Constantin Cioacă Bogdan Iorga

ELEMENTE DE ELECTROMAGNETISM ȘI OPTICĂ

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

Constantin Cioacă Bogdan Iorga

ELEMENTE DE ELECTROMAGNETISM ȘI OPTICĂ

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI
- 2000 -

Referenţi ştiinţifici: *Conf. dr. Ion Petre*
Şef lucr. dr. Corneliu Stănescu

Tehnoredactarea computerizată a fost realizată de către BOGDAN IORGA.

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon/Fax 410.23.84.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
CIOACĂ, CONSTANTIN
Elemente de electromagnetism şi optică / Constantin Cioacă
Bucureşti: Editura Universităţii din Bucureşti, 2000
224 p; 23,5 cm
Bibliografie
ISBN: 973-575-428-2

I. Iorga, Bogdan

537.8+535(075.8)

Cuprins

Prefaţă

Prezentul curs de Electromagnetism se adresează tuturor studenţilor din Facultatea de Chimie a Universităţii din Bucureşti, dar mai ales studenţilor anului I de la secţia Radiochimie care urmează cursul semestrial de Electricitate şi Magnetism. Acest curs poate fi utilizat şi de către studenţii de la alte facultăţi din învăţământul superior care urmează un curs de fizică.

Lucrarea este structurată după programa analitică a cursului de fizică ţinut la secţia Radiochimie din Facultatea de Chimie din Universitatea din Bucureşti şi conţine şapte capitole: Electrostatică, Electrocinetică, Magnetism, Electromagnetism, Unde Electromagnetice–Optică, Interferenţa undelor electromagnetice, şi Difracţia undelor electromagnetice. Conţine, în plus, o anexă în care sunt întâlnite constante utile, relaţii matematice şi fizice importante folosite în acest curs şi în rezolvarea problemelor de electromagnetism.

Lucrarea reprezintă o expunere de ansamblu a electricităţii, magnetismului şi opticii, în cadrul căreia se reliefează legile fundamentale care le guvernează. Modul de tratare diferă de cel tradiţional deoarece se subliniază unele chestiuni importante precum: conservarea şi invarianţa sarcinii electrice, fenomenul interacţiei electrice, noţiunea de câmp electric, magnetic, electromagnetic şi proprietăţile acestora, abordarea matematică a fenomenului de interferenţă, descrierea fenomenului fizic de difracţie şi unele amănunte legate de reţelele de difracţie. Preponderentă este preocuparea pentru aspectul macroscopic al legilor şi fenomenelor fizice; în unele cazuri însă, ele sunt interpretate şi din punct de vedere microscopic. Acolo unde s-a considerat necesar, consideraţiile teoretice au fost însoţite de descrieri experimentale practice sau imaginare sugestive. S-a considerat util să se exemplifice adesea valorile mărimilor experimentale care intervin într-un fenomen şi să se prezinte date numerice. Prin procedeul "observaţiilor" s-a atras atenţia asupra unor subtilităţi care scapă în mod curent cititorilor.

Prefață

Mărimile ce se definesc pe parcursul cursului sunt exprimate în Sistemul Internațional de unități. Pentru înțelegerea cursului sunt necesare cunoștințe de matematică ce includ calculul diferențial și integral.

În lucrare mărimile vectoriale sunt reprezentate prin litere neîngroșate cu o săgeată deasupra lor. Pentru operatorii gradient, rotor și divergență au fost folosite ambele notații: gradφ, rot$\vec{A}$, div$\vec{A}$ *și, respectiv,* $\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, *tocmai pentru a obișnui studenții cu ele, unde* φ *și* $\vec{A}$ *reprezintă o mărime scalară și, respectiv, una vectorială arbitrare.*

Intenția autorilor este de a prezenta noțiunile de electricitate, magnetism și optică electromagnetică în modul în care sunt ele utilizate de către studenții Facultății de Chimie. Prin această lucrare cititorii pot fi ajutați să-și formeze o privire de ansamblu asupra electricității, magnetismului și opticii și să-și sistematizeze cunoștințele din acest domeniu, în acord cu spiritul modern al științei fizicii.

În esență, lucrarea este alcătuită astfel ca să aibă un caracter formativ, prin aplicarea procedeului de la simplu la complex.

Cititorii care reușesc să-și însușească ceea ce le oferă această lucrare vor poseda o pregătire fundamentală care să le asigure succesul la aplicarea cunoștințelor dobândite sau la predarea fizicii în liceu și în facultăți.

Considerând că această lucrare este absolut necesară studenților de la secția de Radiochimie în cadrul programului lor de studiu, autorii au convingerea că ea le va fi de un real folos în înțelegerea fenomenelor electromagnetismului și sunt deschiși oricăror sugestii din partea cititorilor.

Autorii. octombrie 1999.

Capitolul 1

ELECTROSTATICĂ

1.1. Introducere

Fizica, ştiinţă a naturii, studiază cele mai generale şi mai simple forme de mişcare a materiei.

