  $\vec{k} = nk_0 \vec{\tau}$  vectorul de undă, comportarea spațio-temporală a vectorului electric  $\vec{E}$  al undei este guvernată de expresia

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[ i \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right] \quad (1.1)$$

În sensul opticii clasice:

- indicele de refracție  $n$  este specific fiecărui mediu de propagare și deci, face parte din clasa constantelor de material;
- indicele de refracție este un număr complex numai dacă transparența mediului de propagare este afectată de absorbție;
- când mediul prezintă proprietăți dispersive, atunci indicele de refracție este specificat prin intermediul unei funcții  $n = n(\lambda)$ , determinată pe cale experimentală și numită funcție de dispersie.

Apariția surselor foarte intense de lumină (sursele laser) a impus reconsiderarea concepției privind natura simplă a indicelui de refracție. Primele indicii în acest sens au fost furnizate prin observații accidentale făcute în legătură cu propagarea fasciculelor intense de lumină prin medii lipsite de complicații structurale, așa cum este gazul atmosferic. Studii experimentale specializate au confirmat că, însoțitor propagării, fasciculele intense de lumină pot suferi modificări semnificative ale distribuției de intensitate în secțiunea transversală a fascicolului (fenomen numit "autofocalizare") sau pot fi chiar ele cauza unor procese de ionizare și străpungere a gazului.

În plus, experimentele au arătat că asemenea procese pot avea loc în orice tip de mediu optic și că singurele diferențe privesc valoarea de prag a intensității luminoase.

Orice încercare de a încadra asemenea procese în Optica clasică este sortită eșecului. Imposibilitatea decurge din modul în care este construit modelul teoriei clasice a dispersiei - locul în care se definește "mecanismul" indicelui de refracție. În mod specific, punctul critic al modelării este legat de presupunerea potrivit căreia undele luminoase nu pot provoca decât o perturbare minimă a mișcării electronilor "optici", deoarece aceștia orbitează în câmpul electric foarte puternic al nucleului (care îi menține pe orbite de echilibru printr-o interacție cuasi-elastică). Pentru atomul de hidrogen aflat în stare fundamentală, electronul resimte câmpul electric de  $5 \times 10^{11} \frac{V}{m}$ , în timp ce lumina solară (așadar, lumina emisă de cea mai puternică sursă clasică) nu produce un câmp electric mai puternic de  $600 \frac{V}{m}$ . Dacă însă focalizăm fascicolul unui laser cu rubin, având puterea de  $50 MW$ , câmpul electric poate atinge valori gigantice, de ordinul  $10^9 \frac{V}{m}$ . Folosind aceste date comparative, putem înțelege că teoria clasică a dispersiei este corectă atunci

când se referă la sursele obișnuite de lumină.

## 2.2 Specificul Opticii neliniare

Există o cale simplă, bazată pe "resursele" indicelui de refracție, și care ne permite să ilustrăm două aspecte importante: a) caracterul unitar al fenomenelor optice; și b) elementele specifice Opticii neliniare.

Profitând de existența soluției de unde plane (I.1), deducem

$$n = \frac{1}{k_0 \vec{\tau} \cdot \vec{r}} \left[ -i \ln \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}_0^*}{|\vec{E}_0|^2} \right) + \omega t \right] \quad (\text{I.2})$$

Din perspectiva matematică, este perfect justificat să privim acest rezultat ca expresie a tuturor dependențelor posibile ale lui  $n$ . În același timp, izomorfismul ecuațiilor Maxwell cu realitatea fizică (efect transmis și diverselor soluții), ne furnizează un argument suplimentar în favoarea aceleiași interpretări.

Ignorând deocamdată efectul relației de dispersie

$$\omega = k_0 c \quad (\text{I.3})$$

adevărată în cazul unei unde plane, dar care în perspectivă generală conduce la o inutilă "restrângere" a informației utile din (I.2), putem privi indicele de refracție ca dependent de următoarele variabile

$$n = n(\vec{r}, t, \vec{\tau}, \omega, \vec{k}, \vec{E}) \quad (\text{I.4})$$

Este simplu de văzut că rezultatul obținut face loc unei sistematizări unitare a proprietăților optice ale mediilor materiale, așa după cum ilustrează tabelul următor:

Tipul dependenței indicelui de refracție	Caracteristica mediului
de poziție ( $\vec{r}$ )	Neomogen
de timp ( $t$ )	Nepermanent
de câmpul direcțiilor ( $\vec{\tau}$ )	Anizotrop
de pulsație ( $\omega$ )	Dispersiv temporal
de vectorul de undă ( $\vec{k}$ )	Dispersiv spațial
de tăria câmpului electric ( $\vec{E}$ )	Neliniar

Clasificarea precedentă arată că majoritatea dependențelor lui  $n$  se află deja în subordinea uneia dintre diviziunile Opticii clasice. Unica relație rămasă "neacaparată" este *dependența indicelui de refracție de tăria câmpului*. Or, această

legătură este și singura care interesează *Optica neliniară*.

Tratând în mod similar ecuația unei plane magnetice (care însoțește unda electrică (I.1)), constatăm că  $n$  poate să depindă și de câmpul magnetic  $\vec{B}$ . O asemenea situație caracterizează *efectul magneto-optic (Cotton-Moutton)*.

Comentariul pe care l-am făcut expresiei (I.4) ar putea lăsa impresia greșită cum că Optica neliniară nu ar putea cuprinde decât o clasă neglijabilă de fenomene. Starea reală de fapt este exact opusă. Pe de o parte, putem intui că fiecare fenomen liniar are o "extensie" neliniară, după cum este de asemenea adevărat și faptul că printr-o intensitate extremă, câmpurile optice pot "împinge" mediile obișnuite spre o comportare neliniară. Acest gen de mecanism este specific *fenomenelor induse*, cărora Tabloul următor le dă o succintă ilustrare:

$$|\vec{E}| \begin{cases} < \text{prag} \Rightarrow \text{Mediul este liniar.} \\ > \text{prag} \Rightarrow \begin{cases} \text{Birefrința provocată: Efectele Kerr si Pockels.} \\ \text{Activitate optică indusă: Efectul Faraday indus.} \\ \text{Transparența indusă: Absorbția saturată.} \\ \text{Neomogenitate provocată: Autofocalizare, filamentare.} \end{cases} \end{cases}$$

Împreună cu asemenea procese, Optica neliniară cuprinde numeroase alte fenomene, a căror schematizare este prezentată într-o secțiune specială.

## 2.3 Vectorul de polarizare dielectrică

În prezența câmpurilor electrice externe, mediile materiale răspund printr-o rearanjare a sarcinilor electrice legate, fapt care conduce la "polarizarea mediului". Acest efect este descris prin vectorul de polarizare dielectrică  $\vec{P}$ .

## 2.4 Polarizarea liniară

În cadrul Electrodinamicii clasice, vectorul de polarizare este introdus în contextul unor manevre asupra ecuației constitutive, al cărei conținut exprimă legătura dintre vectorul inducției electrice  $\vec{D}$  și intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ . În cazul mediilor scalare (numite astfel din cauză că permitivitatea lor dielectrică  $\epsilon$  este un scalar), legătura celor două câmpuri este dată printr-o relație de tip liniar

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (I.5)$$

Notând cu  $\epsilon_0$  permitivitatea dielectrică a vidului și observând că  $\epsilon_0 \vec{E}$  exprimă răspunsul (inevitabil) al vidului la prezența câmpului  $\vec{E}$ , relația (I.5) poate fi scrisă în mai multe feluri

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (I.6)$$

Egalitățile precedente sunt importante atât pentru că permit introducerea unor

mărimi fizice cum sunt permitivitatea dielectrică relativă  $\epsilon_r$  (fără dimensiuni fizice) și susceptibilitatea dielectrică  $\chi$  dar, și pentru că ilustrează forma legăturii dintre intensitatea câmpului electric și vectorul de polarizare, permisă de o teorie liniară

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.7)$$

### 2.4.1 Polarizarea liniară ca sursă de unde electromagnetice

Importanța vectorului  $\vec{P}$  poate fi ilustrată printr-un exemplu simplu, în care ne propunem să stabilim ecuația de propagare a undelor electromagnetice într-un mediu dielectric omogen, și care nu prezintă proprietăți magnetice (cazul tipic pentru mediile de interes în Optica clasică).

Procedând pe o cale standard, începem de la cele două ecuații Maxwell "de evoluție" (numite astfel deoarece conțin derivate temporale)

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \end{aligned}$$

aplicând primei ecuații operatorul  $\nabla \times$ , iar celei de a doua operatorul  $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\nabla \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} \end{aligned}$$

Folosind conținutul ecuațiilor constitutive și exploatănd comutativitatea operatorilor  $\nabla \times$  și  $\frac{\partial}{\partial t}$ , scriem

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\nabla \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \end{aligned}$$

ceea ce se pune și sub forma

$$\Delta \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (1.8)$$

Deoarece în cazul nostru permitivitatea dielectrică  $\epsilon$  este o constantă, găsim ușor

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

astfel încât ecuația de undă (I.8) devine

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (\text{I.9})$$

Prin intermediul relațiilor (I.7) și  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$ , ecuația precedentă poate fi adusă la forma

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.10})$$

O scriere mai compactă apare dacă folosim viteza de fază  $v$  în mediul considerat. Deoarece prin definiție  $v^{-2} = \epsilon \mu_0$ , ecuația undelor devine

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.11})$$

Din punct de vedere matematic, deosebirea între ecuațiile (I.9) și (I.11) constă în aceea că prima este o ecuație diferențială neomogenă, având drept termen de sursă tocmai polarizarea dielectrică, în timp ce a doua ecuație este omogenă.

Pentru a evita complicațiile matematice inutile, ne propunem să discutăm această diferență folosind clasa soluțiilor de tipul undelor plane monocromatice de pulsație  $\omega$ .

Pentru *ecuația neomogenă*, soluția generală este formată din doi termeni: unul obținut din rezolvarea ecuației omogene rămasă după neglijarea termenului de sursă, iar al doilea exprimând o soluție particulară a ecuației neomogene. Deci, trebuie să căutăm

$$\vec{E} = \vec{E}_{omog} + \vec{E}_{neomog}$$

Se poate ușor vedea că partea omogenă impune soluțiile

$$\vec{E}_{omog} = \vec{E}_{\pm}^o \exp \left[ i \left( \pm \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]$$

unde vectorul de undă  $\vec{k}_0$  se supune relației de dispersie

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Oricât ar părea de ciudat, relația precedentă arată că undele "omogene" străbat mediul material cu o viteză de fază egală cu viteza luminii în vid.

Căutarea unei soluții particulare pentru întreaga ecuație (I.9) se poate face după eliminarea polarizării. Folosind relația (I.7), găsim

$$\vec{E}_{neomog} = \vec{E}_{\pm}^n \exp \left[ i \left( \pm \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]$$



expresie în care constrângerea asupra vectorului de undă  $\vec{k}$  este impusă de

$$k^2 = \frac{1 + \chi}{c^2} \omega^2 > k_0^2 \quad (\text{I.12})$$

Această ultimă relație de dispersie arată că undele care compun soluția ecuației neomogene se propagă cu viteza de fază (firească)

$$v^2 = \frac{c^2}{1 + \chi} < c^2$$

Totodată putem scrie mai multe forme utile pentru indicele de refracție al mediului

$$n^2 = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = c^2 \epsilon \mu_0 = c^2 \epsilon_0 \mu_0 (1 + \chi) = 1 + \chi \quad (\text{I.13})$$

Soluțiile ecuației (I.9) se formează "amestecând" trei (din cele patru) specimene de undă obținute mai sus: obligatoriu trebuie să intervină cele două soluții "omogene", la care se adaugă una dintre soluțiile "neomogene". Spre exemplu, alegând specimenul de undă progresivă, avem

$$\vec{E} = \left[ \vec{E}_+^n \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{E}_+^o \exp(i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) + \vec{E}_-^o \exp(-i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \right] \exp(-\omega t) \quad (\text{I.14})$$

Introducând această soluție în (I.9) și calculând explicit, găsim că amplitudinea unei "neomogene" nu poate fi arbitrară, ci este condiționată prin

$$\vec{E}_+^n = \frac{\chi}{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2 - (1 + \chi)} \left[ \vec{E}_+^o \exp(i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) + \vec{E}_-^o \exp(-i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \right] \quad (\text{I.15})$$

ceea ce face ca soluția finală să poată fi scrisă sub forma

$$\vec{E} = \frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2 - (1 + \chi)} \left[ \vec{E}_+^o \exp(i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) + \vec{E}_-^o \exp(-i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \right] \exp(-\omega t) \quad (\text{I.16})$$

Merită să notăm că din cauza absenței unor termeni de amortizare în ecuația de undă (I.9), respectarea strictă a relației de dispersie (I.12) face ca atât amplitudinea unei neomogene (I.15) cât și cea a unei totale  $\vec{E}$  (dată prin (I.16)) să devină nemărginite.

Conținutul ecuației omogene (I.11) nu conduce decât la două specimene de soluții, care coincid cu soluțiile  $\vec{E}_{neomog}$ . Astfel, în acest caz vom avea

$$\vec{E} = \left[ \vec{E}_+^n \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{E}_-^n \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \exp(-\omega t) \quad (\text{I.17})$$

împreună cu o relație de dispersie ( $\vec{k}, \omega$ ) care coincide cu (I.12), modulele vectorilor  $\vec{E}_+^n$  și  $\vec{E}_-^n$  fiind de această dată libere să ia orice valori.

**Tema I.1** *Rezolvați ecuația neomogenă a undelor prin tehnica funcțiilor și valorilor proprii.*

**Tema I.2** *Rezolvați ecuația neomogenă a undelor prin tehnica funcției Green. Precizați avantajele metodei bazate pe funcția Green față de tehnica funcțiilor proprii.*

Făcând o comparație directă între (I.17) și (I.16), vedem că aceste soluții coincid, cu excepția unui coeficient care determină divergența amplitudinii de undă în (I.16). Mai mult, rezolvarea ecuației (I.11) este atât de simplă încât este dificil de preferat ecuația (I.9) împreună cu modul ei de rezolvare.

Cu toate acestea, tocmai ecuația (I.9) precum și tehnica sa de rezolvare scot la iveală următoarele detalii importante:

- inițial, mediul material supus unui câmp electric  $\vec{E}$  este constrâns să răspundă prin polarizarea dielectrică  $\vec{P}$ . Această concluzie rezultă citind ecuația (I.9) "pe dos";
- ulterior, mediul devine suportul propagării a trei unde: două "omogene", care străbat mediul cu viteza luminii  $c$  și una "neomogenă" având o viteză de fază  $v < c$ ;
- unda "neomogenă" are o amplitudine "infinit" mai mare decât amplitudinile undelor omogene, ceea ce îi conferă acesteia caracterul de undă dominantă (sau, unic observabilă);
- între undele "omogene" și unda "neomogenă" există un raport de amplitudini care sugerează următoarea interpretare: din cauză că mediile materiale nu pot susține propagarea undelor electromagnetice cu viteza luminii în vid, acestea sunt absorbite. Astfel, undele "omogene" nu reușesc să străbată zona spațială ocupată de mediul material, iar energia lor este utilizată pentru alimentarea mecanismului de susținere al undei "neomogene".

## 2.4.2 Introducerea relațiilor de dispersie

La o primă vedere, relația (I.7), prin care spațiile vectoriale  $\vec{E}$  și  $\vec{P}$  sunt puse într-o legătură simplă (cea mai simplă, dacă excludem identitatea), nu pare să ascundă nici o surpriză. Totuși, după cum vom vedea, relația (I.7) conține unele aspecte cu adevărat complicate, și în același timp spectaculoase.

Nu este deloc dificil să ne imaginăm că fiecare undă monocromatică care străbate mediul material poate provoca o polarizare de forma (I.7). Ținând seama că în analiza care urmează aspectul vectorial nu este important, ideea anterioară se

precizează scriind

$$P(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega) \quad (\text{I.18})$$

Cu această interpretare, relația (I.7) reflectă existența unei *legături locale în spațiul frecvențelor*  $\omega$ .

Dacă  $f(t)$  și  $F(\omega)$  formează o pereche de funcții legate reciproc prin transformate Fourier, atunci putem scrie

$$\begin{aligned} F(t) &= C_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) dt \\ f(\omega) &= C_2 \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(i\omega t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

cu condiția

$$2\pi C_1 C_2 = 1$$

pe care o putem ușor deduce folosind funcția  $\delta$  a lui Dirac, definită prin

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(t - t')] d\omega$$

Astfel

$$\begin{aligned} F(t) &= C_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= C_1 \int_{-\infty}^{\infty} C_2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \exp(i\omega t') dt' \right) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= C_1 C_2 \int_{-\infty}^{\infty} F(t') dt' \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t' - t)] d\omega \right) \\ &= 2\pi C_1 C_2 \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \delta(t - t') dt' = 2\pi C_1 C_2 F(t) \end{aligned}$$

și nu ne rămâne decât să comparăm termenii extremi ai șirului de egalități.

Înmulțind relația (I.18) cu  $C_1 \exp(-i\omega t)$  și integrând pe axa frecvențelor, avem

$$\begin{aligned}
 P(t) &= C_1 \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) E(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\
 &= C_1 C_2 \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} E(t') \exp(i\omega t') dt' \right) \chi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t') \left( \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \exp[i\omega(t' - t)] d\omega \right) dt' \\
 &= C_2 \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} X(t - t') E(t') dt'
 \end{aligned}$$

unde am notat

$$X(t) \equiv C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

Prin etalonarea

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}; C_2 = 1$$

putem scrie

$$P(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} X(t - t') E(t') dt' \quad (I.20)$$

Prin urmare, relația locală din spațiul frecvențelor exprimată de (I.18), are drept consecință o *relație nelocală în domeniul temporal*.

Din rațiuni fizice, relația (I.20) nu poate fi admisă ca atare deoarece această formă permite câmpului electric  $E$  să modifice valoarea polarizării  $P$ , existentă la momentul  $t$ , prin valorile  $E(t')$  încă inexistente. Acest lucru apare din cauză că (I.20) permite  $t' > t$ . Or, o asemenea stare de fapt contravine concepției noastre potrivit căreia "viitorul" nu poate să influențeze "trecutul", concepție pe care o identificăm cu *principiul de cauzalitate*.

Pentru a aduce relația (I.20) în acord cu acest principiu, vom cere

$$\tau < 0 \Rightarrow X(\tau) = 0 \quad (I.21)$$



Ca urmare, acum putem scrie

$$P(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t X(t-t')E(t')dt' \quad (I.22)$$

Este important să notăm că nici una dintre mărimile  $\omega$ ,  $t$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $f(t)$  sau  $F(\omega)$  nu poartă unități de măsură (sunt mărimi adimensionale!). Aceasta se vede din însăși forma de introducere a transformatelor Fourier. Din acest motiv, referințe ca "spațiul frecvențelor" sau "domeniul temporal" nu trebuie interpretate într-un sens strict, deoarece mărimile la care se referă nu sunt decât un ecou al mărimilor fizice corespunzătoare. Să notăm totuși că relația (I.20) poate fi pusă imediat în acord (chiar și dimensional) cu (I.6).

Din (I.22) vedem că valoarea polarizării la un moment  $t$  se poate scrie sub forma

$$P(t) = \int_{-\infty}^t dD$$

care arată că polarizarea este "suma" temporală a inducțiilor electrice.

O caracteristică importantă a relației temporale nelocalizate (I.22) constă în aceea că răspunsul (polarizarea) mediului la aplicarea unui câmp electric impulsiv (impuls "delta") este același indiferent de momentul în care se aplică impulsul. Fie  $t_0$  momentul apariției unui câmp electric impulsiv descris prin

$$E(t) = E_0\delta(t - t_0)$$

Prin (I.22) rezultă polarizarea

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^t X(t-t')E_0\delta(t'-t_0)dt' \\ &= \epsilon_0 E_0 X(t-t_0) \end{aligned} \quad (I.23)$$

care are consecințe numai pentru momente de timp  $t > t_0$ .

Dacă același tip de impuls s-ar aplica mai târziu cu  $\tau$  secunde, adică la momentul  $t_0 + \tau$ , ceea ce înseamnă

$$E_2(t) = E_0\delta(t - t_0 - \tau)$$

atunci polarizarea rezultantă ar fi

$$P_2(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t X(t-t')E_0\delta(t'-t_0-\tau)dt'$$

$$= \varepsilon_0 E_0 X(t - t_0 - \tau)$$

și lucrurile sunt în perfect acord cu principiul de cauzalitate deoarece, la rândul său, și răspunsul apare cu  $\tau$  secunde mai târziu ( $t > t_0 + \tau$ ).

Este simplu de văzut că

$$P_2(t + \tau) = P_1(t) = \varepsilon_0 E_0 X(t - t_0)$$

de unde putem deduce că aplicând impulsul  $E_2$  cu  $\tau$  secunde mai târziu decât  $E_1$ , vom avea un răspuns  $P_2$  care vine la rândul său cu  $\tau$  secunde mai târziu decât  $P_1$  și, în plus, prezintă aceleași caracteristici (date de  $\varepsilon_0 E_0 X(t - t_0)$ ). Astfel avem demonstrația proprietății enunțate.

Odată puse bazele, putem să ne concentrăm asupra următoarelor consecințe spectaculoase ale relațiilor (I.18) și (I.22):

1. Pentru orice mediu material, proprietățile dispersive (dependența de frecvență a indicelui de refracție) sunt determinate de proprietățile de absorbție. Legătura între absorbție și dispersie se manifestă în ambele sensuri.
2. Pentru frecvențe joase (în mod riguros pentru câmpuri statice) indicele de refracție este supraunitar.

Aceste concluzii se alimentează din două resurse formale. Pe de o parte, este vorba despre constrângerile analitice la care trebuie să se supună susceptibilitatea dielectrică în calitate sa de "observabilă". Apoi intervine o latură tehnică constând din extinderea la întregul spațiu complex a legăturii exprimate pentru variabile reale prin transformate Fourier.

**2.4.2.1 Reprezentarea funcțiilor analitice în semiplanul superior** Dacă am fi dorit să subliniem în plus latura tehnică a acestei secțiuni, atunci am fi preferat un titlu ca "Transformatele Hilbert și valoarea principală Cauchy". Pe de altă parte, dacă am fi vrut să scoatem în evidență rezultatele tratării, atunci ar fi trebuit să alegem un titlu de forma "Relațiile Kramers-Kronig".

Pentru ceea ce urmează sunt importante următoarele enunțuri:

- O funcție complexă de variabilă complexă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  este analitică numai dacă respectă *ecuațiile Cauchy-Riemann*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

care se pot scrie compact

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0 \quad (1.24)$$

$z^*$  fiind complex conjugata lui  $z$  ( $z^* = x - iy$ ). Ecuația (I.24) arată că o funcție analitică depinde numai de  $z$  (nu și de  $z^*$ ).

- *Teorema lui Cauchy* (numită și Cauchy-Goursat): dacă funcția de variabilă complexă  $f(z)$  este analitică în interiorul și pe curba închisă (conturul)  $C$ , atunci

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

adică, integrala funcției  $f(z)$  pe acest contur este nulă.

- Orice funcție analitică poate fi reprezentată printr-o integrală (reprezentare integrală). Astfel, dacă funcția de variabilă complexă  $f(z)$  este analitică în interiorul și pe curba închisă (conturul)  $C$ , atunci pentru orice punct  $z_0$  din interiorul lui  $C$  este adevărată relația (integrala Cauchy)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

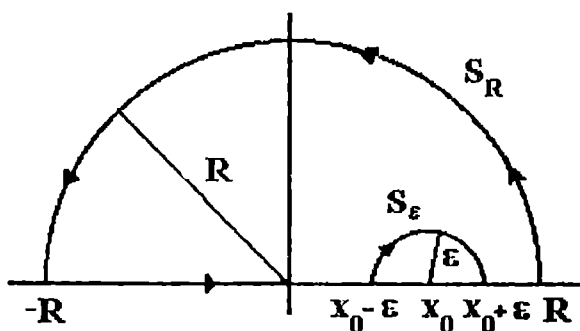


Figura I.1: Conturul de integrare pentru o funcție analitică în semiplanul superior

**Tema I.3** Să admitem că funcția complexă  $f(z)$  satisface

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = m_0$$

și că este analitică (numai) în semiplanul superior. Folosind conturul din Fig. I.1 demonstrează relația

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x - x_0} dx = i\pi f(x_0) \quad m_0 \quad (1.25)$$



unde  $P \int_{-R}^R .. \equiv \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} .. + \int_{x_0+\varepsilon}^R ..$  reprezintă "valoarea principală" a integralei în punctul  $x_0$ .

Introducând notațiile

$$f(x) = f_{\text{Re}}(x) + i f_{\text{Im}}(x) \quad (\text{I.26})$$

și apoi folosind rezultatul pentru a separa partea reală și cea imaginară din (I.25) obținem

$$\begin{aligned} f_{\text{Re}}(x_0) &= m_0 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\text{Im}}(x)}{x - x_0} dx \\ f_{\text{Im}}(x_0) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\text{Re}}(x)}{x - x_0} dx \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Atunci când  $m_0 = 0$  ecuațiile (I.27) asumă forma care arată că  $f_{\text{Re}}$  și  $f_{\text{Im}}$  sunt funcții cuplate printr-o transformare Hilbert.

**2.4.2.2 Legătura teoriei cu experimentul** Relațiile (I.27) trebuie folosite atunci când  $x_0$  desemnează valori în spațiul frecvențelor  $\omega$ . Mai mult, deoarece frecvențele negative, care apar în (I.27), deranjează prin aceea că sunt inaccesibile determinărilor experimentale, apare necesar să punem rezultatele teoretice într-o prezentare care să satisfacă pretențiile unor măsurători.

Pentru o funcție oarecare  $y(\omega)$  putem scrie

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega &= \int_{-\infty}^0 \frac{y(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{y(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-y(-\omega)}{\omega + \omega_0} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{y(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\omega [y(\omega) - y(-\omega)] + \omega_0 [y(\omega) + y(-\omega)]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{aligned}$$

Pe baza acestui rezultat putem identifica singurele cazuri în care nu trebuie să facem nici un fel de măsurătoare asupra spectrului frecvențelor negative ale lui  $y(\omega)$ :

- dacă  $y(\omega)$  este o funcție pară, situație în care potrivit definiției  $y(\omega) = y(-\omega)$

și avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = 2\omega_0 \int_0^{\infty} \frac{y(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad (1.28)$$

• dacă  $y(\omega)$  este o funcție impară, când  $y(\omega) = -y(-\omega)$  atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{\omega y(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad (1.29)$$

Merită să subliniem că și în aceste două cazuri, spectrul frecvențelor negative există, dar pentru că  $y(-\omega) = y(\omega)$  sau  $y(-\omega) = -y(\omega)$ , el nu conține nici o informație în plus față de cea redată de spectrul frecvențelor pozitive, spectru accesibil pe cale experimentală.

Să ne imaginăm acum că  $f(\omega)$  este o funcție complexă, obținută pornind de la funcția reală  $F(t)$  căreia îi aplicăm o transformată Fourier. Atunci, pentru că  $F(t) = F^*(t)$ , găsim

$$f^*(\omega) = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} F^*(t) \exp(-i\omega t) dt = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp([i(-\omega)t]) dt = f(-\omega)$$

iar o separare similară cu cea dată în relația (1.26) se scrie

$$f_{\text{Re}}(\omega) - if_{\text{Im}}(\omega) = f_{\text{Re}}(-\omega) + if_{\text{Im}}(-\omega)$$

încât

$$\begin{aligned} f_{\text{Re}}(\omega) &= f_{\text{Re}}(-\omega) \\ f_{\text{Im}}(\omega) &= -f_{\text{Im}}(-\omega) \end{aligned} \quad (1.30)$$

În concluzie, pentru ca funcția complexă  $f(\omega)$  să poată fi caracterizată complet numai pe cale experimentală (adică, prin implicarea exclusivă a domeniului frecvențelor pozitive), trebuie să fie satisfăcute următoarele condiții:

- $f(\omega)$  să fie obținută ca transformată Fourier a funcției reale  $F(t)$ ,
- $F(t)$  să fie marginită, caz în care vom nota prin  $m_0$  marginea lui  $F(t)$ .

Combinând relațiile (1.26), (1.27), (1.28), (1.29) și (1.30) găsim

$$f_{\text{Re}}(\omega) = m_0 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} f_{\text{Im}}(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}$$

$$f_{\text{Im}}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{f_{\text{Re}}(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \quad (\text{I.31})$$

**2.4.2.3 Susceptibilitatea dielectrică, dispersia indicelui de refracție și rolul absorbției** Exploatarea relațiilor (I.31) în cazul susceptibilității dielectrice se face imediat ce precizăm valoarea pe care trebuie să o atribuim lui  $m_0$ . Pentru a găsi această valoare, revenim la (I.20) și observăm că pentru a interzice unui câmp electric finit  $\vec{E}(t)$  să producă o polarizare  $\vec{P}(t)$  infinită trebuie ca funcția  $X(t)$  să fie mărginită

$$|X(t)| < M_0, \forall t$$

În legătură cu susceptibilitatea  $\chi(\omega)$ , care este transformata Fourier a funcției  $X(t)$ , efectul condiției precedente este acela că după extinderea funcției în planul complex prin  $z = \omega + i\omega'$ , rezultă o funcție analitică  $\chi(z)$  al cărei modul tinde la zero pe cercul  $|z| \rightarrow \infty$ , ceea ce se scrie

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\chi(z)| = 0$$

Demonstrația acestei importante proprietăți pornește de la

$$\chi(\omega) = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \exp(i\omega t) dt$$

care se extinde în planul complex prin

$$\chi(z) = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \exp(izt) dt$$

relație care, în virtutea expresiei (I.21), devine

$$\chi(z) = C_2 \int_0^{\infty} X(t) \exp(izt) dt \quad (\text{I.32})$$

Acum trebuie să estimăm norma relației precedente, în care scop vom scrie

$$\begin{aligned} |\chi(z)| &= \left| C_2 \int_0^{\infty} X(t) \exp(izt) dt \right| \leq C_2 \int_0^{\infty} |X(t) \exp(izt)| dt \\ &\leq C_2 M_0 \int_0^{\infty} \exp(-|z| t \sin \theta) dt = \frac{C_2 M_0}{|z| \sin \theta} \end{aligned}$$

Lăsând la o parte punctele  $\theta = 0, \pi$ , este simplu de văzut că

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\chi(z)| = 0$$

ceea ce înseamnă că valoarea parametrului  $m_0$  (de care avem nevoie în (I.31)) este zero.

Revenind la punctele  $\theta = 0, \pi$ , discuția trebuie să pornească de la relația (I.32). Vom scrie

$$\chi(\omega, \omega' = 0) = C_2 \int_0^{\infty} X(t) \exp(i\omega t) dt$$

or, această relație arată că funcțiile  $\chi(\omega, \omega' = 0)$  și  $X(t)$  sunt transformate Fourier. Astfel, ele trebuie să fie funcții de pătrat sumabil. În particular, din această proprietate rezultă și că

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \chi(\omega, \omega' = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$$

ceea ce face ca

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\chi(z)| = 0 \quad (I.33)$$

și astfel confirmăm că valoarea lui  $m_0$  este nulă pentru toate punctele cercului  $|z| \rightarrow \infty$ .

În concluzie, pentru cazul susceptibilității dielectrice

$$m_0 = 0$$

fară nici o restricție.

Cu aceasta putem exploata imediat relațiile (I.31), care devin

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Re}}(\omega) &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} \chi_{\text{Im}}(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \\ \chi_{\text{Im}}(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi_{\text{Re}}(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \end{aligned}$$

formule cunoscute drept *relațiile de dispersie Kramers-Kronig*.

Trecând la indicele de refracție, din cauza legăturii exprimate de (I.13) avem

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$$

ceea ce ne conduce la extensia complexă

$$n(z) = \sqrt{1 + \chi(z)}$$

Deoarece  $\chi(z)$  este o funcție analitică, înseamnă că și  $n(z)$  are această proprietate. În plus, folosind (I.33), deducem că

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |n(z)| = 1$$

Pe această bază deducem că în cazul indicelui de refracție, valoarea parametrului  $m_0$  care trebuie folosită în ecuațiile (I.27) este

$$m_0 = 1$$

Ca urmare, formulele (I.31) produc

$$\begin{aligned} n_{\text{Re}}(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} n_{\text{Im}}(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \\ n_{\text{Im}}(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{n_{\text{Re}}(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \end{aligned}$$

Aceste relații pot fi scrise și în funcție de coeficientul de absorbție  $\mu(\omega)$ . În fond, expresia unei unde plane care se propagă de-a lungul axei Ox și suferă absorbție este

$$\psi = \psi_0 \exp(-\mu x) \exp[i(kx - \omega t)]$$

expresie care se mai poate scrie și sub forma

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \exp\{i[(k + i\mu)x - \omega t]\} \\ &= \psi_0 \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \left[\left(n + i\frac{c\mu}{\omega}\right)x - ct\right]\right\} \end{aligned}$$

de unde surprindem legătura care există între partea imaginară a indicelui de refracție și coeficientul de absorbție

$$n_{\text{Im}} \equiv \frac{c\mu(\omega)}{\omega}$$

În acest fel, putem scrie

$$\begin{aligned} n_{\text{Re}}(\omega) &= 1 + \frac{2c}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\mu(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \\ \mu(\omega) &= -\frac{2\omega^2}{\pi c} P \int_0^{\infty} \frac{n_{\text{Re}}(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \end{aligned}$$

relații care ne ajută să dovedim proprietățile anunțate într-o secțiune anterioară.

În primul rând, prin simplă inspecție putem vedea că legăturile între  $n_{\text{Re}}(\omega)$  și  $\mu(\bar{\omega})$  sunt reciproce, și că în particular proprietățile de absorbție determină dispersia indicelui de refracție.

În al doilea rând, să admitem că mediul caracterizat de  $n_{\text{Re}}(\omega)$  și  $\mu(\omega)$  este un mediu "tradițional". În acest caz (cel puțin pe baza datelor experimentale) el prezintă o absorbție pozitivă, adică

$$\mu(\omega) > 0, \forall \omega$$

și astfel deducem

$$n_{\text{Re}}(0) = 1 + \frac{2c}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\mu(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2} d\bar{\omega} > 1$$

ceea ce coincide cu a doua concluzie anticipată.

Este interesant de notat că în cazul unui mediu perfect transparent (adică neabsorbant), care trebuie caracterizat printr-o relație de forma  $\mu(\omega) = 0, \forall \omega$ , găsim  $n_{\text{Re}}(\omega) = 1, \forall \omega$ , rezultat care atestă două lucruri: a) absența dispersiei; și b) faptul că mediul este identic vidului.

## 2.5 Polarizarea neliniară

Încercarea de a generaliza legătura liniară între câmpul electric și polarizarea dielectrică a mediului, ilustrată în (I.7), se poate face pe două căi.

O primă posibilitate constă în a interpreta această relație liniară drept rezultat al unei trunchieri operate asupra unei dezvoltări în serie de puteri. Atunci, completând seria vom avea

$$\vec{P} = a_1 \vec{E} + a_2 (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E} + a_3 (\vec{E} \cdot \vec{E})^2 \vec{E} + \dots \quad (\text{I.34})$$

expresie care păstrează totodată caracterul vectorial al legăturii între  $\vec{P}$  și  $\vec{E}$ . Din acest motiv, toate puterile pare ale lui  $\vec{E}$  (conducând la expresii scalare) sunt absente.

A doua variantă de generalizare care ni se oferă are și avantajul de a trata în mod egal toate puterile lui  $\vec{E}$ . Ideea de care ne folosim constă în a scrie ecuația vectorială (I.7) pe componente

$$P_i = \epsilon_0 \chi E_i, i = 1, 2, 3 \quad (\text{I.35})$$

Matematic, cel mai general cadru de manifestare a legăturilor liniare între două spații vectoriale este cel al relațiilor tensoriale. Cu acest argument, (I.35) poate fi considerată drept particularizare a relației

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j, j = 1, 2, 3$$

pentru cazul în care  $\chi_{ij} = \chi\delta_{ij}$ . Generalizarea acestui rezultat se face implicând tensorii de ordin superior. Admițând convenția lui Einstein privind sumarea asupra indicilor repetați, avem

$$P_i = \varepsilon_0 (\chi_{ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots) \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

În primul ordin

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

sau

$$\vec{P}_L = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \vec{E} \quad (I.36)$$

expresie în care am întrebuințat  $\vec{P}_L$  pentru a reprezenta "polarizarea liniară". Contribuția termenilor superiori constă în

$$P_i = \varepsilon_0 (\chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots) \quad i, j, k, l \dots = 1, 2, 3 \quad (I.37)$$

ceea ce se poate scrie într-o formă compactă

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 (\chi^{(2)} : \vec{E} \cdot \vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} + \dots) \quad (I.38)$$

$\vec{P}_{NL}$  desemnând vectorul de "polarizare neliniară".

Deși îmbracă o formă complicată, totuși polarizarea neliniară nu se comportă altfel decât polarizarea liniară: ambele reprezintă un anumit tip de sursă de unde pentru mediul neliniar. Pe baza acestui argument putem anticipa modificarea adusă ecuației (I.11) de către vectorul polarizării neliniare

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_{NL} \quad (I.39)$$

Inspecția diversilor termeni desfășurați în (I.37) (sau (I.38)) sugerează că  $\chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$  joacă rolul termenului de cuplaj a două unde, iar  $\chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l$  descrie cuplajul a trei unde, etc. Deși acest lucru este adevărat, rămâne important să eliminăm orice confuzie posibilă, remarcând că: *un cuplaj de ordinul doi descrie interacția a trei unde, iar un cuplaj de ordinul trei implică interacția a patru unde!*

Ca regulă, ordinul susceptibilității (ori al polarizării neliniare) indică numărul undelor puse în interacție neliniară (cuplaj), dar numărul de indici (totdeauna superior cu o unitate ordinului) reprezintă corect numărul undelor antrenate în procesul neliniar.

## 2.5.1 Comentariu

Din cauza neliniarității introduse de către termenul de sursă  $\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_{NL}$ , ecuația de undă (I.39) nu poate primi o rezolvare exactă. De aceea se apelează la



”procedura” de rezolvare propusă de către Bloembergen și care exploatează următoarea idee: soluția corespunzătoare interacției între  $N + 1$  unde este guvernată de tensorul susceptibilității de ordinul  $N$  și comportă considerarea (tuturor) produselor de forma

$$\chi_{ijk\dots p}^{(N)} \underbrace{E_j E_k \dots E_p}_N$$

la care participă numai undele  $E_j, E_k, \dots, E_p$  ale căror frecvențe se pot combina liniar după regula

$$\omega_{NL} = \underbrace{\pm \omega_j \pm \omega_k \pm \dots \pm \omega_p}_N$$

$\omega_{NL}$  fiind frecvența unei generate prin procesul neliniar.

Pentru a realiza un inventar ordonat al proceselor utile există mai multe scheme. Una dintre acestea se bazează pe determinarea explicită a tuturor frecvențelor care pot rezulta din interacția neliniară propusă, urmând ca ulterior să fie selecționați termenii care construiesc soluția propriu-zisă a problemei.

Să exemplificăm această tehnică de construcție a frecvențelor prin considerarea cazului unei interacții (prin polarizarea neliniară) de ordinul doi, între două unde cu frecvențele  $\omega_1$  și  $\omega_2$ :

- Folosind simetrizarea algebrică, construim șirul (nu neapărat ordonat)  $-\omega_1, -\omega_2, \omega_1, \omega_2$ . Justificarea dublării termenilor șirului apare pe de o parte din cauza identității trigonometrice

$$\begin{aligned} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) &\sim [\exp(i\omega_1 t) + \exp(-i\omega_1 t)] [\exp(i\omega_2 t) + \exp(-i\omega_2 t)] \\ &= \exp[i(\omega_1 + \omega_2)t] + \exp[i(\omega_1 - \omega_2)t] \\ &\quad + \exp[i(-\omega_1 + \omega_2)t] + \exp[-i(\omega_1 + \omega_2)t] \end{aligned}$$

iar pe de altă parte, din condiția de realitate a tuturor mărimilor de câmp (care obligă diversele componente ale interacției să fie de forma  $\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$ ). Pe ansamblu, vedem că rezultatul compunerii ”neliniare” a frecvențelor  $\omega_1$  și  $\omega_2$  echivalează cu o compunere liniară a șirului simetrizat de frecvențe.

- Folosind ”vectorul”  $V = (-\omega_1, -\omega_2, \omega_1, \omega_2)$  și transpusul său, construim tabloul

	$-\omega_1$	$-\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$
$-\omega_1$	$-2\omega_1$	$-\omega_1 - \omega_2$	$-\omega_1 + \omega_1$	$-\omega_1 + \omega_2$
$-\omega_2$	$-\omega_2$	$-2\omega_2$	$-\omega_2 + \omega_1$	$-\omega_2 + \omega_2$
$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1 - \omega_2$	$2\omega_1$	$\omega_1 + \omega_2$
$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2 - \omega_2$	$\omega_2 + \omega_1$	$2\omega_2$

care conține în fiecare celulă suma valorilor care se găsesc la capetele de linie și coloană.

Constatăm că prin amestecul nelinier al celor două frecvențe inițiale se pot obține 16 frecvențe. Totuși, din cauza simetriei tabloului, numai 10 componente pot avea valori diferite. În plus, efectul simetriei prezente în construcția vectorului  $V$  restrânge și mai mult câmpul valorilor independente încât în loc de 10 componente independente avem numai 9, așa cum se vede rescriind explicit tabloul precedent

	$-\omega_1$	$-\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$
$-\omega_1$	$-2\omega_1$	$-\omega_1 - \omega_2$	0	$-\omega_1 + \omega_2$
$-\omega_2$		$-2\omega_2$	$-\omega_2 + \omega_1$	0
$\omega_1$			$2\omega_1$	$\omega_1 + \omega_2$
$\omega_2$				$2\omega_2$

Aceste rezultate ne permit să anticipăm natura câtorva dintre procesele descrise de Optica neliniară. Astfel, valorile distincte ale combinațiilor de frecvență sugerează existența următoarelor fenomene neliniare: dublarea frecvenței ( $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ), redresarea optică ( $-\omega_1 + \omega_1 = -\omega_2 + \omega_2 = 0$ ) și mixajul sau generarea parametrică ( $-\omega_1 + \omega_2$ ,  $-\omega_2 + \omega_1$ ).

## 2.5.2 Exemplu: dublarea frecvenței

Ca o ilustrare practică a modului în care trebuie folosită schema Bloembergen, dar și cu scopul de a evidenția "potențialul" fenomenologic concentrat în sursa neliniară  $\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_{NL}$ , vom urmări o modelare ultra simplificatoare a realității fizice (care nu reține decât trăsăturile sine qua non). Chiar și în asemenea condiții, vom avea "parte întreagă" în privința dificultăților care se asociază de obicei studiului matematic al fenomenelor neliniare.

Așadar, alegem cazul unui mediu nelinier în care pătrunde o undă electromagnetică plană, polarizată (liniar) după direcția  $Ox$  și care se propagă după axa  $Oz$ . În Optica clasică (liniară), o asemenea situație este descrisă prin reprezentarea complexă

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \exp[i(k_0 z - \omega t)]$$

Folosirea expresiei reale

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_x \operatorname{Re} \{ E_0 \exp[i(k_0 z - \omega t)] \} \\ &= \frac{1}{2} \vec{e}_x \{ E_0 \exp[i(k_0 z - \omega t)] + \text{c.c.} \} \end{aligned} \quad (1.40)$$

nu este cerută decât în calculele care implică expresii pătratice (sau de ordin

superior) în amplitudinile de câmp (de exemplu, calculele energetice).

Optica neliniară, tocmai din cauza inevitabilelor prezențe ale elementelor de neliniaritate, ne obligă să lucrăm întotdeauna cu expresiile reale (adică, cu formele direct măsurabile) ale tuturor mărimilor.

Revenind la situația pe care ne-am propus să o studiem, notăm că datorită alegerilor simplificatoare ecuația de undă (I.39) devine

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{NL} \quad (I.41)$$

Deși în general, legătura între  $\vec{P}_{NL}$  și  $\vec{E}$  este de natură tensorială (așa cum se poate vedea din relația (I.38)), vom admite, de asemenea pentru a păstra numai elementele esențiale, că relația este pătratică dar scalară

$$P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)} E E \quad (I.42)$$

susceptibilitatea dielectrică fiind o mărime reală (nu avem absorbție).

În aceste condiții, ne propunem să determinăm soluția ecuației (I.41).

Începem făcând ipoteza că soluția dorită se poate dezvolta în serie Fourier discretă

$$E = \sum_m \{ E_m(z) \exp [i(k_m z - m\omega t)] + c.c \} \quad (I.43)$$

unde am lăsat la o parte factorul  $\frac{1}{2}$  deoarece această omisiune este corectată automat atunci când vom determina explicit valorile coeficienților  $E_m$ .

Dezvoltarea în serie (I.43) este urmarea ideii potrivit căreia în prezența "sursei"  $P_{NL}$ , mediul neliniar permite propagarea unor unde cuasi-plane ( $E_m(z)$  fiind funcții slab variabile în raport cu  $z$ ), aflate în interacție datorită cuplajului oferit de polarizarea neliniară.

Forma completă a termenului de sursă propus de soluția (I.43) pentru cazul interacției binare este

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{NL} = & -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{m,n} \left\{ \chi^{(2)}(\omega_{m+n}) (m+n)^2 E_m E_n \exp [i((k_m + k_n) z - (m+n)\omega t)] + \right. \\ & \left. \chi^{(2)}(\omega_{m-n}) (m-n)^2 E_m E_n^* \exp [i((k_m - k_n) z - (m-n)\omega t)] + c.c \right\} \quad (I.44) \end{aligned}$$

relație în care  $cc$  desemnează complex conjugatul fiecăruia dintre cei doi termeni prezenți între acolade.

**Tema I.4** Folosind (I.43) și (I.44) în ecuația (I.41), arătați că aplicând aproximația

undei rotitoare (care acceptă că numai undele care se rotesc cu aceeași viteză în spațiul complex pot interacționa puternic) și adăugând: a) neglijarea derivatelor de ordinul 2 în raport cu  $z$ ; b) definițiile

$$\begin{aligned} k_m^2 &= \mu_0 \varepsilon(\omega_m) \omega_m^2 \\ \omega_m &= m\omega \end{aligned}$$

pentru undele parțiale, și c) ipoteza prezentei a numai două unde ( $m, n = 1, 2$ ), găsim că amplitudinile  $E_1$  și  $E_2$  sunt controlate prin următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned} 2ik_1 \frac{dE_1}{dz} &= -\frac{\chi^{(2)}(\omega)\omega^2}{c^2} E_1^* E_2 \exp[i((k_2 - 2k_1)z)] \\ 2ik_2 \frac{dE_2}{dz} &= -\frac{4\chi^{(2)}(2\omega)\omega^2}{c^2} E_1^2 \exp[-i((k_2 - 2k_1)z)] \end{aligned} \quad (I.45)$$

Relațiile care guvernează amplitudinile  $E_1$  și  $E_2$  se simplifică în cazul satisfacerii condiției de adaptare de fază (*phase matching condition*)

$$\Delta k = 2k_1 - k_2 = 0 \quad (I.46)$$

care, prin relațiile  $k = nk_0$  și  $n^2 = 1 + \chi$ , atrag o ciudată legătură

$$\chi^{(2)}(2\omega) = 3 + 4\chi^{(2)}(\omega)$$

Deși (I.45) s-ar putea trata într-un cadru mai general, ne vom rezuma la discuția sistemului în ipoteza adaptării de fază ( $\Delta k = 2k_1 - k_2 = 0$ ). Așadar, este suficient să considerăm sistemul simplificat

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} &= iaE_1^* E_2 \\ \frac{dE_2}{dz} &= ibE_1^2 \end{aligned} \quad (I.47)$$

unde

$$a = \frac{\chi^{(2)}(\omega)\omega^2}{2k_1 c^2}, \quad b = \frac{\chi^{(2)}(2\omega)\omega^2}{k_1 c^2}$$

Punând

$$\begin{aligned} E_1 &= e_1 \exp(i\varphi_1) \\ E_2 &= e_2 \exp(i\varphi_2) \end{aligned}$$

și separând partea reală și cea imaginară a sistemului (I.47) ajungem la următoarele 4 ecuații

$$\frac{de_1}{dz} = -ae_1 e_2 \sin(\varphi_2 - 2\varphi_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{de_2}{dz} &= be_1^2 \sin(\varphi_2 - 2\varphi_1) \\ \frac{d\varphi_1}{dz} &= ae_2 \cos(\varphi_2 - 2\varphi_1) \\ \frac{d\varphi_2}{dz} &= b\frac{e_1^2}{e_2} \cos(\varphi_2 - 2\varphi_1)\end{aligned}\quad (1.48)$$

Notând  $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1$  și folosind multiplicatori corespunzători, din primele două ecuații ale sistemului precedent obținem

$$\frac{d}{dz} (be_1^2 + ae_2^2) = 0$$

ceea ce înseamnă că mărimea

$$\begin{aligned}I &= be_1^2(z) + ae_2^2(z) \\ &= k_1 \left[ \chi^{(2)}(2\omega)e_1^2(z) + \chi^{(2)}(\omega)e_2^2(z) \right]\end{aligned}\quad (1.49)$$

se conservă.

Dacă la intrarea în mediul neliniar avem numai unda  $e_1(0) \neq 0$  (în timp ce armonica a doua lipsește,  $e_2(0) = 0$ ), vedem că pe măsura propagării amplitudinea *armonicii a doua* crește prin absorbția energiei unde primare

$$e_2(z) = \sqrt{\frac{I - be_1^2(z)}{a}}$$

Ultimele două ecuații ale sistemului (1.48) produc

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dz} &= \left( b\frac{e_1^2}{e_2} - 2ae_2 \right) \cos(\Phi) \\ &= \frac{I - 3ae_2^2}{e_2} \cos(\Phi)\end{aligned}\quad (1.50)$$

în timp ce a doua ecuație a aceluiași sistem ne dă

$$\frac{de_2}{dz} = (I - ae_2^2) \sin(\Phi) \quad (1.51)$$

Din ecuațiile (1.50) și (1.51) găsim

$$dz = \frac{de_2}{(I - ae_2^2) \sin(\Phi)} = \frac{e_2 d\Phi}{(I - 3ae_2^2) \cos(\Phi)} \quad (1.52)$$

sistem pentru care avem deja o integrală primă dată de  $I$  (vezi (1.49)).

Vom căuta a doua integrală primă scriind

$$\frac{(I - 3ae_2^2) de_2}{e_2 (I - ae_2^2)} = \frac{\sin(\Phi) d\Phi}{\cos(\Phi)}$$

După ce observăm separarea părții din stânga în formele elementare

$$\frac{(I - 3ae_2^2) de_2}{e_2 (I - ae_2^2)} = \frac{de_2}{e_2} + \frac{-2ae_2 de_2}{I - ae_2^2}$$

integrarea se face imediat. Dacă desemnăm prin  $\bar{I}$  noua constantă de integrare, atunci a doua integrală primă a sistemului (I.52) este

$$\bar{I} = be_2(z)e_1^2(z) \cos(\Phi(z)) \quad (I.53)$$

Acest invariant este deosebit de comod pentru a preciza detaliile procesului de generare a armonicii a doua. Cazul care ne interesează este acela în care la intrarea în mediul neliniar este prezentă numai unda de frecvență fundamentală. Din această cauză

$$e_2(0) = 0 \quad (I.54)$$

ceea ce înseamnă că valoarea lui  $\bar{I}$  este nulă în orice punct al mediului neliniar ( $\forall z$ )

$$\bar{I} = be_2(z)e_1^2(z) \cos(\Phi(z)) = be_2(0)e_1^2(0) \cos(\Phi(0)) = 0$$

Relația anterioară ne permite să extragem

$$be_2(z)e_1^2(z) \cos(\Phi(z)) = 0$$

or, în condițiile în care știm că imediat ce  $z \neq 0 \Rightarrow \{e_2(z) \neq 0, e_1(z) \neq 0\}$  aceasta înseamnă

$$\cos(\Phi(z)) = 0 \Rightarrow \Phi(z) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \forall z > 0$$

Ca urmare, ecuația (I.51) devine

$$\pm dz = \frac{de_2}{I - ae_2^2}$$

și conduce la

$$e_2(z) = \pm \sqrt{\frac{I}{a}} \tanh\left(\sqrt{aI}z\right)$$

de unde, interpretând  $I_2(z) = ae_2^2(z)$  drept energie înmagazinată de armonica a doua, în timp ce expresia  $I_1(z) = Be_1^2(z)$  redă energia unei "fundamentale" ( $I = I_1(0)$ ) avem

$$I_2(z) = I_1(0) \left[ \tanh\left(\sqrt{aI_1(0)}z\right) \right]^2$$

funcție care este ilustrată în Fig.I.2.

Rezultatul obținut ilustrează capacitatea sursei neliniare (termenul conținând polarizarea neliniară  $P_{NL}$ ) de a provoca generarea armonicii a doua a unei unde

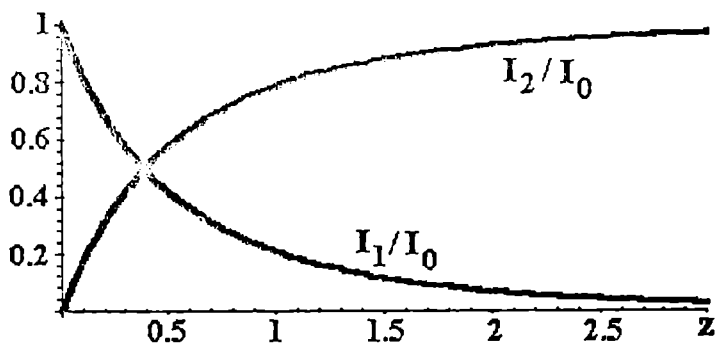


Figura I.2: Generarea armonicii a doua

care străbate mediul neliniar. După cum vedem, acest proces poate absorbi întreaga energie a unei "fundamentale". Mai mult, este remarcabil că generarea armonicii se face fără apariția unui zgomot însoțitor, semnalul obținut fiind pur.

### 2.5.3 Amestecuri de frecvență, generarea parametrică

Diverșii termeni din (I.44), al căror efect nu s-a simțit deloc în procesul de dublare a frecvenței, sunt responsabili de producerea altor procese. Spre exemplu, ca și în cazul dublării de frecvență, în prezența a două sau mai multe unde luminoase, polarizarea neliniară de ordinul doi poate interveni producând un amestec din care să rezulte frecvențe noi. Acest proces poartă numele de *generare parametrică*. La rândul ei, polarizarea neliniară de ordinul trei este responsabilă de procese mai complicate cum sunt: efectul Kerr, fenomenele de difuzie (Raman, Rayleigh, Compton, Brillouin), emisia și absorbția simultană a mai multor fotoni.

**Tema I.5** *Considerați că într-un mediu neliniar există două unde provenite din "exteriorul" sistemului și care au frecvențele  $\omega_1$  și  $\omega_2$ . Presupunând că prin interacția acestora rezultă o a treia undă de frecvență  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  (generare parametrică), arătați că înlocuind (I.44) cu*

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{NL} = & -\frac{1}{c^2} \sum_{m,n} \left\{ \chi^{(2)}(\omega_m + \omega_n) (\omega_m + \omega_n)^2 E_m E_n \right. \\ & \cdot \exp [i((k_m + k_n)z - (\omega_m + \omega_n)t)] + \text{c.c.} \\ & + \chi^{(2)}(\omega_m - \omega_n) (\omega_m - \omega_n)^2 E_m E_n^* \\ & \cdot \exp [i((k_m - k_n)z - (\omega_m - \omega_n)t)] + \text{c.c.} \left. \right\} \end{aligned}$$

*și admitând transparența mediului neliniar (susceptibilitățile dielectrice sunt mărimi reale), sistemul de ecuații care descrie evoluția celor trei amplitudini de undă are*



următoarea formă

$$\begin{aligned}
 2ik_1 \frac{dE_1}{dz} &= -\frac{\chi^{(2)}(\omega_1)\omega_1^2}{c^2} E_2^* E_3 \exp[i((k_3 - k_1 - k_2)z)] \\
 2ik_2 \frac{dE_2^*}{dz} &= \frac{\chi^{(2)}(\omega_3 - \omega_1)\omega_2^2}{c^2} E_1 E_3^* \exp[-i((k_3 - k_1 - k_2)z)] \\
 2ik_3 \frac{dE_3}{dz} &= -\frac{\chi^{(2)}(\omega_3)\omega_3^2}{c^2} E_1 E_2 \exp[-i((k_3 - k_1 - k_2)z)] \quad (I.55)
 \end{aligned}$$

Studiul interacției binare a trei unde relevă un aspect interesant: deși prin injecția externă a numai două unde se crează o evidentă asimetrie, relațiile de interacție (I.55) sunt perfect simetrice și arată că amplitudinea fiecărei unde este alimentată pe seama cuplajului celorlalte două. În acest context interpretarea cauzală clasică, potrivit căreia perechea de unde provenită din exteriorul sistemului ar fi cauza apariției celei de a treia unde este oarecum nesatisfăcătoare. Putem însă observa că mecanismul interacției neliniare presupune existența unui set de trei unde, iar lipsa uneia dintre ele provoacă sistemului reacția de a o genera. Totuși, relația de tip "cauză-efect" nu se pierde cu totul și urma ei se poate regăsi în forma pe care o iau condițiile de frontieră (vezi relația (I.54)).

### 3. Medii neliniare

Testele experimentale au demonstrat că efectele optice neliniare se pot manifesta în orice fel de medii materiale, indiferent de starea lor de agregare (solidă, lichidă sau gazoasă). Totuși, există diferențe privind intensitatea câmpurilor optice necesare pentru a provoca apariția acestor procese, iar diferențele acoperă câteva ordine de mărime.

Mediile materiale cele mai responsive - și din acest motiv, primele descoperite - sunt solidele cristaline. Răspunsul lor neliniar este datorat unei reacții de tip global ("în bloc", de ansamblu) exprimată prin intermediul relațiilor de simetrie. În mod specific, modelele teoretice iau în considerare perturbarea configurației electronilor delocalizați (de tipul celor liberi din metale sau a celor de conducție din semiconductori).

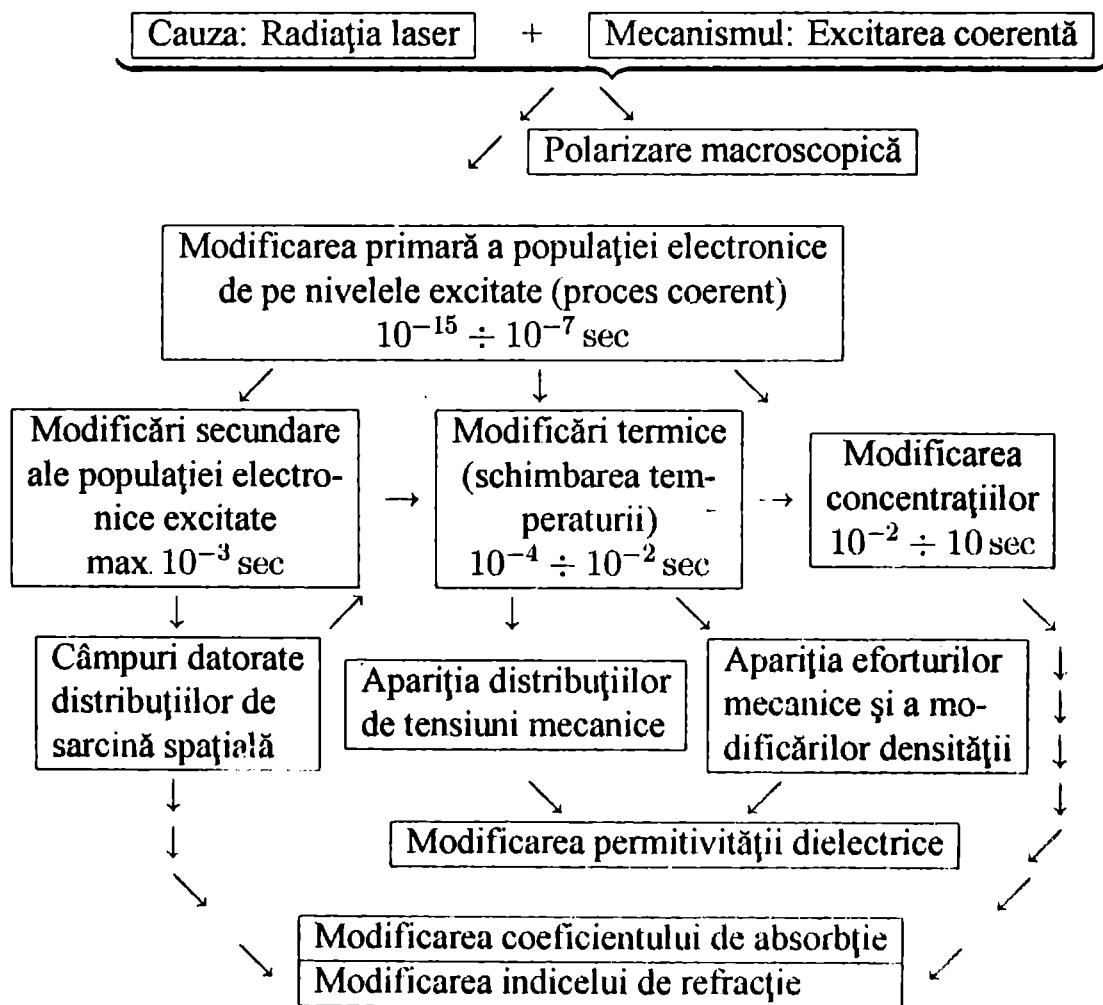
A doua clasă de materiale, aflată în dezvoltare explozivă, este de origine recentă. Ea privește "materialele moleculare" exemplificate prin clasa cristalelor organice și cea a polimerilor (dubli sau dopați). În aceste cazuri, răspunsul neliniar provine din interacția Van der Waals care crează punți între vecini. Pentru a obține o structură ordonată se procedează fie prin creșteri în strat subțire sau la înglobarea în filme de polimeri (polimeri dopați).

Din perspectiva aplicațiilor, cele mai importante cerințe pe care trebuie să le satisfacă un material optic neliniar sunt: stabilitatea structurală îndelungată în prezența câmpurilor optice intense, transparență de bandă largă sau prezența unor ferestre de transparență bine plasate, capacitate de prelucrare mecanică și optică, independența față de condițiile de ambient, și nu în ultimul rând, o bună stabilitate termică.

### 3.1 Răspunsul unui mediu material la pompajul optic

Răspunsul neliniar al mediilor materiale se datorează unui șir de mecanisme locale care se amorsează prin intensitatea luminoasă a fascicolului incident.

**Tabloul efectelor provocate mediilor materiale  
de către câmpurile intense de lumină**



Un mediu transparent (slab disipativ), supus propagării unei unde luminoase de

mare intensitate, răspunde câmpului electric al unde incidente prin "deformarea" configurației sale electronice. În ipoteza că unda luminoasă se reduce la un puls foarte scurt, răspunsul mediului se traduce printr-o succesiune rapidă de efecte. Dintre acestea, cele care sunt asociate unor manifestări optice sunt surprinse în tabloul precedent.

Este ușor de înțeles că studiul răspunsului coerent sau al proceselor care prezintă o dinamică rapidă nu poate avea loc în cadrul opticii clasice. În fond, tocmai din cauza absenței unor detectori capabili să permită urmărirea sincronă (în timp real) a fenomenelor care se derulează la frecvențe optice, definiția intensității luminoase în Optica clasică include o operație de "încetinire" exprimată printr-o mediere temporală.

Comparativ, în Optica neliniară resursele instrumentale reclamate de studiul fenomenelor rapide sunt furnizate de proprietățile complementare ale fasciculelor extrem de intense, întrebuințate pentru a le cauza. Radiația laser, în afara intensității luminoase deosebite, prezintă și proprietăți de coerență sau de polarizare. Or, alterarea acestor proprietăți la traversarea mediului neliniar poate fi urmărită prin tehnici holografice (sau interferometrice) și această informație permite identificarea mecanismelor de interacție care au influențat propagarea.

## **4. Principii de conservare**

Modelul teoretic al oricărui proces neliniar conține întotdeauna indicații privitoare la modul de realizare a unei conversii energetice maxime în favoarea efectului urmărit. Este uzual ca asemenea sugestii să graviteze în jurul unor principii de conservare.

Aceeași zonă este exploatată și de către tentativele de eliminare a proceselor disipative care altfel, provocând o permanentă modificare a condițiilor termice, îngreunează atingerea regimului staționar și, pe această cale, limitează posibilitatea atingerii eficiențelor teoretice.

### **4.1 Conservarea impulsului și energiei**

În cazul absenței proceselor disipative ne așteptăm ca respectarea principiilor generale de conservare a impulsului și energiei să fie perfectă. Din nefericire, simetria cristalină a celor mai multe medii neliniare face ca aceste principii să nu poată fi respectate decât în mod aproximativ.

Experimental s-a constatat că pe măsura depărtării de exigențele acestor principii, eficacitatea proceselor neliniare se reduce dramatic (deși fenomenele neliniare nu dispar cu totul!).

Pentru a da o formă concretă acestor două principii, cel mai potrivit este să le

prezentăm în imagine fonică. De asemenea este indicat să le discutăm pe un caz concret.

Interacția binară a trei unde dovedește că două unde cu frecvențele  $\omega_1$  și  $\omega_2$  pot constitui "materialul" pentru generarea unei a treia unde pe frecvența  $\omega_3$ , și că procesul cere

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

or, nu este greu de văzut că această relație este o consecință directă a principiului de conservare a energiei

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$$

Mai general, dacă procesul neliniar consumă energia a  $N$  fotoni de frecvențe  $\omega_{In}^i$  pentru a genera  $M$  fotoni de frecvențe  $\omega_{Out}^j$ , atunci *principiul de conservare a energiei* se scrie

$$\sum_{i=1}^N \hbar\omega_{In}^i = \sum_{j=1}^M \hbar\omega_{Out}^j \quad (1.56)$$

Ecuatiile procesului de generare parametrică (I.55) evidențiază o sensibilă simplificare dacă impunem condiția de adaptare de fază

$$k_3 = k_1 + k_2 \quad (1.57)$$

Același efect a fost evidențiat pentru procesul dublării frecvenței prin ecuația (I.46).

Ținând seama de relația lui de Broglie

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

este clar că adaptarea de fază nu diferă în conținut de principiul de conservare a impulsului, aplicat cazului propagării coliniare (când ne putem folosi de expresii scalare).

Prin urmare, în cazul unui proces neliniar care "consumă"  $N$  fotoni având vectorii de undă  $\vec{k}_{In}^i$  pentru a genera  $M$  fotoni cu vectorii de undă  $\vec{k}_{Out}^j$ , *principiul de conservare a impulsului* se scrie

$$\sum_{i=1}^N \hbar \vec{k}_{In}^i = \sum_{j=1}^M \hbar \vec{k}_{Out}^j \quad (1.58)$$

**Tema 1.6** Folosind ecuațiile (I.45) în condiții de semnal mic ( $E_2 \ll E_1 \Rightarrow E_1 \sim \text{const.}$ ), arătați că în prezența unei neadaptări de fază  $\Delta k \neq 0$ , eficiența generării armonicii a doua (definită ca raport de vectori Poynting și desemnată prin  $\eta$ ) este de

forma

$$\eta \sim L^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{L\Delta k}{2}\right)}{\frac{L\Delta k}{2}} \right]^2$$

unde  $L$  reprezintă parcursul undelor în mediul neliniar.

## 4.2 Relațiile Manley-Rowe

Procesele neliniare parametrice, care au loc în sisteme nedisipative, trebuie să respecte condiții suplimentare, în afara exigențelor impuse de principiile generale de conservare. Aceste criterii adiționale sunt reprezentate de către *relațiile Manley-Rowe*, numite și *condițiile putere-frecvență*.

La origine, aceste relații au apărut în domeniul electronicii și aveau legătură cu funcționarea amplificatorului parametric. Rostul lor concret era de a facilita descoperirea condițiilor pentru apariția reactanței negative, necesare pentru amorsarea procesului parametric. Este interesant că relațiile Manley-Rowe sunt aplicabile și în domeniul Opticii neliniare, ele permițând reinstaurarea unei imagini cauzale în descrierea diverselor procese.

Luând în considerare cazul propagării în medii fără pierderi (cum sunt mediile optice transparente) și notând cu  $w$  densitatea de energie a unei unde iar cu  $\vec{S}$  vectorul Poynting, putem scrie legea de conservare a energiei electromagnetice sub forma

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (1.59)$$

Pentru unde armonice în timp, avem

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$$

încât, folosind  $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$  pentru fronturi de undă cuasi-plane (pentru care  $\vec{k} \cdot \vec{E} \approx 0$ ), găsim

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}^*) \\ &= \frac{\vec{\tau} n k_0}{\mu_0 \omega} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) = \frac{n}{c \mu_0} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \vec{\tau} \end{aligned} \quad (1.60)$$

relații în care am profitat de unele notații introduse anterior. Continuarea șirului precedent de transformări ne-ar fi condus la

$$\vec{S} = \frac{c \sqrt{\epsilon \mu_0}}{c \mu_0} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} \epsilon (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \vec{\tau} = v_f (\vec{E} \cdot \vec{D}^*) \vec{\tau} = v_f w \vec{\tau}$$

relație bine cunoscută în Optica clasică.

Să considerăm că propagarea are loc numai în lungul axei Oz. Atunci,  $\vec{\tau} \equiv \vec{e}_z$  și  $\vec{S} = S_z \vec{e}_z$ , iar  $\vec{E} = \vec{E}(z)$ . Astfel avem

$$\nabla \vec{S} = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = \frac{\partial S_z}{\partial z} = \frac{n}{c\mu_0} \frac{d}{dz} (\vec{E} \vec{E}^*)$$

Revenind la ecuația (I.59) și notând  $P = \frac{\partial w}{\partial t}$  (densitatea de putere) putem scrie

$$P = -\frac{n}{c\mu_0} \frac{d}{dz} (\vec{E} \vec{E}^*) \quad (I.61)$$

Să aplicăm acest rezultat în cazul interacției binare a trei unde, pornind de la sistemul de ecuații (I.55). Efectuând conjugarea complexă a ultimelor două ecuații și apoi înmulțind cu factori corespunzători pentru a forma  $\frac{d}{dz} (\vec{E}_i \vec{E}_i^*)$ , găsim

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{\omega_1 \chi^{(2)}(\omega_1)} \frac{d(E_1 E_1^*)}{dz} &= \frac{n_2}{\omega_2 \chi^{(2)}(\omega_2)} \frac{d(E_2 E_2^*)}{dz} = -\frac{n_3}{\omega_3 \chi^{(2)}(\omega_3)} \frac{d(E_3 E_3^*)}{dz} \\ &= -\frac{1}{2ic} E_1^* E_2^* E_3 \exp[i((k_3 - k_1 - k_2)z)] \end{aligned} \quad (I.62)$$

rezultat care ține seama și de relațiile

$$k_i = n_i k_{0i} = n_i \frac{\omega_i}{c}, i = 1, 2, 3$$

Pe baza ecuației (I.61) putem rescrie (I.62)

$$\frac{P_1}{\omega_1 \chi^{(2)}(\omega_1)} = \frac{P_2}{\omega_2 \chi^{(2)}(\omega_2)} = -\frac{P_3}{\omega_3 \chi^{(2)}(\omega_3)} \quad (I.63)$$

Dacă egalitățile  $\chi^{(2)}(\omega_1) = \chi^{(2)}(\omega_2) = \chi^{(2)}(\omega_3)$  sunt satisfăcute, atunci (I.63) generează două versiuni ale relațiilor Manley-Rowe (putere-frecvență), ambele corecte

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{\omega_1} &= \frac{P_2}{\omega_2} = -\frac{P_3}{\omega_3} > 0 \\ -\frac{P_1}{\omega_1} &= -\frac{P_2}{\omega_2} = \frac{P_3}{\omega_3} > 0 \end{aligned} \quad (I.64)$$

Prima dintre ele se aplică atunci când procesul neliniar folosește undele de frecvențe  $\omega_1$  și  $\omega_2$  pentru a produce o undă pe frecvența  $\omega_3$  ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ). Inspectând semnele celor trei termeni, constatăm că undele de frecvență  $\omega_1$  și  $\omega_2$  constituie sursele de putere ( $\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_2}{\omega_2} > 0$ ) care alimentează procesul de generare a unei de frecvență  $\omega_3$  (deoarece  $\frac{P_3}{\omega_3} < 0$ ). Tocmai având în vedere existența unei asemenea interpretări, am afirmat anterior că relațiile Manley-Rowe permit reîntoarcerea la o viziune cauzală în descrierea proceselor neliniare.

Relația energetică (I.62) și legătura existentă între cele trei frecvențe, sugerează imediat o descriere corpusculară. În fond, pentru fiecare foton cu frecvența  $\omega_3$  dispare o pereche de fotoni de frecvența  $\omega_1$  și  $\omega_2$ . Din această cauză procesul este numit "fuziune fotonică".

A doua relație a sistemului (I.64) se aplică în cazul "fisiunii fotonice". De această dată este vorba despre obținerea unei frecvențe inferioare (de exemplu  $\omega_2$ ), amestecând frecvențele  $\omega_3$  și  $\omega_1$  potrivit relației  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ . Deoarece în asemenea situație atât  $P_1$  cât și  $P_2$  sunt puteri negative, în timp ce  $P_3$  este singura putere pozitivă, înseamnă că unda de frecvență  $\omega_3$  este singura sursă de energie care alimentează generarea frecvenței  $\omega_2$ . Verificarea experimentală a acestei consecințe a relațiilor Manley-Rowe confirmă că în procesul de fisiune fotonică cea de a doua undă (în cazul discuției noastre, unda de frecvență  $\omega_1$ ) poate lipsi, ea fiind generată împreună cu unda de frecvență  $\omega_2$ .

## 5. Cuprinderea fenomenologică

Fenomenele Opticii neliniare pot fi clasificate în mai multe feluri, în funcție de criteriile adoptate. O abordare poate porni de la rolul rezervat mediului neliniar. Există o mare clasă de fenomene (care includ dublarea frecvenței, generarea parametrică s.a.) care nu cer mediului neliniar decât un rol catalitic. Ca urmare, între fotonii diverselor câmpuri optice și mediul de propagare nu se produc decât interacții elastice, prin intermediul cărora se realizează condițiile necesare adaptării de fază. Singurele beneficiare ale interacțiilor inelastice, de tipul fisiunii și fuziunii de fotoni, sunt câmpurile de radiații.

Cealaltă clasă de procese (cum sunt cele de împrăștiere coerentă Raman, Brillouin, etc.) cer mediului neliniar o participare activă, manifestată prin ciocniri inelastice cu fotonii. Din acest motiv, frecvențele câmpurilor optice generate prin interacțiile neliniare poartă amprenta spectrului fononic al mediului neliniar.

Deși pare mai "impersonală", o sistematizare clară a fenomenelor Opticii neliniare se face pe baza tensorului susceptibilității dielectrice, apelând pentru ilustrare (atunci când este cazul) la diagramele Byer.

Pentru a limpezi sensul unor notații devenite standard, există mai multe convenții care trebuie adăugate celor deja prezentate:

- Tensorul de ordinul  $n$  al susceptibilității dielectrice are de fapt  $n + 1$  indici,  $\chi_{1\dots n+1}^{(n)}$ , și depinde de  $n + 1$  frecvențe,  $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ ;
- Lista argumentelor susceptibilității începe cu simetricul algebric al frecvenței generate de procesul neliniar, restul argumentelor fiind separate de primul prin punct și virgulă. Pentru cazul precedent, dacă frecvența  $\omega_{n+1}$  este generată de

proces, atunci vom scrie  $\chi_{1\dots n+1}^{(n)}(-\omega_{n+1}; \omega_1, \dots, \omega_n)$ ;

- Prezența unei valori negative în șirul frecvențelor scrise după primul argument semnifică faptul că în produsul care determină polarizarea neliniară corespunzătoare, amplitudinea asociată este afectată de conjugarea complexă:

$$\chi_{1\dots n+1}^{(n)}(-\omega_{n+1}; \omega_1, \dots, -\omega_i, \dots, \omega_n) E_1(\omega_1) \dots E_i^*(\omega_i) \dots E_n(\omega_n)$$

- În mod frecvent, din motive de simetrie, este posibil ca indicii susceptibilității și ordinea frecvențelor să poată fi permutate liber. Acesta este conținutul criteriului de simetrie al lui Kleinman.

## 5.1 Interacții neliniare de ordinul doi

Aceste interacții sunt provocate de către tensorul susceptibilității de ordinul doi  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1; \omega_2, \omega_3)$  sau (în mod echivalent) de către polarizarea neliniară de ordinul doi:  $P_{NL}^{(2)}(\omega_1) = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1; \omega_2, \omega_3) E_j(\omega_2) E_k(\omega_3)$ . Cele trei argumente ale susceptibilității dielectrice arată că este vorba despre "interacții cu trei unde".

Tabloul următor face o sistematizare a acestor interacții. Săgețile duble indică faptul că procesul neliniar se poate desfășura și atunci când numai unda evidențiată este puternică. Prin *DC* trebuie înțelese atât câmpuri electrice constante cât și câmpuri de joasă frecvență.

Denumirea	Operația	Reprezentarea	Schematizarea
Dublarea frecvenței	$2\omega = \omega + \omega$	$\chi_{ijk}^{(2)}(-2\omega; \omega, \omega)$	$\begin{array}{ccc} 2\omega & \omega & \omega \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$
Generarea sume	$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$	$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_3; \omega_2, \omega_1)$	$\begin{array}{ccc} \omega_3 & \omega_2 & \omega_1 \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$
Generarea diferenței	$\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$	$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1; \omega_2, \omega_3)$	$\begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$
Fluorescența parametrică	$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$	$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2; \omega_3)$	$\begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow \end{array}$



(continuare)

Redresarea optică	$0 = \omega - \omega$	$\chi_{ijk}^{(2)}(0; \omega, -\omega)$	$\begin{array}{ccc} DC & \omega & \omega \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$
Efectul electrooptic liniar (Pockels)	$-\omega = 0 + \omega$	$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega; 0, \omega)$	$\begin{array}{ccc} \omega & DC & \omega \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$

### 5.1.1 Fenomene care implică două unde

Tabloul precedent arată că există două procese care implică trei câmpuri electrice, dintre care unul este de tip static (constant) sau de joasă frecvență. În mod strict fenomenologic (dar incorect din punct de vedere formal), se poate vorbi despre o interacție între două unde. În această categorie intră *efectul electrooptic liniar (Pockels)* și *redresarea optică*. Potrivit criteriului Kleinman, ambele efecte sunt controlate de același tensor de susceptibilitate, deoarece prin permutarea frecvențelor avem

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega; 0, \omega) = \chi_{ijk}^{(2)}(0; \omega, -\omega)$$

### 5.1.2 Fenomene care implică trei unde

În afara celor două procese discutate mai sus, această categorie mai cuprinde: generarea armonicii a doua, generarea sumei sau diferenței de frecvențe, fluorescența parametrică.

Aceste interacții, care implică existența a trei unde veritabile, au primit o vizualizare deosebit de plastică. În prima etapă, propagarea unei unde în mediu neliniar provoacă o modulare a indicelui de refracție. A doua undă, interacționând cu acest indice de refracție modificat, își schimbă treptat caracteristicile, devenind a "treia" undă, cea care este "generată" în procesul neliniar.

## 5.2 Interacția de ordinul trei

Interacția prin termenul de polarizare neliniară de ordinul trei implică interacția între patru unde. Forma generală a "potențialului" de interacție este dat de  $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_i; \omega_j, \omega_k, \omega_l) E_j(\omega_j) E_k(\omega_k) E_l(\omega_l)$ . Prin comparație cu gama efectelor ce se pot produce prin intervenția tensorului susceptibilității de ordinul doi, manifestările experimentale produse în ordinul trei sunt mai variate.

Denumirea	Operația	Reprezentarea
Generarea armoniciei a 3-a	$3\omega = \omega + \omega + \omega$	$\chi_{ijkl}^{(3)}(-3\omega; \omega, \omega, \omega)$
Generarea armoniciei a 2-a în câmp electric static	$2\omega = \omega + \omega + 0$	$\chi_{ijkl}^{(3)}(-2\omega; \omega, \omega, 0)$
Generarea sumei	$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$	$\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$
Generarea diferenței	$\omega_4 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$	$\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega_4; \omega_1, -\omega_2, -\omega_3)$
Autofocalizare, automodularea fazei	$-\omega = \omega - \omega + \omega$	$\text{Re}[\chi_{iikk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, \omega)]$
Absorbția bifotonică	$-\omega = \omega - \omega + \omega$	$\text{Im}[\chi_{iikk}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, \omega)]$
Mixaj degenerat de patru unde	$-\omega = \omega - \omega + \omega$	$\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, \omega)$
Efect Kerr indus Raman ( $\omega_1 - \omega_2 = \omega_R$ )	$-\omega_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_2$ ( $\omega_1 > \omega_2$ )	$\text{Re}[\chi_{iikk}^{(3)}(-\omega_1; \omega_1, -\omega_2, \omega_2)]$
Împrăștiere coer. Stokes-Raman ( $\omega_1 - \omega_2 = \omega_R$ $\omega_S = 2\omega_2 - \omega_1$ )	$-\omega_S = \omega_2 + \omega_2 - \omega_1$ ( $\omega_1 < \omega_2$ )	$\text{Im}[\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega_S; \omega_2, -\omega_2, \omega_1)]$
Împrăștiere coer. AntiStokes-Raman ( $\omega_1 - \omega_2 = \omega_R$ $\omega_S = 2\omega_1 - \omega_2$ )	$-\omega_{AS} = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2$ ( $\omega_1 < \omega_2$ )	$\text{Im}[\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega_{AS}; \omega_1, -\omega_1, \omega_2)]$

În tablou apar trei tipuri de interacții care introduc elemente noi: unele care depind numai de partea imaginară a susceptibilității, altele care folosesc o structură specială a indicilor și, în sfârșit, cele care conțin aceeași frecvență în mod repetat. Despre aceste cazuri vom face următoarele observații:

- Descrierea folosind partea imaginară a susceptibilității indică dependența fenomenelor respective de procese de absorbție a radiației. În această categorie intră absorbția bifotonică, absorbția saturată, sau efectele Raman, procese care

se bazează pe interacții inelastice cu mediul neliniar;

- Indicii repetați, prezenți în scrierea tensorului de susceptibilitate, împreună cu alternarea semnelor în perechea de frecvențe corespunzătoare, indică dependența fenomenului respectiv de intensitatea unde în cauză. În această categorie intră procesul de autofocalizare a fasciculelor de lumină;
- Apariția repetată a aceleiași frecvențe plasează fenomenul în categoria proceselor "degenerate". În această clasă găsim mixajul degenerat de patru unde, prin care se explică conjugarea optică a fazei.

Mecanismul care stă la baza *împrăștierii coerente de tip Raman* constă în interacția inelastică a fotonilor (câmpurilor optice) cu vibrațiile (interne) ale structurilor moleculare. În fizica solidului, aceste vibrații sunt reprezentate de către fononii "optici" astfel încât, împrăștierea Raman se bazează pe absorbție și emisie de fononi optici.

Vibrațiile de joasă frecvență ale solidelor, numite și "fonice" sau "sonore", sunt purtate de către fononii acustici. Aceștia reprezintă pseuso-particulele din care este "compus" sunetul. Procesul de împrăștiere coerentă bazat pe absorbția și emisia de fononi acustici se numește *împrăștiere coerentă Brillouin*.

Este evident că din punct de vedere teoretic, cele două procese de împrăștiere (Raman și Brillouin) sunt extrem de asemănătoare. Din punct de vedere experimental, există mai multe deosebiri frapante între care, probabil că cea mai ușor de sesizat este aceea că în timp ce împrăștierea Raman este un proces " silențios", împrăștierea Brillouin este însoțită de zgomote.

### 5.3 Procese de ordin superior

În încheierea acestei prezentări generale a conținutului fenomenologic al Opticii neliniare, să facem măcar inventarul unor procese mai complicate asupra cărora nu ne vom opri mai mult decât trebuie pentru a le numi:

- procesele multifotonice care cuprind: absorbția, emisia și fotoionizarea cu mai mulți fotoni;
- interacțiile laser-plasmă, în cadrul cărora s-a observat producerea de sub și hiper armonici;
- interacțiile câmpurilor optice cu electronii: împrăștierea Rayleigh, Thompson și Compton;
- împrăștierea "lumină pe lumină"; proces care ar trebui să se desfășoare fără asistența mediilor materiale (deci în vid). Deși o asemenea interacție este prevăzută de către *electrodinamica neliniară a lui Born*, până în prezent nu s-a detectat nici o evidență experimentală favorabilă.

## Recomandări bibliografice

---

1. Bloembergen, N., Nonlinear Optics, Benjamin, New York, 1965.
2. Baldwin, G.C., An Introduction to Nonlinear Optics, Plenum Press, 1969.
3. Prasad, P.N., Williams, D.J., Introduction to Nonlinear Effects in Molecules and Polymers, Jhon Willey&Sons, 1991.
4. Evans, M., Kielich, S., Modern Nonlinear Optics, Advances in Chemical Physics, vol. LXXXV, John Wiley&Sons, 1993.
5. Eichler, H.J., Gunter, P., Pohl, D.W., Laser-induced Dynamic Gratings, Springer-Verlag, 1986.
6. Nemes. G., Introducere în Optica neliniară, Editura Academiei, 1972.
7. Howson, D.P., Smith, R.B., Parametric Amplifiers, McGraw-Hill, 1970.
8. Sommerfeld, A., Lectures on Theoretical Physics, vol. VI, Academic Press, 1964.
9. Smirnov, VI., Curs de matematici superioare, vol. 2, Editura Tehnică, 1954.



## **II. Complemente de optică**

<b>1</b>	<b>Schița sistematică a opticii clasice</b>	<b>49</b>
<b>2</b>	<b>Legătura opticii geometrice cu ecuațiile Maxwell</b>	<b>50</b>
2.1	Specificul opticii clasice	50
2.2	Ecuația de undă pentru medii neomogene	51
2.3	Tehnica funcției eiconale	53
2.3.1	Separarea spațio-temporală	54
2.3.2	Faza spațială (de propagare)	54
2.3.3	Spațiul vid ca mediu etalon	55
2.3.4	Aproximația opticii geometrice	56
2.4	Ecuația eiconală. Indicele de refracție	56
<b>3</b>	<b>Acoperirea opticii geometrice prin ecuația eiconală</b>	<b>57</b>
3.1	Ecuația razelor de lumină	57
3.1.1	Conceptul de rază de lumină. Congruența normală	57
3.1.2	Obținerea ecuației razelor	59
3.1.3	Integrarea ecuației razelor	60
3.2	Principiul propagării rectilinii	69
3.3	Principiul reversibilității mersului razelor	69
3.4	Reflexia și refracția	70
3.4.1	Aspecte generale	70
3.4.2	Fenomenul refracției	72
3.4.3	Fenomenul reflexiei	74

<b>4</b>	<b>Acoperirea opticii geometrice prin ecuația de undă</b>	<b>75</b>
4.1	Efectul teoriei eiconale	75
4.1.1	Ecuația eiconală	76
4.1.2	Alți termeni ai ierarhiei eiconale	77
4.1.3	Prima expresie a ecuației de transport	77
4.1.4	Transportul amplitudinii câmpului complex conjugat	78
4.1.5	Ecuația de transport a intensității	78
4.1.6	Modelul de lumină al opticii geometrice	79
4.1.7	Ecuația de transport a vectorilor de câmp	80
4.2	Legea $1/r^2$	80
<b>5</b>	<b>Fascicole extreme</b>	<b>82</b>
5.1	Aspecte generale	82
5.2	Fascicole gaussiene	83
5.2.1	Ecuația de propagare	83
5.2.2	Deducerea euristică a ecuației de undă	83
5.2.3	Deducerea operatorială a ecuației de undă	84
5.2.4	Soluțiile ecuației de undă	86
5.2.5	Caracteristicile fascicolului gaussian	89
5.2.6	Profilul intensității	90
5.2.7	Raza de curbură a frontului de undă gaussian	91
5.2.8	Curbura fronturilor de undă cu simetrie cilindrică	93
5.2.9	Constante, variabile și forme caracteristice fascicolelor gaussiene	95
5.3	Fascicole fără difracție (diffraction free)	96
5.3.1	Ecuația de undă a fascicolelor fără difracție	97
5.3.2	Funcția de undă generală	98
5.3.3	Fascicole Bessel	98
	Realizarea experimentală a fascicolelor Bessel	100

# 1. Schița sistematică a opticii clasice

Scopul acestui capitol este de a prezenta acele mijloace matematice prin care Optica clasică a primit o solidă structură teoretică și datorită căreia, conceptele Opticii au putut fi așezate într-o arhitectură unitară. În plus, aceste mijloace, luate ca atare sau primind o formă dezvoltată, sunt necesare pentru studiul fenomenelor de propagare în medii neliniare.

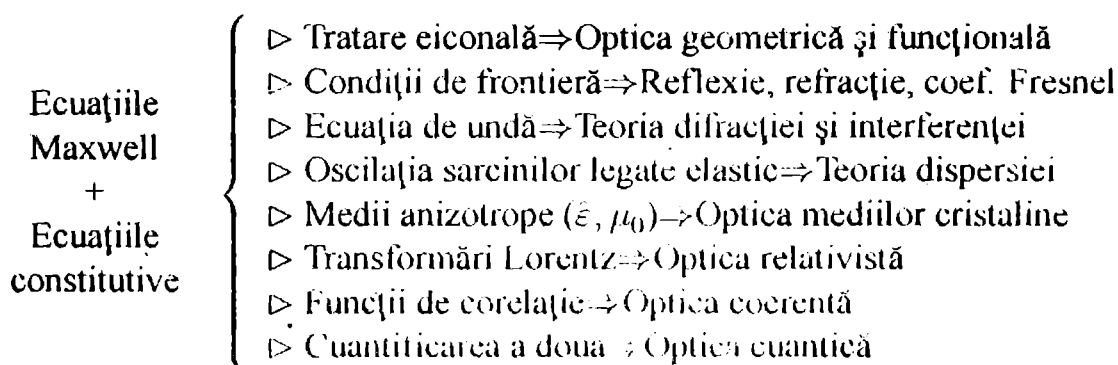
Într-o imagine deja tradițională (care în prezent se susține doar prin anumite considerente didactice), Optica clasică este prezentată ca o alăturare indiferentă a două segmente care pot exista și în mod absolut independent: *Optica geometrică* și *Optica fizică*. Această alcătuire nefirească poate fi totuși înțeleasă atunci când descoperim particularitățile istorice ale dezvoltării domeniului.

Dacă admitem împreună cu dicționarul *Webster* că Optica este știința care se ocupă cu studiul naturii și proprietăților luminii și ale vederii atunci, capacitatea Opticii geometrice (în fond, un subdomeniu al Opticii clasice) de a supraviețui de sine stătătoare, derivă din faptul că acest domeniu a reușit să-și elaboreze propriul său concept (ultra-simplificat) de lumină.

Din această cauză, studiul aspectelor legate de natura veritabilă a luminii, a rămas în sarcina Opticii fizice. Această diviziune a Opticii trebuie să explice un uriaș câmp de fenomene care atestă că lumina este un pachet de unde electromagnetice (vectoriale) având o secțiune transversală finită (divergență) și fiind caracterizată printr-o anumită distribuție spectrală, stare de polarizare și grad de coerență.

Comarate prin numărul conceptelor utilizate, ponderile celor două părți tradiționale ale opticii sunt inegale. Dacă însă măsurăm "aria" dezvoltărilor matematice pe care acestea le subîntind, atunci avem surpriza să constatăm existența unei sensibile egalități.

Pusă în context modern, sistematica opticii clasice oferă întregului domeniu o imagine uniformă (fără nici o ruptură) în care părțile apar înglobate într-un ambient "democratic", așa cum se vede în schema următoare



În mod evident, "cheia" acestei clasificări uniforme este *tratarea eiconală*, tehnica avându-l pe Born drept unul dintre autori.

Pentru a ilustra felul în care optica geometrică este așezată în cadrul electrodinamicii clasice trebuie să realizăm trei pași:

- (a) specificarea cazului particular care ne interesează;
  - (b) exploatarea tehnicii *funcției eiconale*.
  - (c) deducerea rezultatelor care sunt în directă legătură cu principiile opticii geometrice:
- ecuația razelor de lumină (care permite validarea principiului propagării rectilinii precum și al celui privind reversibilitatea mersului razelor de lumină);
  - legile reflexiei și refracției luminii la suprafața de separare a două medii optice distincte;
  - legea de propagare a intensității luminoase (din care se deduce principiul variației intensității unei surse punctiforme în raport invers cu pătratul distanței la sursă);
  - legea de transport a vectorilor de câmp de-a lungul razelor luminoase (un rezultat important pus la dispoziție în mod suplimentar de către tehnica matematică a funcției eiconale).

## 2. Legătura opticii geometrice cu ecuațiile Maxwell

### 2.1 Specificul opticii clasice

Preocuparea fundamentală a electrodinamicii clasice constă în determinarea celor 4 câmpuri electromagnetice ( $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ) atunci când se cunosc distribuțiile de sarcini și curenți ( $\rho$ ,  $\vec{j}$ ) împreună cu proprietățile mediului material, reflectate prin permitivitatea dielectrică și permeabilitatea magnetică. Soluționarea acestei probleme presupune folosirea a trei seturi de ecuații:

- (a) ecuațiile lui Maxwell;
- (b) ecuațiile constitutive corespunzătoare proprietăților mediului de propagare ((ne)omogenitate, (an)izotropie);
- (c) condițiile de frontieră.

În acest context, Optica geometrică își rezervă cazurile care satisfac simultan următoarele condiții:



- mediul de propagare este dielectric (în absența conducției:  $\vec{j} = \vec{j}_s = 0$ );
- pot exista neomogenități dielectrice și magnetice ( $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$ ;  $\mu = \mu(\vec{r})$ ) deși în mod uzual mediile optice sunt nemagnetice ( $\mu = \mu_0$ );
- câmpurile electromagnetice nu sunt în contact cu sursele lor (nu există sarcini libere:  $\rho = \rho_s = 0$ ).

În consecință, optica geometrică reprezintă acea proiecție a contextului electrodinamic în care ecuațiile generale se restrâng la

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}\end{aligned}\tag{II.1}$$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon(\vec{r}) \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu(\vec{r}) \vec{H}\end{aligned}\tag{II.2}$$

$$\begin{aligned}\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= 0 \\ \vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= 0\end{aligned}\tag{II.3}$$

unde prin  $\vec{n}_{12}$  am desemnat normala la suprafața de separare între mediile "1" și "2".

## 2.2 Ecuația de undă pentru medii neomogene

Una dintre căile de rezolvare a sistemului (II.1) constă în determinarea soluțiilor unei ecuații speciale (derivate din acest sistem) numită *ecuație de undă*. Caracterul ei aparte provine din aceea că operațiile pe care le conține privesc un singur câmp electromagnetic (din setul celor patru).

Deși tratamentul eiconal clasic se adresează în mod direct ecuațiilor Maxwell, există totuși o manieră de abordare care, pornind de la ecuația de undă, reușește să îmbrace forma unei aproximații de ordin superior a tehnicii eiconale. Din acest motiv, vom prezenta derivarea ecuației de undă pentru cazul mediilor neomogene.

Să revenim asupra sistemului (II.1) cu scopul de a elimina câmpul  $\vec{H}$ . Acest

lucru rezultă întrebuițând separat doi operatori diferențiali:

- cu ajutorul ecuațiilor constitutive și prin folosirea *rotorului*, vom scrie a doua ecuație a sistemului sub forma

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) + \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = 0 \quad (\text{II.4})$$

- separat, prin derivarea în raport cu timpul a celei de a patra ecuații găsim

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

unde am exploatat comutativitatea operatorilor  $\nabla \times$  și  $\frac{\partial}{\partial t}$  (proprietate evidentă prin faptul că variabilele asupra cărora operează sunt independente. Astfel, apare imposibil ca un operator să sesizeze prezența celuilalt.).

Din ecuațiile precedente găsim mai întâi

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (\text{II.5})$$

iar dacă folosim identitățile vectoriale

$$\begin{aligned} \nabla \times (a \vec{b}) &\equiv \nabla a \times \vec{b} + a \nabla \times \vec{b} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &\equiv \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

atunci avem

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \nabla (\ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = 0 \quad (\text{II.7})$$

unde  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  este numit *operatorul lui Laplace (alias laplaceianul)*. Expresia (II.7) reprezintă *ecuația de undă pentru medii neomogene*.

*Notă:* i) O simplă inspecție a structurii ecuației de undă scoate în evidență posibilitatea *separării variabilelor*, ceea ce reprezintă o proprietate remarcabilă. Pentru a o ilustra (și folosi) să punem

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot f(t) \quad (\text{II.8})$$

Obținem ecuațiile separate

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu \epsilon E_0^2} \left\{ \vec{E}_0 \wedge \vec{E}_0 + \vec{E}_0 \cdot \left[ \nabla (\ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}_0) \right] - \vec{E}_0 \cdot \left[ \nabla (\nabla \cdot \vec{E}_0) \right] \right\} \\ - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Dacă ne ocupăm de partea dependentă de timp și dorim ca soluțiile

să aibă variație mărginită, atunci singura alegere este

$$ct = -\omega^2 (< 0) \Rightarrow f'' + \omega^2 f = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\Rightarrow f = f_0 \exp(\pm i\omega t) \quad (\text{II.11})$$

Așadar, soluția (II.8) se scrie

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \exp(\pm i\omega t) \quad (\text{II.12})$$

ii) Să presupunem că mediul este nemagnetic ( $\mu = \mu_0$ ) și că neomogenitatea dielectrică relativă este mică ( $|\nabla\epsilon|/\epsilon \ll 1/\lambda$ ). Atunci, deoarece

$$\nabla \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \vec{E} = -\vec{E} \frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \approx 0$$

rezultă că ecuația de undă (II.7) se poate rezuma la forma

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Dacă ținem seama și de consecințele separării variabilelor atunci găsim

$$\Delta \vec{E}_0 + \mu\epsilon\omega^2 \vec{E}_0 = 0 \quad (\text{II.14})$$

ecuație care poartă numele de *ecuație de undă atemporală* sau *ecuația Helmholtz*. Merită subliniat și faptul că utilizând viteza de fază dată de

$$v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad (\text{II.15})$$

dar și vectorul de undă  $\vec{k}$  (care se introduce prin soluția formulă  $\vec{E}_0 \sim \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ ) putem scrie

$$-k^2 + \mu\epsilon\omega^2 = 0 \Rightarrow \mu\epsilon\omega^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k^2 \quad (\text{II.16})$$

## 2.3 Tehnica funcției eiconale

În mod esențial, tehnica eiconală propune o algebrizare a sistemului de ecuații diferențiale cuplate reprezentat de (II.1) (ecuațiile Maxwell). Etapele care trebuie parcurse se corelează cu anumite interpretări fizice pe care (făcând abstracție de informațiile stabilite în cadrul discuției despre ecuația de undă) vom încerca să le subliniem în următoarele secțiuni.

### 2.3.1 Separarea spațio-temporală

Primul pas constă în aplicarea unei separări spațio-temporale. Acest lucru se realizează prin

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (\text{II.17})$$

expresie care (prin comportarea în timp) reprezintă o undă armonică.

*Observație:* Este inutil să credem că din considerente de generalitate ar trebui să apelăm la o scriere ca în relația (JJ.8). Sistemul ecuațiilor (JJ.1) este liniar. Ca urmare, folosind transformata Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

avem

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \vec{E}_0(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right] f(\omega) d\omega$$

și cum nici una dintre ecuațiile sistemului (JJ.1) nu implică explicit variabila  $\omega$  înseamnă că fiecare undă "parțială", de exemplu  $\vec{E}_0(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$  sau simetrica sa în frecvență  $\vec{E}_0(\vec{r}) \exp(i\omega t)$ , trebuie să reprezinte o soluție pentru (JJ.1).

Fiecare dintre celelalte trei câmpuri ( $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ) ale unde electromagnetice este descris prin expresii asemănătoare cu (II.17).

Aceste soluții, împreună cu ecuațiile constitutive (II.2), aduc ecuațiile (II.1) la forma

$$\begin{aligned} \nabla \left( \epsilon \vec{E}_0 \right) &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_0 - i\omega \mu \vec{H}_0 &= 0 \\ \nabla \left( \mu \vec{H}_0 \right) &= 0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 + i\omega \epsilon \vec{E}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Dispariția operației de derivare în raport cu timpul constituie un prim indiciu al efectului de algebrizare pe care îl urmărim.

### 2.3.2 Faza spațială (de propagare)

Optica se depărtează de electrodinamica printr-un al doilea pas atunci când își

limitează interesul la acele fenomene a căror descriere derivă esențialmente din comportamentul funcției de fază (și nu de amplitudine) a undelor. Acest mod de a pune problema se exprimă prin

$$\vec{E}_0(\vec{r}) \equiv \vec{e}(\vec{r}) \cdot \exp(i\Phi(\vec{r})) \quad (\text{II.19})$$

în care  $\vec{e}(\vec{r})$  este o funcție de poziție, slab variabilă, iar  $\Phi(\vec{r})$  reprezintă faza spațială. De exemplu, desemnând prin  $n$  indicele de refracție al mediului,  $k_0$  modulul vectorului de undă în vid și  $\vec{\tau}$  versorul direcției de propagare avem:

- pentru o undă plană  $\Phi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} = k_0 n \vec{\tau} \cdot \vec{r}$  ;
- pentru o undă sferică  $\Phi(\vec{r}) = kr = k_0 nr$ .

### 2.3.3 Spațiul vid ca mediu etalon

După cum a evidențiat chiar Maxwell, electrodinamica este (prima) teoria care are nevoie în mod structural de un mediu de referință. În mod concret, acest rol special este jucat de (mediul) vid.

Algebrizarea ecuațiilor Maxwell prin tehnica eiconală nu face excepție de la această idee atunci când, pentru orice propagare, introduce o "scalare" a funcției de fază  $\Phi(\vec{r})$  în raport cu  $k_0$  (modulul vectorului de undă în vid) dată prin

$$\Phi(\vec{r}) = k_0 \cdot S(\vec{r}) \quad (\text{II.20})$$

Ținând seama că în cazul vidului este valabilă relația

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (\text{II.21})$$

actualizând dependențele, specimenul de soluție (II.17) este reprezentat de

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{e}(\vec{r}) \cdot \exp(ik_0 S(\vec{r})) \quad (\text{II.22})$$

încât

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}(\vec{r}) \cdot \exp[ik_0 (S(\vec{r}) - ct)] \quad (\text{II.23})$$

celelalte trei câmpuri urmând dependențe similare.

Substituind (II.22) împreună cu expresia similară pentru  $\vec{H}_0$  în sistemul (II.18) găsim

$$\begin{aligned} \nabla \epsilon \cdot \vec{e} + \epsilon \nabla \cdot \vec{e} + i\epsilon k_0 \vec{e} \cdot \nabla S &= 0 \\ \nabla \mu \cdot \vec{h} + \mu \nabla \cdot \vec{h} + i\mu k_0 \vec{h} \cdot \nabla S &= 0 \\ \nabla \times \vec{e} + ik_0 \nabla S \times \vec{e} &= i\mu\omega \vec{h} \\ \nabla \times \vec{h} + ik_0 \nabla S \times \vec{h} &= -i\epsilon\omega \vec{e} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

unde am făcut o rearanjare a ordinii ecuațiilor punând pe primele poziții ecuațiile

rezultate din operatorul *div*. Dacă ținem seama de (II.21) atunci găsim

$$\begin{aligned}\vec{e} \cdot \nabla S &= -\frac{1}{ik_0} (\vec{e} \cdot \nabla \ln \varepsilon + \nabla \cdot \vec{e}) \\ \vec{h} \cdot \nabla S &= -\frac{1}{ik_0} (\vec{h} \cdot \nabla \ln \mu + \nabla \cdot \vec{h}) \\ \nabla S \times \vec{e} - c\mu \vec{h} &= -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{e} \\ \nabla S \times \vec{h} + c\varepsilon \vec{e} &= -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{h}\end{aligned}\quad (II.25)$$

### 2.3.4 Aproximația opticii geometrice

Ecuatiile precedente capătă o formă extrem de simplă atunci când sunt particularizate pentru câmpurile optice. În acest caz  $k_0 \rightarrow \infty$  și găsim

$$\begin{aligned}\vec{e} \cdot \nabla S &= 0 \\ \vec{h} \cdot \nabla S &= 0 \\ \nabla S \times \vec{e} - c\mu \vec{h} &= 0 \\ \nabla S \times \vec{h} + c\varepsilon \vec{e} &= 0\end{aligned}\quad (II.26)$$

### 2.4 Ecuația eiconală. Indicele de refracție

Ecuatiile sistemului (II.26) (împreună cu câmpurile de forma (II.23)) reprezintă întregul conținut electrodinamic acoperit de optica geometrică. După cum vom vedea, până și efectul condițiilor de frontieră (II.3) (care a fost ignorat în dezvoltarea eiconală) poate fi lăsat la o parte.

Cu toate că cea mai importantă consecință a relațiilor (II.26) este reprezentată de ecuația eiconală, este util să începem prin următoarele:

- Note:**
- i) Primele două ecuații exprimă faptul că  $\nabla S$  este perpendicular pe planul vectorilor  $\vec{e}$  și  $\vec{h}$ . A treia ecuație exprimă faptul că  $\vec{h}$  este perpendicular pe planul vectorilor  $\vec{e}$ ,  $\nabla S$  iar ultima ecuație arată perpendicularitatea lui  $\vec{e}$  pe planul vectorilor  $\vec{h}$ ,  $\nabla S$ . Astfel ajungem la concluzia că  $\vec{e}$ ,  $\vec{h}$  și  $\nabla S$  constituie în mod natural un triedru cartezian drept (vezi fig. II.1).
  - ii) Primele două ecuații nu au un conținut independent deoarece ele pot fi obținute drept consecințe ale ultimelor două atunci când acestea sunt înmulțite scalar cu  $\nabla S$ .
  - iii) Ultimele două ecuații vectoriale reprezintă un sistem de șase ecuații

omogene care conțin componentele câmpurilor  $\vec{e}$  și  $\vec{h}$ . Pentru a nu se limita la o soluție banală, sistemul trebuie să aibă un determinant nul. Această condiție se scrie

$$(\nabla S)^2 - c^2 \epsilon \mu = 0 \quad (\text{II.27})$$

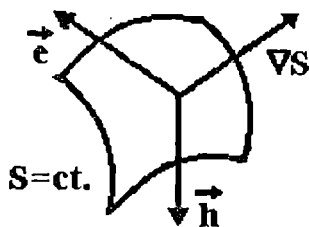


Figura II.1: Structura geometrică impusă de ecuația eiconală

În sfârșit, cu ajutorul relației (II.15) găsim

$$c^2 \epsilon \mu = \left( \frac{c}{v} \right)^2 \equiv n^2$$

așa încât (II.27) devine

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad (\text{II.28})$$

exprimând *ecuația eiconală*. Este vorba de ecuația pe care trebuie să o respecte funcția  $S(\vec{r})$  pentru ca soluțiile de forma (II.23) să aibă sens. Trebuie să subliniem că, în general, ecuația (II.28) este subdeterminată. Astfel, în afara cazurilor care prezintă proprietăți de simetrie, cunoașterea funcției  $n(\vec{r})$  nu permite determinarea completă a soluțiilor ecuației eiconale.

## 3. Acoperirea opticii geometrice prin ecuația eiconală

Acest capitol este consacrat analizei ecuației eiconale, cu scopul de a demonstra faptul că ea conține o informație echivalentă principiilor tradiționale ale opticii geometrice.

### 3.1 Ecuația razelor de lumină

#### 3.1.1 Conceptul de rază de lumină. Congruența normală

Potrivit ecuației eiconale (II.28),  $\nabla S$  este un vector de modul egal cu indicele

de refacție  $n(\vec{r})$  și orientat perpendicular pe suprafața eiconală  $\Sigma$  descrisă prin ecuația

$$S(\vec{r}) = ct \quad (\text{II.29})$$

Să admitem deocamdată că de pe întreaga suprafață  $\Sigma$  nu ne interesează decât un singur punct pe care îl notăm cu  $A$ . Dacă prin  $\vec{\tau}$  desemnăm normala lui  $\Sigma$  în  $A$  atunci ecuația eiconală se poate scrie și sub forma

$$\nabla S = n \vec{\tau} \quad (\text{II.30})$$

În ecuația (II.29) constanta din membrul drept poate fi considerată ca parametru, astfel încât putem scrie

$$S_{\lambda}(\vec{r}) = \lambda \quad (\text{II.31})$$

Modificând parametrul  $\lambda$  în mod continuu, prin cantități infinitezimale, din (II.31) obținem o serie de suprafețe eiconale care se dezvoltă unele din altele și cărora ecuația (II.30) le asociază normalele corespunzătoare. Fiecare pereche de suprafețe vecine "taie" din normala  $\vec{\tau}$  o porțiune infinitezimală de linie  $dl$ . Din cauza structurii infinitezimale, aceste elemente  $dl$  se vor prelungi într-o curbă  $\Gamma$  care are proprietatea că străbate ortogonal toate suprafețele eiconale. Curba  $\Gamma$  reprezintă traiectoria unei *raze de lumină* iar ecuația diferențială pe care aceasta trebuie să o urmeze se numește *ecuația razelor de lumină*.

Observații: i) Este clar că normalele  $\vec{\tau}$  ale suprafețelor generate cu ecuația (II.31) constituie totodată un "șir" de tangente la curba  $\Gamma$ ;  
 ii) Conform celor discutate, prin punctul  $A$  trece raza  $\vec{\tau}$ . Dacă luăm în considerare un element de suprafață  $d\sigma$  în jurul lui  $A$  atunci, prin argumentele precedente, raza  $\Gamma$  va fi însoțită de un întreg fascicul de raze (infinitezimal în secțiune) care, străbătând ortogonal sistemul de suprafețe generate prin (II.31) (în alte cuvinte admitând un sistem de suprafețe ortogonale), constituie ceea ce se numește o *congruență normală*.

Pentru curba  $\Gamma$  (ca de altfel pentru orice curbă în spațiu) există un important sistem de relații intrinseci (adică expresii care implică numai parametrii legați de curbă și independenți de sistemul de coordonate). Acestea leagă între ele șase mărimi: *lungimea arcului de curbă*  $l$ , *curbura*  $k$ , *torsiunea*  $\chi$ , *tangenta*  $\vec{\tau}$ , *normala*  $\vec{\nu}$  și *binormala*  $\vec{\beta}$ . Astfel, pornind de la definiția

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dl} \vec{r}$$



sunt valabile expresiile

$$\begin{aligned}\frac{d}{dl} \vec{\tau} &= k \vec{\nu} \\ \frac{d}{dl} \vec{\nu} &= -k \vec{\tau} + \chi \vec{\beta} \\ \frac{d}{dl} \vec{\beta} &= -\chi \vec{\nu}\end{aligned}$$

care constituie *ecuațiile lui Frenet*.

În plus, avem și relațiile

$$\begin{aligned}(\vec{\tau})^2 &= (\vec{\nu})^2 = (\vec{\beta})^2 = 1 \\ \vec{\tau} &= \vec{\nu} \times \vec{\beta} ; \vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau} ; \vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}\end{aligned}$$

care exprimă faptul că  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$  și  $\vec{\beta}$  sunt versori care formează un triedru cartezian drept.

### 3.1.2 Obținerea ecuației razelor

Pornind de la ecuația eiconală, ecuația razelor de lumină se obține exploataând identitatea vectorială

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$$

în care introducem

$$\vec{A} = \vec{B} \equiv \nabla S (= n \vec{\tau})$$

Deoarece

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla S) \equiv 0 \quad (\text{II.32})$$

iar

$$\nabla (n^2) = 2n (\vec{\tau} \cdot \nabla) (n \vec{\tau})$$

găsim

$$(\vec{\tau} \cdot \nabla) (n \vec{\tau}) = \nabla n \quad (\text{II.33})$$

Operatorul  $\vec{\tau} \cdot \nabla$  reprezintă un operator diferențial scalar pentru că

$$\vec{\tau} \cdot \nabla = \tau_x \frac{\partial}{\partial x} + \tau_y \frac{\partial}{\partial y} + \tau_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Mai mult, dacă în general el exprimă derivata după direcția  $\vec{\tau}$ , în cazul nostru

special (cel al razelor de lumină), el exprimă chiar o derivată dreaptă (totală).

$$\vec{\tau} \cdot \nabla = \frac{d}{dl} \quad (\text{II.34})$$

Pentru a înțelege conținutul acestei relații, să pornim de la expresia derivatei totale a unei funcții vectoriale  $\vec{f}(\vec{r}(l), l)$

$$\frac{d}{dl} \vec{f} = \left( \frac{d\vec{r}}{dl} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial l} \right) \vec{f}$$

care, atunci când  $l$  coincide cu lungimea arcului pe curba  $\vec{r}(l)$  se rescrie sub forma

$$\frac{d}{dl} \vec{f} = \left( \vec{\tau} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial l} \right) \vec{f} \quad (\text{II.35})$$

De aici putem vedea că în cazul în care funcția vectorială  $\vec{f}$  nu depinde explicit de  $l$  (ci numai de punctele curbei  $r(l)$ ), ecuația (II.35) coincide cu (II.34).

Cu ajutorul relației (II.34), ecuația (II.33) se scrie

$$\frac{d}{dl} (n \vec{\tau}) = \nabla n \quad (\text{II.36})$$

sau, la fel de bine

$$\frac{d}{dl} \left( n \frac{d\vec{r}}{dl} \right) = \nabla n \quad (\text{II.37})$$

Ecuația (II.37) reprezintă *ecuația razelor de lumină*. Conținutul său trebuie interpretat în sensul că atunci când se cunoaște funcția  $n(\vec{r})$ , din (II.37) putem obține trei funcții scalare  $x = x(l)$ ,  $y = y(l)$  și  $z = z(l)$  care precizează traiectoria unei raze de lumină în mediul studiat. Eliminarea lui  $l$  între funcțiile anterioare conduce la un sistem de două ecuații care reprezintă o altă parametrizare a razelor de lumină (de exemplu:  $x = x(z)$ ,  $y = y(z)$ ).

### 3.1.3 Integrarea ecuației razelor

Complexitatea internă a ecuației razelor poate fi sesizată mai ușor atunci când încercăm să o integrăm. În caz general, acest lucru nu se poate face decât prin tratare numerică. Totuși, dacă distribuția indicelui de refracție prezintă o simetrie suficient de avansată, atunci se pot obține și soluții analitice.

**3.1.3.1 Integrarea directă** Ne vom ocupa de cazul unei distribuții cu simetrie cilindrică, în care indicele de refracție variază parabolic în raport cu variabila radială

$$n^2(r, \varphi, z) = K_0 \pm a^2 r^2 \quad (\text{II.38})$$

unde  $Oz$  desemnează axa de simetrie iar  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Indicele de refracție din (II.38) nu conține variabila  $z$ . Din acest motiv, făcând o proiecție a ecuației (II.37) pe această direcție, avem

$$\frac{d}{dl} \left( n \frac{d}{dl} z \right) = \frac{\partial}{\partial z} n = 0$$

Termenii extremi ai șirului de egalități impun

$$n \frac{d}{dl} z \equiv L_0 = ct. \quad (\text{II.39})$$

Expresia precedentă are două consecințe importante. Pe de o parte, notând prin  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  unghiurile lui  $\vec{\tau}$  cu axele de coordonate  $Ox, Oy, Oz$ , putem scrie  $\vec{\tau} : (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ . Ca urmare, conținutul ecuației (II.39) se pune sub forma

$$\begin{aligned} n \tau_z &= n \frac{d}{dl} z \equiv \\ n \cos \gamma &= n_0 \cos \gamma_0 = ct. \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

unde indicii "0" desemnează valorile lui  $n$  și  $\gamma$  (încălnația razei față de axa  $Oz$ ) în punctul de plecare (inițial). Nu este dificil să observăm că, sub diversele sale forme, expresia constantă (II.39) (sau (II.40)) reprezintă legea refracției (invariantul Snell-Descartes) pentru un mediu cu variație continuă a indicelui de refracție.

A doua consecință semnificativă a ecuației (II.39), de această dată având o natură tehnică, este aceea că ea permite justificarea relației

$$n \frac{d}{dl} = L_0 \frac{d}{dz} \quad (\text{II.41})$$

Pornind de la  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  și  $n = \sqrt{K_0 \pm a^2 r^2}$ , calculăm cei doi termeni a căror egalitate exprimă componenta ecuației (II.37) după  $Ox$

$$\frac{\partial}{\partial x} n = \frac{\partial}{\partial r} n \cdot \frac{\partial}{\partial x} r = \pm \frac{a^2 r}{n} \frac{x}{r} = \pm \frac{a^2 x}{n}$$

$$\frac{d}{dl} \left( n \frac{d}{dl} x \right) = \frac{L_0}{n} \frac{d}{dz} \left( L_0 \frac{d}{dz} x \right) = \frac{L_0^2}{n} \frac{d^2}{dz^2} x$$

ceea ce conduce la

$$\frac{d^2}{dz^2} x = \pm \left( \frac{a}{L_0} \right)^2 x \quad (\text{II.42})$$

Este simplu de văzut că, procedând pe o cale similară, vom obține

$$\frac{d^2}{dz^2}y = \pm \left( \frac{a}{L_0} \right)^2 y \quad (II.43)$$

pentru componenta după Oy a ecuației razelor.

Astfel, soluțiile pentru  $x(z)$  și  $y(z)$  sunt similare deoarece ecuația (II.38) comandă simultan semnele din (II.42) și (II.43). Dacă avem de a face cu semnul pozitiv, atunci soluțiile  $x(z)$  și  $y(z)$  se exprimă prin combinații ale funcțiilor hiperbolice. În cazul că semnul în (II.38) este negativ ( $n^2(r) = K_0 - a^2 r^2$ ), atunci  $x(z)$  și  $y(z)$  se exprimă prin combinații de funcții armonice și, independent de unghiul inițial de lansare, razele de lumină rămân la o distanță finită de axa de propagare ( $Oz$ ).

Dacă  $\vec{\tau}_0$  este coplanar cu axa  $Oz$ , atunci avem de a face cu o rază meridională (spre comparație vezi coplanaritatea meridianelor terestre cu axa polilor). În acest caz putem alege  $Ox$  chiar în acest plan, ceea ce face ca întreaga propagare a razei să fie scufundată în planul  $Oxz$ . Din cauză că  $y(z) = 0$ , putem descrie informația din  $x(z)$  impunând corespondența (relaxată)  $x(z) \Leftrightarrow r(z)$ , ceea ce ne conduce la propagarea ilustrată în figura II.2.

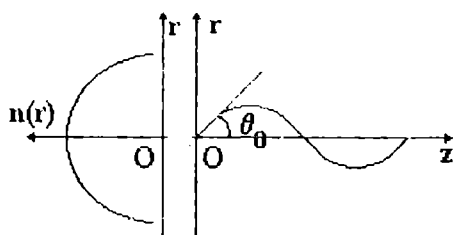


Figura II.2: Propagarea razelor meridionale

Dacă  $\vec{\tau}_0$  nu este coplanar cu axa  $Oz$ , raza este calificată drept "înclinată" (skew) iar traiectoria sa poate urma, în cazul cel mai general, o elice ca cea din figura II.3.

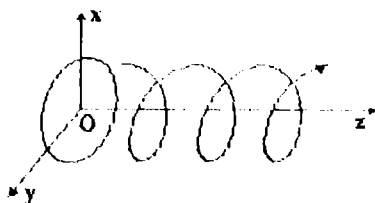


Figura II.3: Propagarea razelor înclicate (skew)

**Tema I.1** *Arătați că atunci când indicele de refracție are forma*

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

*unde  $a$  și  $n_0$  (poziții) sunt constante, traiectoria completă a oricărei raze este circulară (distribuția 'ochi de pește' propusă de Maxwell - Maxwell's fish-eye).*

**Tema I.2** *În condițiile punctului precedent, arătați că dacă punctul  $B$  se află pe o rază pornită din  $A$ , atunci toate razele care pleacă din  $A$  trec prin  $B$  (cu alte cuvinte,  $B$  este o imagine stigmatică a lui  $A$ ).*

**3.1.3.2 Integrarea în cazul general** Atunci când ecuația razelor nu permite obținerea unei soluții analitice, ea oferă totuși o cale de a preciza mersul razelor (una câte una) prin intermediul unei proceduri de integrare pas cu pas (ceea ce desigur necesită în plan practic folosirea unui calculator).

Pentru a ilustra modul cum funcționează procedura numerică, să presupunem că trebuie determinată traiectoria unei raze care pornește din punctul  $A$  (specificat prin vectorul de poziție  $\vec{r}_0$ ) cu înclinația  $\vec{\tau}_0$  și străbate un mediu refringent caracterizat prin  $n(\vec{r})$ .

Ținând seama de faptul că "rezultatul" ecuației razelor (II.37) se exprimă sub forma  $\vec{r} = \vec{r}(l)$ , să admitem că punctul inițial se află la "distanța"  $l_0$  de originea lungimilor de arc, stabilită pe raza descrisă de  $\vec{r}(l)$ . Atunci, datele inițiale pot fi exprimate prin

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(l_0)$$

$$\vec{\tau}_0 = \left( \frac{d}{dl} \vec{r}(l) \right) \Big|_{l=l_0} \equiv \vec{r}'(l_0)$$

unde  $\vec{r}'(l_0)$  ajută la concentrarea notației.

Să facem o dezvoltare în serie Taylor (pentru moment formală) a funcției  $\vec{r}(l)$  în jurul punctului  $l_0$  de pe rază

$$\vec{r}(l) = \vec{r}_0 + \left( \frac{d}{dl} \vec{r}(l) \right) \Big|_{l=l_0} \cdot (l - l_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dl^2} \vec{r}(l) \right) \Big|_{l=l_0} \cdot (l - l_0)^2 + \dots$$

Vom scrie această relație sub forma

$$\vec{r}(l) \cong \vec{r}_0 + \vec{\tau}_0 \Delta l + \frac{1}{2} \vec{g}_0 (\Delta l)^2 \quad (\text{II.44})$$

unde am introdus o altă notație prescurtată prin  $\vec{g}_0$ .

Din ecuația (II.44) putem deduce

$$\vec{\tau}(l) = \vec{\tau}_0 + \vec{g}_0 \Delta l \quad (\text{II.45})$$

Desfășurând operațiile din ecuația razelor (II.37) avem

$$\frac{dn}{dl} \frac{d\vec{r}}{dl} + n \frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = \nabla n$$

de unde, folosind și  $\frac{d}{dl} = \vec{\tau} \cdot \nabla$ ;  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dl}$ , găsim

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} \equiv \vec{g}(l) = \frac{\nabla n - \vec{\tau} (\vec{\tau} \cdot \nabla n)}{n} \quad (\text{II.46})$$

Suntem acum în măsură să descriem procedura bazată pe pași succesivi, care permite urmărirea traiectoriei unei raze prin intermediul ecuațiilor (II.44), (II.45) și (II.46):

a) începem prin a folosi  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{\tau}_0$  pentru a calcula  $n(\vec{r}_0)$  și  $(\nabla n)|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$ , expresii cu ajutorul cărora stabilim  $\vec{g}(l_0)$  prin (II.46);

b) alegând un  $\Delta l$  (această alegere influențează gradul de precizie al calculului), prin (II.44) calculăm  $\vec{r}(l_0 + \Delta l)$  iar din (II.45) deducem  $\vec{\tau}(l_0 + \Delta l)$ . Aceste valori înlocuiesc  $\vec{r}_0$  și  $\vec{\tau}_0$  pentru calculele pasului următor, în care reluăm procedura descrisă începând cu punctul (a).

**Tema I.3** Realizați un program de calcul numeric (și vizualizare) a traseului razelor care străbat un mediu parabolic, folosind algoritmul descris mai sus.

**3.1.3.3 Integrarea prin mijloace superioare** De cele mai multe ori integrarea directă a ecuației razelor de lumină este dificilă chiar dacă distribuția indicelui de refracție prezintă anumite proprietăți de simetrie. În asemenea situații se recurge la tehnici superioare de integrare.

Una dintre acestea folosește funcția și ecuațiile lui Lagrange (lagrangeianul) în timp ce o alta are la bază funcția și ecuațiile lui Hamilton (hamiltonianul). În plan general, se urmărește atât reducerea ordinului de derivare (care rezultă prin implicarea ecuațiilor lui Hamilton), cât și exploatarea unor rezultate formale deosebit de generale, care simplifică procedura de integrare a ecuațiilor corespunzătoare.

În particular, ne interesează construcția lagrangeianului asociat ecuației razelor de lumină. În acest scop, avem de ales între două căi diferite:

- fie pornim de la *principiul lui Fermat* în care alegând o coordonată drept parametru de evoluție, ajungem să identificăm funcția lagrangeiană cu ajutorul căreia deducem ecuația razelor de lumină;
- fie începem direct cu ecuația (II.37), pe care o rescriem după ce alegem una dintre coordonate drept parametru de evoluție. Expresiile algebrice care rezultă pot fi comparate formal cu ecuațiile Lagrange pentru a extrage forma

lagrangeianului pe care îl căutăm.

Deoarece prima cale este bine ilustrată în literatură, dar și pentru că în acest stadiu, folosirea în regim deductiv a principiului lui Fermat ar echivala cu o reîntoarcere la începutul întregii arhitecturi de concepte, vom alege a doua variantă de lucru.

**3.1.3.4 Lagrangeianul optic** Să alegem  $z$  ca parametru de evoluție. Atunci putem scrie

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} \quad (11.47)$$

ceea ce înseamnă

$$\frac{d}{dz} = \sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} \frac{d}{dl} \quad (11.48)$$

Pe baza ultimei expresii, ecuația razelor (11.37) se scrie

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{n}{\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2}} \frac{d}{dz} \vec{r} \right) = \sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} \nabla n$$

de unde, componenta după  $Ox$  este

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{nx'}{\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2}} \right) = \sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} \frac{\partial}{\partial x} n \quad (11.49)$$

Există și o componentă similară după  $Oy$ . După  $Oz$ , nu avem nici un fel de ecuație Lagrange deoarece  $z$  nu este o "coordonată" asemenea lui  $x$  sau  $y$  ci exprimă parametrul de evoluție al sistemului fizic (reprezentat de traiectoria razei de lumină).

Nu este greu de observat că punând

$$L(x, y, x', y', z) = n(x, y, z) \sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} \quad (11.50)$$

și efectuând (pentru  $x$  și  $y$ ) calculele specificate de ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial}{\partial x'} L \right) = \frac{\partial}{\partial x} L \quad (11.51)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial}{\partial y'} L \right) = \frac{\partial}{\partial y} L \quad (11.52)$$

regăsim ecuația (11.49) împreună cu echivalenta sa pentru variabila  $y$ .

**3.1.3.5 Integrarea ecuațiilor lui Lagrange** Pentru a ilustra modul în care intervine lagrangeianul optic în integrarea ecuației razelor, să considerăm din nou distribuția cilindrică a indicelui de refracție dată de (II.38). Transformările de coordonate de care avem nevoie sunt

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi\end{aligned}\quad (II.53)$$

de unde

$$\begin{aligned}dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{(\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi)^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2} = dz \sqrt{1 + (r')^2 + r^2 (\varphi')^2}\end{aligned}\quad (II.54)$$

încât

$$\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} = \sqrt{1 + (r')^2 + r^2 (\varphi')^2}$$

Deci

$$L(r, r', \varphi, \varphi', z) = \sqrt{K_0 \pm a^2 r^2} \cdot \sqrt{1 + (r')^2 + r^2 (\varphi')^2} \quad (II.55)$$

astfel că ecuațiile Lagrange în raport cu  $r$  și  $\varphi$  sunt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left[ \frac{\partial}{\partial r'} L(r, r', \varphi, \varphi', z) \right] &= \frac{\partial}{\partial r} L(r, r', \varphi, \varphi', z) \\ \frac{d}{dz} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi'} L(r, r', \varphi, \varphi', z) \right] &= \frac{\partial}{\partial \varphi} L(r, r', \varphi, \varphi', z)\end{aligned}\quad (II.56)$$

Dacă explicităm ecuațiile precedente, vedem că prima dintre ele este deosebit de complicată, în timp ce a doua îmbracă o formă simplă, și anume

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{nr^2 \varphi'}{\sqrt{1 + (r')^2 + r^2 (\varphi')^2}} \right] = 0$$

sau, ținând seama că acum  $\varphi = \varphi(z)$

$$\frac{nr^2 \varphi'}{\sqrt{1 + (r')^2 + r^2 (\varphi')^2}} = A (= \text{const.})$$

Ținând seama de conținutul ecuației (II.48), obținem

$$\frac{d}{dl} \varphi = \frac{A}{r^2 n(r)} \quad (II.57)$$



Pentru a evita complicata ecuație în  $r$  (produsă prin dezvoltarea primei ecuații Lagrange din sistemul (II.50)) este util să recurgem la una dintre ideile pe care le-am invocat în favoarea tehnicilor "superioare" de integrare. În speță, menționăm existența unor rezultate generale, care facilitează stabilirea integralelor prime ale ecuațiilor Lagrange.

Unul dintre aceste rezultate asigură că pentru un sistem descris de un lagrangeian care nu depinde explicit de variabila de evoluție (în general desemnată prin  $t$ ), spre exemplu atunci când avem  $L(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$ , este adevărată relația

$$\sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} L - L = \text{const} \quad (\text{II.58})$$

Pentru sistemele care admit descriere hamiltoniană, ecuația (II.58) reprezintă *legea de conservare a energiei*. Acest lucru poate fi scos în evidență pornind de la definiția hamiltonianului

$$H = \sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} L - L$$

Așadar, atunci când  $L$  nu depinde explicit de variabila de evoluție vedem că și  $H$  are aceeași comportare. Desemnând prin  $t_0$  o valoare de referință a variabilei de evoluție (luată de obicei drept valoare inițială), iar prin  $t$  o valoare curentă, putem scrie

$$H(t_0) = H(t) = \text{const}$$

ceea ce coincide cu legea de conservare a energiei sistemului.

Funcția Lagrange dată de (II.55) respectă condițiile precedentei teoreme (variabila de evoluție fiind pentru cazul nostru desemnată de  $z$ ). Prin urmare, trebuie să avem

$$r' \frac{\partial}{\partial r'} L + \varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi'} L - L = \text{const}$$

Notând constanta din (II.58) prin  $-B$ , găsim

$$\frac{n}{\sqrt{1 + (r')^2 + r^2 (\varphi')^2}} = B$$

iar prin intermediul ecuației (II.47) avem

$$\frac{d}{dl} z = \frac{B}{n(r)} \quad (\text{II.59})$$

Pe baza ecuațiilor (II.57) și (II.59) putem rescrie a treia linie din (II.54) sub

forma

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2 \left( \frac{A}{r^2 n(r)} \right)^2 dl^2 + \left( \frac{B}{n(r)} \right)^2 dl^2 \end{aligned}$$

ceea ce ne permite să deducem

$$\frac{d}{dl}r = \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2 n^2(r)} - \frac{B^2}{n^2(r)}} \quad (\text{II.60})$$

Folosind acum cele trei ecuații (II.57), (II.59) și (II.60) putem exprima ecuația traiectoriei razelor de lumină prin sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\varphi &= \frac{A}{r^2 n(r)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2 n^2(r)} - \frac{B^2}{n^2(r)}}} \\ \frac{d}{dr}z &= \frac{B}{n(r)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2 n^2(r)} - \frac{B^2}{n^2(r)}}} \end{aligned}$$

care conduce la integralele

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{A dr}{r \sqrt{\pm a^2 r^4 + (K_0 - B^2) r^2 - A^2}} + C_1 \\ z &= \int \frac{B dr}{\sqrt{\pm a^2 r^4 + (K_0 - B^2) r^2 - A^2}} + C_2 \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

$C_1$  și  $C_2$  fiind constante de integrare.

**Tema I.4** Arătați că dacă sub radicalii prezenți în ecuațiile (II.61) fixăm semnele astfel încât să avem termeni de forma  $-a^2 r^4$ , atunci soluțiile sunt similare celor obținute prin metoda "integrării directe". Incepeți prin a studia cazul  $A = 0$ .

**3.1.3.6 Curbură razelor** Folosind relațiile Frenet, ecuația razelor se poate pune sub forma

$$\nabla n = \vec{\tau} \frac{d}{dl}n + \vec{\nu} \frac{n}{\rho} \quad (\text{II.62})$$

de unde, înmulțind scalar prin  $\frac{1}{n} \vec{\nu}$ , găsim forma generală de exprimare a curburii razelor luminoase

$$k = \frac{1}{\rho} = \vec{\nu} \nabla (\ln n) \quad (\text{II.63})$$

Revenind la ecuația (II.62), constatăm că în orice punct gradientul indicelui de refracție este în planul vectorilor concurenți  $\vec{\tau}$  (care specifică direcția de înaintare a razei) și  $\vec{\nu}$  (care este orientat spre centrul de curbură al razei). Putem deduce chiar mai mult: anume că raza de lumină se curbează spre zonele mai refringente. Pentru a înțelege această remarcă trebuie să urmărim conținutul geometric al ecuației (II.62) așa cum este el ilustrat în II.4.

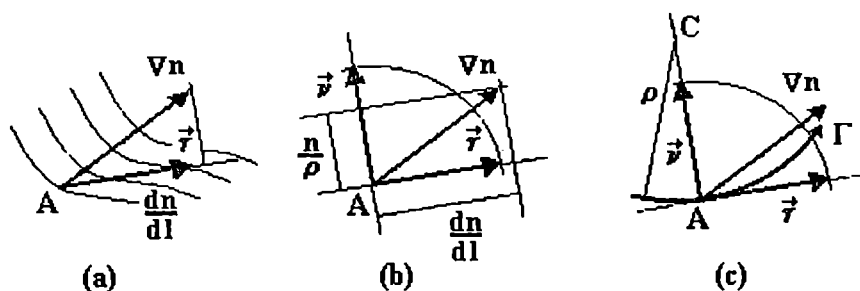


Figura II.4: Conținutul geometric al ecuației razelor

Considerând un punct  $A$  în care cunoaștem  $\nabla n$  și  $\vec{\tau}$ , așa cum se vede în Fig.II.4.a, prin inspecție deducem că

$$\vec{\tau} \nabla n = \frac{dn}{dl} > 0$$

Cum raza de curbură  $\rho$  este și ea o mărime pozitivă, ecuația (II.62) arată că  $\nabla n$  este situat între vectorii  $\vec{\tau} \frac{dn}{dl}$  și  $\vec{\nu} \frac{n}{\rho}$ . Astfel construim:

- normala  $\vec{\nu}$  și vectorul  $\vec{\nu} \frac{n}{\rho}$  așa cum se vede în Fig.II.4.b;
- cunoscând valoarea lui  $n$  putem afla mărimea lui  $\rho$  așa încât stabilim poziția centrului de curbură  $C$  ca în Fig.II.4.c;

În sfârșit:

- trasăm cercul  $\Gamma$  care, în vecinătatea punctului  $A$ , este coincident cu traiectoria reală a razei luminoase.

Inspectând acum Fig.II.4.c, vedem că potrivit ecuației (II.62) raza de lumină se curbează într-adevăr spre zonele mai refringente.

**Tema 1.5** Folosind construcția grafică, ilustrați conținutul geometric al ecuației (II.62) pentru cazul  $\vec{\tau} \rightarrow -\vec{\tau}$ . Arătați că, în mod invariabil, raza se curbează spre zona de refringentă mai mare.

## 3.2 Principiul propagării rectilinii

Pentru medii omogene, folosind ecuația (II.62), putem scrie

$$n = \text{const} \Rightarrow \nabla n = \frac{dn}{dl} = 0 \Rightarrow \rho \rightarrow \infty$$

ceea ce înseamnă că în asemenea medii, raza luminoasă prezintă o curbura nulă. Această concluzie coincide cu *principiul propagării rectilinii*.

## 3.3 Principiul reversibilității mersului razelor

Pentru a da acestui principiu un enunț bine determinat să admitem următoarea formă: Dacă o rază de lumină, emisă sub înclinarea  $\vec{\tau}_A$  de către o sursă punctiformă situată în  $A$ , ajunge în  $B$  cu înclinarea  $\vec{\tau}_B$ , atunci, plasând sursa punctiformă în  $B$  și urmărind raza emisă sub înclinarea  $-\vec{\tau}_B$ , acesta va ajunge în  $A$  cu înclinarea  $-\vec{\tau}_A$  urmând aceeași traiectorie dar în sens invers.

Avantajul acestui enunț constă în faptul că permite o concentrare asupra aspectului esențial vizat de principiul reversibilității, evitând complicațiile aduse de cazul funcțiilor eiconale multiforme sau al situațiilor în care  $B$  este o imagine optică a lui  $A$ .

Pentru a ilustra felul în care teoria eiconală validează principiul reversibilității mersului razelor avem două posibilități:

- prima cale decurge din faptul că, atunci când se precizează prin intermediul perechii de vectori  $(\vec{r}_A, \vec{\tau}_A)$  datele inițiale ale traiectoriei unei raze, ecuația (II.37), prin structura sa, conduce la soluții unic determinate. În consecință, traseul razelor între  $A$  și  $B$ , atunci când există, este unic.
- a doua cale are ca suport legătura "variațională" care există între lagrangeiana optică și ecuația razelor. În esență, putem arăta că razele de lumină urmează traiectorii "privilegiate", ale căror proprietăți nu se mai regăsesc pe nici un alt traseu aflat în vecinătate. Astfel, rezultă și pe această cale, că două puncte din spațiu sunt legate în mod unic prin intermediul traiectoriei unei raze de lumină.

## 3.4 Reflexia și refracția

### 3.4.1 Aspecte generale

Punerea în contact a două medii optice distincte conduce la apariția unei suprafețe de discontinuitate în raport cu distribuția indicelui de refracție. Un fascicol luminos, incident pe o asemenea suprafață, este supus fenomenelor de reflexie și refracție.

Teoria eiconală, întrebuițând *teorema lui Stokes*, care provine din domeniul calculului integral, poate să descrie aceste două fenomene.

Folosind una dintre formele ecuației razelor, anume

$$\nabla S = n \vec{\tau}$$

împreună cu identitatea vectorială

$$\nabla \times (\nabla S) \equiv 0$$

putem scrie

$$\int_A \nabla \times (n \vec{\tau}) \cdot d\vec{\sigma} = 0 \quad (\text{II.64})$$

unde  $d\vec{\sigma}$  reprezintă elementul de arie al suprafeței arbitrare  $A$ . Astfel, ecuația (II.64) arată că fluxul rotorului vectorului  $n \vec{\tau}$  prin orice arie  $A$  este nul. Dacă prin  $\mathcal{L}$  desemnăm curba care mărginește pe  $A$ , iar prin  $d\vec{l}$  notăm un element de arc de pe  $\mathcal{L}$ , atunci teorema Stokes ne permite să scriem

$$\int_A \nabla \times (n \vec{\tau}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_{\mathcal{L}} n \vec{\tau} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.65})$$

Coroborând ecuația precedentă cu ecuația (II.64) găsim

$$\oint_{\mathcal{L}} n \vec{\tau} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{II.66})$$

ceea ce afirmă că circulația vectorului  $n \vec{\tau}$  pe orice contur (curbă închisă) este nulă. Expresia (II.66) reprezintă *invariantul integral al lui Lagrange* (deși uneori este desemnat și ca *invariantul Poincare*).

**Tema 1.6** Folosind (II.66), demonstrați că valoarea integralei

$$V \doteq \int_{P_1}^{P_2} n \vec{\tau} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.67})$$

este independentă de curba trasată între  $P_1$  și  $P_2$ , luată în considerare pentru calculul integralei (concis, integrala este independentă de drum).  $V$  reprezintă drumul optic între  $P_1$  și  $P_2$ .

**Tema 1.7** Să considerăm două puncte  $P_1$  și  $P_2$ , care sunt legate atât printr-o rază luminoasă  $\Gamma$  cât și printr-o curbă arbitrară  $C$ . Mărimea

$$LO_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} n \cdot dl_C$$

unde integrarea se face de-a lungul lui  $C$ , se numește "lungimea optică" a curbei  $C$  între  $P_1$  și  $P_2$ . Dacă integrarea se face pe  $\Gamma$ , atunci avem în mod evident

$$V_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} n \vec{\tau} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} n \cdot dl_{\Gamma}$$

Dacă  $P_1$  și  $P_2$  sunt legate de o singură rază luminoasă, demonstrați că are loc inegalitatea (principiul lui Fermat)

$$V_{P_1 P_2} \leq LO_{P_1 P_2}$$

### 3.4.2 Fenomenul refracției

Vom considera un contur  $\mathcal{L}$  și un sistem de axe așezate pe suprafața de separare  $\Sigma$ , așa cum arată figura II.5.

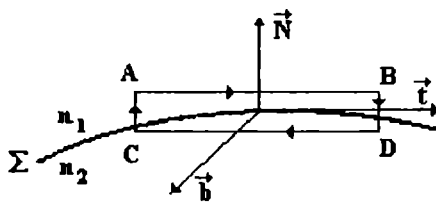


Figura II.5: Conturul de integrare și a axele pentru studiul refracției.

Fiind descris în planul versorilor  $\vec{N}$ ,  $\vec{t}$ , conturul  $\mathcal{L}$  face parte dintr-un plan normal la  $\Sigma$ . În plus, vectorul  $\vec{b}$  este astfel ales încât

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{N}$$

ceea ce face ca  $|\vec{b}| = 1$  iar dispunerea sa să fie în planul tangent la  $\Sigma$ . Totodată, avem

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{N} \times \vec{b} \\ \vec{N} &= \vec{b} \times \vec{t} \end{aligned}$$

Presupunând că alegem un contur  $\mathcal{L}$  având laturi infinitezimale, și punând

$$\begin{aligned} AB &= CD \equiv dl \\ AC &= BD \equiv \delta h \end{aligned}$$

ecuația (II.66) devine

$$n_1 \vec{\tau}_1 \cdot D\vec{C} + n_2 \vec{\tau}_2 \cdot A\vec{B} + (?) \cdot B\vec{D} + (??) \cdot C\vec{A} = 0 \quad (II.68)$$

În ecuația precedentă, vectorii care trebuie circulați pe arcele  $\overrightarrow{BD}$  și  $\overrightarrow{CA}$  nu sunt explicitați. Această opțiune este în acord cu intenția noastră de a ne concentra asupra fenomenelor care au loc pe suprafața  $\Sigma$ , din care cauză ecuația (II.68) nu ne interesează decât în limita  $\delta h \rightarrow 0$ , când avem

$$n_1 \overrightarrow{\tau_1} \cdot \overrightarrow{DC} + n_2 \overrightarrow{\tau_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (\text{II.69})$$

În acord cu indicațiile din figura II.3, putem scrie

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= -dl \cdot \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{DC} &= dl \cdot \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{N} \end{aligned}$$

încât ecuația (II.69) devine

$$(-n_1 \overrightarrow{\tau_1} + n_2 \overrightarrow{\tau_2}) \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{N}) dl = 0 \quad (\text{II.70})$$

Cum  $dl$  nu este identic nul, iar prin identitatea vectorială

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

putem modifica plasamentul vectorilor în cadrul unui produs mixt, ecuația (II.70) se poate aduce la forma

$$\overrightarrow{b} \cdot [\overrightarrow{N} \times (n_2 \overrightarrow{\tau_2} - n_1 \overrightarrow{\tau_1})] = 0 \quad (\text{II.71})$$

Cadrul de generalitate al ecuației (II.66) nu se blochează complet în urma felului în care am particularizat conturul  $\mathcal{L}$ . În mod concret, versorul  $\overrightarrow{b}$  din ecuația anterioară rămâne arbitrar (ceea ce este echivalent cu a spune că ecuația (II.71) se obține în aceeași structură chiar atunci când alegem în locul lui  $\mathcal{L}$  un alt contur, rotit în jurul normalei  $\overrightarrow{N}$ ). În consecință, trebuie să avem

$$\overrightarrow{N} \times (n_2 \overrightarrow{\tau_2} - n_1 \overrightarrow{\tau_1}) = 0 \quad (\text{II.72})$$

Expresia (II.72) reprezintă, în mod condensat, cele două legi tradiționale ale fenomenului de refracție. Pentru a sesiza mai ușor conținutul acestei ecuații vectoriale putem urmări desenul din figura II.6.

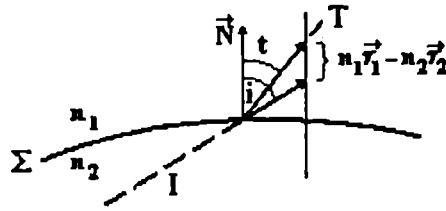


Figura II.6: Conținutul geometric al formei vectoriale a legii refracției

Astfel, ne convingem că într-adevăr:

- Din faptul că diferența  $n_2 \vec{\tau}_2 - n_1 \vec{\tau}_1$  este paralelă cu  $\vec{N}$  deducem că: "raza incidentă, raza refractată și normala în punctul de incidență sunt coplanare".
- Separând în raport cu semnul egalității termenii ecuației (II.72), și aplicând apoi modulul, obținem

$$n_1 \sin(\vec{N}, \vec{\tau}_1) = n_2 \sin(\vec{N}, \vec{\tau}_2)$$

ceea ce reprezintă cea de a doua lege a refracției, cunoscută și ca *legea sinusurilor*.

### 3.4.3 Fenomenul reflexiei

În mod obișnuit, reflexia este prezentată ca un caz special al refracției. Totuși, în scopul de a ilustra felul în care teoria funcției eiconale reușește să acopere principiile opticii geometrice, vom trata explicit și cazul reflexiei.

Pentru a putea folosi imediat dezvoltările secțiunii precedente, este suficient să comparăm situațiile ilustrate în figura II.7.

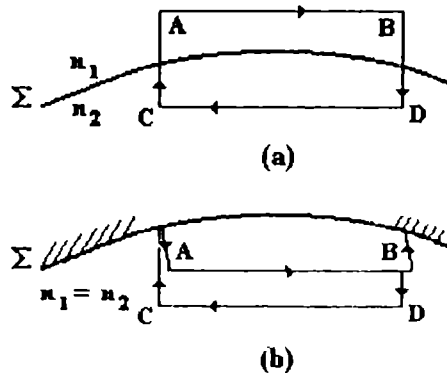


Figura II.7: Integrare în cazul refracției (a) și reflexiei (b)



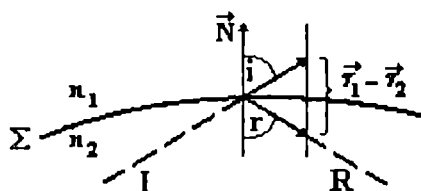
Astfel, vedem că în locul ecuației (11.68) vom avea

$$n_1 \vec{\tau_1} \cdot \vec{DC} + n_1 \vec{\tau_2} \cdot \vec{AB} + \text{termini neglijabili} = 0$$

Parcurgând aceleași argumente ca cele folosite în cazul refracției, ajungem să găsim în locul lui (II.72) ecuația

$$\vec{N} \times (\vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1) = 0 \quad (\text{II.73})$$

care reprezintă expresia concentrată a legilor reflexiei. De această dată, situația geometrică arată ca în figura II.8.



**Figura II.8: Conținutul geometric al formei vectoriale a legii reflexiei**

Ca o remarcă finală, să notăm că în tratarea eiconală, reflexia apare ca un caz special de refracție asociat condiției intuitive  $n_2 = n_1$ . În mod diferit, în cadrul opticii geometrice algebrice, reflexia este un caz particular al refracției, asociat condiției  $n_2 = -n_1$ .

## 4. Acoperirea opticii geometrice prin ecuația de undă

### 4.1 Efectul teoriei eiconale

Pentru a stabili ecuațiile care guvernează transportul vectorilor de câmp  $\vec{e}$  și  $\vec{h}$  trebuie să calculăm efectele soluțiilor de forma (II.23) în (II.7). Este recomandabil să tratăm separat transformările fiecăruia dintre cei patru termeni ai ecuației de undă potrivit cu ordinea lor de apariție.

- Pentru  $\Delta \vec{E}$  trebuie să începem prin a calcula

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e} + ik_0 \vec{e} \frac{\partial}{\partial x} S \right) \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)]$$

apoi aflăm

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{e} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial x} S \frac{\partial}{\partial x} \vec{e} + ik_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} S \right) \vec{e} + (ik_0)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} S \right)^2 \vec{e} \right] \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)]$$

și sumăm pe cele trei coordonate

$$\Delta \vec{E} = \left( \Delta \vec{e} + 2ik_0 (\nabla S \cdot \nabla) \vec{e} + ik_0 \Delta S \vec{e} - k_0^2 (\nabla S)^2 \vec{e} \right) \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)]$$

- Calculul lui  $-\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$  este simplu

$$\begin{aligned} -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} &= -\mu\epsilon (ik_0 c)^2 \vec{e} \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)] \\ &= \mu\epsilon c^2 k_0^2 \vec{e} \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)] \\ &= n^2 k_0^2 \vec{e} \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)] \end{aligned}$$

- Al treilea termen înseamnă

$$\begin{aligned} \nabla (\ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) &= \\ &= \{ \nabla (\ln \mu) \times (\nabla \times \vec{e}) + ik_0 [\nabla S (\vec{e} \cdot \nabla \ln \mu) - \vec{e} (\nabla S \cdot \nabla \ln \mu)] \} \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)] \end{aligned}$$

- Pentru  $\nabla (\nabla \cdot \vec{E})$  trebuie din nou să procedăm în etape. Mai întâi

$$\nabla \cdot \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{e} + ik_0 \vec{e} \cdot \nabla S) \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)]$$

apoi

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) &= \\ &= \left[ \nabla (\nabla \cdot \vec{e}) + ik_0 \nabla \cdot \vec{e} \cdot \nabla S + ik_0 \nabla (\vec{e} \cdot \nabla S) + (ik_0)^2 \nabla S (\vec{e} \cdot \nabla S) \right] \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)] \end{aligned} \quad (II.74)$$

Prima ecuație a sistemului (II.25) ne permite să înlocuim  $\vec{e} \cdot \nabla S$ . Astfel scriem

$$ik_0 \nabla (\vec{e} \cdot \nabla S) = \nabla (\nabla \cdot \vec{e} - \vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon)$$

și

$$\begin{aligned}(ik_0)^2 \nabla S \cdot (\vec{e} \cdot \nabla S) &= ik_0 \nabla S \cdot (-\nabla \vec{e} - \vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon) \\ &= -ik_0 \nabla S \cdot \nabla \vec{e} - ik_0 \nabla S \cdot (\vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon)\end{aligned}$$

În final, substituind în (II.74) și reducând termenii asemenea, obținem

$$\begin{aligned}\nabla (\nabla \vec{E}) &= [-ik_0 \nabla S (\vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon) - \nabla (\vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon)] \\ &\quad \cdot \exp [ik_0 (S(\vec{r}) - ct)]\end{aligned}$$

Pe baza acestor dezvoltări, ecuația de undă se scrie

$$\begin{aligned}\Delta \vec{e} + 2ik_0 (\nabla S \cdot \nabla) \vec{e} + ik_0 \Delta S \cdot \vec{e} - k_0^2 (\nabla S)^2 \vec{e} \\ + n^2 k_0^2 \vec{e} \\ + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \vec{e}) + ik_0 [\nabla S (\vec{e} \cdot \nabla \ln \mu) - \vec{e} (\nabla S \cdot \nabla \ln \mu)] \\ + ik_0 \nabla S (\vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon) + \nabla (\vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon) = 0\end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

unde fiecare linie reprezintă contribuția termenului corespunzător din (II.7).

### 4.1.1 Ecuația eiconală

Aproximația opticii geometrice (ideal exprimată prin  $k_0 \rightarrow \infty$  dar care este reflectată în mod realist de condiția  $k_0 \gg 1$ ) ne permite să urmărim separat anularea coeficienților lui  $ik_0$  la diverse puteri. Astfel, strângând la un loc termenii care au drept factor pe  $k_0^2$  și impunând anularea rezultatului găsim

$$(\nabla S)^2 = n^2$$

Este important să notăm că ecuația eiconală este termenul dominant al ierarhiei generate, de factorii  $(ik_0)^n$  din ecuația de undă (concret vom avea de a face cu  $n = 0, 1, 2$ ).

În plus, așa cum am arătat deja, ecuația eiconală este legată de un ansamblu de consecințe optice.

### 4.1.2 Alți termeni ai ierarhiei eiconale

Dacă în (II.75) identificăm coeficientul lui  $ik_0$  și apoi impunem anularea sa, obținem

$$2(\nabla S \cdot \nabla) \vec{e} + \vec{e} (\Delta S - \nabla S \cdot \nabla \ln \mu) + \nabla S \cdot [\vec{e} \nabla \ln (\mu \epsilon)] = 0 \quad (\text{II.76})$$

În urma celor două etape de izolare a termenilor din (II.75) aceasta se rezumă la

$$\Delta \vec{e} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \vec{e}) + \nabla (\vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon) = 0$$

ceea ce reprezintă o condiție asupra termenilor în  $(ik_0)^0$  ("termenii liberi").

În raport cu anvergura efectelor termenilor în  $(ik_0)^2$  și  $ik_0$ , ignorarea ecuației precedente rămâne fără consecințe notabile.

### 4.1.3 Prima expresie a ecuației de transport

Să revenim la ecuația (II.76). Ținând seama că  $\nabla \ln(c^2) = 0$  putem scrie

$$\nabla \ln(\mu\epsilon) = \nabla \ln(c^2\mu\epsilon) = \nabla \ln(n^2) = 2 \nabla (\ln n)$$

iar pe baza ecuației (II.34) avem

$$\nabla S \cdot \nabla = n \vec{\tau} \nabla = n \frac{d}{dl}$$

ceea ce înseamnă "creșterea de  $n$  ori" a derivatei după elementul de curbă (de rază) care traversează perpendicular suprafața eiconală  $S = ct$ . Ne vom servi de aceasta pentru a pune (II.76) sub forma

$$2n \frac{d}{dl} \vec{e} + \vec{e} \left( \Delta S - n \frac{d}{dl} \ln \mu \right) + 2 \nabla S \cdot (\vec{e} \nabla \ln n) = 0 \quad (\text{II.77})$$

Această ecuație, pe care o vom denumi "prima ecuație de transport", exprimă felul în care vectorul de câmp  $\vec{e}$  este transportat de-a lungul razei de lumină (caracterizată prin elementul de curbă  $dl$ ).

În expresia (II.77) sunt concentrate două efecte distincte:

- modificarea modulului vectorului  $\vec{e}$ , care este în directă legătură cu intensitatea luminoasă;
- schimbarea direcției vectorului  $\vec{e}$  ca efect al neomogenității indicelui de refracție, care impune în fiecare punct al razei de lumină o geometrie precisă  $\nabla S, \vec{e}, \vec{h}$ .

Pentru a putea izola aceste caracteristici trebuie să deducem ecuația de transport a vectorului complex conjugat  $\vec{e}^*$ .

### 4.1.4 Transportul amplitudinii câmpului complex conjugat

Pomim de la ecuația

$$\Delta \vec{E}^* - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}^* + \nabla (\ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}^*) - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}^*) = 0$$

pentru care propunem soluții de forma

$$\vec{E}^*(\vec{r}, t) = \vec{e}^*(\vec{r}) \cdot \exp[-ik_0(S(\vec{r}) - ct)]$$

Calculând pas cu pas (sau conjugând consecvent (II.75)) vom obține în locul

ecuației (II.75)

$$\begin{aligned} \Delta \vec{e}^* - 2ik_0 (\nabla S \cdot \nabla) \vec{e}^* - ik_0 \Delta S \cdot \vec{e}^* - k_0^2 (\nabla S)^2 \vec{e}^* \\ + n^2 k_0^2 \vec{e}^* \\ + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \vec{e}^*) - ik_0 [\nabla S (\vec{e}^* \nabla \ln \mu) - \vec{e}^* (\nabla S \cdot \nabla \ln \mu)] \\ - ik_0 \nabla S (\vec{e}^* \nabla \ln \varepsilon) + \nabla (\vec{e}^* \nabla \ln \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

Izolând coeficientul lui  $ik_0$  și anulându-l, obținem

$$2n \frac{d}{dl} \vec{e}^* + \vec{e}^* \left( \Delta S - n \frac{d}{dl} \ln \mu \right) + 2 \nabla S \cdot (\vec{e}^* \nabla \ln n) = 0 \quad (\text{II.79})$$

care exprimă rezultatul pe care ne-am propus să-l stabilim.

#### 4.1.5 Ecuația de transport a intensității

Înmulțim scalar ecuația (II.77) cu  $\vec{e}^*$  iar ecuația (II.79) cu  $\vec{e}$  și adunăm rezultatele. Ceea ce obținem este

$$\begin{aligned} n \frac{d}{dl} (\vec{e} \cdot \vec{e}^*) + (\vec{e} \cdot \vec{e}^*) \left( \Delta S - n \frac{d}{dl} \ln \mu \right) \\ + (\vec{e}^* \nabla S) (\vec{e} \nabla \ln n) + (\vec{e} \nabla S) (\vec{e}^* \nabla \ln n) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.80})$$

Pe baza primei ecuații din setul (II.25) la care adăugăm complex conjugata, putem scrie

$$\begin{aligned} (\vec{e}^* \nabla S) (\vec{e} \nabla \ln n) + (\vec{e} \nabla S) (\vec{e}^* \nabla \ln n) = \\ = \frac{1}{ik_0} [(\vec{e}^* \nabla \ln \varepsilon + \nabla \vec{e}^*) (\vec{e} \nabla \ln n) - \\ (\vec{e} \nabla \ln \varepsilon + \nabla \vec{e}) (\vec{e}^* \nabla \ln n)] \end{aligned}$$

expresie care tinde la zero în limita  $k_0 \rightarrow \infty$ . În aceste condiții, ecuația (II.80) devine

$$n \frac{d}{dl} (\vec{e} \cdot \vec{e}^*) + (\vec{e} \cdot \vec{e}^*) \left( \Delta S - n \frac{d}{dl} \ln \mu \right) = 0 \quad (\text{II.81})$$

Dacă în punctul  $A$  de pe raza  $\Gamma$  avem intensitatea  $I|_A = (\vec{e} \cdot \vec{e}^*)|_A$ , atunci, în punctul  $B$  de pe  $\Gamma$ , valoarea intensității este dată de

$$I|_B = I|_A \exp \left[ - \int_A^B \left( \frac{\Delta S}{n} - \frac{d}{dl} \ln \mu \right) dl \right]$$

$$= I|_A \frac{\mu_B}{\mu_A} \exp \left( - \int_A^B \frac{\Delta S}{n} dl \right) \quad (11.82)$$

#### 4.1.6 Modelul de lumină al opticii geometrice

Ecuatia (11.81) ne permite să detectăm modelul întrebuințat de optica geometrică pentru a descrie "natura" luminii. În acest scop, mai întâi observăm relația

$$\Delta S = \nabla (\nabla S) = \nabla (n \vec{\tau})$$

care, împreună cu (11.34), ne permite să aducem (11.81) la forma

$$\nabla \left( \frac{\vec{e} \vec{e}^*}{\mu} n \vec{\tau} \right) = 0 \quad (11.83)$$

După cum știm, *ecuația de continuitate a curgerii unui fluid incompresibil* descris prin firele de curent  $\vec{j}$  (densitatea de flux) este

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (11.84)$$

Așadar, prin comparație între (11.83) și (11.84), vedem că în cadrul Opticii geometrice, lumina este modelată ca un *fluid incompresibil* aflat în curgere de-a lungul razelor și având densitatea de flux

$$\vec{j}_l = \frac{\vec{e} \vec{e}^*}{\mu} n \vec{\tau}$$

#### 4.1.7 Ecuatia de transport a vectorilor de câmp

Să introducem versorul complex

$$\vec{u} = \frac{\vec{e}}{\sqrt{\vec{e} \vec{e}^*}} \Rightarrow \vec{u} \vec{u}^* = 1$$

cu ajutorul căruia vom scrie

$$\vec{e} = \vec{u} \sqrt{\vec{e} \vec{e}^*}$$

Pe această bază ecuația (11.77) implică

$$\begin{aligned} & 2n \vec{e} \vec{e}^* \frac{d}{dl} \vec{u} \\ & + \vec{u} \left[ n \frac{d}{dl} (\vec{e} \vec{e}^*) + \vec{e} \vec{e}^* \left( \Delta S - n \frac{d}{dl} \ln \mu \right) \right] \\ & + 2 \vec{e} \vec{e}^* \nabla S \cdot (\vec{u} \nabla \ln n) = 0 \end{aligned}$$

Ecuția (II.81) arată că termenul scris pe a doua linie a expresiei precedente este nul, așa încât după simplificarea cu  $2\vec{e}^T \cdot \vec{e}^T$  avem

$$n \frac{d}{dl} \vec{u} = \nabla S \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \ln n) \quad (\text{II.85})$$

care exprimă ecuația de transport a versorului  $\vec{u}$ .

## 4.2 Legea $1/r^2$

Propoziția pe care trebuie să o demonstrăm afirmă că, într-un mediu omogen, intensitatea unei surse punctiforme scade în raport invers proporțional cu depărtarea de sursă. Vom porni de la ecuația (II.82) care, pentru un asemenea mediu, se reduce la forma

$$I|_B = I|_A \exp \left( - \int_A^B \frac{\Delta S}{n} dl \right) \quad (\text{II.86})$$

Expresia precedentă poate fi exploatată în manieră concretă numai atunci când dispunem simultan, atât de forma analitică a suprafețelor eiconale, cât și de ecuația traiectoriilor razelor de lumină.

Pentru început vom discuta forma asumată de funcția eiconală  $S$ . Să admitem că indicele de refracție al mediului omogen are valoarea  $n$ . Atunci, potrivit ecuației (II.30), scriem

$$\vec{\tau} \cdot \nabla S = n \vec{\tau}^T \cdot \vec{\tau}^T = n$$

ceea ce, ca urmare a ecuației (II.34), înseamnă

$$\frac{d}{dl} S = n$$

Deoarece  $n$  este constant, deducem

$$S = nl + \text{const}$$

ecuație în care putem folosi etalonarea  $S(0) = 0$ . Ca urmare, funcția eiconală asociată unei surse punctiforme are expresia

$$S(l) = nl \quad (\text{II.87})$$

Este evident că suprafețele eiconale  $S = \text{const}$  au forma unor sfere concentrice, sursa de lumină fiind plasată în centrul lor comun.

Pornind de la această imagine, să admitem în continuare că sursa punctiformă este plasată în originea axelor de coordonate, așa cum se vede în figura II.9.

Folosind indicațiile acestei figuri, ecuațiile anterioare devin

$$S(r) = nr$$

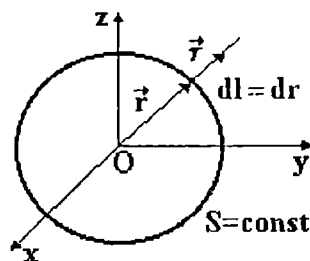


Figura II.9: Suprafața eiconală asociată unei surse punctiforme, plasată în originea axelor

$$\nabla S = n \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Cum mediul este omogen, razele sunt rectilinii, iar faptul că  $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}}{r}$  arată în plus că razele sunt dirijate după vectorii  $\vec{r}$  (cu alte cuvinte, orice rază admite ca suport o dreaptă ce trece prin originea  $O$ ). Astfel, găsim

$$dl = dr \quad (II.88)$$

În sfârșit, trebuie să exprimăm  $\Delta S$ . Începem prin a calcula

$$\frac{\partial}{\partial x} S = n \frac{\partial}{\partial x} r = \frac{nx}{r}$$

de unde

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} S = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{nx}{r} \right) = \frac{n}{r} - \frac{nx^2}{r^3}$$

ceea ce conduce la

$$\Delta S = 3 \frac{n}{r} - \frac{n}{r^3} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2n}{r} \quad (II.89)$$

Cu ajutorul expresiilor (II.88) și (II.89) putem transforma ecuația (II.86) în modul următor

$$\begin{aligned} \frac{I|_B}{I|_A} &= \exp \left( - \int_A^B \frac{\Delta S}{n} dl \right) = \exp \left( -2 \int_A^B \frac{dr}{r} \right) \\ &= \exp \left( -2 \ln \frac{r_B}{r_A} \right) = \left( \frac{r_A}{r_B} \right)^2 \end{aligned}$$

ceea ce se scrie și sub forma

$$I|_B r_B^2 = I|_A r_A^2$$



sau, dacă luăm valoarea  $I|_A r_A^2$  drept referință și considerăm punctul  $B$  drept punct curent, găsim

$$I(r) = \frac{\text{const}}{r^2}$$

ceea ce coincide cu legea  $1/r^2$ .

## 5. Fascicole extreme

### 5.1 Aspecte generale

În structura tradițională a opticii clasice, fasciculele luminoase aparțin categoriei reprezentărilor primare. Ele constituie suportul ("materia") asupra căruia acționează diversele fenomene optice pentru a impune modificările specifice. În sens relaxat, prin *fascicol de lumină* se înțelege un ansamblu (o colecție) de raze luminoase care se propagă pe direcții apropiate (spre exemplu, ca rezultat al trecerii printr-un sistem succesiv de diafragme). În sens mai strict, fasciculele de lumină sunt conjuncte surselor care le produc. Astfel, o sursă punctiformă emite un fascicol sferic, o sursă liniară emite un fascicol cilindric iar o sursă plană va emite un fascicol paralel de lumină.

Pentru a-și dezvolta propria teorie, numită *Optica matematică*, folosind un concept aflat în afara interpretărilor preconceptuate pretabil unei descrieri matematice, Hamilton a introdus conceptul *congruențelor de raze*. În prezent, cele două moduri de a numi colecțiile de raze (fascicule sau congruențe) sunt sinonime.

Privind din perspectiva opticii ondulatorii (adică din perspectiva soluțiilor unei ecuații de undă), noțiunea de fascicol de lumină apare numai în contextul unei definiții relaxate. Astfel, prin *fascicol de radiații electromagnetice* înțelegem un câmp care se propagă în mod esențial vecin unei linii centrale, care se numește *axa fascicolului*.

### 5.2 Fascicole gaussiene

În particular, un *fascicol gaussian (fundamental)* reprezintă o undă caracterizată printr-un front sferic în oricare secțiune transversală, și având un spot (distribuția de lumină în planul transversal al fascicolului) circular. Acest tip de fascicol este remarcabil din mai multe puncte de vedere:

- Exprimă primul nivel de generalizare a opticii razelor meridionale (ce intersectează axa optică) spre optica razelor înclinate (skew) nu numai în sensul cuprinderii acestui tip de raze dar și în sensul dovedirii faptului că aceste raze urmează legile opticii geometrice;

- Reprezintă modelul ondulatoriu al celui mai simplu fascicol astigmatic;
- Reprezintă forma directă de modelare a unui fascicol care este supus efectului de difracție în mod continuu pe toată durata propagării;
- Reprezintă un pachet de undă ce satisface optimal principiul de incertitudine Heisenberg;
- Reprezintă fascicolul astigmatic cu cea mai mică divergență (idee care înlocuiește modelul fascicolului paralel al opticii geometrice "de modă veche");
- Reprezintă geometria cea mai bună de fascicol pe care o poate produce un laser monomodal (fiind în același timp și cea mai realistă modelare a unei surse "plane" de lumină).

În pofida acestor trăsături, în cele ce urmează, nu ne propunem să discutăm decât aspectele esențiale ale tratării teoretice a fasciculelor gaussiene.

### 5.2.1 Ecuația de propagare

Vom ilustra două modalități de obținere a ecuației de undă pentru fasciculele gaussiene. Ambele valorifică ideea unui fascicol care se propagă în lungul axei  $Oz$  oferind însă percepții complementare. În ambele cazuri, factorul de propagare are forma  $\exp[i(k_z z - \omega t)]$ .

### 5.2.2 Deducerea euristică a ecuației de undă

Această metodă se bazează pe o abordare în două etape:

- Pomind de la faptul că în (II.13) pentru medii omogene operatorul  $\Delta_{xy} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  este independent de variabilele factorului de propagare, punem împreună (asociem variabilele  $z$  și  $t$  în operatorul)

$$\aleph = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

și găsim

$$\aleph \exp[i(k_z z - \omega t)] = ik_z \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp[i(k_z z - \omega t)] \quad (\text{II.90})$$

unde am folosit și (II.16).

- Ca efect al formei factorului de propagare, orice punct al axei  $Oz$  este corelat cu un anumit moment de timp (suprafața de undă trece prin fiecare loc la un anumit moment). Legătura este liniară

$$k_z z - \omega t = \text{const}$$

de unde

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\omega}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} = v \frac{\partial}{\partial z}$$

În consecință, ecuația (II.90) devine

$$\Re \exp [i (k_z z - \omega t)] = 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} \exp [i (k_z z - \omega t)]$$

Așadar, operatorul care descrie propagarea undelor "fasciculate" după  $Oz$ , este

$$\Delta_{xy} + \Re \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II.91})$$

și el ne permite să scriem

$$(\Delta_{xy} + \Re) \Phi \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi = 0 \quad (\text{II.92})$$

ceea ce exprimă ecuația de undă pentru fascicule gaussiene (descrise prin funcția de undă  $\Phi$ ).

### 5.2.3 Deducerea operatorială a ecuației de undă

Să facem următoarele notații:  $k$  semnifică modulul vectorului de undă  $\vec{k}$ , iar  $k_x$ ,  $k_y$  și  $k_z$  componentele după axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ .

Tehnica operatorială pornește de la expresia 'elementară' a modulului vectorului de undă

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (\text{II.93})$$

(care, geometric, prin intermediul condiției  $k = \text{const} \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \text{const}$ , reprezintă suprafața de dispersie a vectorilor de undă; în cazul de față, avem de a face cu o suprafață sferică) pentru a o transforma prin corespondențele

$$k_x \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}; k_y \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}; k_z \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II.94})$$

Regulile precedente se obțin fără nici o dificultate pornind de la factorul de propagare al unei unde plane, în raport cu care, observăm că

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp [i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] = ik_x \exp [i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

de unde

$$k_x \exp [i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \exp [i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

ceea ce, în limbaj operatorial, coincide cu prima relație din setul (II.94).

Simpla înlocuire a (II.94) în (II.93) ne conduce la operatorul

$$\Delta + k^2 \quad (II.95)$$

a cărui asemănare cu ecuația de undă atemporală pentru medii omogene ((II.13)) este evidentă.

Revenind la fasciculele gaussiene, să notăm că, în raport cu spațiul vectorilor de undă, propagarea după  $Oz$  echivalează cu impunerea următoarei condiții

$$k_x^2 + k_y^2 \ll k^2 \approx k_z^2$$

Pe această bază, (II.93) se scrie

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \\ &\simeq k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \end{aligned}$$

Din părțile extreme, folosind corespondențele (II.94), găsim operatorul

$$-k_x^2 - k_y^2 - 2kk_z + k^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} + k^2$$

căruia îi putem asocia o ecuație diferențială omogenă

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi = 0$$

expresie care coincide cu ecuația de undă (II.92).

## 5.2.4 Soluțiile ecuației de undă

Să începem cu patru observații importante privitoare la proprietățile ecuației de undă:

- ecuația (II.92) este liniară (adică, dacă  $f_1$  și  $f_2$  sunt soluții distincte ale ecuației, atunci și  $af_1 + bf_2$  este o soluție,  $a$  și  $b$  fiind două constante arbitrare);
- ecuația (II.92) este invariantă la translații ( $x \rightarrow x + a$ ,  $y \rightarrow y + b$ ,  $z \rightarrow z + c$ );
- din punct de vedere tipologic, ecuația (II.92) este asemănătoare ecuației propagării căldurii, deosebirea rezumându-se la intervenția numerelor imaginare;
- fără a restrânge în nici un fel generalitatea tehnicii de studiu a soluțiilor, putem admite că ne aflăm într-un caz ce prezintă simetrie cilindrică. O simplificare a manevrelor matematice se obține tratând la început cazul bidimensional, în

care, de exemplu, reținând coordonatele  $x$  și  $z$  avem

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi = 0 \quad (\text{II.96})$$

Se vede imediat că putem aplica tehnica separării variabilelor. Astfel, punând

$$\Phi = X(x) \cdot Z(z)$$

găsim

$$\frac{X''}{X} = -2ik \frac{Z'}{Z} = -\lambda^2$$

de unde

$$\Phi_\lambda = a_\lambda \exp \left[ i \left( \lambda x - \frac{\lambda^2(z + ic_\lambda)}{2k} \right) \right] + b_\lambda \exp \left[ -i \left( \lambda x + \frac{\lambda^2(z + ic_\lambda)}{2k} \right) \right] \quad (\text{II.97})$$

expresie în care am explicat faptul că în general, urmare a caracterului arbitrar al parametrului  $\lambda$ , constantele de integrare  $a$ ,  $b$  sau  $c$  pot fi funcții de  $\lambda$ .

O soluție generală a ecuației (II.96) va fi dată prin

$$\Phi = \sum_{\lambda} \Phi_\lambda$$

Ținând seama că  $\lambda$  este un parametru continuu, suma precedentă trece în integrala

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda d\lambda \quad (\text{II.98})$$

Pentru economia calculelor, ne vom concentra asupra primului termen al soluției anterioare și anume

$$\Phi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} a_\lambda \exp \left[ i \left( \lambda x - \frac{\lambda^2(z + ic_\lambda)}{2k} \right) \right] d\lambda \quad (\text{II.99})$$

care exprimă de asemenea o soluție a ecuației (II.96), după cum ne putem convinge printr-un calcul direct.

Transformata Fourier a funcției  $a_\lambda$

$$a_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_\xi \exp(-i\lambda\xi) d\xi$$

permite aducerea expresiei (II.99) la forma

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[ \lambda(x - \xi) - \frac{\lambda^2(z + ic_{\lambda})}{2k} \right] \right\} d\lambda \quad (\text{II.100})$$

care evidențiază algebric invarianța lui  $\Phi_1$  la translații.

Dacă  $c_{\lambda}$  nu depinde de  $\lambda$ , atunci, punând  $c_{\lambda} = c$ , a doua integrală poate fi calculată până la capăt. În acest scop vom forma pătratul perfect al exponentului

$$\lambda(x - \xi) - \frac{\lambda^2}{2k}(z + ic) \equiv -(p_1\lambda + p_2)^2 + p_2^2$$

urmărind apoi puterile lui  $\lambda$  în cele două părți. Astfel găsim

$$p_1 = \sqrt{\frac{(z + ic)}{2k}}$$

$$p_2 = -\frac{x - \xi}{2} \sqrt{\frac{2k}{(z + ic)}}$$

încât

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\xi} \exp \left[ ik \frac{(x - \xi)^2}{2(z + ic)} \right] d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -i(p_1\lambda + p_2)^2 \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{\xi}}{p_1} \exp \left[ ik \frac{(x - \xi)^2}{2(z + ic)} \right] d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iu^2) du \end{aligned}$$

Ținând seama de expresia lui  $p_1$ , dar și de valoarea integralei lui Fresnel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iu^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{i}} = (1 - i) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

găsim

$$\Phi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - i}{2} a_{\xi} \sqrt{\frac{k}{\pi(z + ic)}} \exp \left[ ik \frac{(x - \xi)^2}{2(z + ic)} \right] d\xi \quad (\text{II.101})$$

din care putem izola

$$\Psi(x, z, c) \equiv \frac{1 - i}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} (z + ic)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ ik \frac{(x - \xi)^2}{2(z + ic)} \right] \quad (\text{II.102})$$

expresie asupra căreia putem face câteva observații:

- Prin calcul direct putem verifica faptul că  $\Psi$  este o soluție a ecuației de undă (II.92);
- Al doilea termen al ecuației (II.98) conduce la aceeași formă  $\Psi$ ;
- Pentru a stabili legătura lui  $\Psi$  cu rezultatul clasic obținut pentru ecuația căldurii, să scriem

$$\Psi_{termic}(x, c) = \Psi(x, 0, c) \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{-\pi c}} \exp \left[ k \frac{(x - \xi)^2}{2c} \right]$$

de unde vedem că numai dacă  $c < 0$ ,  $\Psi_{termic}(x, c)$  coincide cu evoluția distribuției de căldură într-o bară conductoare (rolul timpului fiind asumat de  $-c$ ) ca urmare a plasării unei surse punctiforme în punctul  $\xi$ . Punând

$$c = -\frac{k}{2} w_0^2 \quad (II.103)$$

$\Psi_{termic}(x, w_0)$  devine o funcție reală 'de pătrat sumabil'

$$\Psi_{termic}(x, c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w_0} \exp \left[ -\left( \frac{x - \xi}{w_0} \right)^2 \right]$$

ceea ce face ca la orice 'moment' ( $\sim w_0^2$ ) cantitatea de căldură distribuită în bară să fie finită. Este limpede că alegerea pe care am făcut-o pentru  $c$  realizează atât adimensionalizarea exponentului cât și simplificarea expresiei lui  $\Psi_{termic}$ .

Generalizarea tridimensională a soluției precedente,  $(x, z) \rightarrow (x, y, z)$ , se face pe baza *Ansatz*-ului

$$x^2 \rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \quad (II.104)$$

Folosind în (II.102) condiția (II.103), rebotezând constante și observând că translația  $\xi$  poate fi anulată printr-o alegere convenabilă a sistemului de referință, introducem

$$\Phi_g(r, z) \doteq A \left( z - i \frac{k}{2} w_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ i \frac{k r^2}{2(z - i \frac{k}{2} w_0^2)} \right] \quad (II.105)$$

soluție care reprezintă funcția de undă a unui fascicol gaussian fundamental.

**Tema 1.8** Verificați prin calcul direct că  $\Phi_g(r, z)$ , obținut prin substituția (II.104), verifică ecuația de undă (II.92).

**Tema 1.9** Tratarea directă a cazului tridimensional, în coordonate cilindrice, ar fi

condus la ecuația de undă

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi = 0 \quad (\text{II.106})$$

care (în locul lui (II.97)) admite ca soluție

$$\Phi_\lambda = J_0(\lambda r) \cdot \exp \left( -i \frac{\lambda^2 (z + ic_\lambda)}{2k} \right) \quad (\text{II.107})$$

Folosind procedurile indicate începând cu ecuația (II.98), arătați că se ajunge la același rezultat (II.105).

Adăugând lui  $\Phi_g(r, z)$  factorul de propagare  $\exp[i(kz - \omega t)]$  obținem expresia completă a funcției de undă

$$\Phi_{gg}(r, z, t) \doteq A \left( z - i \frac{k}{2} w_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ i \left( kz + \frac{kr^2}{2(z - i \frac{k}{2} w_0^2)} - \omega t \right) \right] \quad (\text{II.108})$$

### 5.2.5 Caracteristicile fascicolului gaussian

Prin simplă inspecție, vedem că în  $\Phi_{gg}(r, z, t)$  separarea componentelor imaginare și reale nu s-a efectuat până la capăt. Folosind

$$\chi = \frac{1}{2} \arctan \frac{k w_0^2}{2z}$$

putem scrie

$$\begin{aligned} \Phi_{gg}(r, z, t) \doteq A \sqrt{\frac{2}{k w_0^2}} \left[ 1 + \left( \frac{2z}{k w_0^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp \left[ - \left( \frac{k^2 r^2 w_0^2}{(2z)^2 + k^2 w_0^4} \right) \right] \\ \cdot \exp \left[ i \left( kz + \chi + \frac{k r^2 z}{2(z^2 + \frac{1}{4} k^2 w_0^4)} - \omega t \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.109})$$

### 5.2.6 Profilul intensității

Folosind definiția intensității unei unde armonice

$$I(r, z) = \Phi_{gg}^*(r, z, t) \cdot \Phi_{gg}(r, z, t)$$

împreună cu (II.109) găsim

$$I(r, z) = A^* A \left( \frac{2}{k w_0^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2z}{k w_0^2} \right)^2}} \cdot \exp \left[ - 2 \left( \frac{k^2 r^2 w_0^2}{(2z)^2 + k^2 w_0^4} \right) \right] \quad (\text{II.110})$$



După cum era de așteptat, monocromaticitatea unde, exprimată prin prezența factorului  $\exp(-i\omega t)$  în (II.109), conduce la staționaritatea intensității ( $I(r, z)$  este independent de timp).

Fie o secțiune transversală a fascicolului, realizată în planul  $z = \text{const.}$  Ne propunem să aflăm depărtarea  $w$  față de axa  $Oz$  la care intensitatea fascicolului scade de  $e^2$  ori

$$\frac{I(w, z)}{I(0, z)} = e^{-2} \quad (\text{II.111})$$

Cu ajutorul expresiei (II.110) găsim

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (\text{II.112})$$

Drept urmare, folosind constante convenabil definite, intensitatea fascicolului gaussian se scrie compact

$$I(r, z) = B^* B \left( \frac{w_0}{w} \right) \cdot \exp \left( -\frac{2r^2}{w^2} \right) \quad (\text{II.113})$$

Să precizăm câteva noțiuni folosite curent în cazul unor asemenea fascicole:

- Marimea  $w(z)$  se numește *rază a fascicolului* sau *rază a spotului*. Ea precizează raza discului luminos obținut pe un ecran care secționează fascicolul la distanța  $|z|$  de originea axelor de coordonate;
- Se poate ușor vedea că cea mai mică arie a spotului luminos are loc în planul  $z = 0$ . Acest loc se numește *waist (talie)* sau *neck (gât)*. Raza spotului în planul waist-ului

$$w_0 = w(z = 0)$$

se numește și ea (în limbaj eliptic) *waist*;

- Estimări numerice arată că din energia totală a fascicolului, în interiorul conturului impus de (II.111), se concentrează 86%;
- Din ecuația (II.112) deducem că graficul funcției  $w(z)$  admite asimptote oblice date prin

$$w(z) = \pm \frac{\lambda}{\pi w_0^2} z$$

Atunci când fascicolul gaussian este generat de un laser, mărimea  $\frac{\lambda}{\pi w_0}$  este foarte mică și putem scrie

$$V = \tan V = \pm \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \quad (\text{II.114})$$

expresia care corespunde divergență asimptotică a fascicolului.

Figura II.10 ilustrează comportarea marimilor  $w(z)$ ,  $V$ ,  $w_0$  și  $I(r, z)$ .

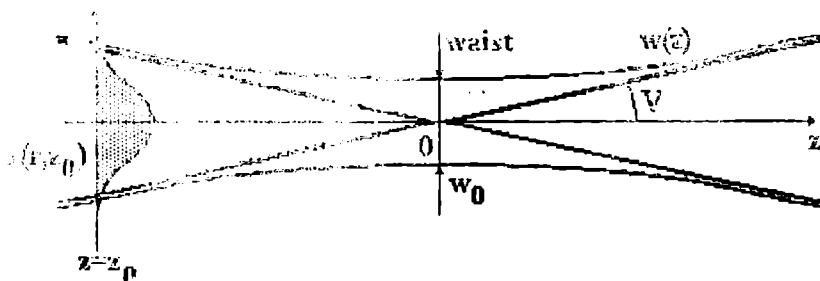


Figura II.10: Geometria fascicolului gaussian asociată funcțiilor  $I(r, z)$ ,  $w(z)$ ; semnificația constantelor  $w_0$  și  $V$ .

### 5.2.7 Raza de curbură a frontului de undă gaussian

Informația privind curbura geometrică  $R$  a frontului de undă se află în exponentul imaginat prezente în ecuația (II.109). Înainte de a deduce acest rezultat, ne vom permite să-l folosim. Astfel, teoria prevede că termenul în  $r^2$  al factorului la care ne-am referit, are forma

$$\exp \left[ i \frac{kr^2}{2R} \right] \quad (\text{II.115})$$

de unde

$$\frac{1}{R} = \frac{z}{z^2 + \frac{1}{4}k^2w_0^2}$$

ceea ce înseamnă

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{kw_0^2}{2z} \right)^2 \right] \quad (\text{II.116})$$

Studiul derivatei lui  $R(z)$  ne indică faptul că cele mai severe curburi (cele mai mici raze de curbură) ale frontului de undă au loc în punctele de coordonate

$$z_{1,2} = \pm z_0 \equiv \pm \frac{kw_0^2}{2} \quad (\text{II.117})$$

$z_1$  fiind asociat, de exemplu, semnului pozitiv.

Prin referire la figura II.10, aceste puncte marchează limită în care secțiunea transversală a fascicolului rămâne aproape constantă. Această zonă se numește: *zona de câmp apropiat (near field)*. În contrast, zona în care comportarea secțiunii

transversale a fascicolului se apropie de comportamentul asimptotic, se numește *zona câmpului îndepărtat (far field)*.

Introducând (II.117) în (II.116) găsim

$$R(z_{1,2}) = \pm kw_0^2$$

rezultat care ne indică faptul că frontul de undă în  $z_1 = \frac{kw_0^2}{2}$  (prin mărimea lui  $R(z_1)$ ) are un centru de curbura situat în punctul  $z_2 = -\frac{kw_0^2}{2}$  așa cum arată figura II.11.

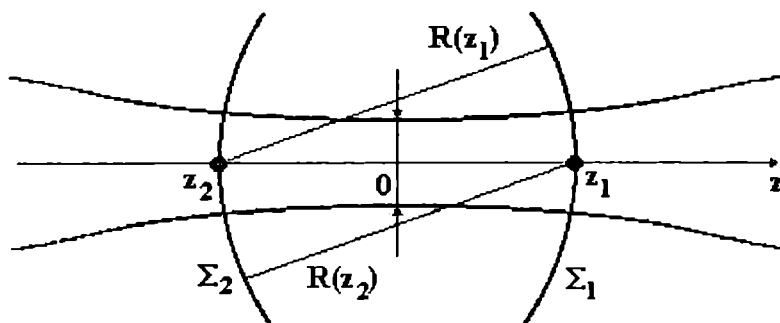


Figura II.11: Pozițiile suprafețelor de undă de curbură maximă, împreună cu centrele lor de curbură.

Proprietatea discutată prezintă reciprocitate între punctele specificate de (II.117). Ținând seama de valoarea razelor minime de curbură și de distanța între fronturile de undă asociate, înțelegem motivul pentru care mărimea  $z_0$ , prezentă în egalitățile (II.117), se numește *parametru confocal*.

În același timp, fronturile de undă ilustrate în figura II.11 ne permit să remarcăm, o dată în plus, caracterul neintuitiv al geometriei fasciculelor gaussiene. Astfel, putem sesiza că până și în cazul razelor minime de curbură, acestea nu se raportează la zona waist-ului (unde, cel puțin în cazul propagării căldurii, se găsește însăși sursa fenomenului fizic), ci la puncte situate la o anumită distanță față de el.

Potrivit expresiilor algebrice corespunzătoare, raza spotului,  $w(z)$ , și raza de curbură a frontului de undă,  $R(z)$ , par a urma evoluții necorelate. Totuși, între ele există o interesantă relație (care ar putea fi considerată ca identitate formală)

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{w'(z)}{w(z)} \quad (\text{II.118})$$

așa cum se poate verifica folosind expresiile corespunzătoare. Ideea identității formale este în legătură cu faptul că știind una dintre mărimi o putem determina pe cealaltă. Atunci când cunoaștem raza spotului, (II.118) ne permite să aflăm

$R(z)$ . Invers, pornind cu  $R(z)$  putem afla  $w(z)$  dacă punem (II.118) sub formă

$$\ln w(z) = \int \frac{dz}{R(z)}$$

Astfel, notând

$$\frac{1}{a} \equiv \left( \frac{kw_0^2}{2} \right)^2$$

și ținând seama de (II.116), avem

$$\ln w(z) = \int \frac{adz}{1+az^2} = \frac{1}{2} \ln(1+az^2) + \text{const}$$

ceea ce conduce simplu la (II.112).

### 5.2.8 Curbura fronturilor de undă cu simetrie cilindrică

Pornim de la dezvoltarea (de ordinul doi) în serie Taylor a ecuației unei suprafețe arbitrare  $S(x, y, z)$

$$S(x, y, z) = a + a_1x + a_2y + a_3z + \frac{a_{11}}{2}x^2 + \frac{a_{22}}{2}y^2 + \frac{a_{33}}{2}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz$$

setul coeficienților constanți  $\{a\}$  fiind constituit de valorile luate de diversele derivate parțiale (inclusiv de ordinul zero) în originea axelor.

Folosind ecuațiile (II.53), putem trece expresia lui  $S$  în coordonate cilindrice

$$S(r, \varphi, z) = a + a_1r \cos \varphi + a_2r \sin \varphi + a_3z + \frac{a_{11}}{2}r^2 \cos^2 \varphi + \frac{a_{22}}{2}r^2 \sin^2 \varphi + \frac{a_{33}}{2}z^2 + a_{12}r^2 \sin \varphi \cos \varphi + a_{13}rz \cos \varphi + a_{23}rz \sin \varphi$$

Pentru ca  $S(r, \varphi, z)$  să facă parte din clasa suprafețelor cu simetrie cilindrică (insensibile la rotația în jurul axei  $Oz$ ), trebuie ca dependența de  $\varphi$  să dispară. În cazul expresiei precedente, acest lucru se realizează dacă

$$a_1 = a_2 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

$$a_{11} = a_{22}$$

de unde

$$S(r, z) = \frac{a_{11}}{2}r^2 + \frac{a_{33}}{2}z^2 + a_3z + a \quad (\text{II.119})$$

În acord cu secțiunea prezentată în figura II.12, fie  $z_c$  coordonata punctului de intersecție a suprafeței  $S(r, z)$  cu axa  $Oz$  (ceea ce atrage  $S(0, z_c) = 0$ ).

Argumente de simetrie sugerează că pentru punctul  $V$  (care marchează 'vârful' suprafeței  $S(r, z)$ ), centrul de curbură trebuie să se afle pe  $Oz$  (axa de simetrie).

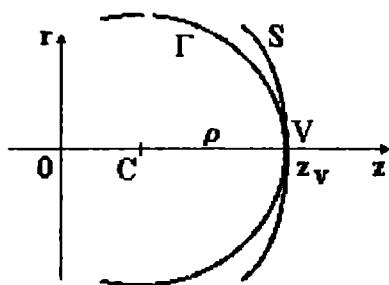


Figura II.12: Curbura suprafeței de simetrie cilindrică  $S(r, z)$

Să admitem că prin punctul  $z_v$  trece și sfera  $\Gamma$ , care are raza  $\rho$  și centrul în punctul  $C(0, 0, z_v)$  (vezi figura II.12). Nu este dificil să scriem ecuația acestei sfere în coordonate cilindrice

$$r^2 + (z - z_v + \rho)^2 = \rho^2$$

Expresia anterioară ne permite să exprimăm raza sferei (care, în acest caz, coincide cu 'raza de curbură a suprafeței  $\Gamma$ ')

$$\rho = -\frac{r^2 + (z - z_v)^2}{2(z - z_v)}$$

Pentru ceea ce ne interesează în continuare, punem ecuația precedentă sub forma

$$z = -\frac{r^2}{2\rho} - \frac{(z - z_v)^2}{2\rho} + z_v$$

în legătură cu care, remarcăm că atunci când  $z$  parcurge punctele sferei  $\Gamma$  situate în vecinătatea punctului  $V$ , unde  $(z - z_v)^2 \approx 0$ , putem scrie

$$z = -\frac{r^2}{2\rho} + z_v \quad (\text{II.120})$$

Revenind la suprafața (II.119), atunci când perechea de valori  $(r, z)$  localizează unul dintre punctele acestei suprafețe, are loc egalitatea  $S(r, z) = 0$ . Luând în considerare numai acest caz, putem explicita

$$z = -\frac{a_{11}}{2a_3}r^2 - \frac{a_{33}}{2a_3}z^2 - \frac{a}{a_3} \quad (\text{II.121})$$

Dacă dorim ca suprafața  $S$  și sfera  $\Gamma$  să aibă aceeași curbură în punctul  $V$  (și deci să se confunde local), atunci trebuie ca părțile din dreapta ecuațiilor (II.120)

și (II.121) să coincidă pentru  $z_v$ . Ca urmare, găsim

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a_{11}}{a_3} \quad (\text{II.122})$$

Dacă privim comparativ expresiile (II.119) și (II.122), vedem că

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{S}{a_3} \right) \quad (\text{II.123})$$

ceea ce exprimă un rezultat deosebit de important prin generalitatea formulării.

Ca o consecință a ecuației (II.122), punând  $R$  în locul lui  $\rho$ , suprafața  $S(r, z)$  se scrie

$$S(r, z) = \frac{a_3}{2R} r^2 + \frac{a_{33}}{2} z^2 + a_3 z + a \quad (\text{II.124})$$

expresie a cărei structură justifică interpretarea prezentată în legătură cu relația (II.115), pusă la începutul secțiunii precedente.

### 5.2.9 Constante, variabile și forme caracteristice fasciculelor gaussiene

Pentru a ne orienta mai ușor în legătură cu fasciculele gaussiene, este indicat să organizăm mărimile pe care le-am întâlnit în trei categorii:

- Constante, între care găsim:

1. poziția spațială și mărimea waist-ului,  $w_0$ ;
2. parametrul confocal,  $z_0$ ;
3. divergența asimptotică,  $V$ .

- Variabile:

1. distanța față de axă,  $r$ , și distanța față de waist,  $z$ ;
2. raza spotului,  $w(z)$ ;
3. raza de curbură a frontului de undă,  $R(z)$ ;
4. distribuția de intensitate,  $I(r, z)$ .

- Forme caracteristice:

1. Funcția de undă completă

$$\Phi_{gg}(r, z, t) \doteq A \left( z - i \frac{k}{2} w_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ i \left( kz + \frac{kr^2}{2(z - i \frac{k}{2} w_0^2)} - \omega t \right) \right] \quad (\text{II.125})$$

2. Notând prin  $q = z - ic$ , găsim o altă expresie remarcabilă

$$\Phi_{gg}(r, z, t) \doteq Aq^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ i \left( kz + \frac{kr^2}{2q} - \omega t \right) \right] \quad (\text{II.126})$$

3. O a treia expresie importantă redă comportarea intensității

$$I(r, z) = B^* B \left( \frac{w_0}{w} \right) \cdot \exp \left( -\frac{2r^2}{w^2} \right) \quad (\text{II.127})$$

### 5.3 Fascicule fără difracție (diffraction free)

În raport cu proprietățile fasciculelor gaussiene, a căror propagare este dominată de difracție, această secțiune tratează un tip de fascicule care se găsesc în extrema opusă. Pentru a ilustra cu cel mai simplu exemplu, să numim *undele plane*.

Definiția *fasciculelor fără difracție* cere (iar unda plană satisface în modul cel mai explicit) ca distribuția de intensitate în plan transversal axei de propagare să fie constantă (independentă de coordonata axială). Dacă presupunem că propagarea are loc după axa  $Oz$ , atunci definiția impune

$$I(x, y, z) = I(x, y, 0), \quad \forall z \quad (\text{II.128})$$

Interesul pentru asemenea soluții ale ecuației undelor (II.13) este legat de o revelație relativ recentă (1987). Până în acel moment, ignorarea contextului era rezultatul constatării că specișenele cunoscute deja (soluțiile de unde plane) prezentau necesarmente caracteristica de a transporta o energie infinită în fiecare front de undă. Din acest motiv, întregul domeniu a fost așezat în zona interesului 'academic'. La aceasta se adaugă și efectul negativ al unei idei dogmatice, potrivit căreia pachetele de undă puternic localizate spațial (deci altfel decât plane) nu ar avea capacitatea de a se menține în stare agregată, pentru suficient de multă vreme.

Pentru a ușura precizarea ideilor să ne imaginăm numai undele care se propagă după axa  $Oz$ . Dintre acestea, fasciculele fără difracție sunt reprezentate de acele soluții exacte ale ecuației de undă (II.13) care au factorul de propagare

$$\exp [i (kz - \omega t)] \quad (\text{II.129})$$

și satisfac condiția (II.128).

#### 5.3.1 Ecuația de undă a fasciculelor fără difracție

Deși expresia (II.107) constituie o dovadă clară în favoarea existenței fasciculelor fără difracție, totuși, pentru a investiga problema într-un cadru general, trebuie să pornim de la ecuația de undă în medii omogene (II.13) și să căutăm (prin coroborarea lui (II.128) cu (II.129)) o soluție de forma

$$A(x, y) \exp [i (kz - \omega t)] \quad (\text{II.130})$$

În acest context, ajungem ușor la ecuația

$$\Delta_{xy} \cdot A(x, y) - \left[ k^2 - \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \right] A(x, y) = 0 \quad (\text{II.131})$$

Să notăm prin

$$k_T^2 = \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \quad (\text{II.132})$$

modulul vectorului de undă (este de remarcat că în cazul tratamentului exact, nu mai este permisă aproximația  $\left| \vec{k}_T \right| \approx |k|$ , specifică "propagării fasciculelă rizate"). De asemenea, să introducem

$$k_r^2 \equiv k_T^2 - k^2 \quad (\text{II.133})$$

prin care desemnăm modulul componenteii lui  $\vec{k}_T$  în plan transversal axei  $Oz$ . Atunci, (II.131) devine

$$\Delta_{xy} \cdot A(x, y) + k_r^2 \cdot A(x, y) = 0$$

Folosind pentru  $\Delta_{xy}$  coordonate polare (ceea ce, în trei dimensiuni, înseamnă a scrie ecuația de undă în coordonate cilindrice) găsim

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot A(r, \theta) + k_r^2 \cdot A(r, \theta) = 0 \quad (\text{II.134})$$

### 5.3.2 Funcția de undă generală

Ecuația (II.134) este separabilă așa încât punând

$$A(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$$

găsim

$$r^2 \left( \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + k_r^2 \right) = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \gamma^2$$

de unde, obținem imediat

$$\Theta(\theta) = \exp(\pm i\gamma\theta) \quad (\text{II.135})$$

în timp ce, pentru  $R(r)$  avem

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left( k_r^2 - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{II.136})$$

Efectuând schimbarea de variabilă

$$u = k_r r$$



ecuația (II.136) devine

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(1 - \frac{\gamma^2}{u^2}\right)R = 0$$

prezentând o formă coincidentă cu ecuația Bessel. Așadar, soluțiile pe care le căutăm sunt date de funcțiile Bessel de ordinul  $\pm\gamma$ , și notate prin  $J_{\pm\gamma}(u)$ .

În concluzie, ecuația de undă (II.134) admite soluțiile

$$A(r, \theta) = [a_1 J_\gamma(k_r r) + a_2 J_{-\gamma}(k_r r)] \cdot [a_3 \exp(i\gamma\theta) + a_4 \exp(-i\gamma\theta)] \quad (\text{II.137})$$

în care  $a_1, a_2, a_3$  și  $a_4$  sunt constante.

Deci, soluția generală a undelor fără difracție (obținută punând (II.137) în (II.130)) este

$$\begin{aligned} \Psi_{DF}(r, \theta, t) = & [a_1 J_\gamma(k_r r) + a_2 J_{-\gamma}(k_r r)] \cdot [a_3 \exp(i\gamma\theta) + a_4 \exp(-i\gamma\theta)] \\ & \cdot \exp[i(kz - \omega t)] \end{aligned} \quad (\text{II.138})$$

între  $k, k_r$  și  $\omega, k_T$  existând legăturile (II.132) și (II.133). Parametrii liberi sunt dați de  $\omega, v, \gamma$  împreună cu setul constantelor  $a_1, a_2, a_3$  și  $a_4$ .

### 5.3.3 Fascicule Bessel

Pentru a ilustra caracteristicile fasciculelor fără difracție, vom discuta cazul particular al soluției (II.138), asociat condiției

$$\gamma = 0$$

când avem

$$\Psi_{Bessel}(r, \theta, t) = J_0(k_r r) \cdot \exp[i(kz - \omega t)] \quad (\text{II.139})$$

Figura II.13 ilustrează profilul amplitudinii de undă pentru diverse valori ale lui  $k_r$ . Este clar că pentru toate valorile nenule ale acestui parametru, amplitudinea undei este puternic neomogenă spațial. În particular, cazul  $k_r = 0$  descrie unda plană. Ca efect al condiției (II.128), unda nu numai că nu se destramă prin propagare, ci își păstrează intact profilul amplitudinii. De asemenea, pe măsură ce valoarea lui  $k_r$  crește, lărgimea maximului central scade.

Putem compara trăsăturile rezultatului (II.139) cu ceea ce cunoaștem din studiul difracției pe o fantă circulară (cele două cazuri prezentând simetrie similară). Astfel, în cazul difracției:

- Locul geometric al punctelor de intensitate nulă este descris de suprafețe conice, având același vârf, și care admit drept axă comună de simetrie axa de propagare (imagine care sugerează lărgirea fascicolului);
- Intensitatea undei scade direct proporțional cu pătratul depărtării de planul

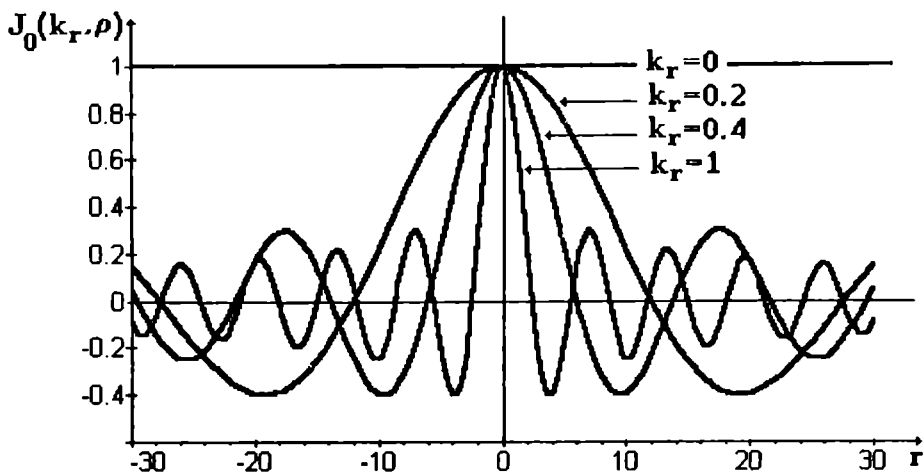


Figura II.13: Amplitudinea undelor Bessel pentru diverse valori ale lui  $k_r$ .

fantei circulare.

În cazul *fascicolului Bessel* :

- Locul geometric al punctelor de egală intensitate desenează suprafețe cilindrice în jurul axei de propagare;
- Intensitatea undei rămâne invariabilă.

În pofida unei păreri pripite potrivit căreia, până și cele mai "simple" fascicule fără difracție nu pot suscita decât un interes teoretic, posibilitatea practică a generării lor este deja consacrată. Mai mult, deoarece valoarea parametrului  $k_r$  poate fi controlată cu precizie, undele (alias fasciculele) Bessel sunt legate de un serios interes aplicativ.

### 5.3.4 Realizarea experimentală a fasciculelor Bessel

Dacă  $r, \theta$  și  $z$  desemnează coordonate cilindrice, atunci una dintre reprezentările integrale ale funcției Bessel de ordinul  $p$  este

$$J_p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ir \cos \theta) \cdot \exp(ip \cos \theta) d\theta \quad (\text{II.140})$$

Aplicând acest rezultat la cazul  $p = 0$  și  $r \rightarrow k_r r$ , expresia (II.139) devine

$$\Psi_{\text{Bessel}}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \exp(-i\omega t) \int_0^{2\pi} \exp[i(k_r r \cos \theta + kz)] d\theta \quad (\text{II.141})$$

indicând faptul că  $\Psi_{Bessel}$  poate fi conceput ca un pachet de unde plane în "spațiul"  $(r, z)$ .

Dacă ținem cont de relația (II.132) (care exprimă constanța modului vectorului de undă  $\vec{k}_T$ ) căreia îi alăturăm (II.129) (prin care  $k$  este constant), ajungem la concluzia că și  $k_r$  este constant, încât (pentru un  $\theta$  fix) avem reprezentarea din figura II.14.

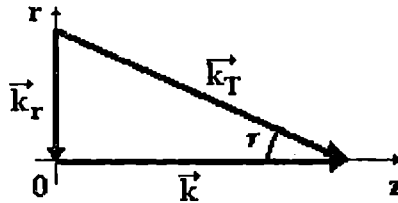


Figura II.14: Geometria undelor plane care se "împachetează" în unda Bessel.

Pentru a genera imediat o imagine tridimensională, dăm vectorilor din figura precedentă o rotație după axa  $Oz$ . În consecință, observăm că undele care formează pachetul din (II.141) au vectori de undă de același modul și, ca atare, aparțin unei pânze conice având unghiul la vârf

$$\tau = \arccos \frac{k}{k_T} \quad (\text{II.142})$$

Practic, setul necesar de unde elementare este produs de un *axicon* (un con circular drept, având raza cercului de sprijin egală cu  $R$  și înălțimea  $H$ . Acest con, confecționat dintr-un material omogen, transparent și neabsorbant, are indicele de refracție  $n$ .) asupra căruia se trimite o undă plană. Un asemenea dispozitiv optic este prezentat în figura II.15. Condițiile practice de utilizare sunt asociate condiției  $H \ll R$  astfel încât,  $v$  și  $\tau$  sunt unghiuri mici.

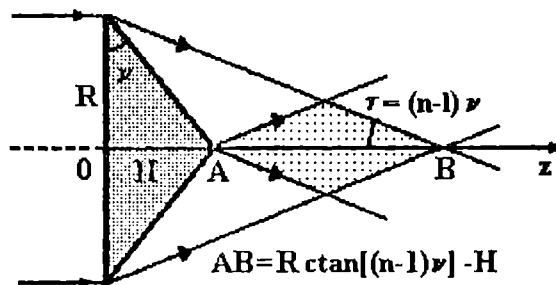


Figura II.15: Schema de funcționare a axiconului

În aceleași condiții

$$\overline{AB} = \frac{R}{\tau} = \frac{R}{(n-1)v} \quad (\text{II.143})$$

ceea ce înseamnă că pentru un anumit axicon, specificat prin  $(n, R, v)$ , expresia (II.143) determină domeniul axial  $\overline{AB}$  pe care se generează unde Bessel, iar (II.142) stabilește valoarea lui  $k$  (care ne dă gradul de "frământare" a amplitudinii unde).

În încheiere, să scoatem în evidență că fasciculele Bessel nu pot fi realizate decât în mod aproximativ. Într-adevăr, așa cum undele plane transportă în fiecare plan de fază constantă o energie infinită, la fel fac și undele Bessel (numai funcția de distribuție a energiei este finită). În plus, pentru a dispune de un spațiu de propagare suficient de larg (de exemplu, pentru a dispune de un semispațiu), ar trebui ca axiconul să aibă o rază foarte mare (infinită) și să fie pompat cu unde plane monocromatice.

## Recomandări bibliografice

---

1. Born, M., E. Wolf: Principles of Optics. Pergamon Press, Oxford, 1975.
2. Luneburg, R. K.: Mathematical Theory of Optics. University of California Press, Berkeley, 1964.
3. Kline, M., I.W. Kay: Electromagnetic Theory and Geometrical Optics. Interscience, New York, 1965.
4. Stavroudis, O.N.: The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics. Academic Press, New York and London, 1972.



# **III.**

## **Autofocalizarea fasciculelor de lumină (ghiduri de undă neliniare)**

<b>1</b>	<b>Contextul general</b>	<b>105</b>
<b>2</b>	<b>Ecuția de propagare</b>	<b>107</b>
2.1	Inițializarea modelului	108
2.2	Procedurile matematice antrenate de WKB	109
<b>3</b>	<b>Separarea ecuației eiconale</b>	<b>111</b>
3.1	Funcția eiconală asociată unui mediu omogen	112
3.2	Compatibilitatea cu funcția eiconală a opticii clasice (etalonări)	113
<b>4</b>	<b>Punctul crucial</b>	<b>116</b>
<b>5</b>	<b>Efectul soluțiilor pseudogaussiene</b>	<b>120</b>
<b>6</b>	<b>Aproximația opticii geometrice</b>	<b>121</b>
<b>7</b>	<b>Aproximația mediului slab parabolic</b>	<b>123</b>
<b>8</b>	<b>Aproximația ondulatorie</b>	<b>125</b>
<b>9</b>	<b>Interpretarea rezultatelor celor trei modele</b>	<b>131</b>
9.1	Cazul opticii geometrice	131
9.2	Cazul mediului slab parabolic	132

9.3	Cazul aproximației ondulatorii	133
9.3.1	Trăsături generale	135
10	<b>Cazuri integrabile compatibile cu WKB (fibre optice neomogene)</b>	<b>136</b>
10.1	Medii cu neliniaritate conică	136
10.1.1	Mediu conic cu focalizare periodică	138
10.1.2	Mediu conic fără periodicitate	141
10.2	Medii cu neomogenitate liniară	142
10.3	Relațiile de recurență ale funcțiilor Bessel	146
10.4	Demonstrația exactă	147
11	<b>În final</b>	<b>149</b>

# 1. Contextul general

Generarea fasciculelor laser de mare intensitate a permis descoperirea unei surprinzătoare instabilități legate de propagarea acestora. Este vorba despre fenomenul de concentrare (aparent spontană) a energiei fascicolului într-un punct situat pe axa de propagare, având uneori ca efect străpungerea (ionizarea) mediului (în speță a aerului). Existența unui asemenea proces (foarte asemănător efectului "pinch" suferit de către fasciculele intense de electroni atunci când străbat sarcina spațială a ionilor formați de gazul rezidual) a deschis interesul pentru studiul propagării fasciculelor de lumină în medii care au căpătat o structură optică neomogenă tocmai din cauza câmpurilor optice intense ale undelor luminoase care le traversează. Este firesc să începem prin prezentarea câtorva noțiuni explicative.

Clasificarea mediilor optice drept omogene sau neomogene are loc în strictă legătură cu forma funcției ce exprimă indicele de refracție:

- dacă  $n = ct$  atunci mediul este omogen (evident și izotrop);
- dacă  $n = n(x, y, z)$  atunci mediul este neomogen (dar izotrop).

În cazul mediilor optice nemagnetice pentru care  $\mu = \mu_0$ , unul dintre rezultatele remarcabile ale electrodinamicii clasice ne permite să scriem

$$n^2 = c^2 \epsilon \mu \equiv c^2 \epsilon_0 \mu_0 \cdot \epsilon_r \equiv \epsilon_r$$

astfel, prezența unei neomogenități a mediului se exprimă prin forma funcției  $\epsilon_r$  (permitivitatea dielectrică relativă).

Conceptul generic de propagare ghidată poate fi surprins pornind de la imaginea apei care străbate un furtun elastic. Posibilitatea propagării ghidate a unui fascicol de lumină are la rândul ei o exemplificare extrem de sugestivă dată prin experiența lui Tyndall (1870), al cărei aranjament este redat în figura de mai jos:

Acest desen poate fi interpretat și drept ilustrație naturală a unui ghid optic omogen. Fascicolul luminos este "ghidat" de-a lungul tubului de lichid (produs prin curgerea laminară) ca urmare a proceselor "punctuale" de *reflexie totală* pe suprafața apă-aer.

Într-un plan mai general, experimentul lui Tyndall sugerează caracteristicile unui ghid de undă *unidimensional*: este vorba de un mediu "filiform" (având una dintre dimensiuni cu mult mai mare decât celelalte) care este înconjurat de un ambient înzestrat cu proprietăți optice distincte. În mod intuitiv înțelegem că asemenea structuri prezintă proprietăți de simetrie în raport cu o curbă specială numită *axa ghidului*.

Din punct de vedere tehnic, neomogenitatea mediului se manifestă asupra formei funcției  $n^2(x, y, z)$  (adică  $\epsilon_r$ ) în două maniere: prin valorile care apar pe axa ghidului și prin evoluția acestora atunci când ne depărtăm de axă în plan

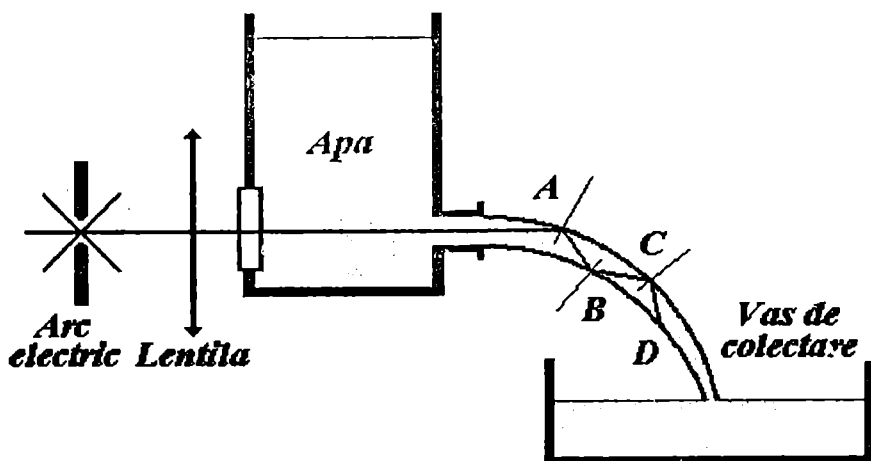


Figura III.1: Experiența lui Tyndall

transversal.

Atunci când axa ghidului este o dreaptă ghidul se numește *liniar*. În continuare ne vom ocupa doar de astfel de ghiduri. Exploatarea considerentelor de simetrie sugerează utilizarea coordonatelor cilindrice (orientând axa  $Oz$  paralel cu axa ghidului astfel încât  $r$  se află în planul transversal). În aceste condiții, desemnând prin  $a$  raza ghidului, funcția care descrie structura sa optică poate prezenta una dintre formele:

– pentru un ghid cilindric omogen

$$n^2 = \begin{cases} K_0 = ct. \text{ pentru } r \leq a \\ K_1 = ct. \text{ pentru } r > a \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

– pentru un ghid cilindric neomogen

$$n^2 = \begin{cases} K_0(z) - K_2(z, r) r^2 \text{ pentru } r \leq a \\ K_1 = ct \text{ pentru } r > a \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

În particular, o structură de forma

$$n^2 = \begin{cases} K_0(z) - K_2(z) r^2 \text{ pentru } r \leq a \\ K_1 = ct \text{ pentru } r > a \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

descrie un ghid "parabolic". În practică, distribuția parabolică a indicelui de refracție poate prezenta atât un caracter ireversibil (ca în cazul fibrelor optice neomogene) cât și unul de reversibilitate (atunci când distribuția este rezultatul mecanismelor însoțitoare propagării fasciculelor luminoase extrem de intense - laser - prin medii obișnuite).

Observații: i) În mod necesar atât  $K_0$  cât și  $K_2$  sunt mărimi pozitive.



Semnul — din expresia lui  $n^2$  poate fi interpretat ca un "ecou" al fenomenului de reflexie totală localizată din experiența lui Tyndall (pornind de pe axa ghidului indicele de refracție scade în plan transversal).

- ii) Este clar că valorile indicelui de refracție pe axa de propagare apar pentru  $r = 0$  iar neomogenitatea se manifestă prin dependența valorilor de poziția  $z$ . Din cauza formei polinomiale în  $r$ , ecuația (III.3) descrie un *ghid parabolic* (termenul de ordinul cel mai înalt fiind proporțional cu  $r^2$ ).

**Tema I.1** Folosind indicațiile din figura III.1 arătați că o reflexie totală în punctul A atrage același tip de reflexie pentru oricare dintre punctele de incidență ulterioare (B, C, D etc).

În continuare ne vom ocupa numai de cazul *mediilor parabolice* (o subclasă a *ghidurilor liniare neomogene*).

## 2. Ecuatia de propagare

Este clar că imaginea undelor ghidate prin reflexie totală localizată (ca în experiența lui Tyndall) nu poate îngloba toate particularitățile propagării ghidate. De exemplu, pentru anumiți parametri fizici, undele ghidate devin "radiative" (fapt care se evidențiază prin aceea că media temporală a vectorului Poynting primește valori nenule în mediul adiacent ghidului). În același fel, este clar că mecanismul reflexiei totale localizate (aparținând inventarului opticii geometrice) nu are cum să descrie un ghid ale cărui dimensiuni transversale se apropie de lungimea de undă a radiației ghidate.

Existența unor situații asemănătoare celor amintite mai sus ne obligă să abordăm metoda generală de tratare a propagării ghidate, care constă în rezolvarea specializată (adecvată) a ecuației de undă.

Luăm ca punct de plecare *ecuația Helmholtz* (ecuația de undă pentru undele armonice)

$$\Delta\psi + \frac{\omega^2}{c^2}n^2\psi = 0 \quad (\text{III.4})$$

care, fiind rezultatul unui tratament standard al *ecuațiilor Maxwell*, nu necesită o deducere în acest context. Vom remarca totuși faptul că ecuația de undă (III.4) este efectul unei *aproximații* constând în neglijarea tuturor termenilor de ordinul  $\frac{1}{k\epsilon_r}\nabla\epsilon_r$  (atunci când variația lui  $\epsilon_r$  pe o lungime de undă este mică această alegere este corectă).

Prezența neliniarităților împiedică rezolvarea exactă și cu totul generală a ecuației Helmholtz și constrânge la folosirea unor abordări parțiale. Între acestea, un cadru suficient de general este asigurat de tehnica *WKB*, introdusă în germene de către *lord Rayleigh* (1912) și ”standardizată” în 1926 de către *Wentzel*, *Kramers* și *Brillouin* (această metodă este cunoscută și sub numele de *aproximație cuasioptică*).

Caracteristica acestei tratări constă în introducerea (și exploatarea severă a) unei inegalități care scalează comportarea amplitudinii de undă. Dacă  $A$  este amplitudinea unei unde neomogene care se propagă având vectorul de undă  $\vec{k}$ , atunci potrivit *WKB* are loc relația

$$|\partial_z^2 A| \ll k |\partial_z A| \quad (\text{III.5})$$

ceea ce înseamnă că ”variația pe o lungime de undă a entității  $|\partial_z A|$  este neglijabilă în raport cu valoarea numerică a entității în cauză”.

## 2.1 Inițializarea modelului

Potrivit simetriei problemei este convenabil să punem ecuația de undă în coordonate cilindrice. În particular, laplaceianul asumă forma

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2 \quad (\text{III.6})$$

**Tema I.2** Pornind de la expresia laplaceianului în coordonate carteziene, deduceți formula acestuia în coordonate cilindrice.

În mod evident, datorită formei pe care o are  $n^2 (= K_0(z) - K_2(z)r^2)$  ecuația Helmholtz nu este rezolvabilă prin metoda separării variabilelor (după cum nu este integrabilă în mod exact prin nici o altă metodă). Prin urmare suntem obligați să recurgem la elemente euristice în construcția soluției.

În prima etapă, introducem o caracterizare a undelor prin valoarea vectorului de undă pe axa ghidului ( $Oz$ ). Pe baza relației (III.3) putem scrie

$$k^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2} K_0(z) \quad (\text{III.7})$$

Apoi recurgem la structurarea dată de următoarea formă predefinită

$$\psi(r, z) = A(r, z) \left( \frac{K_0(0)}{K_0(z)} \right)^{1/4} \exp \left( -i \int k(z) dz \right) \quad (\text{III.8})$$

Conținutul (oarecum neintuitiv) al expresiei precedente poate fi înțeles în felul următor:

- Pentru un mediu omogen, soluția ecuației de undă admite ca factor expresia

$$\exp(-ikz)$$

Exponențiala exprimă modificarea fazei ca efect al propagării. Pentru medii neomogene, o funcție având exact același conținut trebuie scrisă sub forma

$$\exp \left( -i \int k(z) dz \right)$$

- Folosind principiul conservării fluxului luminos (în medii fără absorbție) deducem că intensitatea  $I$  a unei unde ce se propagă într-un mediu omogen, caracterizat prin indicele de refracție  $n$ , este diferită de valoarea corespunzătoare din vid,  $I_0$ , și are loc relația:  $I = n I_0$ . Ca urmare, între amplitudinile de undă trebuie să existe raportul

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} A \sim \left( \frac{1}{K_0(z)} \right)^{1/4} A \quad (\text{III.9})$$

Astfel, apariția explicită în (III.8) a factorilor  $K_0(z)^{-1/4}$  și  $\exp \left[ -i \int k(z) dz \right]$  are scopul de a permite lui  $A(r, z)$  să concentreze efectele neliniarității din  $n^2$ . Factorul  $K_0(0)^{1/4}$  este prezent doar cu scopul de a asigura adimensionalizarea și normarea.

*Observație:* Dacă în (III.8) am fi încercat să utilizăm o factorizare de forma  $K_0^a(z)$ , cu  $a$  nedeterminat, atunci, la un moment dat, motive de simplitate matematică ar fi condus la alegerea  $a = -\frac{1}{4}$  (vom indica locul).

## 2.2 Procedurile matematice antrenate de WKB

Din (III.7) preparăm o relație utilă. Mai întâi obținem

$$2k \frac{dk}{dz} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dK_0}{dz} = \frac{k^2(z)}{K_0} \frac{dK_0}{dz}$$

de unde

$$\frac{1}{k} \frac{dk}{dz} = \frac{1}{2K_0} \frac{dK_0}{dz} \quad (\text{III.10})$$

Apoi calculăm pas cu pas conținutul ecuației de undă

$$\partial_\varphi \psi = 0$$

$$\partial_z \psi = \left[ \partial_z (\ln A) - \frac{1}{4} \frac{d}{dz} (\ln K_0) - ik \right] \psi$$

$$\partial_z^2 \psi = \partial_z (\partial_z) = \partial_z \left( \left[ \partial_z (\ln A) - \frac{1}{4} \frac{d}{dz} (\ln K_0) - ik \right] \psi \right) =$$

$$= \left[ \partial_z(\ln A) - \frac{1}{4} \frac{d}{dz}(\ln K_0) - ik \right]^2 \psi + \left[ \partial_z^2(\ln A) - \frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2}(K_0) - i \frac{dk}{dz} \right] \psi$$

Dezvoltând parantezele găsim

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \psi = & \left[ \partial_z^2(\ln A) - \frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2}(\ln K_0) - i \frac{dk}{dz} + [\partial_z(\ln A)]^2 + \frac{1}{16} \left[ \frac{d}{dz}(\ln K_0) \right]^2 - \right. \\ & \left. - k^2 - \frac{1}{2} \partial_z(\ln A) \cdot \frac{d}{dz}(\ln K_0) - 2ik \partial_z(\ln A) + \frac{ik}{2} \frac{d}{dz}(\ln K_0) \right] \psi \quad (\text{III.11}) \end{aligned}$$

Operatorii  $\partial_r$  și  $\partial_r^2$  afectează doar amplitudinile  $A(r, z)$  într-un mod atât de ușor de prevăzut, încât nu mai este necesar să scriem explicit aceste rezultate.

În condițiile WKB putem neglija factorii în  $\partial_z^2(A)$ ,  $\frac{d}{dz}(\frac{1}{K_0} \frac{dK_0}{dz})$ ,  $(\frac{1}{K_0} \frac{dK_0}{dz})^2$ .

Observație: Avem  $K_0 \sim n^2 \sim \epsilon_r$  de unde  $\frac{1}{K_0} \frac{dK_0}{dz} \sim \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \ll 1$ .

Pe această bază putem continua prelucrarea termenilor din (III.11) aplicând următoarea rețetă:

1. neglijăm  $\frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2}(\ln K_0)$  și  $\frac{1}{16} \left[ \frac{d}{dz}(\ln K_0) \right]^2$ ;
2. scriem  $\partial_z^2(\ln A) = \frac{1}{A} \partial_z^2 A - \frac{1}{A^2} (\partial_z A)^2$ . Primul termen se neglijează în comparație cu  $k^2$  ( $|\partial_z^2 A| \ll k |\partial_z A| \ll k^2 |A|$  etc) iar cel de-al doilea se va anula cu termenul care îl urmează în ecuație;
3.  $-k^2$  se anulează cu o parte din termenul al doilea din ecuația Helmholtz

$$\frac{\omega^2 n^2}{c^2} \psi \equiv k^2 \psi - \frac{K_2(z)}{K_0(z)} k^2 r^2 \psi$$

4.  $-\frac{1}{2} \partial_z(\ln A) \cdot \frac{d}{dz}(\ln K_0) = -(\partial_z A) \frac{dk}{dz} \cdot \frac{1}{kA}$  dacă folosim și ecuația (III.10) (pentru a da rezultatelor forma cea mai generală în acord cu literatura, vom păstra acest termen deși este neglijabil);
5.  $-2ik \partial_z(\ln A) = -\frac{2ik}{A} (\partial_z A)$ ;
6.  $\frac{i}{2} (\frac{1}{K_0} \frac{dK_0}{dz}) \cdot k$  se anulează cu  $-i \frac{dk}{dz}$  (vezi și (III.10));

Observație: Este interesant de notat că dacă în soluția (III.8) factorul  $[K_0(z)]^{-\frac{1}{4}}$  ar fi fost substituit printr-o dependență generală  $\psi \sim [K_0(z)]^a$  atunci la punctul (6) din lista precedentă cei doi termeni nu s-ar mai fi compensat "de la sine". În schimb, am fi putut forța acest efect prin alegerea explicită  $a = -\frac{1}{4}$ . Ca urmare, în final am fi obținut același rezultat. Totuși, este clar că procedând pe o asemenea cale ar fi rămas obscură exact rațiunea fizică pe

care se sprijină alegerea valorii lui  $a$ .

Punând la un loc rezultatele de mai sus obținem în final

$$\left(2ik + \frac{1}{k} \frac{dk}{dz}\right) \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - k^2 \frac{K_2(z)}{K_0(z)} r^2 A \quad (\text{III.12})$$

Ecuția (III.12) trebuie considerată drept ecuația de undă pentru amplitudinea "locală"  $A(r, z)$ , care nu mai poartă efecte de transport (dependență de tipul  $\exp[-i \int k(z) dz]$ ) și a suferit o reevaluare de intensitate ( $\sim K_0^{-1/4}(z)$ ).

### 3. Separarea ecuației eiconale

Structura formală a ecuației (III.12) sugerează tratarea prin metoda *funcției eiconale*. În forma sa clasică, ideea lui *Born* se aplică propagării neghidate și constă în investigarea existenței unor soluții de forma

$$A = A_0(\vec{r}) \cdot \exp[-ik_0 \cdot S(\vec{r})] \quad (\text{III.13})$$

unde  $k_0$  este o constantă egală cu valoarea modulului vectorului de undă în vid.

Ecuția (III.12) prezintă câteva particularități care impun utilizarea unei forme mai generale a tehnicii Born: a) propagarea este "fascicularizată" pe  $Oz$  (așa încât variabila corespunzătoare este "privilegiată"); b) neomogenitatea axială a mediului face inevitabilă intervenția explicită a unor termeni de forma  $\frac{dk}{dz}$ .

Din aceste motive vom înlocui (III.13) cu

$$A(r, z) = A_0(r, z) \cdot \exp[-ik(z) \cdot S(r, z)] \quad (\text{III.14})$$

Calculăm efectele acestei soluții în ecuația (III.12)

$$\begin{aligned} \partial_z A &= \left[ \partial_z A_0 - i \frac{dk}{dz} A_0 \cdot S - ik \frac{\partial S}{\partial z} A_0 \right] \cdot \exp(-ikS) \\ \partial_r A &= \left[ \partial_r A_0 - ik A_0 \frac{\partial S}{\partial r} \right] \cdot \exp(-ikS) \\ \partial_r^2 A &= \partial_r (\partial_r A) = \left\{ \left[ \partial_r^2 A_0 - ik \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} A_0 - ik \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial A_0}{\partial r} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left( \partial_r A_0 - ik \frac{\partial S}{\partial r} A_0 \right) \left( -ik \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right\} \cdot \exp(-ikS) \end{aligned}$$

Punând aceste rezultate în (III.12) și eliminând termenii pretabili potrivit condițiilor WKB, ajungem la o expresie din care putem separa o parte reală și

una imaginară. Astfel obținem ecuațiile

$$2\partial_z S + 2\frac{S}{k} \frac{dk}{dz} + (\partial_r S)^2 = -\frac{K_2(z)}{K_0(z)} \cdot r^2 + \frac{1}{k^2 A_0} \left[ \partial_r^2 A_0 + \frac{1}{r} \partial_r A_0 \right] \quad (\text{III.15})$$

$$\partial_z (A_0^2) + \partial_r S \cdot \partial_r (A_0^2) + \left( \partial_r^2 S + \frac{1}{r} \cdot \partial_r S \right) \cdot A_0^2 = 0 \quad (\text{III.16})$$

în fond, un sistem de ecuații diferențiale cuplate.

Inspectând ecuația (III.15), observăm că ea conține  $(\partial_r S)^2$  (adică gradientul bidimensional al funcției  $S$ , exprimat în coordonate cilindrice) motiv pentru care, prin asemănarea cu ecuația eiconală clasică (în care avem  $(\nabla S)^2$ ), această expresie este denumită *ecuația eiconală neliniară*. A doua ecuație a sistemului, adică (III.16), privește pe  $A_0^2$  și deci descrie comportarea intensității undei.

În același timp, termenii aflați în partea dreaptă a ecuației eiconale sunt interpretați potrivit unei asociații de idei similare "analogiei opto-mecanice". Astfel numim:

- *forța refringentei neliniare* termenul:  $-\frac{K_2(z)}{K_0(z)} \cdot r^2$ ;
- *forța de difracție* termenul:  $\frac{1}{k^2 A_0} \left[ \partial_r^2 A_0 + \frac{1}{r} \partial_r A_0 \right]$ .

Aceste atribuiri sunt sugestive deoarece specificul neliniar este strict legat de condiția  $K_2 \neq 0$  în timp ce într-un plan  $z = ct$ , transversal axei de propagare, "amprenta" (aspectul) undei este controlată prin funcțiile  $\partial_r^2 A_0$  și  $\partial_r A_0$ .

### 3.1 Funcția eiconală asociată unui mediu omogen

Soluțiile sistemului de ecuații (III.15) și (III.16) trebuie construite în etape. Să admitem pentru început că ecuația eiconală neliniară se referă la un mediu omogen și, în plus, că putem neglija efectul difracției. În asemenea caz avem de tratat ecuația

$$2\partial_z S + (\partial_r S)^2 = 0 \quad (\text{III.17})$$

Variabilele  $z, r$  se separă ușor

$$S(r, z) = R(r) \cdot Z(z) \quad (\text{III.18})$$

încât

$$\frac{Z'}{Z^2} = \frac{R'^2}{2R} = C_1 \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{cases} Z = \frac{1}{C_1 z + C_2} \\ R = \left( \sqrt{\frac{C_1}{2}} \cdot r + C_3 \right)^2 \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Astfel, pentru cazul simplificat pe care l-am discutat, funcția eiconală ia forma

$$S = \frac{\left( \sqrt{\frac{C_1}{2}} \cdot r + C_3 \right)^2}{C_1 z + C_2} \quad (\text{III.21})$$

Optica clasică descrie aceeași situație fizică (adică o undă sferică de rază  $\rho$  care se propagă într-un mediu omogen) prin funcția de fază  $\exp(-ik_0 n \rho)$  din care desprindem o formă simplă de eiconal

$$S_{clasic} = \rho \quad (\text{III.22})$$

*Observație:* În sens strict ar fi trebuit să scriem  $S_{clasic} = n\rho$ . Având însă în vedere distincția introdusă de (III.14) față de (III.13) rezultă că (III.21) trebuie comparat cu (III.22).

Este ușor de constatat că rezultatul (III.21) apare complicat și neintuitiv în raport cu (III.22), mai ales că ne-am fi așteptat ca cele două descrieri să coincidă.

### 3.2 Compatibilitatea cu funcția eiconală a opticii clasice (etalonări)

Pentru a instala o corespondență naturală între funcția eiconală clasică și cea propusă prin ecuația (III.15) pentru cazul omogen și fără efectul difracției, trebuie ajustate (etalonate) valorile constantelor de integrare  $C_1$ ,  $C_2$  și  $C_3$  din (III.21).

În acest scop recompunem întreaga formă exponențială a soluției (III.21) prin (III.8) (ceea ce implică includerea factorului  $\exp[-i \int k dz]$ ) și, deoarece  $k = k_0 n = ct \Rightarrow \int k dz = k_0 n(z + C_4)$  rezultatul de ansamblu se exprimă prin

$$\exp[-ik_0 n(S + z + C_4)] \quad (\text{III.23})$$

Astfel, concordanța expresiilor (III.22) și (III.23) impune relația

$$C_4 + z + S = \rho (= S_{clasic}) \quad (\text{III.24})$$

Pentru a exploata această corespondență până la capăt, trebuie să aducem partea dreaptă a egalității precedente (care prin  $\rho$  aparține simetriei sferice) la o formă compatibilă cu simetria cilindrică (deja prezentă în membrul stâng ca efect al propagării fasciclarizate pe care o descrie).

Figura III.2 introduce notațiile de care avem nevoie pentru a da relației (III.22) simetria dorită. Din punct de vedere algebric, această transformare de simetrie este produsă (ca "side effect") de către aproximația parabolică.

La un moment fixat  $t$ , ecuația sferei  $\sum$  (care reprezintă frontul de undă cu originea pe axa  $O_z$  în punctul  $z_c$ ) este

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + (z(t) - z_c)^2}$$

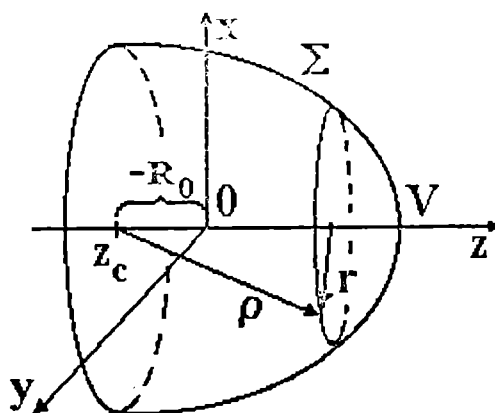


Figura III.2: Frontul de undă într-un mediu omogen

relație care decurge din imaginea geometrică potrivit căreia, după emisia din punctul  $z_c$ , frontul de undă sferic se propagă păstrând permanent o rază de curbură pozitivă ( $\rho(t) > 0, \forall t$ ). Această alegere, deși este opusă celei cu care suntem obișnuiți din Optica geometrică (unde raza de curbură ia valoare negativă atunci când centrul de curbură se află la stânga suprafeței de undă), nu produce nici o dificultate în cele ce urmează.

Valorile pe care le iau coordonatele punctelor de pe  $\Sigma$  aflate în vecinătatea axei  $O_z$  (adică acele puncte aflate în apropierea vârfului V al sferei) sunt constrânse de inegalitatea  $r^2 = x^2 + y^2 \ll |z - z_c|$ . Pe această bază, tratând expresia lui  $\rho(t)$  conform aproximației  $\sqrt{1 + x^2} \cong 1 + \frac{x^2}{2}$ , valabilă pentru  $x \ll 1$ , putem scrie

$$\rho = \sqrt{r^2 + (z - z_c)^2} \cong |z - z_c| + \frac{r^2}{2|z - z_c|} \quad (\text{III.25})$$

Nu este greu de văzut că dacă prin  $\rho_c$  notăm expresia  $|z - z_c|$  atunci pentru valori mici ale lui  $r$  (în apropierea axei  $O_z$ ) avem  $\rho = \rho_c$ .

Potrivit figurii III.2,  $z_c = -R_0$  (cu  $R_0 > 0$ ). Astfel  $|z - z_c| = z + R_0$  și conform cu (III.21), (III.25) și (III.24) trebuie să avem

$$C_1 + z + \frac{\frac{C_1}{2}r^2 + 2C_3\sqrt{\frac{C_1}{2}} \cdot r + C_3^2}{C_1 z + C_2} = z + R_0 + \frac{r^2}{2(z + R_0)}$$

Deoarece  $z$  și  $r$  sunt variabile independente, cele două părți ale expresiei precedente pot fi identificate termen cu termen. Ajungem astfel la următoarele valori ale constantelor de integrare

$$C_1 = 1, C_2 = -R_0, C_3 = 0, C_4 = R_0 \quad (\text{III.26})$$



În concluzie, cazul propagării undelor într-un mediu omogen permite ajustarea expresiei (III.21) (în acord cu eiconala clasică) la

$$S = \frac{r^2}{2(R_0 + z)} \quad (\text{III.27})$$

încât funcția eiconală neliniară  $S$  capătă o formă compactă și, în același timp, compatibilă cu funcția corespunzătoare introdusă în Optica clasică.

Analiza anterioară pune în vedere și un alt aspect extrem de important: dacă în (III.25) neglijăm termenii de ordinul  $r^2$  atunci raza de curbură a frontului de undă în punctul  $z$  este dată de

$$\rho = z + R_0 \quad (\text{III.28})$$

încât, pe această bază,  $\rho$  se algebrizează (poate purta semn algebric) în acord cu regulile geometriei analitice. De asemenea, putem observa că în planul  $z = 0$  raza de curbură are valoarea  $\rho = R_0 > 0$ , în acord cu convenția noastră "răsturnată", prin care razele de curbură sunt pozitive atunci când centrele de curbură sunt plasate la stânga fronturilor de undă.

Relația precedentă se poate exprima sub forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{z + R_0} \quad (\text{III.29})$$

Pornind direct de la  $S$  dat de (III.27) obținem exact aceeași expresie dacă scriem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \quad (\text{III.30})$$

Teoria propagării în medii neomogene *generalizează* relația anterioară, acordând semnificație fizică acestui rezultat dedus pe cale *operațională* din expresia lui  $S$ .

Corectitudinea unei asemenea proceduri poate fi testată pe modelul unei plane care se propagă de-a lungul axei  $Oz$ . Faza acesteia este

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kz \equiv k(S + z + ct.) \quad (\text{III.31})$$

în care ultima parte este adusă de (III.23). Termenii ultimei egalități implică

$$S + ct. = 0 \iff S = -ct.$$

Ca urmare, din (III.30) obținem în mod corect

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} = 0$$

## 4. Punctul crucial

Considerentele precedente scot în evidență că ecuațiile (III.15) și (III.16) nu pot admite o formă a eiconalei neliniare mai generală decât

$$S(r, z) = \frac{r^2}{2} \cdot \beta(z) + \varphi(z) \quad (\text{III.32})$$

unde am introdus notația

$$\frac{1}{\rho(z)} \equiv \beta(z) \quad (\text{III.33})$$

(în raport cu care (III.27) se scrie  $S = \frac{r^2}{2\rho} = \frac{r^2}{2} \cdot \beta(z)$ ).

Este limpede că fără a cunoaște explicit funcțiile  $\beta(z)$  și  $\varphi(z)$  ecuațiile (III.32) și (III.33) nu constituie nimic mai mult decât o rezolvare formală a ecuației eiconale neliniare (III.15). Totuși, structurarea lui  $S(r, z)$  potrivit ecuației (III.32) este atât de puternică încât conduce la rezolvarea completă a ecuației (III.16) care, în prima fază, se scrie

$$\partial_z (A_0^2) + r\beta(z) \cdot \partial_r (A_0^2) + 2\beta(z) \cdot A_0^2 = 0 \quad (\text{III.34})$$

Nu este dificil să observăm că (III.34) se poate integra prin separarea variabilelor. Dacă introducem

$$A_0^2 = Z(z) \cdot R(r) \quad (\text{III.35})$$

găsim

$$\frac{Z'}{\beta(z)Z} + 2 = -\frac{R'r}{R} \equiv C_1 \quad (\text{III.36})$$

de unde rezultă

$$R(r) = \frac{C_2}{r^{C_1}} \quad (\text{III.37})$$

$$Z(z) = C_3 \cdot \exp \left[ (C_1 - 2) \int \beta(z) dz \right]$$

Dacă  $C_1$  ar putea lua valori pozitive atunci, ca rezultat,  $R(r)$  ar prezenta valori nemărginite în toate punctele axei  $Oz$  (axa de propagare). Este limpede că o asemenea comportare trebuie exclusă, fapt pentru care vom impune

$$C_1 = -\lambda^2 \quad (\text{III.38})$$

Reasamblând (III.35)

$$A_0^2 = C_2 C_3 \cdot r^{\lambda^2} \cdot \exp \left[ -(\lambda^2 + 2) \int \beta(z) dz \right] \quad (\text{III.39})$$

rezultat care poate fi prezentat sub o formă compactă (și elegantă) dacă introducem

$$\beta(z) \equiv \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (\text{III.40})$$

funcția  $f(z)$  fiind dată de  $\exp\left(\int_0^z \beta(z') dz'\right)$ . Astfel (III.39) devine

$$A_0^2 = \frac{C_2 C_3}{f^2} \cdot \left(\frac{r}{f}\right)^{\lambda^2} \quad (\text{III.41})$$

Această expresie acoperă toate soluțiile ecuației (III.16).

Notă: Ecuația (III.34) ar fi putut fi tratată pe o cale diferită. Punând  $A_0 = Z(z) \cdot R(r)$  am fi obținut mai întâi  $2R^2 Z Z' + r\beta Z^2 R R' + 2\beta R^2 Z^2 = 0$ . Apoi, printr-o împărțire la  $2\beta R^2 Z^2$  ar fi rezultat ecuația separabilă

$$\frac{Z'}{\beta Z} + \frac{rR'}{R} + 1 = 0$$

din care  $\frac{Z'}{\beta Z} = -\left(\frac{rR'}{R} + 1\right) = C_1$ . De aici

$$\ln Z = C_1 \int \beta(z) dz = C_1 \ln(f \cdot C_2) \text{ cu } \beta = \frac{f'}{f}$$

Așadar  $Z = C_3 \cdot f^{C_1}$ . În același fel

$$\frac{R'}{R} = -(C_1 + 1) \frac{1}{r} \Rightarrow \ln R = \ln\left(C_4 r^{-(C_1+1)}\right)$$

cu soluția  $R = C_4 r^{-(C_1+1)}$ . Cum  $R$  trebuie să fie mărginit pe axa  $Oz$  (la  $r = 0$ ) cerem  $C_1 + 1 < 0$ . Condiția este îndeplinită punând  $C_1 = -1 - \sigma^2$  cu  $\sigma$  real. Rebotezând constantele, ridicând la pătrat și introducând notația  $\lambda^2 \equiv 2\sigma^2$  obținem în final soluția

$$A_0^2 = \frac{C}{f^2} \left(\frac{r}{f}\right)^{\lambda^2}$$

care coincide cu (III.41).

Folosind expresii potrivite pentru  $C_2$ ,  $C_3$  și  $\lambda$  putem forma serii de puteri care conduc spre diverse soluții interesante. În particular, din (III.41) putem forma soluțiile *pseudogaussiene*.

Cheia procedurii de sinteză constă în observația că dacă  $\xi_1$  și  $\xi_2$  desemnează două soluții distincte pentru (III.34) atunci  $a\xi_1 + b\xi_2$  ( $a, b$  constante arbitrare) reprezintă o nouă soluție. În definitiv, o asemenea afirmație echivalează cu recunoașterea liniarității operațiilor din (III.34).

În particular, dacă alegem

$$C_2 = E_0^2; C_3 = \frac{1}{n!} \left( \frac{-1}{w_0^2} \right)^n; \lambda^2 = 2n \text{ cu } n \in N$$

atunci

$$A_{0,n}^2 = \frac{E_0^2}{f^2} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{r}{f \cdot w_0} \right)^{2n}$$

reprezintă un specimen aparținând unei familii de soluții dependente de  $n$ . Deoarece

$$\exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

și notând

$$A_0^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_{0,n}^2$$

înseamnă că expresia

$$A_0^2(r, z) = \frac{E_0^2}{f^2(z)} \cdot \exp \left[ -\frac{r^2}{w_0^2 \cdot f^2(z)} \right] \quad (\text{III.42})$$

este o soluție a ecuației (III.34). Mai mult, expresia (III.42) reprezintă structura analitică a *fasciculelor pseudogaussiene*.

Pentru a sublinia importanța rezultatului (III.42) îl vom proba și dintr-o perspectivă diferită. Astfel, procedând analog modului de separare a factorilor de formă în ecuația Schrödinger, vom studia comportarea ecuației (III.34) pentru  $r = 0$ . Ținând seama că  $\beta = \frac{f'}{f}$  ecuația (III.34) devine

$$\frac{d(A_0^2)}{dz} = -\frac{2}{f} \cdot \frac{df}{dz} \cdot A_0^2$$

de unde, desemnând prin  $\tilde{C}$  constanta de integrare și apoi prin  $C$  constanta  $\exp \tilde{C}$ , obținem

$$\ln(A_0^2) = -2 \ln f + \tilde{C}$$

sau

$$A_0^2 = \frac{C}{f^2} \quad (\text{III.43})$$

Ca urmare, ecuația (III.34) trebuie să admită soluția generală

$$A_0^2 = \frac{C}{f^2} \mathfrak{S}(r, z) \quad (\text{III.44})$$

ceea ce impune ca funcția arbitrară  $\mathfrak{S}$  să urmeze ecuația

$$\frac{1}{f^2} \partial_z \mathfrak{S} + \frac{r}{f^3} \frac{df}{dz} \partial_r \mathfrak{S} = 0 \quad (\text{III.45})$$

Urmărind din nou efectul condiției  $r = 0$  asupra ecuației (III.45) obținem  $\partial_z \mathfrak{S} = 0$ , ceea ce înseamnă:  $\mathfrak{S}(0, z) = ct, \forall z$ . Așadar, proprietatea matematică precedentă arată că  $\mathfrak{S}$  nu depinde în mod separat (independent) de  $r$  și  $z$  ci depinde de produsul lor (eventual prin factori de puteri diferite)

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(r^u \cdot z^v)$$

sau, pentru că dependența de  $z$  are loc prin intermediul funcției  $f(z)$ , putem la fel de bine să avem

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(r^u \cdot f^v) \quad (\text{III.46})$$

Înlocuind în ecuația (III.45) obținem

$$\frac{1}{f^2} r^u \cdot \mathfrak{S}' \cdot v \cdot f^{v-1} \cdot f' + \frac{r}{f^3} \cdot f' \cdot f^v \cdot u \cdot r^{u-1} \cdot \mathfrak{S}' = 0 \quad (\text{III.47})$$

de unde

$$u = -v \quad (\text{III.48})$$

încât

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S} \left[ \left( \frac{r}{f} \right)^u \right] \quad (\text{III.49})$$

și deci

$$A_0^2 = \frac{C}{f^2} \cdot \mathfrak{S} \left[ \left( \frac{r}{f} \right)^u \right], \forall u, \mathfrak{S} \quad (\text{III.50})$$

**Observații:** i) Este evident că rezultatul (III.50) este mai elegant decât (III.41), în primul rând pentru că  $\mathfrak{S}$  reprezintă o funcție arbitrară. Astfel, putem avea în locul lui  $\mathfrak{S}$  oricare funcție elementară (cum sunt: sin, sinh, cos, cosh, ln etc). Totodată și  $u$  este arbitrar.

ii) Soluția (III.42) rezultă imediat din (III.50) ca un caz particular atunci când alegem

$$\mathfrak{S}(x) \equiv \exp \left[ - \left( \frac{x}{w_0} \right)^2 \right] \text{ și } u = 1$$

## 5. Efectul soluțiilor pseudogaussiene

În cazul amplitudinii pseudogaussiene (III.42) forța de difracție este

$$\frac{1}{k^2 A_0} \left( \partial_r^2 A_0 + \frac{1}{r} \partial_r A_0 \right) = -\frac{2}{k^2 w_0^2 f^2} + \frac{r^2}{k^2 w_0^4 f^4} \quad (\text{III.51})$$

Substituind acest lucru și folosind expresia  $S = \frac{r^2}{2} \beta(z) + \varphi(z)$  (vezi (III.32)) în ecuația (III.15) obținem

$$2 \left( \frac{r^2}{2} \beta' + \varphi' \right) + 2 \left( \frac{r^2}{2} \beta + \varphi \right) \frac{1}{k} k' + (r\beta)^2 = -\frac{K_2(z)}{K_0(z)} r^2 - \frac{2}{k^2 w_0^2 f^2} + \frac{r^2}{k^2 w_0^4 f^4} \quad (\text{III.52})$$

Ecuația (III.52) poate fi tratată ca un polinom în  $r$  care are drept coeficienți diverse funcții de variabilă  $z$ . Trecând totul de o singură parte a egalității și apoi ținând seama de (III.40), ajungem în final să anulăm separat coeficienții puterilor lui  $r$  (în fond coeficienții lui  $r^2$  și respectiv  $r^0$ ). Astfel găsim

$$\frac{f''}{f} + \frac{f'}{f} \cdot \frac{k'}{k} = -\frac{K_2(z)}{K_0(z)} + \frac{1}{k^2 w_0^4 f^4} \quad (\text{III.53})$$

și respectiv

$$\varphi' + \varphi \frac{k'}{k} = -\frac{1}{k^2 w_0^2 f^2} \quad (\text{III.54})$$

Alături de aceste rezultate să așezăm și imaginea de ansamblu pe care tehnica WKB o dă propagării ghidate în medii parabolice, reprezentată prin soluția generală care se pune sub forma

$$\psi(r, z) = \frac{E_0}{f(z)} \left( \frac{K_0(0)}{K_0(z)} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{r^2}{2w_0^2 f^2(z)} \right) \exp \left\{ -i \left[ k(z) \left( \frac{r^2 f'}{2f} + \varphi(z) \right) + \int k(z) dz \right] \right\} \quad (\text{III.55})$$

Pentru a specializa această expresie pentru fiecare caz concret trebuie să putem determina:

- expresia vectorului de undă  $k(z)$ , folosind relația (III.7);
- funcțiile  $f(z)$  și  $\varphi(z)$  care se obțin prin ecuațiile (III.53) și (III.54) în care folosim  $k(z)$ ,  $K_0(z)$  și  $K_2(z)$ ;

Exceptând cazurile în care ecuațiile (III.53) și (III.54) nu sunt integrabile, observăm că tehnica WKB a construit o descriere de referință pentru propagarea undelor în medii parabolice.

Pentru a evidenția fenomenul autofocalizării fasciculelor de lumină la

propagarea în medii parabolice vom lua în discuție trei situații care au în comun condiția  $K_0 = ct$  (ceea ce înseamnă că indicele de refracție este constant pe axa ghidului). Drept consecință (prin ecuația (III.7)) și vectorul de undă  $k$  este independent de  $z$ . În cele ce urmează, ne vor interesa:

- *aproximația opticii geometrice;*
- *aproximația mediului slab parabolic;*
- *aproximația ondulatorie.*

care reprezintă cazuri particulare ale ecuației (III.53).

## 6. Aproximația opticii geometrice

Acest caz este definit prin trei condiții

$$\begin{cases} K_0 = ct; \\ K_2 = ct; \\ k \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{III.56a})$$

între care ultima exprimă în modul cel mai compact esența aproximației. Ecuația (III.53) ia forma

$$\frac{f''}{f} = -\frac{K_2}{K_0} \quad (\text{III.57})$$

având ca soluție generală

$$\begin{aligned} f(z) &= \bar{A} \cos(\varpi z - \theta) \\ \varpi^2 &\equiv \frac{K_2}{K_0} \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Să admitem că în planul de intrare în mediul parabolic (definit prin  $z = 0$ ) frontul de undă prezintă raza de curbură  $R$  și deschiderea  $w_0$ .

Valorile lui  $\bar{A}$  și  $\theta$  din expresiile (III.58) rezultă exploatând cele două condiții pe care unda trebuie să le satisfacă în planul de intrare:

- adaptarea razei de curbură  $\rho$  a frontului de undă la valoarea de intrare  $R$ , și
- adaptarea lărgimii  $w_0$  a fascicolului la valoarea  $w_0$  ceea ce înseamnă

$$f|_{z=0} = 1$$

Așadar, din  $\beta = \frac{1}{f} \frac{df}{dz}$ , prin (III.30) și (III.32), trebuie să avem

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \beta(0) = \frac{1}{R}$$

încât

$$\frac{1}{R} = -\frac{\bar{A}\varpi \sin(-\theta)}{\bar{A} \cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K_0}{K_2}}, \quad \theta = \arctan \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \right) \quad (\text{III.59})$$

Deoarece  $f|_{z=0} = \bar{A} \cos(\theta)$  rezultă

$$\bar{A} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{III.60})$$

Astfel, în final, amplitudinea pseudogaussiană a unde ce se propagă în mediul neliniar urmează expresia

$$A_0^2 = \frac{E_0^2 \cdot \cos^2 \theta}{\cos^2(\varpi z - \theta)} \cdot \exp \left[ -\frac{r^2 \cdot \cos^2 \theta}{w_0^2 \cdot \cos^2(\varpi z - \theta)} \right] \quad (\text{III.61})$$

Concentrându-ne asupra valorilor amplitudinii pe axa de propagare (definită prin  $r = 0$ ) se observă că pornind de la valori finite în planul de intrare  $z = 0$ , acestea suferă ulterior o serie de discontinuități periodice localizate în punctele

$$z_n = \frac{1}{\varpi} \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} + \theta \right] \quad (\text{III.62})$$

Valoarea infinită a amplitudinii  $A_0$  în punctele  $z_n$  indică o focalizare (severă) a fascicolului în aceste locuri. Distanța dintre două puncte succesive de focalizare, pe care o vom nota cu  $F$ , este

$$F = z_{n+1} - z_n = \pi \sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \quad (\text{III.63})$$

Putem observa că  $F$  este o constantă independentă de  $\theta$  dar care depinde de neliniaritatea mediului prin  $K_2$  (dacă nu există neliniaritate, adică avem  $K_2 = 0$ , atunci  $F \rightarrow \infty$ ). Entitatea  $F$  poartă numele de *distanță de autofocalizare*. Pentru cazul unei unde plane ( $R \rightarrow \infty$ ) incidente pe mediul neliniar deducem că  $\theta = 0$  iar prima focalizare are loc la distanța

$$z_0 = \frac{F}{2}$$

de planul de intrare  $z = 0$ .

Divergența valorilor lui  $A_0^2$  scoate în evidență că modelarea propagării potrivit "opticii geometrice" exagerează comportarea ce poate avea loc în realitate!

*Observație:* Calitativ (dar nu și exact) putem estima felul în care funcția  $f$  afectează geometria transversală a fascicolului. Dacă este vorba plecăm de la ideea că "aria minimă" a fascicolului este dată de



$w_0 f$ . Astfel, punctele în care  $f$  ia valori minime marchează punctele de focalizare.

## 7. Aproximația mediului slab parabolic

Condițiile care definesc această aproximație sunt

$$\begin{cases} K_0 = ct; \\ K_2 = ct; \\ \frac{K_2}{K_0} \ll 1 \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

astfel încât (prin  $K_0 = ct \Rightarrow k' = 0$ ) ecuația (III.53) se pune sub forma

$$f'' = \frac{1}{k^2 w_0^4 f^3} \quad (\text{III.65})$$

Membrul drept al ecuației (III.65) depinde în mod exclusiv de forța de difracție (vezi (III.51)) în timp ce forța refringentă a dispărut prin efectul celei de-a treia condiții a setului (III.64). Așadar, propagarea într-un mediu slab parabolic este *dominată de difracție*.

Integrarea ecuației (III.65) se efectuează ușor după înmulțirea cu  $2f' \cdot dz$ . Astfel, mai întâi găsim

$$d(f')^2 = \frac{2}{k^2 w_0^4} \frac{df}{f^3}$$

încât notând cu  $C$  constanta de integrare, obținem

$$(f')^2 = -\frac{1}{k^2 w_0^4 f^2} + C \quad (\text{III.66})$$

După înmulțirea cu  $f^2$  avem

$$(ff')^2 = Cf^2 - \frac{1}{k^2 w_0^4} \Rightarrow \frac{1}{4} \left[ \frac{d(f^2)}{dz} \right]^2 = Cf^2 - \frac{1}{k^2 w_0^4}$$

Pe baza substituției  $u = f^2$  găsim

$$\frac{du}{2\sqrt{Cu - \frac{1}{k^2 w_0^4}}} = dz$$

de unde, desemnând prin  $C_1$  noua constantă de integrare

$$Cu - \frac{1}{k^2 w_0^4} = (Cz + C_1)^2$$

sau

$$f^2 = \frac{1}{C} \left[ \frac{1}{k^2 w_0^4} + (Cz + C_1)^2 \right] \quad (\text{III.67})$$

După cum știm, în planul de intrare ( $z = 0$ ) trebuie să avem  $f = 1$  (vezi desigur din secțiunea precedentă). Astfel deducem

$$C = \frac{1}{k^2 w_0^4} + C_1^2 \quad \text{sau} \quad C_1 = \sqrt{C - \frac{1}{k^2 w_0^4}}$$

Revenind la ecuația (III.66) și făcând adaptările corespunzătoare planului  $z = 0$ , unde sunt valabile relațiile

$$\beta(0) \equiv \frac{1}{R} \equiv \frac{1}{f} f' \big|_{z=0} = f'$$

găsim

$$\frac{1}{R^2} = -\frac{1}{k^2 w_0^4} + C \Rightarrow C = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{k^2 w_0^4}$$

Astfel încât, în final

$$f^2 = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{k^2 w_0^4}} \cdot \left[ \frac{1}{k^2 w_0^4} + \left( \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{k^2 w_0^4} \right) z + \frac{1}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{III.68})$$

Specializând rezultatul pentru cazul unei plane la intrare ( $R = \infty$ ) avem

$$f^2 = 1 + \frac{z^2}{k^2 w_0^4} \quad (\text{III.69})$$

Ultima relație scoate în evidență că în mediul nelinier diametrul fascicolului (dat de  $w_0 f$  în ecuația (III.42)) crește cu  $z$  ca efect al difracției. Să notăm totuși că spre deosebire de difracția (clasică) pe o fantă circulară aici nu există cercuri întunecoase (Airy).

Rezultatul acestei secțiuni este în total contrast cu imaginea dată de aproximația opticii geometrice! Atunci, fascicolul aflat în propagare suferă în mod periodic focalizări atât de severe încât conduceau la divergența valorilor de câmp. În aproximația mediului slab parabolic, nu apare nici un fel de confinare a undelor în propagarea prin mediul nelinier, ba chiar mai mult, este vorba despre o continuă lărgire a "amprentei" ca urmare a difracției. Este limpede că cele două situații reprezintă extremele unor modelări simplificatoare.

### 3. Aproximația ondulatorie

În mod evident, cea mai realistă modelare a propagării ghidate nu poate avea loc decât în prezența celor mai puțin restrictive condiții. Or, aproximația ondulatorie nu cere decât

$$K_0, K_2 = \text{const.}$$

Este ușor de anticipat că asemenea relaxare a modelului antrenează o complexitate mai mare a tratamentului matematic.

Pentru început este util să facem o renormare a variabilei  $z$

$$\xi = \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} \cdot z \quad (\text{III.70})$$

încât  $\frac{d^2}{dz^2} = \frac{K_2}{K_0} \frac{d^2}{d\xi^2}$ . Astfel, ecuația (III.53) devine

$$\frac{f''}{f} = -1 + \frac{\Lambda}{f^4} \quad (\text{III.71})$$

unde

$$\Lambda \equiv \frac{K_0}{K_2 k^2 w_0^4} \quad (\text{III.72})$$

O simplificare suplimentară se poate produce prin substituția

$$F = \frac{f}{\sqrt[4]{\Lambda}} \quad (\text{III.73})$$

care aduce ecuația (III.71) la forma "canonică"

$$F''' + F - \frac{1}{F^3} = 0 \quad (\text{III.74})$$

Din punct de vedere matematic, am putea studia (III.74) prin serii de puteri

$$F = \sum a_i \xi_i + \sum \frac{b_i}{\xi_i}$$

dar în afara problemelor de regularitate a soluțiilor, neliniaritatea ecuației (III.74) ne-ar putea confrunta și cu modificarea schemei de etalonare. De exemplu, am avea nevoie de trei valori inițiale

$$f|_{z=0}, \quad f'|_{z=0}, \quad \text{și} \quad f''|_{z=0}$$

în timp ce teoria de care dispunem (în contextul WKB) nu rezervă spațiu decât pentru două entități:

- $f|_{z=0}$  legat de "împrăștierea" (waist) fascicolului;

- $\beta = \frac{1}{f} \frac{df}{dz} \Big|_{z=0}$  care exprimă curbura frontului de undă.

Din acest motiv, trebuie să "conducem" ecuația (III.74) spre o formă care se pretează *reducerii ordinului de derivare*. Înmulțind (III.74) cu  $F'$  obținem

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (F')^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (F^2) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{F^2} \right)$$

sau

$$(F')^2 = -F^2 - \frac{1}{F^2} + C_0 \quad (\text{III.75})$$

în care constanta de integrare  $C_0$  rezultă din condițiile

$$\begin{cases} F|_{\xi=0} = \frac{1}{\sqrt[4]{\Lambda}} \quad f|_{\xi=0} = \frac{1}{\sqrt[4]{\Lambda}} \\ \frac{1}{F} F' \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{f} f' \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \equiv \frac{1}{R} \end{cases} \quad (\text{III.76})$$

Astfel

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \sqrt{\Lambda} + \frac{1}{R^2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \quad (\text{III.77})$$

și ecuația (III.75) devine

$$F' = \sqrt{-F^2 - \frac{1}{F^2} + C_0} \quad (\text{III.78})$$

Această ecuație ne oferă două alternative de abordare. O variantă ar fi să scriem

$$F' = \frac{\sqrt{-F^4 + C_0 F^2 - 1}}{F} \quad (\text{III.79})$$

cu intenția ca ulterior să raționalizăm expresia de sub radical printr-o *substituție Euler*

$$\sqrt{(-1)(F^2 - \lambda_1)(F^2 - \lambda_2)} = t(F^2 - \lambda_1) \quad (\text{III.80})$$

În mod surprinzător, chiar dacă la prima vedere nu este evident, o asemenea alegere este greșită iar faptul că la un moment dat ajungem la o ecuație transcendentă ar putea constitui indiciul erorii de abordare.

Dacă însă în (III.78) începem prin substituția  $Q = F^2$  atunci, în locul lui (III.79), găsim

$$Q' = 2\sqrt{-Q^2 + C_0 Q - 1} \quad (\text{III.81})$$

Prin simplă comparație este clar că (III.81) este de preferat lui (III.79). În plus, tocmai (III.81) este în acord cu specificul ("pattern"-ul) substituției Euler care

reprezintă sinteza unei idei geometrice pe cât de simplă pe atât de ingenioasă. O scurtă paranteză ne va ajuta să dăm acestor aspecte o imagine clară.

Dacă avem de integrat funcția

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (\text{III.82})$$

atunci substituția Euler recomandă să scriem

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \equiv \sqrt{a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)} = t(x - \lambda_1) \quad (\text{sau } t(x - \lambda_2)) \quad (\text{III.83})$$

unde  $t$  este variabila de substituție. Rădăcinile  $\lambda_1, \lambda_2$  trebuie să fie reale și distincte. Consecința este că obținem o integrală rațională. Vom vedea detaliile de calcul odată cu tratarea ecuației (III.81). Pentru moment ne interesează numai suportul geometric al relației (III.83).

Să considerăm punctul  $(x_0, y_0)$  pe curba (III.82). Aceste două coordonate sunt legate prin

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c \quad (\text{III.84})$$

O secantă de pantă  $t$  care trece prin  $(x_0, y_0)$  are ecuația

$$y - y_0 = t(x - x_0) \quad (\text{III.85})$$

Ridicăm la pătrat (III.82) și eliminăm  $y$  între (III.82) și (III.85), după care, din rezultat, eliminăm coeficientul  $c$  folosind relația (III.84). Ca urmare obținem

$$2y_0t + t^2(x - x_0) = a(x + x_0) + b \quad (\text{III.86})$$

încât

$$x = \frac{2y_0t - x_0t^2 - ax_0 - b}{a - t^2} \quad (\text{III.87})$$

și separat, din (III.85)

$$y = t(x - x_0) + y_0 \quad (\text{III.88})$$

Perechea de valori  $(x, y)$  specifică locul în care secanta (III.85) intersectează pentru a doua oară curba (III.82). Conținutul expresiilor (III.87) și (III.88) exprimă în fond cheia substituției Euler pentru că:

- (a) al doilea loc de intersecție între secantă și curbă (III.82) este *unic* (nu există mai multe soluții). De aceea prin modificarea monotonă a pantei  $t$  se produce o explorare continuă și fără repetiții a punctelor curbei.
- (b) coordonatele  $(x, y)$  (care reprezintă "puncte pe curbă") se exprimă *rațional* în  $t$ .

Este simplu de văzut că prelucrarea radicalului din ecuația (III.79) după "stilul"

substituției Euler are ca efect înlocuirea ecuației liniare (III.87) printr-o ecuație de grad superior. Prin urmare, rotirea tangentei în jurul punctului  $(x_0, y_0)$  conduce în mod necesar la obținerea mai multor intersecții "secundare" ceea ce înseamnă că unele puncte ale curbei sunt supuse unei explorări multiple. Prezența acestor repetiții evidențiază că transformarea de raționalizare (III.79) generează defecte topologice.

Să revenim la expresia (III.81). Substituția Euler cere ca ecuația  $-Q^2 + C_0 Q - 1 = 0$  să aibă rădăcini reale și distincte. Astfel, discriminantul ei trebuie să verifice condiția

$$\Delta = C_0^2 - 4 > 0 \quad (\text{III.89})$$

Din (III.77) vedem că

$$C_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \sqrt{\Lambda} + \frac{1}{\tilde{R}^2 \sqrt{\Lambda}} > \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \sqrt{\Lambda} \quad (\text{III.90})$$

Pe de altă parte

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \sqrt{\Lambda} \right)^2 \geq 4, \forall \Lambda$$

deoarece inegalitatea este echivalentă cu  $(1 - \Lambda)^2 \geq 0$ . Astfel, condiția (III.89) este satisfăcută în toate cazurile și tehnica Euler poate fi utilizată fără nici o restricție.

Așadar

$$\sqrt{(-1)(Q - \lambda_1)(Q - \lambda_2)} = t(Q - \lambda_1) \quad (\text{III.91})$$

de unde

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{-(Q - \lambda_2)}{Q - \lambda_1}} \\ Q = \frac{\lambda_2 + \lambda_1 t^2}{t^2 + 1} \end{cases} \quad (\text{III.92})$$

Radicalul (III.91) devine

$$\sqrt{(-1)(Q - \lambda_1)(Q - \lambda_2)} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)t}{t^2 + 1} \quad (\text{III.93})$$

iar din a doua ecuație (III.92) găsim

$$Q' = t \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{(t^2 + 1)^2} t' \quad (\text{III.94})$$

Deci în locul lui (III.81) avem

$$\frac{dt}{t^2 + 1} = -d\xi \quad (\text{III.95})$$

sau, desemnând prin  $C_1$  noua constantă de integrare

$$\int \frac{dt}{t^2 + 1} = -\xi + C_1 \Rightarrow t = \tan(-\xi + C_1)$$

Folosind prima ecuație din (III.92) scriem

$$\frac{-(Q - \lambda_2)}{Q - \lambda_1} = \tan^2(-\xi + C_1)$$

adică

$$Q(1 + \tan^2(-\xi + C_1)) = \lambda_2 + \lambda_1 \tan^2(-\xi + C_1)$$

sau

$$Q = \lambda_1 \sin^2(-\xi + C_1) + \lambda_2 \cos^2(-\xi + C_1)$$

Dacă introducem arcul dublu obținem

$$Q = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cos(2(-\xi + C_1)) \quad (\text{III.96})$$

și revenind la funcția  $f$  găsim

$$f^2(\xi) = \sqrt{\Lambda} \left[ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cos(2(-\xi + C_1)) \right] \quad (\text{III.97})$$

În această expresie este indicat să folosim relațiile Viète potrivit cărora avem

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{C_0}{2} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad (\text{III.98})$$

așa cum ne convingem dacă pornim de la definițiile

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

și notăm că, prin coroborarea ecuațiilor (III.81) și (III.83), avem:  $a = 1, b = C_0$

Cu egalarea  $f^2 = 1$  în planul de intrare  $z = \xi = 0$  rezultă

$$C_1 = \frac{1}{2} \arccos \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{C_0}{2} \right) \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \right] \quad (\text{III.99})$$

astfel încât soluția cazului ondulatoriu este găsită. Înainte de a discuta semnificația ei să încercăm să o punem sub o formă mai simplă și să discutăm domeniul ei de valabilitate.

Dacă punem (III.98) și (III.99) în (III.97), ținând seama și de expresia lui  $C_0$  din (III.77), găsim

$$f^2 = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \left[ C_0 + \sqrt{\Delta} \cdot \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \left( \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{C_0}{2} \right) \cdot \cos(2\xi) + \sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{\Delta} \left( \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{C_0}{2} \right)^2} \cdot \sin(2\xi) \right]$$

dar prin calcul direct

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \sqrt{\Lambda} + \frac{1}{\tilde{R}^2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{C_0}{2} = -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\Lambda} + \frac{1}{\tilde{R}^2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right)$$

$$\sqrt{1 - \frac{4}{\Delta} \left( \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{C_0}{2} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{2}{\tilde{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$

și deci

$$f^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \Lambda + \frac{1}{\tilde{R}^2} \right) + \left( 1 - \Lambda - \frac{1}{\tilde{R}^2} \right) \cos(2\xi) + \frac{2}{\tilde{R}} \sin(2\xi) \right] \quad (\text{III.100})$$

care este forma finală a soluției pentru aproximația ondulatorie în care (vezi (III.70) și (III.76))

$$\xi = \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} \cdot z$$

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K_0}{K_2}}$$

O situație specială este reprezentată de cazul incidenței unei unde plane pe mediul neliniar. Acest caz, caracterizat prin  $R \rightarrow \infty$ , implică  $\tilde{R} \rightarrow \infty$  așa încât ecuația (III.100) devine

$$f^2 = \frac{1}{2} [1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)] \quad (\text{III.101})$$

Geometria simplă a acestui tip de fascicol are avantajul de a ilustra imediat efectele datorate neliniarității mediului de propagare. De exemplu, expresia



anterioară arată că variația periodică a lui  $f^2$  este posibilă numai dacă  $\Lambda \neq 1$ .

Prin urmare, în raport cu parametrul  $\Lambda$  tratarea ondulatorie distinge net între două comportări ale soluției. Prin simplă inspecție este mai puțin evident dacă situațiile caracterizate prin  $\Lambda < 1$  și  $\Lambda > 1$  trebuie la rândul lor deosebite așa cum este sugerat în literatură:

i) Dacă  $\Lambda = 1$  atunci forța refringentă compensează forța de difracție, încât "amprenta" (geometria transversală) a fascicolului se conservă; propagarea are loc exact ca într-un mediu obișnuit.

ii) Dacă  $\Lambda < 1$  atunci, imediat după intrarea în mediul neliniar, asupra undeii se manifestă procesul de focalizare periodică;

iii) Dacă  $\Lambda > 1$  atunci, după intrarea în mediul neliniar, fascicolul suferă mai întâi o difracție (lărgire a amprentei) care este urmată de procesul de focalizare periodică.

## 9. Interpretarea rezultatelor celor trei modele

Pentru a discuta conținutul clasificării precedente putem să ne folosim de următoarea schemă analitică:

1. *Imaginea statică a frontului de undă* : Conform expresiei (III.28) semnul algebric al razei de curbură indică poziția centrului de curbură ( $z_c$ ) față de suprafața de undă  $\Sigma$  (vezi fig. III.2). Astfel  $\rho > 0$  desemnează o undă al cărei centru de curbură se află la stânga suprafeței de undă în timp ce  $\rho < 0$  semnifică o geometrie opusă.
2. *Dinamica frontului de undă* : Expresia  $|\rho|$  reprezintă raza geometrică de curbură a frontului de undă . Este clar că dacă  $|\rho|$  scade în raport cu  $z$  , adică  $\frac{\partial|\rho|}{\partial z} < 0$  , atunci unda se "concentrează" sau "focalizează". În cazul unui comportament opus unda este "divergentă" sau "explodează".

În mod sintetic criteriile precedente pot fi puse în forma următoare:

$$\begin{aligned} \rho > 0 &\Rightarrow \text{centrul de curbură se află la stânga suprafeței de undă} \\ \rho < 0 &\Rightarrow \text{centrul de curbură se află la dreapta suprafeței de undă} \\ \frac{d}{dz} |\rho| > 0 &\Rightarrow \text{unda se dezvoltă divergent} \\ \frac{d}{dz} |\rho| < 0 &\Rightarrow \text{unda suferă focalizare} \end{aligned} \quad (\text{III.102})$$

Să ilustrăm aceste idei cu ajutorul cazurilor studiate.

## 9.1 Cazul opticii geometrice

Alegem unda plană la intrare ( $R \rightarrow \infty$  și  $\theta = 0$ ). Din  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{f} \frac{df}{dz}$  cu ecuația (III.58) găsim

$$\frac{1}{\rho} = -\varpi \tan(\varpi z) \quad \Rightarrow \quad \rho = -\frac{1}{\varpi \tan(\varpi z)} \quad (\text{III.103})$$

Observăm că la  $z = 0$  avem  $\rho = \infty \equiv R$  ceea ce este consistent cu ipoteza de plecare. Expresia (III.103) arată de asemenea că pentru valori  $0 < z \ll 1$  avem  $\rho < 0$ . Astfel, conform tabelului (III.102) unda plană se transformă într-o undă cu centrul de curbură la dreapta.

În plus avem

$$\frac{d}{dz} |\rho| = \frac{d}{dz} (-\rho) = -\frac{1}{\sin^2(\varpi z)} < 0 \quad (\text{III.104})$$

deci unda suferă o focalizare. Figura de mai jos ilustrează propagarea până în primul punct de focalizare.

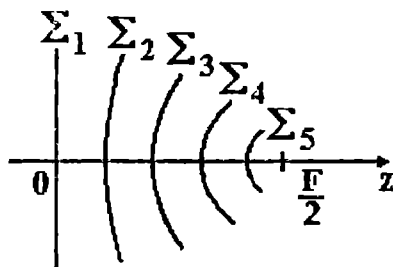


Figura III.3: Fronturi de undă succesive ilustrând autofocalizarea la propagarea într-un mediu neliniar

Pentru  $\varpi z > \frac{\pi}{2}$  (mai exact pentru  $\varpi z \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ) avem  $\tan(\varpi z) < 0$  ceea ce implică  $\rho > 0$ . În cuvinte, unda "primește" un centru de curbură la stânga. În plus

$$\frac{d}{dz} |\rho| = \frac{d}{dz} \rho = \frac{1}{\sin^2(\varpi z)} > 0 \quad (\text{III.105})$$

ceea ce înseamnă că unda se lărgeste. Dacă remarcăm că  $\varpi z > \frac{\pi}{2}$  specifică punctele axei  $Oz$  aflate la dreapta primului punct de focalizare, atunci înțelegem motivul modificărilor de aspect pe care tocmai le-am găsit. Figura III.4 ilustrează această situație.

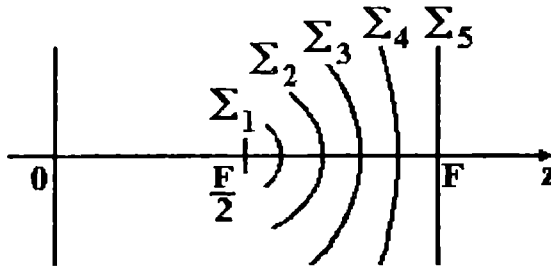


Figura III.4: Evoluția fronturilor de undă după trecerea printr-un punct de focalizare

## 9.2 Cazul mediului slab parabolic

În condiția unei unde plane ( $R \rightarrow \infty$ ) incidente asupra mediului neliniar, din ecuația (III.69) obținem

$$f = \pm \sqrt{1 + \frac{z^2}{k^2 w_0^4}} \quad (\text{III.106})$$

deci

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{f} \frac{df}{dz} = \frac{z}{k^2 w_0^4 + z^2}$$

rezultat care apare mai convenabil sub forma

$$\rho = \frac{k^2 w_0^4 + z^2}{z} > 0, \forall z \quad (\text{III.107})$$

Este clar că pentru  $z = 0$  obținem în mod consistent  $\rho \equiv R = \infty$ . În mediul neliniar ( $z > 0$ ) avem  $\rho > 0$  ceea ce semnifică apariția unui centru de curbură la stânga suprafeței de undă, corespunzător unei unde care se difractă. După (III.107) unda redevine plană și în regim asimptotic ( $z \rightarrow \infty$ )!

Dinamica undei în secțiunea transversală apare din

$$\frac{d}{dz} |\rho| \equiv \frac{d}{dz} \rho = \frac{z^2 - k^2 w_0^4}{z^2}$$

Pentru  $z > k w_0^2$  raza de curbură crește ( $\frac{d}{dz} |\rho| > 0$ ) astfel încât unda suferă o difracție continuă pe măsura propagării. Este de remarcat că pe intervalul  $z \in (0, k w_0^2)$ , în opoziție cu informația pe care o extragem din ceea ce am numit imagine statică, variația curburii frontului de undă urmează o evoluție asemănătoare unei focalizări.

### 9.3 Cazul aproximației ondulatorii

Ne ocupăm și de această dată cu efectele resimțite de către o undă plană ( $R \rightarrow \infty$  în planul de intrare) ca urmare a propagării în mediul neliniar. Din ecuația (III.101) avem

$$f = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)}$$

astfel, ținând cont și de (III.70)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\pm \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)}} \cdot \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} \cdot \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)}} \cdot \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} \cdot \frac{(1 - \Lambda)(-2 \sin(2\xi))}{2\sqrt{1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)}} \\ &= -\sqrt{\frac{K_2}{K_0}} \cdot \frac{(1 - \Lambda) \sin(2\xi)}{1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)} \end{aligned}$$

Punând rezultatul într-o formă mai convenabilă unei discuții găsim

$$\rho = -\sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \cdot \frac{1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi)}{(1 - \Lambda) \sin(2\xi)} \quad (\text{III.108})$$

Este vizibil că în absența neliniarităților ( $K_2 = 0$ ) frontul de undă rămâne plan ( $\rho \rightarrow \infty$ ) ceea ce probează consistența rezultatului. În plus, faptul că inegalitatea  $1 + \Lambda + (1 - \Lambda) \cos(2\xi) > 0$  este valabilă oricare ar fi valorile  $\Lambda$  și  $\xi$  face ca schimbarea semnului algebric în (III.108) să poată rezulta numai datorită numitorului  $(1 - \Lambda) \sin(2\xi)$ .

Pomind de la expresia (III.108) și folosind tabelul (III.102) putem demonstra că valorile lui  $\Lambda$  conduc într-adevăr la cele trei cazuri sistematizate la pag.130. Astfel:

a) dacă  $\Lambda = 1$  atunci, independent de poziția pe axa de propagare,  $\rho \rightarrow \infty$  ceea ce arată conservarea geometriei fascicolului ca și cum propagarea ar avea loc într-un mediu liniar;

b) dacă  $\Lambda < 1$  atunci  $\rho < 0$  (la intrarea în mediul neliniar  $\sin(2\xi) > 0$ ) ceea ce înseamnă că frontul de undă primește un centru de curbura la dreapta prezentând imaginea unei unde care focalizează. Pentru ca această imagine statică să fie susținută și de procesul de focalizare, în acord cu punctul (ii) de la pag.130, ar trebui ca  $|\rho|$  să scadă cu  $z$ .

Pentru a verifica acest lucru să punem  $\Lambda = 1 - p^2 < 1$  cu  $p \in (0, 1)$ . Avem

$$\rho = -\sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \cdot \frac{\frac{1+\Lambda}{1-\Lambda} + \cos(2\xi)}{\sin(2\xi)} = -\sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \cdot \frac{\frac{2}{p^2} - 1 + \cos(2\xi)}{\sin(2\xi)}$$

$$\rho = -\sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \cdot \frac{\frac{1}{p^2} - \sin^2 \xi}{\sin \xi \cos \xi} \quad (\text{III.109})$$

Cum în acest caz  $\rho < 0$

$$\frac{d}{dz} |\rho| = \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} \frac{d}{d\xi} (-\rho) = -\frac{\frac{1}{p^2} \cos(2\xi) + \sin^2 \xi}{\sin^2 \xi \cos^2 \xi} \quad (\text{III.110})$$

$$\xi \ll 1 \Rightarrow \frac{d}{dz} |\rho| < 0 \quad (\text{III.111})$$

Deci, pentru  $\Lambda < 1$  și  $\xi \ll 1$  avem  $\rho < 0$  în timp ce  $|\rho|$  scade cu  $z$ . Aceste date arată că procesul de focalizare a undei începe imediat după intrarea acesteia în mediul neliniar.

c) Pentru a verifica ultima concluzie de la pagina 130 și anume cea legată de efectul condiției  $\Lambda > 1$  vom pune  $\Lambda = 1 + p^2 > 1$  cu  $p$  real (de această dată valorile lui  $p$  nu mai sunt limitate ca în cazul precedent). În locul lui (III.109) obținem

$$\rho = -\sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \cdot \frac{-\frac{2}{p^2} - 1 + \cos(2\xi)}{\sin(2\xi)} = \sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \cdot \frac{\frac{1}{p^2} + \sin^2 \xi}{\sin \xi \cos \xi} > 0 \quad (\text{III.112})$$

În consecință, pentru valori mici ale lui  $\xi$  (imediat după intrarea în mediul neliniar) relația obținută conduce la imaginea statică a unui fascicol divergent! Mai departe

$$\frac{d}{dz} |\rho| = \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} \frac{d}{d\xi} (\rho) = \frac{-\frac{1}{p^2} \cos(2\xi) + \sin^2 \xi}{\sin^2 \xi \cos^2 \xi} \quad (\text{III.113})$$

Numitorul din (III.113) este pozitiv așa încât, dacă

$$-\frac{1}{p^2} \cos(2\xi) + \sin^2 \xi > 0 \quad (\text{III.114})$$

atunci la intrarea în mediul neliniar și precedent procesului de autofocalizare, unda "schițează" o divergență (în acord cu prevederea punctului (iii) pag. 130).

### 9.3.1 Trăsături generale

Aspectul caracteristic al modelului ondulatoriu este că dacă  $\Lambda \neq 1$  atunci propagarea în mediul neliniar este însoțită de procesul de autofocalizare periodică. Din condiția de periodicitate (vezi ecuația (III.101)) funcția  $f$  își atinge minimele

la intervale  $\Delta\xi$  pentru care

$$2\Delta\xi = 2\pi$$

Distanța de autofocalizare este

$$F \equiv \Delta z = \pi \sqrt{\frac{K_0}{K_2}} \quad (\text{III.115})$$

în mod concordant cu rezultatul dedus în cadrul aproximației de optică geometrică.

Superioritatea modelului ondulatoriu este legată de îndepărtarea divergențelor de câmp. De exemplu, pentru cazul unei unde plane, prin (III.101), obținem

$$f_{\min}^2 = \min(1, \Lambda) \neq 0 \quad (\text{III.116})$$

ceea ce conduce la mărginirea valorilor amplitudinii.

**Tema I.3** *Stabilități expresia  $f_{\min}^2$  în cazul general în care unda incidentă are curbura  $R$ . Precizați distanța (valoarea lui  $z$ ) la care are loc prima focalizare (considerați  $\Lambda < 1$ ).*

## 10. Cazuri integrabile compatibile cu WKB (fibre optice neomogene)

Tehnica pe care am construit-o pentru a studia propagarea în medii parabolice poate descrie și cazuri mai complicate. De exemplu, putem dezvolta analiza unor medii în care indicele de refracție descrie o neomogenitate:

1. conică;
2. liniară.

În ambele cazuri este vorba despre o generalizare a formei indicelui de refracție în cadrul căreia  $K_2 = K_2(z)$ .

### 10.1 Medii cu neliniaritate conică

Pomind de la expresia:  $n^2 = K_0 - K_2(z) \cdot r^2$ , cazul care ne interesează este caracterizat prin

$$\begin{aligned} K_0 &= \text{ct (independent de } z) \\ K_2(z) &= \frac{K_{20}}{(1 + \alpha z)^2} \end{aligned} \quad (\text{III.117})$$

Ca și până acum, mediul neliniar ocupă semiaxa  $z \in [0, \infty)$ . Din (III.117),

pentru  $\alpha > 0$ , condiția  $n^2 = ct$  implică

$$r = |1 + \alpha z| \sqrt{\frac{K_0 - n^2}{K_{20}}} \quad (\text{III.118})$$

Pentru  $n = ct$  ecuația (III.118) definește un con având vârful pe axa  $Oz$  în punctul  $z = -\frac{1}{\alpha}$ . Această situație explică denumirea dată unui asemenea tip de mediu.

Să notăm că potrivit condițiilor (III.117) propagarea are loc după un vector de undă de modul constant (și a cărui direcție este prin definiție paralelă cu  $Oz$ ).

Pentru condițiile specificate, ecuația (III.53) devine

$$\frac{f''}{f} = -\frac{K_{20}}{K_0 \cdot (1 + \alpha z)^2} + \frac{1}{k^2 w_0^4 f^4} \quad (\text{III.119})$$

O expresie mai simplă se obține folosind substituția

$$\xi = \sqrt{\frac{K_0}{K_{20}}} (1 + \alpha z) \quad (\text{III.120})$$

pentru care calculăm

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= \sqrt{\frac{K_0}{K_{20}}} \cdot \alpha \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d^2}{dz^2} &= \frac{K_0}{K_{20}} \cdot \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \end{aligned}$$

astfel încât (III.119) devine (derivarea se face în raport cu  $\xi$ )

$$\frac{f''}{f} = -\frac{1}{\beta^2 \xi^2} + \frac{\Lambda}{f^4} \quad (\text{III.121})$$

în care am introdus notațiile

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \alpha \sqrt{\frac{K_0}{K_{20}}} \\ \Lambda &\equiv \frac{K_{20}}{K_0 k^2 w_0^4 \alpha^2} \end{aligned} \quad (\text{III.122})$$

În conformitate cu specificul tehnicii WKB trebuie să reducem ordinul derivării în (III.121).

Începem prin a scrie (III.121) sub forma

$$\frac{\beta^2 \xi^2 f''}{f} = 1 + \frac{\Lambda \beta^2 \xi^2}{f^4} \quad (\text{III.123})$$

și apoi apelăm la transformarea

$$F = \frac{f}{\sqrt{\beta\xi}} \quad (\text{III.124})$$

Drept urmare, al doilea termen din membrul drept al (III.123) devine  $\frac{\Lambda}{F^4}$  și totodată avem

$$\frac{d}{d\xi}f = F' \sqrt{\beta\xi} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\xi}} F \quad (\text{III.125})$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}f = F'' \sqrt{\beta\xi} + F' \sqrt{\frac{\beta}{\xi}} - F \frac{\sqrt{\beta}}{4} \xi^{-\frac{3}{2}}$$

de unde, membrul stâng al ecuației (III.123) devine

$$\frac{\beta^2 \xi^2}{f} \frac{d^2 f}{d\xi^2} = \beta^2 \left( \xi^2 \frac{F''}{F} + \frac{\xi F'}{F} - \frac{1}{4} \right) \quad (\text{III.126})$$

Punând (III.124) și (III.126) în (III.123), obținem

$$\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2}F + \xi \frac{d}{d\xi}F = -\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4}\right)F + \frac{\Lambda}{\beta^2 F^3} \quad (\text{III.127})$$

Este evident că dacă operatorul  $\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \xi \frac{d}{d\xi}$  ar putea fi restrâns ("împachetat") la o expresie de forma  $\frac{d^2}{d\eta^2}$ , atunci ecuația (III.127) ar asuma forma ecuației întâlnite în studiul aproximației ondulatorii. Tocmai o asemenea restrângere provoacă schimbarea de variabilă

$$\xi = \exp \eta \Leftrightarrow \eta = \ln \xi \quad (\text{III.128})$$

Prin calcul direct

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\eta} = \exp(-\eta) \frac{d}{d\eta} \quad (\text{III.129})$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \exp(-\eta) \frac{d}{d\eta} (\exp(-\eta) \frac{d}{d\eta}) = \exp(-2\eta) \left[ -\frac{d}{d\eta} + \frac{d^2}{d\eta^2} \right]$$

deci

$$\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \xi \frac{d}{d\xi} = \frac{d^2}{d\eta^2} \quad (\text{III.130})$$

Operând schimbarea de variabilă în ecuația (III.127) obținem

$$F'' + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4}\right)F - \frac{\Lambda}{\beta^2 F^3} = 0 \quad (\text{III.131})$$



### 10.1.1 Mediu conic cu focalizare periodică

Dacă

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4} > 0 \quad (\text{III.132})$$

(ceea ce înseamnă  $\beta < 2$ ) atunci folosind substituțiile

$$\Lambda_0 \equiv \frac{\Lambda}{1 - \frac{\beta^2}{4}} \quad (\text{III.133})$$

$$\overline{F} \equiv \frac{F}{\sqrt[4]{\Lambda_0}}$$

$$\overline{\eta} \equiv \eta \cdot \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4}}$$

vom pune (III.131) sub forma

$$\overline{F}'' + \overline{F} - \frac{1}{\overline{F}^3} = 0 \quad (\text{III.134})$$

care este identică cu ecuația (III.74) obținută prin *modelul ondulatoriu*. Din (III.122) și (III.132) conchidem că dacă factorii de structură ai materialului satisfac inegalitatea

$$K_0 \alpha^2 < 2K_{20} \quad (\text{III.135})$$

atunci propagarea va urma (III.134) fiind însoțită de autofocalizare periodică.

*Observație:* Coincidența formală a ecuațiilor (III.134) și (III.74) nu atrage și identitatea fenomenelor actuale de propagare. Acest lucru devine clar atunci când ținem seama de felul în care ecuațiile coincidente se raportează la variabila  $z$ . Dacă în cazul ondulatoriu este suficientă rescalarea intermediată de ecuația (III.70), pentru mediul conic trebuie să efectuăm doi pași: o transformare logaritmică (vezi (III.128)) și apoi o translație (ecuația (III.120)) combinată cu o rescalare.

Diferența pusă în evidență prin observația precedentă poate fi subliniată și prin nivelele diferite de complexitate matematică a expresiilor finale. Ca exemplu putem să comparăm unele constante de integrare. După înmulțirea cu  $2\overline{F}$  și integrare, ecuația (III.134) devine

$$\left(\overline{F}'\right)^2 - \overline{F}^2 - \frac{1}{\overline{F}^2} + C_0 \quad (\text{III.136})$$

Ținând seama de (III.124)

$$\overline{F}|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt[4]{\beta^2 \Lambda_0}} \frac{f}{\sqrt{\xi}} \Big|_{z=0} = \sqrt[4]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4}}{\Lambda}} \quad (\text{III.137})$$

Prin (III.120), (III.133), (III.129)

$$\begin{aligned} \overline{F}' &\equiv \frac{d}{d\eta} \overline{F} = \frac{1}{\sqrt[4]{\Lambda_0} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4}}} \cdot \frac{d}{d\eta} \left( \frac{f}{\sqrt{\beta \xi}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{\Lambda \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4} \right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left( \xi \frac{d}{d\xi} f - \frac{f}{2} \right) \end{aligned}$$

încât la  $z = 0$ , unde  $\frac{f'}{f} = \frac{1}{R}$ :

$$\overline{F}'|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt[4]{\Lambda \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4} \right)}} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left[ \frac{1}{\alpha R} - \frac{1}{2} \right]$$

Dacă ținem seama de ecuațiile (III.122) putem scrie

$$\Lambda = \frac{K_{20}}{K_0 k^2 w_0^4 \alpha^2} = \frac{1}{k^2 w_0^4 \beta^2}$$

și

$$\Lambda \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{k^2 w_0^4 \alpha^2} \equiv \Lambda_c$$

Astfel încât (III.136) impune

$$C_0 = \frac{\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4}}}{\sqrt{\Lambda_c}} + \frac{\sqrt{\Lambda_c}}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{\Lambda_c \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4} \right)}} \left[ \frac{1}{\alpha R} - \frac{1}{2} \right]^2 \quad (\text{III.138})$$

în timp ce cazul ondulatoriu (cu un  $\Lambda$  de structură diferită de cel din (III.122)) a dat

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \sqrt{\Lambda} + \frac{1}{\tilde{R}^2 \sqrt{\Lambda}}$$

**Tema I.4** Conducând calculele până la capăt, demonstrați că dacă  $\beta < 2$  atunci folosind notațiile

$$\gamma^2 \equiv \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4} \quad (\text{III.139})$$

$$\Pi \equiv \left( \frac{1}{\alpha R} - \frac{1}{2} \right)^2 + \Lambda_c + \gamma^2$$

soluția finală a ecuației (III.121) se scrie sub forma

$$f^2(\xi) = \xi \left[ \frac{\Pi}{2\gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{\alpha R} - \frac{1}{2} \right) \sin(2\gamma \ln \xi) + \left( 1 - \frac{\Pi}{2\gamma^2} \right) \cos(2\gamma \ln \xi) \right] \quad (\text{III.140})$$

**Tema I.5** În aceleași condiții cu tema precedentă precizați caracteristicile propagării (primul punct de focalizare, distanța de autofocalizare) pentru cazul unde plană ( $R \rightarrow \infty$ ).

## 10.1.2 Mediu conic fără periodicitate

Parametrii de structură ai mediului pot invalida inegalitatea (III.132). Acest fapt conduce la *absența fenomenului de autofocalizare*. Pentru a studia această situație să introducem

$$\gamma^2 \equiv \frac{1}{4} - \frac{1}{\beta^2} > 0 \quad (\text{III.141})$$

Astfel (III.131) devine

$$F'' = \gamma^2 F + \frac{\Lambda}{\beta^2 F^3} \quad (\text{III.142})$$

Nimic nu ne împiedică să tratăm (III.142) în maniera folosită pentru studiul aproximației ondulatorii. Înmulțind cu  $2F'$  și folosind substituția  $Q = F^2$  găsim

$$\frac{d}{d\eta} Q = 2\sqrt{\gamma^2 Q^2 + C_0 Q - \Lambda_\infty} \quad (\text{III.143})$$

unde

$$\Lambda_\infty \equiv \frac{\Lambda}{\beta^2} \quad (\text{III.144})$$

Presupunând (fără verificări explicite) că radicalul din (III.143) satisface condițiile impuse de o substituție Euler, vom pune

$$\sqrt{\gamma^2 Q^2 + C_0 Q - \Lambda_\infty} = t(Q - \lambda_1) \quad (\text{III.145})$$

unde  $\lambda_1$  reprezintă una dintre rădăcinile reale ale polinomului de gradul doi în  $Q$ . Găsim

$$t = \pm \gamma \sqrt{\frac{Q - \lambda_2}{Q - \lambda_1}} \quad (\text{III.146})$$

$$Q = \frac{\gamma^2 \lambda_2 - t^2 \lambda_1}{\gamma^2 - t^2}$$

de unde

$$Q' = 2\gamma^2 t \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\gamma^2 - t^2)^2} t' \quad (\text{III.147})$$

$$\sqrt{\gamma^2 Q^2 + C_0 Q - \Lambda_\infty} = \gamma^2 t \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\gamma^2 - t^2} t'$$

Cuprinzând toate efectele transformării în (III.143) vom avea

$$\int \frac{dt}{\gamma^2 - t^2} = \int d\eta \quad (\text{III.148})$$

Partea stângă se integrează prin descompunere în fracții simple

$$\frac{1}{\gamma^2 - t^2} = \frac{A}{\gamma - t} + \frac{B}{\gamma + t} \quad (\text{III.149})$$

de unde

$$A = \frac{1}{2\gamma} = B$$

Astfel

$$\ln \frac{t + \gamma}{t - \gamma} = 2\gamma\eta + C_1 \quad (\text{III.150})$$

sau

$$t = \gamma \coth \frac{\varphi}{2} \quad (\text{III.151})$$

unde am notat

$$\varphi \equiv 2\gamma\eta + C_1 \quad (\text{III.152})$$

Cu ecuația a doua din (III.146) obținem

$$Q = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cosh(\varphi) \quad (\text{III.153})$$

Constanta de integrare  $C_1$  trebuie etalonată folosind condițiile inițiale.

**Tema 1.6** Efectuând toate calculele necesare pentru cazul unei plane ( $R \rightarrow \infty$ ) demonstrați că soluția finală neperiodică se scrie

$$f^2 = \xi \left[ \cosh(\gamma \ln \xi) - \frac{1}{2\gamma} \sinh(\gamma \ln \xi) \right]^2 \quad (\text{III.154})$$

## 10.2 Medii cu neomogenitate liniară

În această secțiune vom ilustra o manieră diferită de exploatare a ideilor de bază ale tehnicii WKB. Expresiile care contribuie la constituirea lui  $n^2$  sunt

$$K_0 = ct \text{ (independent de } z) \quad (\text{III.155})$$

$$K_2(z) = K_{20}(1 + \alpha z)$$

iar potrivit lui (III.53), ecuația pe care trebuie să o tratăm are forma

$$\frac{f''}{f} = -\frac{K_{20} \cdot (1 + \alpha z)}{K_0} + \frac{1}{k^2 w_0^4 f^4} \quad (\text{III.156})$$

Prin studiu se ajunge la concluzia că această ecuație nu poate fi integrată decât în cadrul aproximației opticii geometrice ( $k \rightarrow \infty$ ) al cărei efect concret constă în eliminarea celui de-al doilea termen din membrul drept. Vom introduce

$$\xi = a(1 + \alpha z) \quad (\text{III.157})$$

$$\frac{d}{dz} = a\alpha \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = a^2 \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

ceea ce aduce ecuația (III.156) la forma

$$\frac{f''}{f} = -\frac{K_{20}\xi}{K_0\alpha^2 a^3}$$

O simplificare suplimentară apare dacă alegem

$$a^3 = \frac{K_{20}}{K_0\alpha^2} \quad (\text{III.158})$$

astfel

$$f'' + \xi f = 0 \quad (\text{III.159})$$

Este extrem de probabil ca, fără nici un alt pas intermediar, să identificăm (III.159) drept o ecuație Bessel. În locul acestei observații, vom admite că asupra ecuației (III.159) trebuie să acționăm cu mijloace generale.

Începem prin a efectua transformarea de funcție

$$f(\xi) = \xi^t F(\xi) \quad (\text{III.160})$$

care, punând explicit variabila  $\xi$  în factor, permite exploatarea tehnicii factorilor de formă. Cum

$$\begin{aligned} f' &= t\xi^{t-1}F + \xi^t F' \\ f'' &= t(t-1)\xi^{t-2}F + 2t\xi^{t-1}F' + \xi^t F'' \end{aligned}$$

ecuația (III.159) devine

$$F'' + 2\frac{t}{\xi}F' + \left(\xi + \frac{t(t-1)}{\xi^2}\right)F = 0 \quad (\text{III.161})$$

Apoi schimbăm variabila

$$\xi = wu^y \iff u = \sqrt[y]{\frac{\xi}{w}}$$

Efectele se vor face resimțite prin

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= \frac{u^{1-y}}{wy} \frac{d}{du} \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= \frac{1}{(wy)^2} \left[ u^{2(1-y)} \frac{d^2}{du^2} + (1-y) u^{1-2y} \frac{d}{du} \right] \\ \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} &= \frac{y}{(wy)^2} u^{1-2y} \frac{d}{du} \end{aligned}$$

Făcând substituțiile necesare în (III.161) și înmulțind cu  $u^{2(y-1)} (wy)^2$  ajungem la

$$LF = 0 \quad (\text{III.162})$$

unde prin  $L$  am notat operatorul diferențial

$$L \equiv \frac{d^2}{du^2} + \frac{1+y(2t-1)}{u} \frac{d}{du} + (wy)^2 \left[ wu^{3y-2} + \frac{t(t-1)}{w^2u^2} \right] \quad (\text{III.163})$$

Recurgând la tehnici standard, cei trei parametri pe care i-am introdus ( $t, w, y$ ) trebuie să permită stabilirea soluțiilor ecuației (III.162). Avem însă la dispoziție o cale mai simplă (cea care se utilizează în mod real în asemenea situații): folosind un tratat de referință pentru funcții speciale (de ex. Abramovitz & Stegun), identificăm o ecuație diferențială spre care am putea restrânge (III.163) alegând valori convenabile ale parametrilor. Pe o asemenea cale găsim operatorul Bessel

$$L_{\text{Bessel}} \equiv \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right) \quad (\text{III.164})$$

care admite ca soluții funcțiile Bessel (cilindrice) de ordinul  $p$ :  $J_{\pm p}$ .

Valorile parametrilor  $t, w$  și  $y$  se determină pe baza următoarelor identificări

$$\begin{aligned} \frac{1+y(2t-1)}{u} &\equiv \frac{1}{u} \Rightarrow 1+y(2t-1) = 1 \\ w^3y^2u^{3y-2} &\equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} 3y-2=0 \\ w^3y^2=1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{t(t-1)y^2}{u^2} \equiv -\frac{p^2}{u^2} \Rightarrow t(t-1)y^2 = -p^2$$

Sistemul algebric precedent are o singură soluție

$$w = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(= y^{-\frac{2}{3}}\right); y = \frac{2}{3}; t = \frac{1}{2}; p^2 = \frac{1}{9} \quad (\text{III.165})$$

astfel încât ecuația (III.163) devine

$$LF = \left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \left(1 - \frac{1}{9u^2}\right) \right] F = 0 \quad (\text{III.166})$$

soluțiile fiind reprezentate de funcțiile Bessel  $J_{\pm\frac{1}{3}}(u)$ .

Observație: Pentru comparație, este interesant să amintim că:

- a) studiul ecuației Schrödinger radiale face apel la funcții Bessel (sferice) de indice semîntreg,
- b) teoria scalară a difracției apelează la  $J_0$
- c) studiul propagării într-un mediu cu refringentă neliniară de tipul  $n^2 = K_0 - K_{20}(1 + \alpha z)r^2$  recurge la funcții Bessel de indice real, în particular  $\pm\frac{1}{3}$ .

Teoria generală ne asigură că cele două funcții Bessel sunt liniar independente, astfel încât soluția generală a ecuației (III.166) este

$$F(u) = a_1 J_{\frac{1}{3}}(u) + a_2 J_{-\frac{1}{3}}(u)$$

Așadar, întorcându-ne spre funcția  $f(\xi)$  avem

$$f(\xi) = A_1 \sqrt{\xi} \cdot J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\xi^3}\right) + A_2 \sqrt{\xi} \cdot J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\xi^3}\right) \quad (\text{III.167})$$

După cum se vede, expresia (III.167) conține (numai) doi coeficienți nedeterminați ceea ce permite utilizarea cu succes a condițiilor

$$\begin{aligned} f|_{z=0} &= 1 \\ \beta|_{z=0} &= \left. \frac{f'}{f} \right|_{z=0} = \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (\text{III.168})$$

Este interesant de observat că am reușit integrarea ecuației (III.156) în "spiritul" metodei WKB fără ca în prealabil să fi apelat la o reducere a ordinului de derivare (faptul este remarcabil chiar dacă reușita este restrânsă la aproximația opticii geometrice  $k \rightarrow \infty$ !).

Explicația formală a acestui fapt surprinzător este legată de faptul că ecuația

(III.159) este *liniară*. Ea este un caz particular al formei

$$x^2 y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

în care

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ q(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Ori, acest gen de ecuații poate avea *cel mult două soluții* liniar independente. În plus, dacă  $p$  este semiîntreg ( $p = \frac{2n+1}{2}$ ), soluția  $J_p$  se exprimă prin funcții elementare

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ P_n \left( \frac{1}{x} \right) \sin x + Q_n \left( \frac{1}{x} \right) \cos x \right]$$

unde  $P_n \left( \frac{1}{x} \right)$  și  $Q_n \left( \frac{1}{x} \right)$  sunt polinoame în  $\left( \frac{1}{x} \right)$ .

În secțiunea următoare vom încerca să explicăm aceste lucruri pe o altă cale.

### 10.3 Relațiile de recurență ale funcțiilor Bessel

Atunci când am stabilit că soluția ecuației (III.166) se exprimă prin două funcții Bessel ar fi trebuit de fapt să spunem că soluția se exprimă prin "cel puțin două" funcții Bessel deoarece, din cauza legăturilor care există între aceste funcții, odată implicate, ele pot apărea într-un număr oricât de mare! Acest lucru reiese clar din expresiile următoare

$$\begin{aligned} \frac{2p}{u} J_p(u) &= J_{p+1}(u) + J_{p-1}(u) \\ -2 \frac{d}{du} J_p(u) &= J_{p+1}(u) - J_{p-1}(u) \end{aligned} \quad (\text{III.169})$$

Este limpede că ele exprimă niște relații de recurență. De exemplu, prima relație ne permite ca în orice moment să înlocuim o funcție Bessel (de exemplu  $J_p(u)$ ) prin alte două specimene de indice vecin. Dacă asemenea înlocuiri sunt efectuate în mod repetat atunci numărul de funcții Bessel diferite crește fără nici o constrângere.

A doua relație de recurență din (III.169) exprimă aceeași proprietate de substituție cu privire la funcțiile Bessel care s-ar afla sub operatorul de derivare. La o privire mai atentă notăm că aici avem de fapt ceva mai mult: această relație de recurență exprimă o "reducere a ordinului de derivare" (în contul indicilor). Prin utilizarea ei în (III.166) putem obține în locul unei ecuații diferențiale o ecuație algebrică. Astfel, motivul reușitei de a rezolva ecuația de propagare în spiritul tehnicii WKB poate fi legat de structura funcțiilor Bessel care asigură o reducere "implicită" a ordinului de derivare.



Pomind de la expresia operatorului Bessel, vom ilustra modul în care apare o asemenea recurență specială. Introducem notația

$$J' \equiv \frac{d}{du} J_p$$

și calculăm direct ecuația la care se supune  $J'$ . Derivând

$$L_{Bessel} \cdot J_p \equiv \left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \left( 1 - \frac{p^2}{u^2} \right) \right] J_p = 0 \quad (\text{III.170})$$

găsim

$$\left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \left( 1 - \frac{p^2}{u^2} \right) \right] J' - \frac{1}{u^2} J' + \frac{2p^2}{u^3} J_p = 0 \quad (\text{III.171})$$

Pentru  $J_{p+1}$  și  $J_{p-1}$  avem

$$\left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \left( 1 - \frac{(p+1)^2}{u^2} \right) \right] J_{p+1} = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \left( 1 - \frac{(p-1)^2}{u^2} \right) \right] J_{p-1} = 0$$

din care, dacă le scădem și rearanjăm termenii, obținem

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \left( 1 - \frac{p^2}{u^2} \right) \right] (J_{p+1} - J_{p-1}) - \\ & - \frac{J_{p+1} - J_{p-1}}{u^2} - \frac{2p}{u^2} (J_{p+1} + J_{p-1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.172})$$

Prin comparație, ecuațiile (III.171) și (III.172) spun exact același lucru dacă

$$J_{p+1} + J_{p-1} \equiv -\alpha \frac{p}{u} J_p \quad (\text{III.173})$$

$$J_{p+1} - J_{p-1} = \alpha J' \equiv \alpha \frac{d}{du} J_p$$

unde  $\alpha$  este o constantă arbitrară.

Pentru  $\alpha = -2$  obținem identitatea ecuațiilor (III.173) cu relațiile de recurență (III.169).

## 10.4 Demonstrația exactă

Argumentele secțiunii precedente sunt o ilustrare a proprietăților funcțiilor Bessel. În prezent vom da o demonstrație relațiilor de recurență. Pornim de la

reprezentarea integrală a funcțiilor Bessel

$$\begin{aligned} J_n(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\rho \cos w) \cdot \exp(inw) dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\rho \sin \beta - n\beta) d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.174})$$

În timp ce prima linie din (III.174) reprezintă o expresie mai frecvent citată, pe linia a doua găsim forma întrebuintată chiar de Bessel. În plus, această a doua formă este și cea care ne folosește pentru a deduce relațiile de recurență. Astfel, calculăm

$$\frac{d}{d\rho} J_n(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\rho \sin \beta - n\beta) \sin \beta d\beta \quad (\text{III.175})$$

în timp ce

$$J_{k+r}(\rho) - J_k(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\rho \sin \beta - (k+r)\beta) - \cos(\rho \sin \beta - k\beta)] d\beta \quad (\text{III.176})$$

Prin manevre simple ajungem să scriem (III.176) sub formele

$$\begin{aligned} J_{k+r}(\rho) - J_k(\rho) &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\rho \sin \beta - \left(k + \frac{r}{2}\right)\beta\right) \cdot \sin\left(-\frac{r}{2}\beta\right) d\beta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\rho \sin \beta - \left(k + \frac{r}{2}\right)\beta\right) \cdot \sin\left(\frac{r}{2}\beta\right) d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.177})$$

Comparând expresiile aflate sub integralele (III.175) cu (III.177) găsim că ele coincid dacă

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} &= 1 \\ k + \frac{r}{2} &= n \end{aligned}$$

ceea ce conduce la două moduri de exprimare pentru integrala următoare

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\rho \sin \beta - n\beta) \cdot \sin \beta d\beta &= -\frac{d}{d\rho} J_n(\rho) \\ &= \frac{J_{n+1}(\rho) - J_{n-1}(\rho)}{2} \end{aligned} \quad (\text{III.178})$$

Ultimele două linii în (III.178) exprimă relația de recurență pe care ne-am propus să o demonstrăm.

**Tema I.7** Folosind (III.169) calculați coeficienții care apar în (III.167) în acord cu condițiile (III.168). Există autofocalizare în acest caz?

## 11. În final

Dezvoltarea teoriei procesului de autofocalizare a fasciculelor luminoase care se propagă în medii neliniare (parabolice) a parcurs următoarele etape:

- Scrierea ecuației Helmholtz în coordonate cilindrice pentru  $n_{nel}$  de tip parabolic;
- Dezvoltarea aproximației WKB;
- Generalizarea tratamentului eiconal clasic;
- Exploatarea unor principii euristice în structurarea soluțiilor admisibile, al căror efect a fost și identificarea cazului remarcabil constituit de către fasciculele pseudogaussiene;
- Studiul aproximațiilor de optică geometrică, a mediului slab parabolic și a cazului ondulatoriu;
- Analiza unor structuri optice mai generale, care prezintă totuși compatibilitate cu tehnica WKB.

Ca notă generală, fiecare etapă a implicat exploatarea unor instrumente matematice elaborate controlate printr-o interpretare fizică fermă.

## Recomandări bibliografice

---

1. Sodha, M.S., A.K. Ghatak: Inhomogeneous Optical Waveguides, Plenum Press, New York and London, 1977.

### *III. Autofocalizarea fasciculelor de lumină*

2. Marcuse, D.: Light Transmission Optics, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1972.
3. Palais, J.C.: Fiber Optic Communications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.
4. Baldwin, G.C., An Introduction to Nonlinear Optics, Plenum Press, 1969.



# **IV. Transparența indusă**

## **(absorbția saturată)**

<b>1</b>	<b>Aspecte generale</b>	<b>153</b>
<b>2</b>	<b>Teoria absorbției (legea Beer-Lambert)</b>	<b>153</b>
2.1	Coeficientul liniar de absorbție	158
<b>3</b>	<b>Deducerea legii absorbției pe baza teoriei cinetice</b>	<b>160</b>
<b>4</b>	<b>Efectul unui zgomot local</b>	<b>161</b>
4.1	Coeficientul neliniar de absorbție	163
<b>5</b>	<b>Dinamica locală descrisă prin ecuații de rată</b>	<b>164</b>
5.1	Forma coeficientului neliniar de absorbție	168
5.2	Echilibrul dinamic la intensități luminoase mari	170
5.3	Specificul echilibrului dinamic	171
5.3.1	Absorbția neliniară a sistemelor cu două nivele de energie	173
5.3.2	Evoluția spre starea de echilibru în prezența unei intensități constante	174
<b>6</b>	<b>Funcția de transmisie</b>	<b>174</b>
<b>7</b>	<b>Analiza ecuațiilor de rată</b>	<b>175</b>
7.1	Soluțiile ecuațiilor de rată pentru intensitate constantă	176
7.1.1	Comutarea spre starea de transparență indusă	176
7.1.2	Rezolvarea ecuațiilor de rată prin metoda matricială	178

7.1.3 Revenirea la absorbția de semnal mic	180
7.2 Dinamica neliniară descrisă prin ecuațiile de rată	181
7.2.1 Observații introductive	181
7.3 Conceptele dinamicii neliniare	185
7.3.1 Etapa I	187
7.3.2 Etapa II	187
7.3.3 Etapa III	187
7.3.4 Etapa IV	187
7.3.5 Etapa V	191
7.4 Laserul cu două nivele de energie.	191
7.4.1 Precizarea sistemului de ecuații	192
7.4.2 Stabilirea punctelor fixe	193
7.4.3 Studiul stabilității (tipul de echilibru al punctelor fixe)	195
7.4.4 Comportamentul haotic al generatorului laser	198

# 1. Aspecte generale

Fenomenul *absorbției saturate* poate sta foarte bine în aceeași categorie cu fenomenul de *refracție conică*, ”descoperit” de Hamilton prin intermediul unor mijloace exclusiv teoretice. Cel mai semnificativ element de asemănare constă în aceea că amândouă, prezentând o desfășurare pe cât de frapantă pe atât de lipsită de periculozitate, sunt parcă lăsate să se producă în semn de omagiu adus unor previziuni teoretice de excepție.

În cazul de față (al absorbției saturate) este vorba despre o manifestare care tinde până la detaliu să confirme teoria lui Einstein asupra proceselor spontane și stimulate prin care sistemele cuantice interacționează cu radiația.

Observațiile experimentale au scos în evidență faptul că un fascicol laser nu poate traversa un strat de colorant organic în soluție, decât dacă intensitatea luminoasă depășește o anumită valoare de prag. În caz contrar, fascicolul este atenuat pe măsura propagării, așa cum prevede legea Beer-Lambert. Această experiență simplă ilustrează de asemenea și faptul că atunci când fascicolul reușește să traverseze stratul absorbant, el nu prezintă efecte vizibile de atenuare (ceea ce explică cele două denumiri la fel de acceptabile date acestui fenomen și folosite în titlul capitolului).

Pentru a prezenta în mod sistematic mecanismele și conceptele implicate în descrierea procesului de absorbție a radiației, vom urmări următorul plan:

- prezentarea teoriei clasice a absorbției;
- efectele intervenției unui ”zgomot” local;
- teoria absorbției bazată pe dinamica populațiilor în cazul sistemelor cu trei nivele energetice;
- teoria funcției de transmisie (transparență);
- analiza proceselor locale descrise prin ecuațiile de rată;
- posibilitățile de investigare aparținând analizei dinamice neliniare.

## 2. Teoria absorbției (legea Beer-Lambert)

Scopul nostru prezent este de a urmări modelarea procesului de absorbție în versiunea fizicii clasice. Figura IV.1 prezintă aranjamentul experimental pentru studiul absorbției.

O radiație *monocromatică și omogenă* având intensitatea  $I_0$  (*staționară în timp*), străbătând un mediu absorbant suferă o scădere a intensității pe măsura

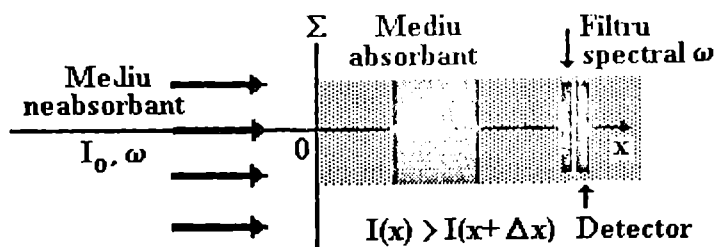


Figura IV.1: Aranjamentul caracteristic pentru studiul absorbției

îndepărtării de planul de intrare. În figura IV.1, acest fapt reiese din aceea că

$$\Delta x > 0 \Rightarrow I(x) > I(x + \Delta x)$$

Efectul atenuării se măsoară cu ajutorul unui fotodetector selectiv, așezat perpendicular pe axa fascicolului.

Să desemnăm prin  $\Delta I$  variația intensității (stabilită prin convenție ca diferență între valoarea finală și cea inițială) ca urmare a traversării unui strat subțire  $\Delta x$ . Datorită absorbției care are loc în acest strat

$$\forall \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta I \equiv I(x + \Delta x) - I(x) < 0 \quad (IV.1)$$

Deoarece  $\Delta I$  este negativ, urmează că expresia  $-\Delta I$  ( $-\Delta I > 0$ ) reprezintă "scăderea" intensității pe intervalul  $[x, x + \Delta x]$ .

Să admitem că fascicolul luminos are secțiunea normală  $S$  și că mediul absorbant este caracterizat prin  $n_0$  centrii absorbanți pe unitatea de volum. Comportarea intensității  $I$  în interiorul volumului  $\Delta V = S\Delta x$ , cuprins între  $x$  și  $x + \Delta x$  (vezi Fig. IV.1), prezintă caracteristici care pot fi anticipate pe cale euristică. Astfel:

- intensitatea  $I(x)$  nu poate fi influențată de extensia transversală  $S$  a fascicolului, atunci când fascicolul este omogen;
- scăderea intensității  $I(x)$  (adică  $-\Delta I$ ) este în relație de proporționalitate cu:
  - concentrația centrilor absorbanți ( $-\Delta I \sim n_0$ ), în ipoteza că nu există motive speciale care să sugereze necesitatea de a pondera eficacitatea individuală a centrilor absorbanți; un contra-exemplu este ilustrat de cazul grupării zonale (cluster-izare);
  - grosimea stratului absorbant străbătut ( $-\Delta I \sim \Delta x$ );
  - secțiunea eficace de absorbție  $\sigma$  ( $-\Delta I \sim \sigma$ ), care apare din faptul că acțiunea unui centru absorbant de a captura un foton nu se rezumă strict la



poziția și dimensiunile acestui centru, ci se extinde asupra unei vecinătăți. Anume, la aria (transversală direcției de propagare a fascicolului) egală cu  $\sigma$ , centrată pe elementul absorbant;

- intensitatea  $I$  ( $-\Delta I \sim I$ ). Această proporționalitate este în legătură cu faptul că atunci când în zona de acțiune a unui centru absorbant se află mai mulți fotoni (datorită unei valori suficient de ridicate a intensității), absorbția crește.

Colectând efectele descrise, găsim relația

$$-\Delta I = In_0\sigma\Delta x \quad (\text{IV.2})$$

sau, dacă folosim (IV.1) putem scrie

$$I(x + \Delta x) = I(x) \cdot (1 - n_0\sigma\Delta x) \quad (\text{IV.3})$$

*Notă:* Să ne imaginăm că centrul absorbant este distribuit ca în figura IV.2 și că acțiunea lor de captură este izotropă în volumul de rază  $r$ . Este evident că secțiunea elementară de captură este  $\sigma = \pi r^2$ , iar volumul stratului elementar (conținând un singur "plan" de centre absorbante care "obturează" fasciculul luminos) este egal cu  $2Sr$ .

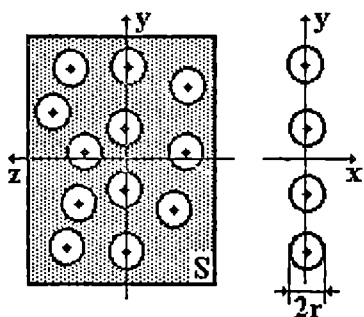


Figura IV.2: Distribuția centrilor absorbanți în cazul  $n_0\sigma < S$

În situația ilustrată, distribuția centrilor absorbanți este suficient de rarefiată pentru a nu acoperi complet aria  $S$  (fapt redat prin inegalitatea  $n_0\sigma < S$ ). În asemenea situație, ipoteza absenței cluster-ilor este adevărată și putem folosi  $-\Delta I \sim n_0$ . Un caz opus este prezentat în figura IV.3 când  $n_0\sigma > S$ . Acum, centrul de absorbție se află în "concurență" pentru a captura fotonii care străbat ariile comune de acțiune încât relația  $-\Delta I \sim n_0$  ar trebui corectată în mod corespunzător.

Modelele fizicii clasice sunt construite pe baza concepției potrivit căreia toate

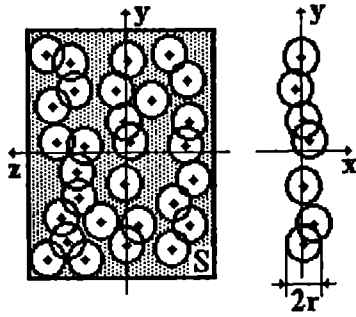


Figura IV.3: Distribuția centrilor absorbanți în cazul  $n_0\sigma > S$

fenomenele au drept cauză diverși factori proveniți din "exterior". Din această perspectivă o relație de forma  $-\Delta I \sim I$  este ciudată deoarece ea arată că (cel puțin parțial) fenomenul de absorbție se generează din el însuși. De altfel, însăși ideea că un centru de absorbție poate captura oricât de mulți fotoni aflați simultan în aria sa de acțiune, pare excesivă. Pentru a înțelege mai exact semnificația relației  $-\Delta I \sim I$ , să revenim la situația ilustrată în figura IV.2. Nu este dificil să observăm că mărimea

$$p(y, z) \doteq \frac{n_0\sigma}{S} = \text{const} < 1 \quad (\text{IV.4})$$

exprimă *distribuția de probabilitate geometrică* (probabilitatea pe unitatea de arie) pentru ca un foton să nu străbată "grosimea" unui strat elementar format din centrii de absorbție, deoarece trecerea sa are loc printr-o zonă de captură. Dacă ne imaginăm cazul a 2 fotoni, așezați într-un *fascicol omogen*, este clar că șansa ca cel puțin unul dintre ei să fie absorbit în aria de captură  $n_0\sigma$  se dublează. Generalizând, pentru un *flux omogen* format din  $N_f$  fotoni în unitatea de volum, *probabilitatea absorbției* pe întreaga arie  $S$  va fi

$$P = (N_f S) p = \frac{I n_0 \sigma}{h\nu v} = \frac{I_n n_0 \sigma}{v} \sim I n_0 \sigma \quad (\text{IV.5})$$

în care  $N_f S$  exprimă numărul de fotoni "dintr-un front de undă plană", iar

$$I_n = N_f v = \frac{I}{h\nu} \quad (\text{IV.6})$$

este *intensitatea normală* (pe care o vom folosi mai târziu). În cazul nostru, acest număr se calculează pornind de la energia  $W$  conținută într-un volum  $Sv\Delta t$

$$W = wSv\Delta t = N_f h\nu Sv\Delta t = IS\Delta t \quad (= I_n h\nu S\Delta t) \quad (\text{IV.7})$$

în care  $w$  este densitatea de energie iar  $v$  este viteza de fază. Este clar că numărul

de fotoni din acest volum este

$$N_{tot} = \frac{W}{h\nu} = N_f S v \Delta t (= I_n S \Delta t) \quad (IV.8)$$

iar, dacă vrem să exprimăm numărul fotonilor într-un plan perpendicular direcției de propagare (de fapt, numărul de fotoni pe unitatea de lungime luată pe direcția de propagare), avem

$$N_{plan} = \frac{N_{tot}}{v \Delta t} = N_f S (= \frac{I_n S}{v}) \quad (IV.9)$$

Aceste considerații ne permit să desprindem următoarele concluzii:

- secțiunea eficace de absorbție  $\sigma$  aduce în discuție reprezentări probabilistice;
- expresia  $-\Delta I \sim I$ , fiind o parte eliptică a relației  $-\Delta I \sim I n_0 \sigma$ , nu are un sens bine determinat când este luată separat. La rândul ei, așa cum vom vedea puțin mai departe, relația completă  $-\Delta I \sim I n_0 \sigma$  este în acord cu prevederile teoriei cinetice a proceselor, care arată că o secțiune eficace de proces multiplu (cu mai mulți participanți) apare totdeauna împreună (în produs) cu concentrațiile partenerilor implicați.

*Observație:* Discuția precedentă arată motivele pentru care substituirea expresiei (IV.2) prin

$$-\Delta I = I k \Delta x$$

se face în dauna inteligibilității schemei clasice de modelare a absorbției.

Urmărind în continuare să ilustrăm raționamentul clasic care conduce la obținerea legii absorbției, nu vom aplica ecuației (IV.2) trecerea la limită ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{dI}{dx}$ ) urmată de integrare, ci vom prefera să aplicăm expresiei (IV.3) procedura inducției. Astfel, scriind formal această relație pentru cazul unui strat de grosime  $2\Delta x$  găsim succesiv

$$\begin{aligned} I(x + 2\Delta x) &= I((x + \Delta x) + \Delta x) \\ &= I(x + \Delta x) \cdot (1 - n_0 \sigma \Delta x) \\ &= I(x) \cdot (1 - n_0 \sigma \Delta x)^2 \end{aligned}$$

încât, generalizând, pentru un strat de grosime  $m\Delta x$

$$I(x + m\Delta x) = I(x) \cdot (1 - n_0 \sigma \Delta x)^m \quad (IV.10)$$

Creșterea grosimii stratului ne deplasează din punctul  $x$  în  $x + m\Delta x$ . Nimic nu ne împiedică să admitem că prin aplicarea succesivă a acestui procedeu am ajuns exact la grosimea de strat  $L$ , a cărei absorbție doream s-o calculăm. Această

ipoteză devine adevărată din momentul în care impunem egalitatea

$$L = m\Delta x \quad (\text{IV.11})$$

Substituind grosimea de strat  $\Delta x$  din (IV.10) cu valoarea extrasă din (IV.11) găsim

$$I(x + L) = I(x) \cdot \left(1 - \frac{n_0 \sigma L}{m}\right)^m$$

sau, introducând o nouă notație prin

$$\varphi \equiv -\frac{n_0 \sigma L}{m} \quad (\text{IV.12})$$

obținem

$$I(x + L) = I(x) \cdot \left[(1 + \varphi)^{\frac{1}{\varphi}}\right]^{-n_0 \sigma L} \quad (\text{IV.13})$$

Rezultatul la care am ajuns poate naște o singură incertitudine, legată de măsura în care eșantionarea grosimii  $L$  (furnizată de  $\Delta x$  conform cu (IV.11)) este sau nu grosieră, limitând astfel capacitatea expresiei (IV.13) de a urmări în mod exact variația lui  $I$ . Această eventualitate se poate elimina dacă "afănăm" complet intervalul  $L$ , impunând  $m \rightarrow \infty$ . Este ușor de văzut că

$$m \rightarrow \infty \Rightarrow (\Delta x, \varphi) \rightarrow 0 \quad (\text{IV.14})$$

ceea ce ne permite să invocăm un rezultat clasic, datorat lui *Euler*

$$\forall \varphi, \lim_{\varphi \rightarrow 0} (1 + \varphi)^{\frac{1}{\varphi}} = e \quad (\text{IV.15})$$

Pe această bază expresia (IV.13) devine

$$I(x + L) = I(x) \cdot \exp(-n_0 \sigma L) \quad (\text{IV.16})$$

relație care exprimă *legea absorbției*: intensitatea (aici  $I(x)$ ) unui fascicol luminos care trece printr-un mediu absorbant scade în raport exponențial cu grosimea  $L$  a stratului străbătut.

Notând  $I_0 = I(0)$  și impunând re-etalonarea

$$x \rightarrow 0 ; L \rightarrow x$$

legea absorbției capătă forma sa obișnuită

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(-n_0 \sigma x) \quad (\text{IV.17})$$

## 2.1 Coeficientul liniar de absorbție

Ținta raționamentului clasic fiind atinsă, vom reveni la procedeele calculului

diferențial. O primă relație pe care o transcriem este (IV.2)

$$-dI(x) = I(x)n_0\sigma dx \quad (IV.18)$$

Introducând *coeficientul liniar de absorbție* prin

$$k = n_0\sigma \quad (IV.19)$$

avem

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(-kx) \quad (IV.20)$$

relație care sprijină definiția uzuală a coeficientului liniar de absorbție ( $k$  reprezintă inversul distanței la care intensitatea scade de  $e$  ori).

Remarcabil este că relația (IV.20) ne permite să dăm coeficientului de absorbție și o *definiție operatorială* prin

$$k = -\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} \quad (IV.21)$$

formă pe care o vom folosi în studiul absorbției neliniare.

Notă: După cum putem remarca, forma (IV.17) separă legătura naturală a intensității cu  $n_0$  și  $\sigma$ , așa cum este ea pusă în evidență în relația (IV.5). Ca urmare, o integrală precum

$$\int_0^\infty I(x)dx = \frac{I_0}{n_0\sigma}$$

are o semnificație obscură. În mod opus, expresia

$$p(x) = \frac{I(x)n_0\sigma}{I_0} \quad (IV.22)$$

reprezintă distribuția de probabilitate a procesului de absorbție (probabilitatea pe unitatea de lungime). Ținând seama de (IV.17), probabilitatea absorbției pe segmentul  $[0, x_A]$  este

$$P_A = \int_0^{x_A} \frac{I(x)n_0\sigma}{I_0} dx = \exp(-n_0\sigma x_A) \quad (IV.23)$$

În mod evident, probabilitatea ca un fascicol să fie complet absorbit de-a lungul întregii semiaxe pozitive este egală cu certitudinea. Potrivit expresiei (IV.23)

$$P_\infty = \lim_{x_A \rightarrow \infty} P_A = 1 \quad (IV.24)$$

Alternativ

$$p(x) = \frac{I(x)n_0\sigma}{I_0} = -\frac{1}{I_0} \frac{dI}{dx} \quad (IV.25)$$

încât

$$P_\infty = \int_0^\infty p(x)dx = - \int_{I_0}^{I_\infty} \frac{dI}{I_0} = 1$$

unde am ținut seama că, din motive fizice,  $I_\infty = 0$ .

### 3. Deducerea legii absorbției pe baza teoriei cinetice

Teoria cinetică a proceselor afirmă că doi participanți (proces binar), având concentrațiile  $c_1$  și  $c_2$ , pot genera interacții cu o rată (număr de procese pe unitatea de volum și secundă) care este proporțională atât cu produsul concentrațiilor cât și cu valoarea medie pe spațiul vitezelor a produsului  $\sigma v$ :

$$\frac{dn}{dt} = c_1 c_2 \langle \sigma v \rangle \quad (IV.26)$$

unde, desemnând prin  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  funcția de distribuție completă, avem

$$\langle \sigma v \rangle = \int \sigma v f(\vec{r}, \vec{v}, t) dv \quad (IV.27)$$

În cazul unui fascicol de tip undă plană omogenă, în care toți fotonii au aceeași viteză (fascicol monocinetic)

$$\langle \sigma v \rangle = \sigma v \quad (IV.28)$$

Numărul de procese care au loc în unitatea de volum și timp poate fi estimat prin variația densității de energie

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{h\nu} \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{h\nu v} \frac{dI}{dt} (= -\frac{dN_f}{dt}) \quad (IV.29)$$

unde am folosit și (IV.7). Notând prin  $c_2$  concentrația fotonilor (adică  $c_2 = N_f$ , în sensul relației (IV.7)), iar prin  $c_1$  concentrația de centrii absorbânți ( $c_1 = n_0$ ) și punând (IV.29) alături de (IV.28) în (IV.26), găsim

$$-\frac{dI}{dt} = (h\nu v) c_1 c_2 \sigma v = c_1 (h\nu v N_f) \sigma v = n_0 I \sigma \frac{dx}{dt} \quad (IV.30)$$

expresie care echivalează cu (IV.18).

## 4. Efectul unui zgomot local

Potrivit legii Beer-Lambert (în fond, datorită fenomenului de absorbție), într-un mediu absorbant, cu excepția cazului nerealist  $I_0 \rightarrow \infty$ , nu este posibil să găsim o poziție  $x$  pentru care

$$I(x) \succeq I_0 \quad (\text{IV.31})$$

Ca alternativă, în scopul de a anticipa elementele care pot avea un efect în saturarea absorbției, este instructiv să presupunem că în fiecare plan  $x = \text{const}$  al mediului absorbant, sunt distribuite surse punctuale care emit izotrop (deși este suficient dacă emit în direcția de propagare a fascicolului luminos), un "zgomot local"  $C(x)$  de frecvență  $\omega$  identică cu cea a radiației de intensitate  $I(x)$ . Pentru moment nu este relevant să explicăm cum se poate realiza o asemenea distribuție sau ce fel de sursă de energie ar consuma.

Este esențial să sesizăm (vezi și schema din FigIV.1) că problema absorbției se rezumă la relaționarea valorilor intensității semnalului luminos de frecvență  $\omega$ , determinate cu ajutorul unui detector selectiv plasat în mediul absorbant la diverse distanțe de planul de intrare. În acest context, gradul de coerență al semnalului luminos măsurat este fără importanță, motiv pentru care, în mod premeditat, în descrierea surselor  $C(x)$  am presupus că emit "zgomot" de frecvență  $\omega$ .

Pe baza comentariului precedent, putem extinde ecuația (IV.18) pentru a cuprinde și efectul surselor  $C(x)$

$$-dI(x) = I(x)n_0\sigma dx + C(x)dx \quad (\text{IV.32})$$

**Observație:** Făcând abstracție de modul în care a fost construită ecuația precedentă, ea ar putea fi interpretată drept descriere a propagării simultane a două fascicule având aceeași frecvență  $\omega$ . Dintre acestea, unul ar fi supus efectelor absorbției în timp ce al doilea, de intensitate  $C(x)$  s-ar deplasa neatenuat. Este limpede că nici un mediu fizic nu manifestă o asemenea anomalie în comportare, încât acest tip de interpretare a ecuației (IV.32) trebuie discreditat.

Scopul nostru este de a stabili caracteristicile lui  $C(x)$  astfel încât să obținem o saturare (sau o compensare) a absorbției (efect descris prin condiția (IV.31)).

Prin simplă inspecție, este limpede că dacă primul termen din partea dreaptă a relației (IV.32) reprezintă pierderi prin absorbție (apărând ca o entitate algebrică pozitivă) atunci, pentru a le compensa, trebuie să avem  $C(x) \succeq 0$  (ceea ce corespunde în mod firesc unui zgomot emisiv). Mai mult, conservarea valorii

intensității se poate impune din (IV.32), prin condiția  $-dI(x) = 0$ , ceea ce implică

$$C(x) = -I(x)n_0\sigma$$

Cum această relație trebuie să fie valabilă în orice punct  $x$ , atunci pentru  $x = 0$

$$C(0) = -I_0n_0\sigma$$

Remarcând că potrivit expresiei (IV.16), scăderea exponențială este delocalizată, putem observa că un zgomot constant de valoare

$$C(x) = C(0) = -I_0n_0\sigma$$

este suficient pentru a compensa atenuarea produsă prin absorbție.

Aceste concluzii sunt confirmate prin rezolvarea ecuației (IV.32) care se face prin metoda variației constantei. Soluția ecuației omogene, pe care o scriem

$$I(x) = A(x) \cdot \exp(-n_0\sigma x) \quad (\text{IV.33})$$

pune la dispoziție

$$I' = (A' - n_0\sigma A) \cdot \exp(-n_0\sigma x)$$

expresie care, folosită în ecuația neomogenă, conduce la

$$A(x) = - \int_0^x C(x') \exp(n_0\sigma x') dx' + \text{const} \quad (\text{IV.34})$$

Comparând (IV.33) cu (IV.20) pentru  $x = 0$ , constatăm că  $A(0) = I_0$ . Pentru același punct, ecuația (IV.34) devine

$$\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x C(x') \exp(n_0\sigma x') dx' + \text{const} = \text{const}$$

încât

$$\text{const} = I_0$$

Forma finală a soluției ecuației (IV.32) este

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(-n_0\sigma x) - \int_0^x C(x') \cdot \exp[-n_0\sigma(x - x')] dx' \quad (\text{IV.35})$$

unde am folosit o aranjare care facilitează interpretarea rezultatului. Astfel:

- în lipsa zgomotului ( $C(x) = 0$ ), ecuația (IV.35) coincide cu legea Beer-



Lambert;

- pentru zgomot constant, soluția devine

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(-n_0 \sigma x) - \frac{C}{n_0 \sigma} [1 - \exp(-n_0 \sigma x)]$$

de unde, pentru a satisface condiția (IV.31)

$$-C \geq I_0 n_0 \sigma \quad (\text{IV.36})$$

ceea ce confirmă anticiparea potrivit căreia, pentru compensarea absorbției, zgomotul trebuie să fie de tip emisiv.

- dacă desemnăm intensitatea emisiei locale prin  $E(x) \equiv -C(x)$ , atunci soluția (IV.35) poate fi interpretată în mod direct: intensitatea în oricare punct  $x$  este dată de valoarea intensității  $I_0$  atenuate potrivit distanței  $x$ , la care se adaugă suma tuturor emisiilor având originea în punctele  $x'$ , aparținând intervalului  $[0, x]$ , și care sunt de asemenea atenuate corespunzător distanței  $(x - x')$ .

**Tema I.1** *Demonstrați că dacă în soluția (IV.35) folosim un zgomot de forma*

$$C(x) = C(\alpha x)^m \quad (\text{IV.37})$$

*în care  $\alpha$  intervine din rațiuni de adimensionalizare, condiția (IV.31) este respectată atunci când*

$$-C(\alpha x)^m \geq I_0 n_0 \sigma \quad (\text{IV.38})$$

*Sugestie: Începeți prin a demonstra relația*

$$\int_0^x y^m \cdot \exp[-k(x-y)] dy = \frac{(-1)^m m!}{k^{m+1}} \left[ \sum_{j=0}^m \frac{(-kx)^j}{j!} - \exp(-kx) \right]$$

## 4.1 Coeficientul neliniar de absorbție

Pomind de la ecuația (IV.32), putem introduce *coeficientul neliniar de absorbție* al mediului "zgomotos" făcând apel la aceeași definiție operatorială (IV.21), folosită pentru cazul mediilor liniare

$$k_{nel} \equiv -\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = n_0 \sigma + \frac{C(x)}{I(x)} = k + \frac{C(x)}{I(x)} \quad (\text{IV.39})$$

Faptul că în orice loc, valorile lui  $k_{nel}$  depind în mod explicit de tăria câmpului luminos (prin intensitatea  $I(x)$ ), justifică plasarea fenomenului de absorbție descris de (IV.39) în domeniul de interes al Opticii neliniare.

Dacă ne plasăm în cazul zgomotului constant și ținem seama de inegalitatea

(IV.36) ( $C < -I_0 n_0 \sigma$ ), atunci

$$k_{nel} < 0 < k \quad (IV.40)$$

ceea ce înseamnă că absorbția neliniară este mai mică decât cea liniară ( $k_{nel} < k$ ), sau chiar, că suntem în prezența unei absorbții negative ( $k_{nel} < 0$ ), fapt care indică amplificarea radiației incidente.

Deși discuția mediului "zgomotos" a fost strict ilustrativă pentru mecanismul care poate conduce la limitarea absorbției, trebuie să subliniem că mediul pe care tocmai l-am studiat conține caracteristici artificiale, responsabile de introducerea unor consecințe bizare. Astfel, în (IV.39), efectul neliniar ar deveni din ce în ce mai puternic ( $k_{nel} \sim \frac{C(x)}{I(x)} \rightarrow -\infty$ ) pe măsură ce intensitatea semnalului luminos întrebuițat s-ar reduce ( $I_0 \rightarrow 0 \Rightarrow I(x) \rightarrow 0$ ), ceea ce, în mod evident, este imposibil.

## 5. Dinamica locală descrisă prin ecuații de rată

Cunoscând comportarea spațială impusă de absorbție oricărui câmp luminos staționar, să trecem la analiza mecanismului local care stă în spatele acestui fenomen.

Deoarece primii și cei mai importanți absorbanți saturabili sunt coloranții organici (în soluție), vom avea în vedere structura acestora. Interacția cu radiația electromagnetică se bazează pe o schemă energetică cu trei nivele, ilustrată în Fig. IV.4. Prin absorbție rezonantă de radiație, nivelul energetic superior se populează pe seama scăderii gradului de ocupare a nivelului fundamental (fenomenul este posibil dacă  $E_3 - E_1 = \hbar\omega$ ).

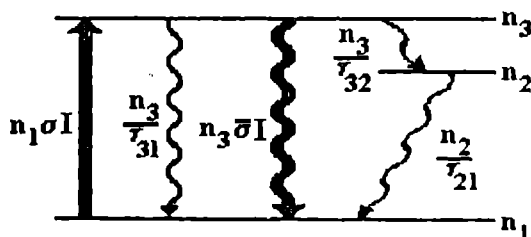


Figura IV.4: Schema nivelelor energetice ale unui absorbant saturabil

Observație: Dacă volumul  $dV$  conține  $dN$  sisteme, dintre care  $dN_1$  se

află pe starea "1",  $d\bar{N}_2$  pe starea "2" și  $d\bar{N}_3$  pe starea "3" ( $d\bar{N}_1 + d\bar{N}_2 + d\bar{N}_3 = d\bar{N}$ ), atunci

$$c_i = \frac{d\bar{N}_i}{dV}, i = 1, 2, 3$$

exprimă concentrațiile acestor sisteme pe cele trei stări de energie, iar

$$n_0 = \sum_{i=1}^3 c_i (= \frac{d\bar{N}}{dV})$$

concentrația totală a sistemelor. În această situație, numerele

$$n_i = \frac{c_i}{n_0} (= \frac{d\bar{N}_i}{d\bar{N}}), i = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.41})$$

reprezintă populațiile normalizate ale celor trei nivele de energie. Între aceste valori are loc relația evidentă

$$\sum_{i=1}^3 n_i = 1 \quad (\text{IV.42})$$

Aplicând relația (IV.26) la condițiile care ne interesează vom pune  $c_1 = n_0$ ,  $c_2 = N_f$ . Ținând seama de (IV.7), putem exprima rata absorbțiilor sub forma

$$\frac{dn}{dt} = n_0 \sigma N_f v = I_n n_0 \sigma \quad (\text{IV.43})$$

Este evident că rata proceselor de absorbție este egală cu rata scăderii populației nivelului fundamental, adică

$$\frac{dn}{dt} = - \frac{dc_1}{dt} \quad (\text{IV.44})$$

încât

$$\frac{dc_1}{dt} = - I_n n_0 \sigma \quad (\text{IV.45})$$

ceea ce, exprimat prin populații normalize înseamnă

$$\frac{dn_1}{dt} = - I_n \sigma \quad (\text{IV.46})$$

Dacă aplicăm riguros relația (IV.26), atunci forma corectă a părții drepte a relației (IV.45) este  $-I_n n_0 n_1 \sigma$ . Astfel, se vede că forma  $-I_n \sigma$  din (IV.46) este valabilă numai atunci când, datorită valorii mici a intensității luminoase, absorbția este nesemnificativă și  $n_2 \approx n_3 \approx 0$ .

În concluzie, rata de scădere a populației nivelului fundamental, ca urmare a absorbției este

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1\sigma I_n \quad (IV.47)$$

Așa cum arată Fig.IV.4, există 5 procese importante, care influențează gradul de ocupare al diverselor nivele energetice și, totodată, populația fonică de frecvență  $\omega$  (intensitatea luminoasă). Acestea sunt:

- *Absorbția rezonantă*, care transferă sisteme din starea fundamentală "1" pe starea excitată "3", cu rata  $n_1\sigma I$ , fapt deja discutat în legătură cu relația (IV.47). Scăderii populației stării fundamentale îi corespunde o creștere corespunzătoare a populației nivelului "3"

$$\frac{dn_3}{dt} = n_1\sigma I_n \quad (IV.48)$$

- *Emisia coerentă*, care este un proces invers absorbției rezonante. Dacă desemnăm prin  $\bar{\sigma}$  secțiunea eficace de emisie coerentă, vom putea exprima ratele opuse

$$\begin{aligned} \frac{dn_3}{dt} &= -n_3\bar{\sigma} I_n \\ \frac{dn_1}{dt} &= n_3\bar{\sigma} I_n \end{aligned} \quad (IV.49)$$

în timp ce numărul de fotoni crește corespunzător relației (IV.44). Pentru nivele "înguste" de energie,  $\sigma = \bar{\sigma}$ .

- *Emisia spontană*, care depopulează nivelul "3" în favoarea nivelului fundamental, fără a avea un proces "oglină". Dacă  $\tau_{31}$  desemnează timpul de viață al stării "3", atunci rata depopulării produsă prin emisie spontană este

$$\frac{dn_3}{dt} = -\frac{n_3}{\tau_{31}} \quad (IV.50)$$

cu urmare

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{n_3}{\tau_{31}}$$

- Procesele de *dezexcitare neradiativă* care implică nivelele (3,2) și (2,1). Ratele de schimbare a populațiilor afectate sunt

$$\begin{aligned} \frac{dn_3}{dt} &= -\frac{n_3}{\tau_{32}} \\ \frac{dn_2}{dt} &= -\frac{n_2}{\tau_{21}} \end{aligned} \quad (IV.51)$$

și au drept perechi

$$\begin{aligned}\frac{dn_2}{dt} &= \frac{n_3}{\tau_{32}} \\ \frac{dn_1}{dt} &= \frac{n_2}{\tau_{21}}\end{aligned}\quad (IV.52)$$

Cumulând rezultatele precedente găsim

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= -n_1\sigma I_n + n_2\frac{1}{\tau_{21}} + n_3\left(\frac{1}{\tau_{31}} + \bar{\sigma}I_n\right) \\ \frac{dn_2}{dt} &= -n_2\frac{1}{\tau_{21}} + n_3\frac{1}{\tau_{32}} \\ \frac{dn_3}{dt} &= n_1\sigma I_n - n_3\left(\frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} + \bar{\sigma}I_n\right)\end{aligned}\quad (IV.53)$$

care reprezintă sistemul ecuațiilor de rată pentru schema de nivele din Fig.IV.4. Aceste ecuații se completează cu:

- relația (IV.42), motiv pentru care cele trei ecuații de rată nu sunt independente;
- condițiile inițiale (funcție de caz);
- relația care (în mod aparent) exprimă variația intensității luminoase (vezi (IV.28) pentru dimensiuni)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_n &= -n_0n_1\sigma I_nv + n_0n_3\left(\frac{v}{\tau_{31}} + \bar{\sigma}I_nv\right) \\ &= n_0v\left[(\bar{\sigma}n_3 - \sigma n_1)I_n + \frac{n_3}{\tau_{31}}\right]\end{aligned}\quad (IV.54)$$

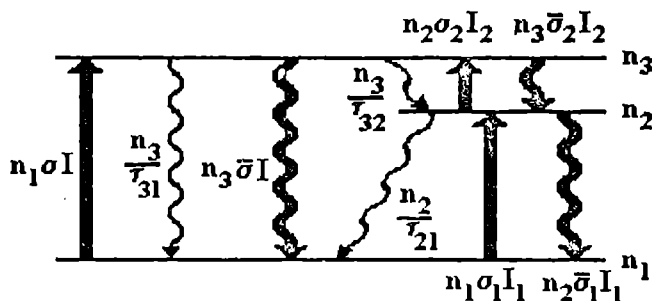


Figura IV.5: Tranzițiile posibile într-un sistem cu trei nivele de energie

## Tema 1.2 Scrieți ecuațiile de rată pentru procesele ilustrate în Fig. IV.5.

### 5.1 Forma coeficientului neliniar de absorbție

Așa după cum sugeram în finalul secțiunii precedente, relația (IV.54) nu exprimă decât în mod aparent variația intensității luminoase și deci ar fi eronat să o folosim pentru a "rafina" legea absorbției scriind

$$dI = -n_0 \left[ n_1 \sigma - n_3 \left( \frac{h\nu}{I\tau_{31}} + \bar{\sigma} \right) \right] I dx \quad (IV.55)$$

Motivul este legat de faptul că numai o fracție a radiației produse prin emisie spontană revine pe direcția de incidență. Cealaltă parte revine pierderilor radiative și este pusă în contul proceselor de disipare. În mod opus, radiația produsă prin emisie stimulată se propagă pe direcția fascicolului incident ceea ce face ca aceasta să contribuie integral în bilanțul procesului de absorbție.

Pentru a estima contribuția emisiei spontane, ne vom folosi de caracterul ei izotrop. Ca urmare, o treime din întreaga "cantitate" revine fiecărei direcții spațiale, iar din această fracție, o jumătate se propagă în sensul dorit. Devine clar că modificarea necesară în (IV.55) este legată de substituția

$$\frac{h\nu}{I\tau_{31}} \rightarrow \frac{h\nu}{6I\tau_{31}}$$

Astfel, variația intensității prin absorbție neliniară devine

$$dI = -n_0 \left[ n_1 \sigma - n_3 \left( \frac{h\nu}{6I\tau_{31}} + \bar{\sigma} \right) \right] I dx \quad (IV.56)$$

în timp ce, prin definiția (IV.21), coeficientul neliniar de absorbție primește expresia

$$k_{nel} = n_0 n_1 \sigma \left[ 1 - \frac{n_3}{n_1} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{6I_n \sigma \tau_{31}} \right) \right] \quad (IV.57)$$

în care am introdus  $I_n = \frac{I}{h\nu}$  și am factorizat contribuția  $k = N n_1 \sigma$  care corespunde coeficientului liniar de absorbție ( $n_0 n_1 = c_1 \approx n_0$  pentru cazul intensităților mici).

Dependența lui  $k_{nel}$  de  $I$  este în parte evidentă. Prin această legătură, expresia (IV.57) suferă de același comportament artificial ca și soluția (IV.39) obținută pentru mediul zgomotos. Spre deosebire de acel caz, de această dată în (IV.57) există și o parte "ascunsă" a dependenței de  $I_n$ , care se naște din faptul că atât  $n_1$  cât și  $n_3$  sunt funcții de  $I_n$  (după cum se poate sesiza inspectând sistemul ecuațiilor de rată (IV.53)).

Pentru moment, lasăm la o parte discuția privind existența unui punct de

echilibru, ca și pe aceea privind stabilitatea acestui punct de echilibru. În ipoteza regimului staționar (numit și "permanent", "steady-state" sau "de echilibru"), ecuațiile de rată (IV.53) se reduc la un sistem algebric omogen din care (cu ajutorul identității (IV.42)) deducem

$$\begin{aligned} n_{1e} &= \frac{\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}} + \bar{\sigma} I_n}{\left(\sigma + \bar{\sigma} + \sigma \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}\right) I_n + \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}} \\ n_{2e} &= \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}} \frac{\sigma I_n}{\left(\sigma + \bar{\sigma} + \sigma \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}\right) I_n + \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}} \\ n_{3e} &= \frac{\sigma I_n}{\left(\sigma + \bar{\sigma} + \sigma \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}\right) I_n + \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}} \end{aligned} \quad (\text{IV.58})$$

Introducând  $n_{1e}$  și  $n_{3e}$  în (IV.57), în urma unor calcule elementare, obținem

$$k_{nel} = n_0 \sigma \frac{\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{5}{6\tau_{31}}}{\left(\sigma + \bar{\sigma} + \sigma \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}\right) I_n + \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}}$$

sau, folosind notațiile

$$\begin{aligned} k_0 &\doteq n_0 \sigma \frac{\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{5}{6\tau_{31}}}{\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}} \\ I_{sat} &\doteq \frac{\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}}{\sigma \left(1 + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}\right)} \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

găsim

$$k_{nel} = \frac{k_0}{1 + \frac{I_n}{I_{sat}}} \quad (\text{IV.60})$$

expresie care reprezintă forma finală a *coeficientului nelinier de absorbție*.

- Note: i) Deoarece în expresia (IV.60) avem de a face cu raportul adimensional  $\frac{I_n}{I_{sat}}$ , este clar că el poate fi înlocuit oricând cu  $\frac{I_n}{I_{sat}^*}$ , printr-o definiție convenabilă a lui  $I_{sat}^*$   
ii) Pentru semnale foarte slabe ( $I_n \ll I_{sat}$ )

$$k_{nel} \doteq k_0$$

ceea ce arată că valoarea  $k_0$  exprimă coeficientul de absorbție pentru semnale slabe. Din prima relație a sistemului (IV.59) putem sesiza apropierea între  $k_0$  și coeficientul linear de absorbție  $k$ , așa cum este

acesta definit de legea Beer-Lambert (vezi (IV.19))

$$k_0 \approx n_0 \sigma = k$$

iii) Se observă că pe măsură ce  $I_n$  crește,  $k_{nel}$  scade. Mai mult

$$k_{nel}|_{I_n \gg I_{sat}} \rightarrow 0 \quad (IV.61)$$

rămânând mereu pozitiv. Așadar, odată cu creșterea intensității  $I_n$ , mediul de propagare devine transparent (neabsorbant). Deși tranziția între regimul de absorbție și cel de transparență nu este bruscă, totuși, valoarea intensității pentru care coeficientul de absorbție pentru semnale slabe se înjumătățește, se numește intensitate de saturație ( $I_{sat}$ ) și marchează convențional zona de comutare.

iv) Cel puțin din rațiuni dimensionale, a doua relație din setul (IV.59) se poate scrie

$$I_{sat} \sigma = \frac{\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}}{\left(1 + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}\right)} \equiv \frac{1}{\tau_e} \quad (IV.62)$$

mărimea  $\tau_e$  este o măsură a ratei cu care se desfășoară procesele dinamice care însoțesc starea de transparență. Pentru sisteme cu nivele subțiri ( $\bar{\sigma} = \sigma$ )

$$\tau_e = \frac{2 + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}}{\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}} \quad (IV.63)$$

## 5.2 Echilibrul dinamic la intensități luminoase mari

Să presupunem că sistemele care interacționează cu fasciculul luminos sunt plasate într-un câmp optic foarte intens. În aceste condiții, soluțiile (IV.58) devin

$$\begin{aligned} n_{1e} &= \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{1}{1 + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}} \\ n_{2e} &= \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}} \frac{1}{1 + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}} \\ n_{3e} &= \frac{1}{1 + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}} \end{aligned} \quad (IV.64)$$

relații care ne conduc la o nouă expresie pentru coeficientul nelinier de absorbție

$$k_{nel} = \frac{n_0}{6I_n \tau_{31}} \frac{1}{1 + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}} \quad (IV.65)$$



În contrast cu valoarea obținută în (IV.61), acum, valoarea lui  $k_{nel}$  este negativă ( $I_n \gg 1 \rightarrow |k_{nel}| \ll 1$ ) ceea ce face ca mediul să prezinte slabe proprietăți amplificatoare. Această sensibilitate (fragilitate) a lui  $k_{nel}$  față de calea de introducere a condiției  $I_n \rightarrow \infty$  este o indicație a influenței puternice pe care o are comportarea variabilă a lui  $I_n$  asupra populațiilor  $n_1, n_2, n_3$ .

În cazul în care  $\tau_{21} \ll \tau_{32}$  (adică, atunci când nivelul energetic intermediar se goleşte mai repede decât i se furnizează noi sisteme)

$$n_{2e} \approx 0 \quad (\text{IV.66})$$

ceea ce arată că mecanismul de interacție funcționează ca și pentru un sistem cu două nivele energetice. Dacă ținem seama de soluțiile (IV.58), vedem că acest rezultat este general.

Dacă admitem că avem de a face cu sisteme având 3 nivele energetice, atunci putem face două constatări interesante:

- dacă este valabilă inegalitatea  $\tau_{21} \ll \tau_{32}$  și dacă, în plus, nivele energetice sunt subțiri ( $\bar{\sigma} = \sigma$ ), atunci populațiile  $n_{1e}$  și  $n_{3e}$  sunt egale

$$\begin{aligned} n_{1e} &= n_{3e} = \frac{1}{2} \\ n_{2e} &\approx 0 \end{aligned}$$

- dacă  $\tau_{21} = \tau_{32}$ , atunci

$$n_{1e} = n_{2e} = n_{3e} = \frac{1}{3}$$

### 5.3 Specificul echilibrului dinamic

Deși în cazul staționar ( $\frac{dn_i}{dt} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) populațiile normate devin valori constante (independente de timp), ceea ce se realizează în mod concret este un echilibru dinamic. El constă în aceea că sistemele care alimentează populațiile  $n_i$  sunt mereu altele, în timp ce prin circuitul de dezexcitare neradiativă (sau, mai corect spus: și prin acesta) se asigură atenuarea radiației incidente.

Pentru a exemplifica aceste lucruri, să discutăm o schemă minimală de procese succesive care pot constitui un mecanism de absorbție. Din procesele ilustrate de Fig. IV.4 vom reține absorbția rezonantă și procesele neradiative prin care populația nivelului "3" se reîntoarce pe nivelul fundamental. Acestea din urmă vor fi asociate într-un singur proces, așa cum este ilustrat în Fig. IV.6.

Ne propunem să determinăm valoarea intensității și a populațiilor de echilibru în ipoteza că în momentul inițial

$$\begin{aligned} I &= I_0 \\ n_1(t=0) &= 1 \end{aligned}$$



Figura IV.6: Schema proceselor minimale necesare mecanismului de absorbție

$$n_3(t = 0) = 0 \quad (IV.67)$$

întregul sistem fiind închis într-o incintă adiabatică (în cazul nostru este suficient ca pereții să fie perfect reflectători).

Din cauza constrângerii

$$n_1(t) + n_3(t) = 1, \forall t$$

avem o singură ecuație de rată

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1\sigma I_n + n_3\frac{1}{\tau^*} \quad (IV.68)$$

În momentul atingerii stării de echilibru ( $\frac{dn_1}{dt} = 0$ ), desemnând prin  $I_n^*$  valoarea intensității, avem

$$\begin{aligned} n_{1e} &= \frac{1}{\sigma I_n^* \tau^* + 1} \\ n_{3e} &= 1 - n_{1e} = \frac{\sigma I_n^* \tau^*}{\sigma I_n^* \tau^* + 1} \end{aligned} \quad (IV.69)$$

Este clar că  $1 - n_{1e}$  (adică  $n_{3e}$ ), măsoară variația populației  $n_1$  între starea inițială și cea de echilibru și trebuie să avem

$$n_0(1 - n_{1e}) = \frac{I_n - I_n^*}{v} (= N_f - N_{fc}) \quad (IV.70)$$

ecuație care, împreună cu expresia lui  $n_{1e}$  ne permite să obținem  $I_n^*$ .

Așadar, pentru a se atinge echilibrul, radiația suferă o absorbție (în sensul relației (IV.54)) prin care  $I_n$  scade la valoarea  $I_n^*$ . Apoi, în fiecare interval  $\Delta t$  au loc  $n_0 n_{3e} \frac{\Delta t}{\tau^*}$  dezexcitări care, datorită creșterii populației nivelului fundamental, accentuează absorbțiile conducând la micșorarea lui  $I_n^*$ . Pentru a conserva constanța acestei valori, trebuie să aducem din afara cavității adiabactice exact  $n_0 n_{3e} \frac{1}{\tau^*}$  fotoni pe unitatea de timp. Cu alte cuvinte, trebuie să injectăm un fascicol de intensitate  $I_n - I_n^*$ . Acesta va readuce populațiile celor două nivele energetice

la valorile lor de echilibru (deși, acest lucru se face în mod evident prin excitarea altor sisteme absorbante) menținând  $I_n^*$ .

Dacă păstrăm schema proceselor din Fig.IV.6, dar îndepărtăm cavitatea adiabatică, radiația de intensitate  $I_n^*$  părăsește zona ca efect al propagării. Este clar că în scopul menținerii populațiilor de echilibru (IV.69) avem de "adus din afară", în plus față de  $I_n - I_n^*$ , un nou fascicol de intensitate  $I_n^*$ .

În concluzie, pentru a realiza și menține populațiile de echilibru (IV.69), în condițiile schemei de proces ilustrată în Fig.IV.6 și fără cavitate adiabatică, trebuie să "îmbăiem" sistemele absorbante într-un fascicol de intensitate  $I_n$ . La echilibru, vom obține un fascicol de intensitate  $I_n^*$  care, părăsind zona, poate fi folosit într-un loc imediat vecin, pentru a lansa o nouă schemă de același tip (implicând un alt set de sisteme). Ca efect, va rezulta o a doua valoare de echilibru  $I_n^{**}$  cu ajutorul căreia procesul se poate repeta cu un pas mai departe în spațiu. Aceasta este imaginea de ansamblu a fenomenului de absorbție, rezultat prin înlanțuirea spațială a proceselor locale de care ne-am ocupat.

### 5.3.1 Absorbția neliniară a sistemelor cu două nivele de energie

Deși absorbanții saturabili pun în joc o schemă cu trei nivele de energie, uneori procesul de saturare a absorbției este o temă importantă chiar pentru sistemele de două nivele. Așa se întâmplă în cazul laserilor ideali, care prezintă fenomenul de saturare a amplificării din cauza saturării absorbției. Rezultatele secțiunii precedente permit o abordare imediată a acestui fenomen. Ținând seama de a doua relație a setului (IV.69), expresia (IV.70) se poate scrie

$$\frac{I_n - I_n^*}{v} = n_0 \frac{\sigma I_n^* \tau^*}{\sigma I_n^* \tau^* + 1}$$

sau, folosind  $I_n = \frac{I}{h\nu}$

$$-\frac{\Delta I}{\tau^*} = n_0 \sigma I v \frac{1}{\frac{\sigma \tau^* I}{h\nu} + 1}$$

Cum raportul din partea stângă exprimă variația lui  $I$  în unitatea de timp, adică rata de variație a intensității, el poate fi scris că  $-\frac{dI}{dt}$ . În același timp, cu ajutorul notațiilor

$$\begin{aligned} I_{sat} &= \frac{h\nu}{\sigma \tau^*} \\ k_0 &= n_0 \sigma \\ k_{net} &= \frac{k_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \end{aligned} \quad (IV.71)$$

avem

$$-\frac{dI}{dt} = k_0 I v \frac{1}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} = \frac{k_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} I v = k_{net} I v \quad (IV.72)$$

ceea ce demonstrează faptul că și sistemele cu două nivele de energie manifestă absorbție neliniară, deci prezintă fenomene de saturare.

### 5.3.2 Evoluția spre starea de echilibru în prezența unei intensități constante

Folosind  $n_3 = 1 - n_1$  în (IV.68), găsim

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 \left( \sigma I_n + \frac{1}{\tau^*} \right) + \frac{1}{\tau^*}$$

ecuație pe care o putem rezolva (în acord cu condițiile inițiale (IV.67)) dacă admitem că  $I_n = \text{const.}$  Soluția este

$$n_1(t) = \frac{1}{\sigma I_n \tau^* + 1} + \frac{\sigma I_n \tau^*}{\sigma I_n \tau^* + 1} \exp \left[ - \left( \sigma I_n + \frac{1}{\tau^*} \right) t \right]$$

și vedem că ea îmbracă o formă asemănătoare soluției de echilibru  $n_{1e}$  numai pentru regimul asimptotic ( $t \rightarrow \infty$  sau  $t \gg \frac{\tau^*}{1 + \sigma I_n \tau^*}$ ).

**Tema 1.3** *Considerați cazul în care proceselor ilustrate în Fig. IV.6 li se adaugă emisia stimulată. a) Deduceți expresiile celor două populații de echilibru și stabiliți condițiile în care  $n_{1e} = n_{3e} = \frac{1}{2}$ ; b) Arătați că valoarea intensității de saturație este egală cu jumătate din valoarea dată în prima dintre relațiile (IV.71).*

## 6. Funcția de transmisie

Să integrăm forma diferențială a legii absorbției neliniare (IV.56) sau expresia mai concisă (IV.72). Întrebuițăm metoda separării variabilelor

$$\left( \frac{1}{I} + \frac{1}{I_{sat}} \right) dI = -k_0 dx$$

Notând

$$I(x=0) = I_{in}$$

(în loc de  $I_0$ ) după câteva manevre simple, avem

$$\ln \left( \frac{I}{I_{in}} \right) + \frac{I_{in}}{I_{sat}} \left( \frac{I}{I_{in}} - 1 \right) = -k_0 x \quad (IV.73)$$

Ținând seama de relația de definiție a funcției de transmisie

$$T(x) = \frac{I(x)}{I_{in}} \quad (IV.74)$$

care în mod evident ia valori pe intervalul  $[0, 1]$ , găsim

$$\ln(T) + \frac{I_{in}}{I_{sat}} (T - 1) = -k_0 x \quad (IV.75)$$

Dacă admitem că ne plasăm în situația în care  $I_{sat} \rightarrow \infty$  atunci orice câmp optic este mic. Să notăm prin  $T_0$  transmisia de semnal mic. Atunci relația (IV.75) devine

$$\ln(T_0) = -k_0 x \quad (IV.76)$$

Punând (IV.76) în (IV.75), ajungem la ecuația implicită

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{I_{in}}{I_{sat}} (T - 1) = 0$$

care descrie funcția de transmisie  $T = T\left(\frac{I_{in}}{I_{sat}}\right)$  și unde transmisia de semnal mic  $T_0$  joacă rolul unui parametru. Figura IV.7 ilustrează această dependență pentru patru valori distincte ale lui  $T_0$ .

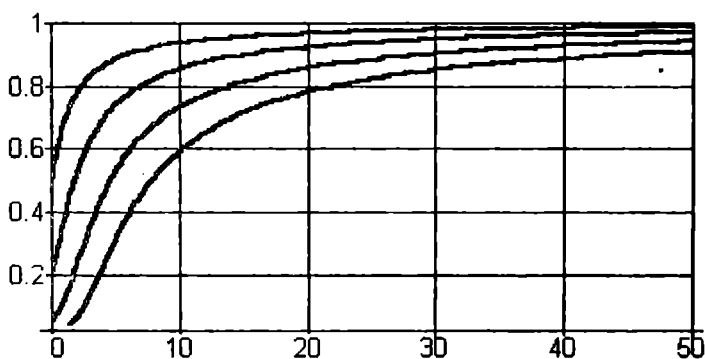


Figura IV.7: Funcția  $T\left(\frac{I_{in}}{I_{sat}}\right)$  pentru diverse valori  $T_0$

După cum se poate observa, chiar și un mediu practic opac ( $T_0 = 1\%$ ), supus unui fascicul de intensitate  $I_{in} = 50I_{sat}$  devine transparent ( $T > 90\%$ ).

## 7. Analiza ecuațiilor de rată

Obținerea soluțiilor sistemului algebric-diferențial (IV.53) este importantă atât pentru a putea preciza condițiile de existență a populațiilor de echilibru (IV.58), cât și pentru a da o estimare timpului necesar instalării unui regim permanent.

Analiza acestei probleme dinamice este complicată deoarece, în afara sistemului de ecuații menționat, trebuie avută în vedere și ecuația (IV.54), care descrie comportarea intensității luminoase.

## 7.1 Soluțiile ecuațiilor de rată pentru intensitate constantă

Pentru început, vom discuta rezolvarea sistemului (IV.53) în cazul în care intensitatea luminoasă rămâne constantă. Celor trei ecuații de rată trebuie să le alăturăm identitatea (IV.42), iar ansamblul obținut trebuie să primească un set pertinent de condiții inițiale.

### 7.1.1 Comutarea spre starea de transparență indusă

Vom admite că ansamblul de sisteme absorbante se află pe starea fundamentală în momentul plasării sale în fascicolul luminos, deci

$$\begin{aligned} n_1(t = 0) &= 1 \\ n_2(t = 0) &= n_3(t = 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

Observăm că:

- a doua ecuație a sistemului (IV.53) ne permite să deducem  $n_3 = n_3(n_2, \frac{dn_2}{dt})$ , concret

$$n_3 = \tau_{32} \left( \frac{dn_2}{dt} + \frac{n_2}{\tau_{21}} \right) \quad (\text{IV.78})$$

- introducând expresia precedentă în a treia ecuație a sistemului obținem  $n_1 = n_1(n_2, \frac{dn_2}{dt}, \frac{d^2n_2}{dt^2})$  ceea ce înseamnă

$$n_1 = \frac{\tau_{32}}{\sigma I_n} \left[ \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} + \bar{\sigma} I_n \right) \left( \frac{dn_2}{dt} + \frac{n_2}{\tau_{21}} \right) + \frac{d^2n_2}{dt^2} + \frac{1}{\tau_{21}} \frac{dn_2}{dt} \right] \quad (\text{IV.79})$$

Substituind expresiile  $n_1(n_2, \frac{dn_2}{dt}, \frac{d^2n_2}{dt^2})$  și  $n_3(n_2, \frac{dn_2}{dt})$  în prima ecuație din (IV.53), găsim

$$\frac{d^3n_2}{dt^3} + \alpha \frac{d^2n_2}{dt^2} + \beta \frac{dn_2}{dt} = 0 \quad (\text{IV.80})$$

cu

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{21}} + (\sigma + \bar{\sigma}) I_n \\ \beta &= \left( \frac{\sigma}{\tau_{31}} + \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{\tau_{21}} \right) I_n + \frac{1}{\tau_{21}\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{21}\tau_{32}} \end{aligned} \quad (\text{IV.81})$$

Soluția lui (IV.80) se obține propunând  $n_2 \sim \exp(rt)$ . Ecuația caracteristică

rezultantă conduce la rădăcinile

$$\begin{aligned} r_1 &= 0 \\ r_{2,3} &= \frac{1}{2} \left( -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

de unde vedem că, dacă rădăcinile  $r_{2,3}$  sunt reale atunci ambele sunt și negative.

**Tema I.4** *Demonstrați că pentru ca ecuația caracteristică să aibă rădăcini reale, oricare ar fi intensitatea  $I_n$ , trebuie să fie satisfăcută condiția*

$$\frac{\tau_{21}}{\tau_{31}} + \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma + \bar{\sigma}} > 1 \quad (\text{IV.83})$$

**Tema I.5** *Explicați modul în care trebuie interpretate soluțiile complexe ale populațiilor normale și conduceți pînă la capăt studiul acestui caz.*

Presupunând că  $r_{2,3}$  sunt rădăcini reale, soluția ecuației (IV.80) este

$$n_2(t) = A \exp(r_2 t) + B \exp(r_3 t) + C \quad (\text{IV.84})$$

Observație: Este ușor de văzută că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_2(t) = C$$

ceea ce înseamnă că  $C = n_{2e}$ .

Ținând seama de condiția inițială pentru  $n_2$ , putem elimina  $C$  din (IV.84)

$$n_2(t) = A [\exp(r_2 t) - 1] + B [\exp(r_3 t) - 1]$$

Punând această expresie în (IV.78) și ținând seama că  $n_3(0) = 0$ , găsim

$$Ar_2 + Br_3 = 0 \quad (\text{IV.85})$$

relație care ne permite să eliminăm coeficientul  $B$  care apare în  $n_2(t)$  și  $n_3(t)$  pentru a obține

$$n_2(t) = A \left[ \exp(r_2 t) - 1 - \frac{r_2}{r_3} (\exp(r_3 t) - 1) \right] \quad (\text{IV.86})$$

$$n_3(t) = A\tau_{32} \left[ \left( r_2 + \frac{1}{\tau_{21}} \right) \exp(r_2 t) - r_2 \left( 1 + \frac{1}{r_3 \tau_{21}} \right) \exp(r_3 t) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\tau_{21}} \left( 1 - \frac{r_2}{r_3} \right) \right] \quad (\text{IV.87})$$

ecuații la care se adaugă forma lui  $n_1(t)$  așa cum rezultă din (IV.79), atunci când introducem expresia lui  $n_2(t)$ . Astfel

$$n_1(t) = A \frac{\tau_{32}}{\sigma I_n} \left\{ r_2 \left[ \left( r_2 + \frac{1}{\tau_{21}} \right) \exp(r_2 t) - r_3 \left( 1 + \frac{1}{r_3 \tau_{21}} \right) \exp(r_3 t) \right] + \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} + \bar{\sigma} I_n \right) \left[ \left( r_2 + \frac{1}{\tau_{21}} \right) \exp(r_2 t) - r_2 \left( 1 + \frac{1}{r_3 \tau_{21}} \right) \exp(r_3 t) - \frac{1}{\tau_{21}} \left( 1 - \frac{r_2}{r_3} \right) \right] \right\} \quad (IV.88)$$

Folosind identitatea (IV.42) precizăm valoarea constantei de integrare

$$A = \frac{1}{\tau_{32} \left( \frac{r_2}{r_3} - 1 \right) \left[ \frac{1}{\tau_{32}} + \left( 1 + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \right) \frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\sigma I_n} \left( \frac{1}{\tau_{21} \tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{21} \tau_{32}} \right) \right]} \quad (IV.89)$$

expresie în care dependența temporală a dispărut prin rearanjarea termenilor și prin luarea în considerare a ecuației (IV.80).

### Tema I.6 *Demonstrați că*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_1(t) = n_{1e}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n_2(t) = n_{2e}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n_3(t) = n_{3e}$$

Pe baza inegalității

$$A, B > 0, a > b > 0 \Rightarrow$$

$$(A + B) \exp(-at) < A \exp(-at) + B \exp(-bt) < (A + B) \exp(-bt)$$

putem nota că relaxarea unui proces tranzient, care depinde de suma a două exponențiale, are loc după trecerea unui interval  $t = \frac{1}{b}$ . Cum  $b = \min(a, b)$ , urmează că în cazul soluțiilor  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$  și  $n_3(t)$ , acestea ajung în regim permanent după trecerea unui interval de timp

$$t_c = \max \left( \left| \frac{1}{r_2} \right|, \left| \frac{1}{r_3} \right| \right) = \frac{2}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \quad (IV.90)$$

numit *time de comutare* spre absorbția saturată. Merită notat faptul că  $I_n$  influențează rapiditatea cu care are loc procesul de comutare.

### 7.1.2 Rezolvarea ecuațiilor de rată prin metoda matricială

Notând cu

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{V}_0 = \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} -\sigma I_n & \frac{1}{\tau_{21}} & \frac{1}{\tau_{31}} + \bar{\sigma} I_n \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{21}} & \frac{1}{\tau_{32}} \\ \sigma I_n & 0 & -\frac{1}{\tau_{31}} - \frac{1}{\tau_{32}} - \bar{\sigma} I_n \end{pmatrix} \quad (\text{IV.91})$$

ecuațiile de rată (IV.53) se scriu în mod compact

$$\frac{d}{dt} \vec{V}(t) = M \cdot \vec{V}(t) \quad (\text{IV.92})$$

Fie  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  vectorii proprii ai matricii  $M$ , pentru valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$M \cdot \vec{V}_i = \lambda_i \cdot \vec{V}_i, i = 1, 2, 3$$

Componentele acestor vectori ne ajută să construim matricea

$$F = \begin{pmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{21} & V_{31} \\ V_{12} & V_{22} & V_{32} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.93})$$

și inversa ei  $F^{-1}$ . Teoria generală ne asigură că

$$M_d = F M F^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.94})$$

încât, înmulțind ecuația (IV.92) cu  $F$  și notând

$$\vec{W} = F \vec{V}(t) \quad (\text{IV.95})$$

avem

$$\frac{d}{dt} \vec{W} = F M F^{-1} \cdot F \vec{V}(t) = M_d \cdot \vec{W} \quad (\text{IV.96})$$

ecuație care se integrează imediat

$$\vec{W}(t) = \begin{pmatrix} A \exp(\lambda_1 t) \\ B \exp(\lambda_2 t) \\ C \exp(\lambda_3 t) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.97})$$

Din (IV.95)

$$\vec{V}(t) = F^{-1} \vec{W}(t) \quad (\text{IV.98})$$

expresie pe care o adaptăm condițiilor inițiale prin

$$\vec{V}(t=0) = \vec{V}_0 \quad (\text{IV.99})$$

**Temă 1.7** Rezoluați în mod explicit ecuațiile de rată (IV.53), folosind tehnica matricială.

### 7.1.3 Revenirea la absorbția de semnal mic

La încetarea semnalului luminos ( $I_n = 0$ ), mediul, care se află în regim permanent, revine către starea fundamentală. Pentru a trata această trecere avem de rezolvat sistemul

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= n_2 \frac{1}{\tau_{21}} + n_3 \frac{1}{\tau_{31}} \\ \frac{dn_2}{dt} &= -n_2 \frac{1}{\tau_{21}} + n_3 \frac{1}{\tau_{32}} \\ \frac{dn_3}{dt} &= -n_3 \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} \right)\end{aligned}\quad (IV.100)$$

Pentru condițiile inițiale

$$\begin{aligned}n_1(t = 0) &= n_{1e} \\ n_2(t = 0) &= n_{2e} \\ n_3(t = 0) &= n_{3e}\end{aligned}\quad (IV.101)$$

La echilibru, caracterizat prin  $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = \dot{n}_3 = 0$ , populațiile sunt

$$n_1 = 1; n_2 = n_3 = 0 \quad (IV.102)$$

asa după cum se vede începând cu a treia ecuație a sistemului (IV.100), considerând apoi pe cea de a doua, și utilizând în final (IV.42).

Pentru  $n_3$  este clar că avem de a face cu o relaxare combinată (spre nivelele "2" și "1") a populației de echilibru

$$n_3(t) = n_{3e} \exp \left[ - \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} \right) t \right] \quad (IV.103)$$

Potrivit celei de a doua ecuații a sistemului (IV.100), populația  $n_2$  urmează o scădere ca urmare a procesului neradiativ "2"  $\rightarrow$  "1" la care se adaugă o comportare similară a lui  $n_3(t)$ . Din acest motiv alegem

$$n_2(t) = n_0 \exp \left( - \frac{1}{\tau_{21}} t \right) + n_{00} \exp \left[ - \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} \right) t \right]$$

urmând ca  $n_0$  și  $n_{00}$  să fie precizate prin impunerea condițiilor inițiale. Efectuând calculele necesare găsim

$$n_2(t) = \left[ n_{2e} + \frac{n_{3e}}{\tau_{32} \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} - \frac{1}{\tau_{21}} \right)} \right] \exp \left( - \frac{1}{\tau_{21}} t \right)$$

$$-\frac{n_{3e}}{\tau_{32} \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} - \frac{1}{\tau_{21}} \right)} \exp \left[ - \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} \right) t \right] \quad (\text{IV.104})$$

Pentru  $n_1$ , putem scrie

$$n_1(t) = 1 - n_2(t) - n_3(t)$$

fără a mai scrie și forma explicită a acestui rezultat.

Repetând raționamentul folosit pentru procesul de comutare, vom defini un  *timp de revenire* a materialului la starea sa "normală" (*decomutare*) prin

$$\frac{1}{t_d} = \min \left( \frac{1}{\tau_{21}}, \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} \right) \quad (\text{IV.105})$$

**7.1.3.1 Procesarea pulsurilor de lumină** Existența timpilor  $t_c$  și  $t_d$  permite modificarea formei și duratei pulsurilor de lumină. Figura IV.8 ne ajută să înțelegem principiul acestor acțiuni.

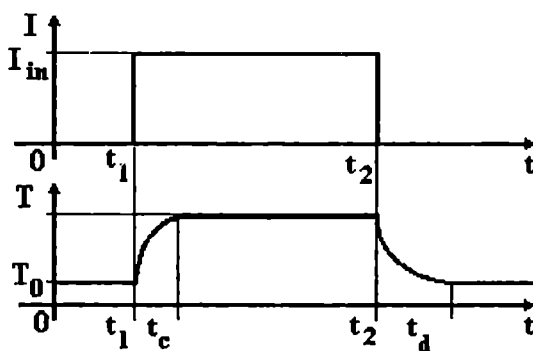


Figura IV.8: Modificarea duratei sau formei unui puls luminos

În partea superioară a acestei figuri este reprezentat un puls dreptunghiular de lumină care durează  $t_2 - t_1$  secunde. Urmare a procesului de saturare a absorbției pulsul luminos are o formă ca cea ilustrată în partea inferioară a figurii IV.8. Este clar că  $t_2 - t_c < t_2 - t_1$  ceea ce înseamnă o scurtare a pulsului luminos.

## 7.2 Dinamica neliniară descrisă prin ecuațiile de rată

### 7.2.1 Observații introductive

Atunci când intensitatea luminoasă este tratată în mod realist, luând în considerare dependența  $I_n = I_n(t)$ , soluțiile sistemului format din ecuațiile (IV.53), (IV.42) și (IV.54) pot prezenta caracteristici neașteptate.

**7.2.1.1 Un prim aspect.** Una dintre complicațiile posibile constă în aceea

că în pofida legăturilor deterministe existente între variabile, prin comportamentul lor soluțiile pot să impună totuși o severă limitare a capacității de predicție asupra stărilor ulterioare ale sistemului, în timp ce precizarea parcursului spre starea inițială a sistemului (retrodictia) poate deveni imposibilă. O asemenea situație este desemnată prin sintagma "haos determinist".

Pentru a da o ilustrare a modului în care ecuațiile de rată pot da naștere unor asemenea consecințe, să revenim la (IV.53) în care, folosind (IV.42), alegem drept funcții independente:  $n_1$ ,  $n_3$  și  $I_n$ . Astfel, ecuațiile de care ne ocupăm sunt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}n_1 &= -n_1 \left( \sigma I_n + \frac{1}{\tau_{21}} \right) + n_3 \left( \frac{1}{\tau_{31}} - \frac{1}{\tau_{21}} + \bar{\sigma} I_n \right) + \frac{1}{\tau_{21}} \\ \frac{d}{dt}n_3 &= n_1 \sigma I_n - n_3 \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} + \bar{\sigma} I_n \right) \\ \frac{d}{dt}I_n &= n_0 v \left[ (\bar{\sigma} n_3 - \sigma n_1) I_n + \frac{n_3}{\tau_{31}} \right]\end{aligned}\quad (IV.106)$$

O soluție particulară a sistemului se exprimă prin relațiile

$$\begin{aligned}n_1 &= n_1(t, I_0, n_{10}, n_{30}) \\ n_3 &= n_3(t, I_0, n_{10}, n_{30}) \\ I_n &= I_n(t, I_0, n_{10}, n_{30})\end{aligned}\quad (IV.107)$$

și reprezintă o "traietorie" în domeniul tridimensional  $(n_1, n_3, I_n)$ . Dacă admitem că urmărim evoluția unui sistem fizic care prezintă un comportament dinamic obișnuit, atunci, orice mică variație a valorilor inițiale  $(I_0, n_{10}, n_{30}) \rightarrow (I_0 + \delta I_0, n_{10} + \delta n_{10}, n_{30} + \delta n_{30})$  produce o traiectorie nouă, care se păstrează permanent în vecinătatea traiectoriei inițiale. În cazul specific al ecuațiilor (IV.106), cuplajele neliniare (prezente prin produsele  $n_1 I_n$ ,  $n_3 I_n$ ) pot afecta sever comportarea traiectoriei "variate" care, după ce originea în vecinătatea traiectoriei de "referință", se poate îndepărta rapid spre o altă direcție (de exemplu, chiar la scara infinitezimală, separarea între cele două traiectorii poate urma o lege exponențială). Cele două posibilități sunt ilustrate în figura IV.9.

Acceași figură, poate sluji unui comentariu important. Să ne imaginăm un sistem fizic a cărui stare inițială poate fi cunoscută doar cu o precizie limitată. Starea sa inițială poate fi reprezentată de oricare dintre punctele ariei  $\Omega$ . Dacă sistemul urmează o dinamică "tradițională", atunci nu este dificil să prevedem că la momentul  $t_1$  acesta se va afla în domeniul 2. Dacă însă sistemul urmează o dinamică neliniară, atunci imprecizia inițială ne împiedică să prevedem starea sistemului la momentul  $t_1$ , diversele puncte ale ariei  $\Omega$  putând conduce sistemul spre stări complet distincte. Acest exemplu ilustrează mecanismul care limitează capacitatea de predicție a comportării sistemelor dinamice neliniare

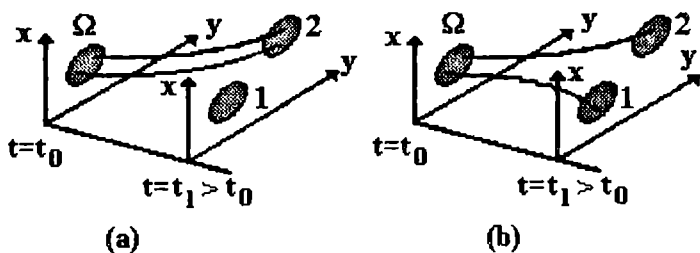


Figura IV.9: Evoluția traiectoriilor vecine pentru sisteme dinamice tradiționale (a), respectiv neliniare (b)

**7.2.1.2 Al doilea aspect.** Complicațiile structurale ale sistemului (IV.106) pot fi puse în lumină și dacă investigăm problema regimului permanent.

Observăm că primele două ecuații sunt satisfăcute în mod identic de către populațiile de echilibru (IV.58) (expresii care rămân valabile), în timp ce ultima relație se pune sub forma

$$-\frac{\sigma I_n}{\left(\sigma + \bar{\sigma} + \sigma \frac{\tau_{21}}{\tau_{32}}\right) I_n + \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}} \tau_{32}} \frac{n_0}{\tau_{32}} = 0 \quad (\text{IV.108})$$

conducând fie spre soluția banală  $I_n = 0$ , sau spre  $\tau_{32} \rightarrow \infty$ , dacă vrem ca  $I_n$  să nu fie constrâns. A doua alegere înseamnă că nivelul "3" este absolut stabil față de nivelul "2" (în mod echivalent, putem spune că dezexcităriile 3→2 sunt imposibile). Prin urmare, în absența mecanismului de alimentare, nivelul "2" va fi ignorat de dinamica populației, comportarea sistemului de trei nivele fiind identică cu cea a unui sistem de două nivele.

În acest context, dacă admitem să lărgim puțin numărul proceselor care participă la dinamica intensității, apare o situație inedită. De exemplu, punând

$$\frac{d}{dt} I_n = \varepsilon I_n + n_0 v \left[ (\bar{\sigma} n_3 - \sigma n_1) I_n + \frac{n_3}{\tau_{31}} \right]$$

și folosind populațiile de echilibru, din  $\frac{d}{dt} I_n = 0$  deducem

$$I_n \left[ \varepsilon \left[ (\sigma + \bar{\sigma}) \tau_{32} + \sigma \tau_{21} \right] I_n + \varepsilon \left( 1 + \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}} \right) - \sigma n_0 \right] = 0$$

încât regimul permanent poate apărea pentru două valori ale intensității

$$I_n = 0$$

$$I_n = \frac{v\sigma n_0 - \varepsilon \left(1 + \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}}\right)}{\varepsilon \left[(\sigma + \bar{\sigma})\tau_{32} + \sigma\tau_{21}\right]}$$

Este evident că, din motive fizice (legate de condiția  $I_n > 0$ ), în expresia precedentă trebuie respectată inegalitatea

$$0 < \varepsilon < \frac{v\sigma n_0}{1 + \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}}}$$

rezultat care poate fi pus în legătură imediată cu teoria zgomotului emisiv discutată în Secțiunea 4. Urmărind efectul mărimilor care limitează valoarea superioară a lui  $\varepsilon$ , constatăm că  $\tau_{32} \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$ , ceea ce înseamnă că dacă transferurile de populație între stările  $3 \rightarrow 2$  încetează, atunci intensitatea  $I_n$  atinge valori staționare fără ajutorul nici unui proces suplimentar.

**7.2.1.3 Elemente generale** Contrastul între complexitatea comportamentală a ecuațiilor de rată și structura lor matematică aparent simplă, a determinat inițierea unor cercetări sistematice. Pe măsură ce s-a constatat că sistemele dinamice neliniare sunt surprinzător de bine reprezentate în mai toate domeniile fizicii, interesul a fost extins și către acestea. Cu timpul s-a produs o sistematizare a metodelor de investigare, ceea ce a determinat constituirea unui nou domeniu științific numit *analiza dinamică neliniară*.

Raportat la vârsta tri-centenară a dinamicii newtoniene, originea studiilor sistematice de dinamică neliniară nu trebuie căutată mai devreme de începutul anilor 70. Această situație discrepantă se datorează în principal legăturii intime pe care metodele de studiu ale dinamicii neliniare le au cu tehnicile numerice de investigație. În sens strict, aplicațiile necesitau calculatoare performante. Totodată însă, substituirea tehnicilor matematice tradiționale cu tehnicile numerice a provocat o reacție de contestare. Atitudinea de respingere s-a datorat și faptului că dacă în domeniul dinamicii tradiționale suntem obișnuiți să apară anumite grupări naturale ale sistemelor fizice, care favorizează generalizările, în dinamica neliniară asemenea situații sunt rare. Din acest motiv, rezultatele oricărui studiu rămân strict legate de specificul sistemului investigat.

Cu toate acestea, din ansamblul rezultatelor s-au putut desprinde unele generalizări, care au îmbunătățit imaginea asupra comportamentului dinamic al sistemelor fizice.

Probabil că cel mai important rezultat constă în precizarea ansamblului de mișcări permise sistemelor dinamice (conservative sau disipative) în vecinătatea configurațiilor (stărilor) de echilibru. Aceste mișcări se reduc la următoarele trei categorii: periodice, cuasi-periodice și haotice (sau stochastice). În particular, capacitatea sistemelor deterministe (și mai ales a celor conservative) de a prezenta

comportament haotic a fost "omologată" cu mare greutate. Acceptarea s-a făcut abia spre începutul anilor '80, după serioase controverse.

Chiar și ulterior, această trasătură a reușit să-și păstreze doza de stranie. Ea se manifestă în primul rând prin efectul surpriză pe care îl provoacă asupra celor care se află la primul contact. Apoi, străbate din grija specialiștilor de a nu rata o bună "punere în scenă". Ca dovadă, una dintre referințele deja clasice, ține să sublinieze că "... deși atât ecuația Duffing cât și cea Van der Pol au fost studiate vreme de decenii, totuși nici o referință standard asupra vibrațiilor neliniare nu menționează existența soluțiilor haotice".

Este interesant să notăm că sistemele fizice aparținând teritoriului dinamicii neliniare nu prezintă neapărat caracteristici "exotice". Figura IV.10 ilustrează două asemenea cazuri, în care forțe disipative sau neliniare amorsează oscilații periodice (în lipsa oricăror forțe periodice propriu-zise).

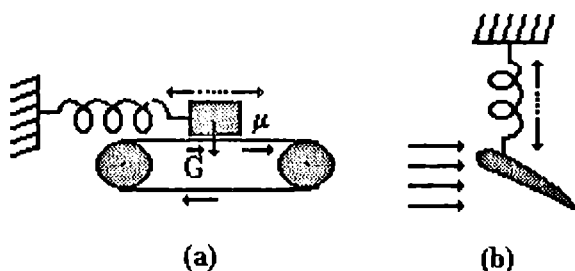


Figura IV.10: Excitarea unor oscilații periodice prin forțe disipative (a) sau neliniare (b)

În cele mai multe cazuri, și ecuațiile (IV.106) intră în această categorie, mijloacele teoretice de tip sintetic sunt depășite de complexitatea matematică realizată de conexiunile neliniare ale sistemelor. Din acest motiv, studiul general al ecuațiilor de rată (IV.106) nici nu a fost realizat până în prezent. Pentru a ilustra modul în care funcționează schema dinamicii neliniare vom face o succintă descriere a structurilor teoretice, urmată de exemplificarea concretă a modului de lucru folosind cazul unui sistem de ecuații derivat din (IV.106), și care modelează funcționarea laserilor cu două nivele.

### 7.3 Conceptele dinamicii neliniare

În multe cazuri, prezența mecanismelor de disipare sau a elementelor de neliniaritate prezintă o limitare spațială. Exemplele cele mai elocvente sunt furnizate de oscilațiile forțate și/sau amortizate, sau de către sistemele periodice

sau multiperiodice (mișcări care se restrâng în mod natural la o anumită regiune spațială). Majoritatea prezentărilor folosesc aceste categorii pentru a ilustra metodele și conceptele fundamentale ale dinamicii neliniare.

Mișcările studiate în dinamica tradițională au câteva trăsături pe care le putem descrie în felul următor: fiecărui set de condiții inițiale îi corespunde o anumită traiectorie pe care sistemul fizic o urmează de la bun început (adică fără regim tranzient) și pe care se menține fără limită de timp. Atunci când condițiile inițiale sunt modificate, rezultatul constă într-o nouă traiectorie care nu se intersectează cu precedenta. Cele două traiectorii sunt echivalente între ele, în sensul că sistemul fizic se poate menține pe oricare dintre ele, la infinit. O eventuală perturbație modifică traiectoria sistemului fără elemente de tranziție sau tendințe de revenire la traiectoria inițială.

În cazul neliniarităților sau a mecanismelor disipative, dinamica are un specific diferit. Cele mai cunoscute trăsături sunt asociate mișcărilor tranziente și a celor de relaxare. În particular, dacă un sistem dinamic disipativ este lansat dintr-un punct inițial arbitrar, el asumă o mișcare de "relaxare" prin care tinde spre una dintre următoarele stări:

- *echilibru* (reprezentat în spațiul fazelor printr-un punct);
- *mișcare oscilatorie* sau de "ciclu limită" (reprezentată în spațiul fazelor printr-o curbă închisă);
- *mișcare cuasi-periodică* (reprezentată în spațiul de fază tridimensional printr-o suprafață).

Aceste trei tipuri de ținte ale mișcărilor de relaxare sunt numite *atractori clasici*. Așa cum am indicat pentru fiecare caz, acești atractori corespund biunivoc cu câte un obiect geometric în spațiul de fază al sistemului fizic (punct, curbă închisă, suprafață).

Când obiectul geometric din spațiul fazelor este o *mulțime fractală (fractal)*, atunci el reprezintă un *atractor straniu*. Numai mișcarea sistemelor dinamice neliniare poate prezenta o asemenea situație, fără corespondent în cazul sistemelor conservative.

Spațiul matematic în care se dezvoltă tehnicile dinamicii neliniare este *spațiul fazelor* asociat sistemului fizic studiat.

Descrierea matematică a sistemelor dinamice se poate face pe trei cai. Cea mai "banală" este descrierea prin ecuații diferențiale. În acest caz, un ansamblu de stări inițiale contigue (puncte) din spațiul fazelor vor reprezenta originea unui fascicol de traiectorii care vizualizează o *curgere* (sau un *curent* - "a flow"). Alternativ, este posibil ca descrierea sistemului dinamic să se facă prin ecuații cu diferențe finite. Atunci, spațiul fazelor va ilustra *hărți Poincaré (maps)*. O a treia



posibilitate este oferită de întrebuințarea *ecuațiilor dinamice simbolice*.

Prin investigarea câtorva sisteme dinamice neliniare simple, considerate drept paradigmatică pentru întregul domeniu, s-a ajuns la concluzia că dacă spațiul fazelor este tridimensional (sau mai mare) este întotdeauna posibil să găsim valori ale parametrilor care conduc sistemul fizic către un comportament haotic. În cazul când spațiul fazelor este bidimensional (dimensiunea minimală), comportamentul haotic nu este conținut în mod intrinsec în sistem dar poate fi provocat din afară, prin intermediul unei excitări periodice.

În cazul că descrierea sistemului fizic se realizează prin ecuații diferențiale, atunci dezvoltarea analizei dinamice neliniare implică următoarea schemă:

### 7.3.1 Etapa I

Ecuațiile diferențiale trebuiesc aduse la forma unui *sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi*

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (\text{IV.109})$$

unde  $\vec{x}$  este un vector ale cărui componente coincid cu variabilele de stare ale sistemului, în timp ce funcția vectorială  $\vec{F}$  nu depinde în mod explicit de timp (*sistem autonom*).

### 7.3.2 Etapa II

Pentru a obține (IV.109), poate fi necesar să *eliminăm variabila temporală* din  $\vec{F}$  (atunci când ea apare explicit). Acest efect se atinge prin introducerea unei variabile suplimentare.

### 7.3.3 Etapa III

*Stabilirea punctelor de echilibru* (numite și ”puncte fixe”) care satisfac condiția  $\frac{d}{dt} \vec{x} = 0$ , sau, în mod echivalent, rezolvarea ecuației

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0 \quad (\text{IV.110})$$

### 7.3.4 Etapa IV

*Analiza stabilității în vecinătatea punctelor fixe (clasificarea punctelor fixe)*. Notând prin  $\vec{x}_c$  unul dintre punctele de echilibru ale sistemului (soluție a ecuațiilor (IV.110)), vom scrie

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{\xi}$$

încât (IV.109) devine

$$\frac{d}{dt} \vec{\xi} = \vec{F}(\vec{x}_e + \vec{\xi}) \quad (\text{IV.111})$$

Liniarizând funcția  $\vec{F}$  în punctul  $\vec{x}_e$  (folosind dezvoltarea în serie Taylor până în ordinul întâi)

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}_e + \vec{\xi}) &= \vec{F}(\vec{x}_e) + \left( \vec{\xi} \cdot \nabla \right) \vec{F} \Big|_{\vec{x}_e} \\ &= \left( \vec{\xi} \cdot \nabla \right) \vec{F} \Big|_{\vec{x}_e} \end{aligned}$$

putem rescrie (IV.111)

$$\frac{d}{dt} \vec{\xi} = J \cdot \vec{\xi} \quad (\text{IV.112})$$

unde matricea

$$J = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 & \dots & \partial_n F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 & \dots & \partial_n F_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 F_n & \partial_2 F_n & \dots & \partial_n F_n \end{pmatrix} \quad (\text{IV.113})$$

în care  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ , trebuie calculată în punctul  $\vec{x}_e$ . Astfel,  $J$  (care exprimă Jacobianul funcțiilor  $F_i(x_1, \dots, x_n)$ ) devine o matrice numerică.

Forma ecuației (IV.112) sugerează căutarea unor soluții de tipul

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 \exp(st) \quad (\text{IV.114})$$

prin intermediul cărora, (IV.112) se transformă într-un sistem omogen de ecuații. Pentru ca sistemul să permită mai mult decât soluția banală, exponentul  $s$  trebuie să satisfacă ecuația caracteristică

$$\det(J - sU) = 0 \quad (\text{IV.115})$$

în care  $U$  reprezintă matricea unitate.

Ținând seama de legătura rădăcinilor ecuației caracteristice cu soluțiile (IV.112), este clar că natura acestor rădăcini determină proprietățile punctului fix investigat.

**7.3.4.1 Cazul bidimensional.** Clasificarea punctelor fixe poate fi exemplificată pe cazul sistemelor care evoluează într-un spațiu de fază bidimensional. Este ușor să observăm că pentru asemenea sisteme ecuația caracteristică (IV.115) este o ecuație de gradul doi. Astfel, (IV.112) poate produce numai două soluții

Cu ajutorul notațiilor

$$\begin{aligned} J &= \left( \begin{array}{cc} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{array} \right) \Big|_{\vec{x}_e} = \left( \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \\ Tr(J) &= a_{11} + a_{22} \\ \det(J) &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \\ D(J) &= Tr^2(J) - 4 \det(J) \end{aligned} \quad (IV.116)$$

vom avea

$$s_{1,2} = \frac{Tr(J) \pm \sqrt{Tr^2(J) - 4 \det(J)}}{2} = \frac{Tr(J) \pm \sqrt{D(J)}}{2} \quad (IV.117)$$

Este important să notăm că soluțiile (IV.117) joacă un dublu rol. Pe de o parte ele precizează traiectoriile (IV.114) dar în același timp, ele exprimă valorile proprii ale matricii  $J$ , așa cum ar rezulta din formularea standard

$$J \cdot \vec{e}_{1,2} = s_{1,2} \cdot \vec{e}_{1,2} \quad (IV.118)$$

în care  $\vec{e}_{1,2}$  desemnează vectorii proprii. Ținând seama de faptul că matricea  $J$  nu are nici o constrângere în virtutea căreia să fie autodjunctă, valorile proprii rezultante vor fi reale numai ocazional.

Să presupunem că  $|s_1| < 1$ . Atunci, un punct situat în poziția

$$\vec{\xi} = \vec{e}_1$$

față de punctul fix  $\vec{x}_e$  (fiind la distanța  $|\vec{e}_1|$ ), evoluează în sensul apropierii de  $\vec{x}_e$  deoarece

$$|J \cdot \vec{e}_1| = |s_1| \cdot |\vec{e}_1| < |\vec{e}_1|$$

Câta vreme dinamica sistemului se păstrează în vecinătatea lui  $\vec{x}_e$ , procesul de apropiere va continua. Această caracteristică de mișcare arată că dacă  $|s_1| < 1$ , atunci punctul  $\vec{x}_e$  este un *punct stabil* pentru dinamica sistemului.

Dacă  $|s_1| > 1$ , atunci, pe o cale similară cu precedenta, putem arăta că  $\vec{x}_e$  reprezintă un *punct instabil*. O a treia situație este cea în care  $|s_1| = 1$ . Acest caz definește un punct fix neutru, a cărui stabilitate trebuie analizată în detaliu recurgând explicit la elementele neliniare ale dinamicii.

În concluzie, caracteristicile stabilității punctelor fixe pentru care  $|s| > 1$  sau  $|s| < 1$ , numite *puncte hiperbolice*, sunt identice cu cele deduse prin linearizarea (IV.112). Cazul  $|s| = 1$  definește *punctele fixe de tip eliptic* ale sistemului, pentru care analiza stabilității se face considerând forma termenilor care exprimă legăturile neliniare

Pornind de la natura valorilor proprii  $s$ , argumentele anterioare permit o clasificare a punctelor fixe din perspectiva diverselor tipuri de echilibru. Astfel:

- Dacă în mod simultan  $|s_1| < 1$  și  $|s_2| < 1$ , ambele valori fiind *reale*, atunci  $\vec{x}_e$  este un *nod stabil*;
- Dacă în mod simultan  $|s_1| > 1$  și  $|s_2| > 1$ , ambele valori fiind *reale*, atunci  $\vec{x}_e$  este un *nod instabil*;
- Dacă în mod simultan  $|s_1| < 1$  și  $|s_2| > 1$ , ambele valori fiind *reale*, atunci  $\vec{x}_e$  este un *punct șa (saddle)*;
- Dacă  $s_{1,2} = a + ib = \rho \exp i\varphi$ , atunci  $\vec{x}_e$  este un *punct focal sau spiral*.

În spațiul bidimensional de fază, forma traiectoriilor în vecinătatea punctelor fixe este ilustrată în figura IV.11.

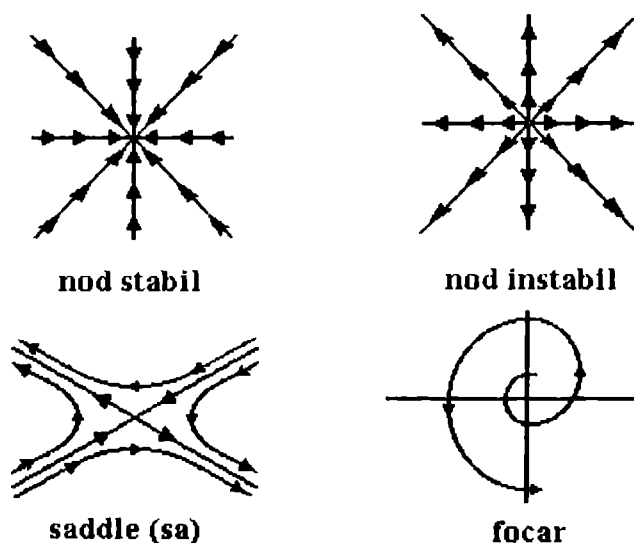


Figura IV.11: Traiectoriile în spațiul fazelor în vecinătatea unui punct stabil (a), instabil (b), șa (c) și focal (d)

Folosind notațiile introduse prin relațiile (IV.118), aceeași clasificare poate fi prezentată în modul următor:

- $\det(J) < 0$   
 $\forall Tr(J) \quad s_{1,2} \in \mathbb{R} \quad s_1 \cdot s_2 < 0$  Punct saddle (șă);
- $\det(J) = 0$   
 $\forall Tr(J)$  Matricea  $J$  nu este inversabilă Caz nedeterminat;
- $\det(J) > 0$

$Tr(J) < 0$      $\begin{cases} D(J) < 0 & s_{1,2} \text{ sunt complex conjugate} & \text{Focar stabil;} \\ D(J) > 0 & s_{1,2} \in R & \text{Nod stabil;} \end{cases}$   
 $Tr(J) = 0$      $D(J) < 0$      $s_{1,2}$  sunt pur imaginare    Centru;  
 $Tr(J) > 0$      $\begin{cases} D(J) < 0 & s_{1,2} \text{ sunt complex conjugate} & \text{Focar instabil;} \\ D(J) > 0 & s_{1,2} \in R & \text{Nod instabil;} \end{cases}$   
 Aceste rezultate pot fi reprezentate în mod compact așa cum arată figura IV.12.

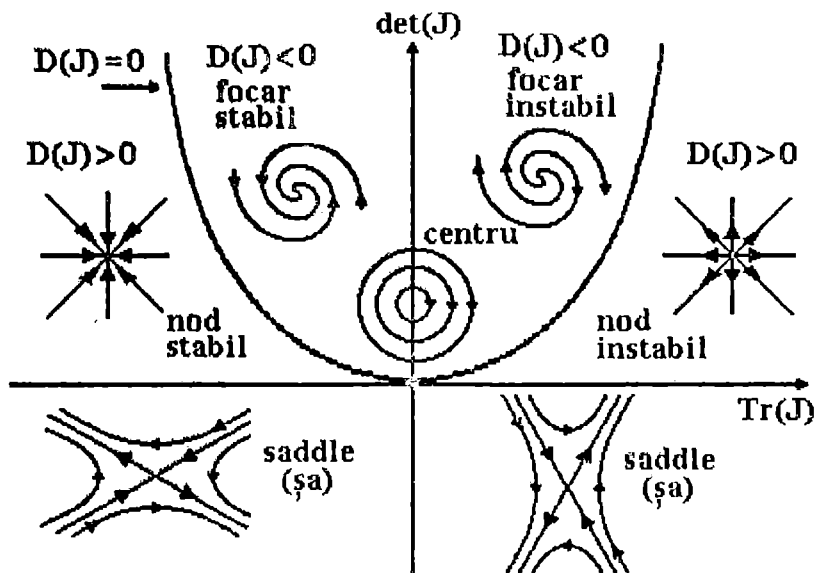


Figura IV.12: Tipul punctelor fixe în raport cu invarianții matricii  $J$

Alături de aceste trasături, este important să observăm că rata de variație a volumului în spațiul fazelor este controlată de  $\text{div } \vec{F} = \text{Trace}(J)$ . Dacă  $\text{div } \vec{F} = 0$  atunci volumul ocupat de sistem în spațiul fazelor nu se schimbă în raport cu timpul, ceea ce corespunde comportării unui sistem conservativ. În cazul în care  $\text{div } \vec{F} < 0$ , atunci volumul ocupat de sistem se micșorează ceea ce indică prezența proceselor disipative.

### 7.3.5 Etapa V

*Analiza bifurcațiilor* care constă în urmărirea modificării numărului punctelor de echilibru sau a tipului de echilibru a unui punct fix, în funcție de valorile parametrilor.

### 7.4 Laserul cu două nivele de energie.

Pentru a da o ilustrare a modului de realizare a unei analize dinamice neliniare, ne propunem să tratăm cazul unui sistem descris prin două ecuații de rată

### 7.4.1 Precizarea sistemului de ecuații

Discutând ecuația (IV.108), am notat că sistemul de trei nivele descris prin (IV.106) se comportă ca un sistem cu două nivele atunci când  $\tau_{32} \rightarrow \infty$ . Totuși, din cauză că într-un asemenea caz populația nivelului "2" este permanent nulă, este adevărat și că

$$\frac{d}{dt}n_2(t) = 0, \forall t \quad (\text{IV.119})$$

Or, a doua ecuație a sistemului (IV.53) coincide cu (IV.119) dacă, pe lângă  $\tau_{32} \rightarrow \infty$ , este adevărat și că  $\tau_{21} \rightarrow \infty$ . Perechea condițiilor impuse mărimilor  $\tau_{32}$  și  $\tau_{21}$  produc același efect ca și

$$\frac{d}{dt}n_2(t) = n_2(t) = 0, \forall t$$

deci, sunt matematic echivalente.

În acest fel, ecuațiile (IV.106) devin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_1 &= -n_1\sigma I_n + n_3 \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \bar{\sigma} I_n \right) \\ \frac{d}{dt}n_3 &= n_1\sigma I_n - n_3 \left( \frac{1}{\tau_{31}} + \bar{\sigma} I_n \right) \\ \frac{d}{dt}I_n &= n_0v \left[ (\bar{\sigma}n_3 - \sigma n_1) I_n + \frac{n_3}{\tau_{31}} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.120})$$

căroră li se adaugă

$$n_1 + n_3 = 1 \quad (\text{IV.121})$$

Introducând notația

$$n_3 - n_1 = \Delta n$$

care exprimă inversia populației normate între nivelele "1" și "3", și apelând la (IV.121), deducem

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1 - \Delta n}{2} \\ n_3 &= \frac{1 + \Delta n}{2} \end{aligned}$$

Pe baza acestor relații, sistemul (IV.120) se reduce la următoarele două ecuații

$$\frac{d}{dt}(\Delta n) = -(\bar{\sigma} - \sigma) I_n - (\bar{\sigma} + \sigma) I_n \Delta n - \frac{1 + \Delta n}{\tau_{31}}$$

$$\frac{d}{dt} I_n = n_0 v \left[ \frac{1}{2} (\bar{\sigma} - \sigma) I_n + \frac{1}{2} (\bar{\sigma} + \sigma) I_n \Delta n + \frac{1 + \Delta n}{\tau_{31}} \right]$$

În continuare, vom simplifica aceste ecuații desconsiderând efectul emisiei spontane în a doua ecuație și punând  $\sigma = \bar{\sigma}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Delta n) &= -2\sigma I_n \Delta n - \frac{1 + \Delta n}{\tau_{31}} \\ \frac{d}{dt} I_n &= n_0 v \sigma I_n \Delta n \end{aligned}$$

iar dacă introducem notațiile

$$\begin{aligned} n &= n_0 \Delta n \\ b &= \frac{1 + \Delta n}{\tau_{31} \Delta n} \end{aligned}$$

găsim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n &= -2\sigma n I_n - b n \\ \frac{d}{dt} I_n &= v \sigma n I_n \end{aligned}$$

Pentru ca acest sistem cu două nivele energetice înguste să permită generarea laser, trebuie să mai posede două elemente:

- un mecanism de pompaj direct al nivelului superior (diferit de absorbția de radiație), care va interveni în prima ecuație;
- un rezonator optic, care aici este prezent numai prin imperfecțiunile sale, adică prin pierderile de radiație, de care va ține seama a doua ecuație.

În acest fel, obținem forma finală a ecuațiilor care modelează procesul nelinier

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n &= p - 2\sigma n I_n - b n \\ \frac{d}{dt} I_n &= -\gamma I_n + v \sigma n I_n \end{aligned} \quad (\text{IV.122})$$

## 7.4.2 Stabilirea punctelor fixe

În ipoteza că pompajul  $p$  și pierderile  $b, \gamma$  sunt independente de timp, sistemul (IV.122) este autonom și putem trece la stabilirea punctelor fixe.

Pomind cu cea de a doua ecuație a sistemului putem stabili perechea de soluții

$$\begin{cases} I_n = 0 \\ n = \frac{\gamma}{v\sigma} \end{cases}$$

căroră, prima ecuație le asociază

$$\begin{cases} n = \frac{p}{b} \\ I_n = \frac{v}{2\gamma} \left( p - \frac{b\gamma}{v\sigma} \right) \end{cases}$$

Astfel, punctele fixe ale sistemului (IV.122) sunt

$$\begin{aligned} 1 & : n = \frac{p}{b} ; I_n = 0 \\ 2 & : n = \frac{\gamma}{v\sigma} ; I_n = \frac{v}{2\gamma} \left( p - \frac{b\gamma}{v\sigma} \right) \end{aligned} \quad (IV.123)$$

Este clar că din motive fizice intensitatea luminoasă este o mărime pozitivă ( $I_n > 0$ ), așa încât al doilea punct fix poate să existe numai dacă pompajul satisface condiția

$$p \geq \frac{b\gamma}{v\sigma} \quad (IV.124)$$

Experimental există posibilitatea unui control direct asupra pompajului  $p$ . Din acest motiv, acest parametru poate fi considerat drept variabilă independentă, în raport cu care să studiem evoluția punctelor fixe ale sistemului dinamic. Rezultatul, reprezentat prin funcțiile  $n(\frac{p}{b})$  și  $I_n(\frac{p}{b})$ , este conținut în figura IV.13. Zonele  $n_1$  și  $I_1$  desemnează domeniul de excursie al primului punct fix odată cu variația lui  $p$  ( $n_2$  și  $I_2$  având o semnificație similară pentru cel de al doilea punct fix).

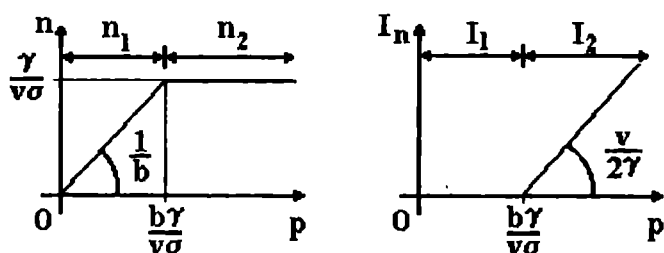


Figura IV.13: Evoluția sistemului dinamic între cele două puncte fixe în funcție de valoarea pompajului

Este simplu de verificat că în punctul de racordare  $p = \frac{b\gamma}{v\sigma}$ , graficele sunt continue

$$\begin{cases} n_1(\frac{b\gamma}{v\sigma}) = n_2(\frac{b\gamma}{v\sigma}) = \frac{\gamma}{v\sigma} \\ I_{n1}(\frac{b\gamma}{v\sigma}) = I_{n2}(\frac{b\gamma}{v\sigma}) = 0 \end{cases}$$

Din punct de vedere fizic, se poate remarca faptul că pentru valori de pompaj



mai mici decât  $p = \frac{b\gamma}{v\sigma}$ , sistemul nu emite radiație,  $I_n(p) = 0$ . Se spune că sistemul se află sub *pragul de generare laser*. La valori de pompaj superioare pragului, apare efectul de emisie luminoasă, care crește proporțional cu  $p$ . Aceasta indică transformarea întregii energii de pompaj în radiație laser. În același timp, din graficul  $n(p)$ , observăm că sub pragul de generare, inversia crește proporțional cu pompajul, urmând să primească o valoare fixă, odată cu începutul procesului de emisie laser.

### 7.4.3 Studiul stabilității (tipul de echilibru al punctelor fixe)

Relațiile definitorii pentru sistemul dinamic sunt exprimate prin (IV.122), iar variabilele de stare sunt  $n$  și  $I_n$ . Începem prin a calcula matricea  $J$ . Potrivit definiției (IV.113)

$$J = \begin{pmatrix} -b - 2\sigma I_n & -2\sigma n \\ v\sigma I_n & -\gamma + v\sigma n \end{pmatrix}$$

**7.4.3.1 Studiul primului punct fix** Folosind coordonatele  $(\frac{p}{b}, 0)$ , găsim

$$J_1 = J\left(\frac{p}{b}, 0\right) = \begin{pmatrix} -b & -2\sigma \frac{p}{b} \\ 0 & -\gamma + v\sigma \frac{p}{b} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.125})$$

de unde calculăm

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J_1) &= -b - \frac{v\sigma}{b} \left( \frac{b\gamma}{v\sigma} - p \right) \\ \det(J_1) &= v\sigma \left( \frac{b\gamma}{v\sigma} - p \right) \\ D(J_1) &= \left[ b - \frac{v\sigma}{b} \left( \frac{b\gamma}{v\sigma} - p \right) \right]^2 \end{aligned}$$

O relație extrem de utilă, care ușurează urmărirea evoluției primului punct fix pe diagrama din Fig. IV.12 este

$$\det(J_1) = -b [\text{Tr}(J_1) + b] \quad (\text{IV.126})$$

legătură care reiese ușor pe baza primelor două ecuații de mai sus, dacă exprimăm din fiecare  $v\sigma \left( \frac{b\gamma}{v\sigma} - p \right)$ .

Păstrând valoarea pompajului drept parametru, putem trage următoarele concluzii:

- deoarece  $D(J_1) > 0 \forall p$ , clasificarea ilustrată în figura IV.12 arată că primul punct fix nu poate fi decât un nod stabil sau instabil ori, un punct șa (saddle);
- pentru  $0 < p < \frac{b\gamma}{v\sigma}$ , deoarece  $\det(J_1) > 0$  și  $\text{Tr}(J_1) < 0$ , primul punct fix

este un nod stabil;

- pentru  $p > \frac{b\gamma}{v\sigma}$ , deoarece  $\det(J_1) < 0$ , primul punct fix devine un punct șa (saddle).

Schițând evoluția acestui punct fix în funcție de puterea de pompaj  $p$  și exploatănd legătura liniară (IV.126), obținem imaginea din figura IV.14.

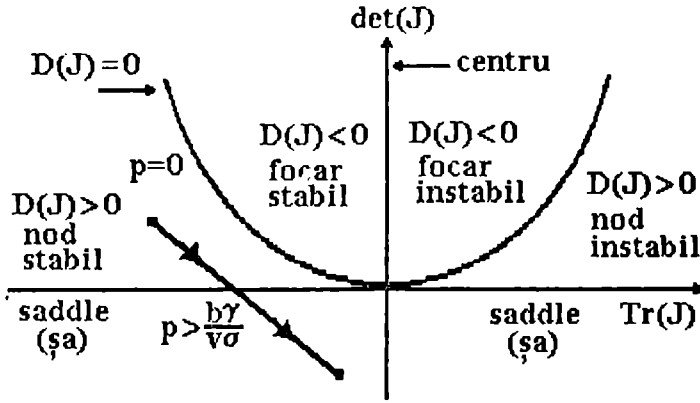


Figura IV.14: Evoluția primului punct fix în funcție de valoarea pompatului

**7.4.3.2 Studiul celui de al doilea punct fix** De această dată, coordonatele care trebuie folosite în (IV.125) sunt  $(\frac{\gamma}{v\sigma}, \frac{v}{2\gamma} (p - \frac{b\gamma}{v\sigma}))$ , încât, vom avea

$$J_2 = J\left(\frac{\gamma}{v\sigma}, \frac{v}{2\gamma} \left(p - \frac{b\gamma}{v\sigma}\right)\right) = \begin{pmatrix} -b - \frac{v\sigma}{\gamma} \left(p - \frac{b\gamma}{v\sigma}\right) & -2\frac{\gamma}{v} \\ v\sigma \frac{v}{2\gamma} \left(p - \frac{b\gamma}{v\sigma}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Calculăm

$$\text{Tr}(J_2) = -b - \frac{v\sigma}{\gamma} \left(p - \frac{b\gamma}{v\sigma}\right)$$

$$\det(J_2) = v\sigma \left(p - \frac{b\gamma}{v\sigma}\right) (= -\det(J_1))$$

$$D(J_2) = \left[b + \frac{v\sigma}{\gamma} \left(p - \frac{b\gamma}{v\sigma}\right)\right]^2 - 4v\sigma \left(p - \frac{b\gamma}{v\sigma}\right)$$

alături de care obținem și relația utilă

$$\det(J_2) = -\gamma [\text{Tr}(J_2) + b] \quad (\text{IV.127})$$

Putem simplifica analiza acestor rezultate dacă introducem notația

$$p = \rho \frac{b\gamma}{v\sigma}$$

unde  $\rho$  este pozitiv sau nul, din cauză că și  $p$  urmează aceleași condiții. Astfel

$$\begin{aligned} Tr(J_2) &= -b\rho \\ \det(J_2) &= b\gamma(\rho - 1) \quad (= -\det(J_1)) \\ D(J_2) &= b(b\rho^2 - 4\gamma\rho + 4\gamma) \end{aligned} \quad (IV.128)$$

de unde putem constata că:

- indiferent de valoarea pompajului,  $Tr(J_2) < 0$ . Potrivit figurii IV.12 aceasta înseamnă că al doilea punct fix poate fi un punct saddle, un nod stabil sau un focar stabil;
- pentru  $0 < \rho < 1$  ( $0 < p < \frac{b\gamma}{v\sigma}$ ), deoarece  $\det(J_2) < 0$  și  $D(J_2) > 0$  este ușor de văzut (folosind datele figurii IV.12) că al doilea punct fix este un punct saddle;
- pentru  $\rho > 1$  (pompaj peste prag,  $p > \frac{b\gamma}{v\sigma}$ ), deoarece  $Tr(J_2) < 0$  și  $\det(J_2) > 0$ , al doilea punct fix poate fi un nod stabil sau un focar stabil (dupa cum  $D(J_2)$  este pozitiv sau negativ).

Pentru a decide felul în care se sfârșește traiectoria celui de al doilea punct fix, este necesar să rezolvăm ecuația

$$D(J_2) = 0$$

în legătură cu care putem hotărâ semnul lui  $D(J_2)$  din (IV.128) și apoi să decidem diversele situații pe o diagrama de tipul celei conținute de Fig. IV.12.

Dacă  $\gamma \geq b$ , găsim rădăcinile reale și pozitive

$$\rho_{1,2} = \frac{2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2 - b\gamma}}{b} = 2\frac{\gamma}{b} \pm 2\sqrt{\left(\frac{\gamma}{b}\right)^2 - \frac{\gamma}{b}}$$

Fie

$$\rho_1 = 2\frac{\gamma}{b} - 2\sqrt{\left(\frac{\gamma}{b}\right)^2 - \frac{\gamma}{b}}$$

Observăm că respectarea condiției  $\gamma \geq b$  atrage și îndeplinirea relației  $\rho_2 > \rho_1 > 1$  așa încât este clar că atunci când pompajul satisface inegalitățile  $\rho_2 \frac{b\gamma}{v\sigma} > p > \rho_1 \frac{b\gamma}{v\sigma}$ , punctul fix pe care îl investigăm este un focar stabil iar în cazurile  $p > \rho_2 \frac{b\gamma}{v\sigma}$  și  $p < \rho_1 \frac{b\gamma}{v\sigma}$  el devine nod stabil. Aceste evoluții posibile sunt ilustrate în figura IV.15.

O reprezentare alternativă a evoluției punctelor fixe este redată în figura IV.16.

În această reprezentare, stabilirea tipului de echilibru al punctului fix precum și urmărirea manierei sale de evoluție se determină parcurgând desenul corespunzător de-a lungul unei paralele la axa  $(\rho)$ , pornind de la  $p = 0$  și urmând în sensul valorilor  $p$  crescătoare. Astfel, pentru al doilea punct fix, putem observa

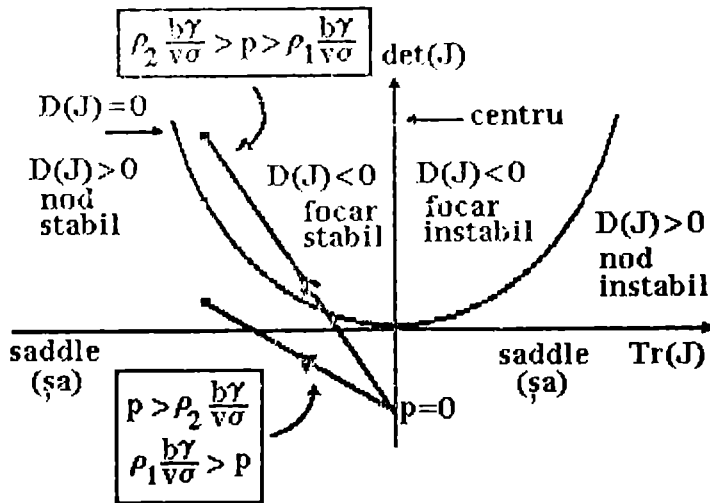


Figura IV.15: Evoluția celui de al doilea punct fix în raport cu valoarea pompajului  
că în funcție de valoarea produsului  $\frac{b\gamma}{v\sigma}$ , putem avea două tipuri de evoluții. Pentru valori moderate ale acestui produs, odată cu creșterea lui  $p$ , evoluția urmează calea *saddle-nod-focus-nod*. La valori  $\frac{b\gamma}{v\sigma}$  mari, evoluția este simplă: *saddle-nod*.

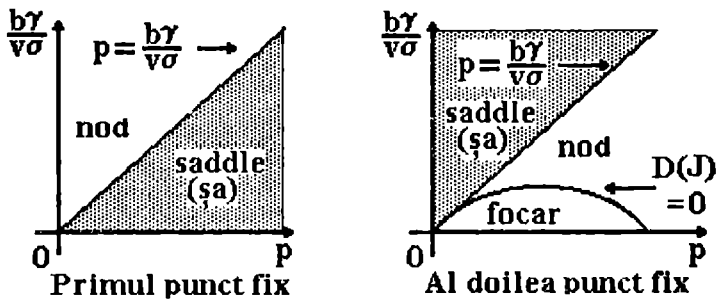


Figura IV.16: Evoluția punctelor fixe în raport cu valoarea pompajului

#### 7.4.4 Comportamentul haotic al generatorului laser

Teoria generală arată limpede că sistemele cu două grade de libertate nu posedă capacitatea intrinsecă de a da naștere unei dinamici haotice. În cazul lor, mișcarea haotică poate să apară numai ca rezultat al unor condiții externe speciale. De exemplu, asemenea condiții se îndeplinesc când factorul de pompaj prezintă o variație periodică în timp.

Din păcate, oricât de mare ar fi tentația de a prezenta mai amănunțit această temă, demersul ne-ar duce atât de departe încât suntem nevoiți să recomandăm cititorului

interesat să continue pe cont propriu, folosind textele clasice. În acest sens, un bun început ar putea fi chiar parcurgerea titlurilor conținute în lista recomandărilor bibliografice.

## **Recomandări bibliografice**

---

1. Haken, H.: *Laser Theory*. Springer, Berlin Heidelberg, 1984.
2. Bloemberger, N.: *Nonlinear Optics*. Benjamin, New York, 1965.
3. Mills, P.L.: *Nonlinear Optics*. Springer, Berlin Heidelberg, 1991.
4. Moon, F. C.: *Chaotic and Fractal Dynamics*. Wiley-Interscience Publication, 1992.
5. Schuster, H.G.: *Deterministic Chaos - An Introduction*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1989.

**VERIFICAT**  
**2017**

**VERIFICAT**  
**2007**

---

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 509/1998,  
la Tipografia Editurii Universității din București

---



**ISBN: 973-575-298-0**

**Lei 22000**