Mecanica studiază forma de mişcare mecanică, termodinamica studiază forma de mişcare termică, electromagnetismul – forma de mişcare electrică şi magnetică, fizica nucleară – forma de mişcare a constituenţilor nucleului atomic, etc.

Materia, reprezintă o realitate obiectivă, care există independent de conştiinţa omului şi este reflectată adecvat de aceasta.

Atributul fundamental al materiei, modul său de existenţă este **mişcarea**. Fenomenele fizice, inclusiv cele electromagnetice, reprezintă o formă de mişcare a materiei. Materia poate exista sub două aspecte (forme): (a) substanţă şi (b) câmp.

1.2. Materia sub formă de substanţă. Particule elementare

Definiţia particulei elementare: *Orice particulă, care la momentul actual de dezvoltare a ştiinţei pare a nu fi constituită din părţi mai mici (par a nu avea o structură internă) se numeşte particulă elementară.*

Materia sub formă de substanţă (materie – substanţă) este formată din **particule elementare**. Cu alte cuvinte, se spune că aceasta are **structură discretă**.

S-au pus în evidenţă până în prezent un număr de peste 300 de particule elementare, majoritatea dintre ele fiind **instabile**, dispărând după un timp de viaţă foarte scurt.

Fenomenele electromagnetice pot fi riguros explicate plecând de la existenţa a trei particule elementare: **electronul**, **protonul** şi **neutronul**.

Fizica modernă a arătat că numai electronul este particulă elementară (nu are structură), protonul şi neutronul dovedindu-se a fi constituiţi din particule elementare mai mici, numite **quarkuri** (up, down, strange, charm, bottom, top).

Conform **modelului quarkurilor**, (M. Gell-Mann, S.U.A., 1961) protonul are o structură internă, fiind format din două quarkuri cu sarcinile electrice egale cu (+2/3)e şi un quark cu sarcina electrică egală cu (-1/3)e, astfel încât sarcina totală a protonului să fie egală cu sarcina electrică +e, (p = uud).

Neutronul, neutru din punct de vedere electric, este constituit după modelul quarkurilor, dintr-un quark cu sarcina electrică (+2/3)e şi două quarkuri cu sarcina (-1/3)e, (n = udd). Sarcina globală a protonului este:

$$(+2/3)e + (+2/3)e + (-1/3)e = e,$$

iar sarcina globală a neutronului, conform celor spuse anterior, este:

$$(+2/3)e + (-1/3)e + (-1/3)e = 0.$$

Am notat cu "e" sarcina elementară a electronului: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}C$.

Observaţie: Quarkurile nu au putut fi descoperite experimental, până în prezent, motiv pentru care vom continua să considerăm protonul şi neutronul ca particule elementare.

Protonii şi neutronii sunt constituenţii stabili ai nucleelor atomilor, iar electronii intră, de asemenea, în constituţia atomilor şi moleculelor.

Înţelegerea corectă a fenomenelor electromagnetice se bazează pe cea mai importantă proprietate a particulelor elementare, aceea de a avea sarcină electrică.

Definiţia clasică a sarcinii electrice: *Tipul de sarcină proprie electronului se numeşte sarcină electrică negativă, iar tipul de sarcină proprie protonului se numeşte sarcină electrică pozitivă.*

Valoarea absolută a sarcinii electronului este egală cu sarcina protonului şi se numeşte sarcină electrică elementară.

Valoarea sarcinii elementare în S.I. este: $e=1{,}602 \cdot 10^{-19}C$.

Caracteristici: Numeroase fapte experimentale confirmă ipoteza că în natură există două şi numai două tipuri de sarcină electrică:

pozitivă şi **negativă**. Între corpurile încărcate cu sarcină electrică, precum şi între particulele elementare care posedă sarcină electrică se manifestă interacţiuni numite **interacţiuni electromagnetice**.

Una din cele patru tipuri de interacţiuni fundamentale existente în natură, o reprezintă interacţia electromagnetică (e.m.). Aceasta guvernează şi explică stabilitatea unor sisteme complexe, cum ar fi: sistemele atomice, sistemele moleculare şi substanţa la scară macroscopică. În concluzie:

Sarcina electrică este o mărime fizică scalară, caracteristică unor particule elementare. Ea reprezintă o proprietate intrinsecă a acestora şi determină existenţa interacţiunilor electromagnetice dintre aceste particule precum şi valoarea energiei (tăria) acestor interacţiuni.

1.3. Nucleul atomic. Atomul. Molecula. Substanţa la scară macroscopică.

Definiţia nucleului atomic: *Nucleul unui atom reprezintă cel mai mic edificiu format din particule elementare de tip proton şi neutron.*

Proprietăţi ale nucleului atomic: Dimensiunea liniară (diametrul) este de ordinul: $(10^{-14} \div 10^{-15})$m. Volumul nucleului este: $V = (4/3)\pi r^3 = (\pi/6)d^3$, unde d reprezintă diametrul nucleului ($d = 2r$), iar r — raza sa. Prin urmare, ordinul de mărime pentru volumul nuclear este: $V = (10^{-43} \div 10^{-45})m^3$. Densitatea materiei nucleare se exprimă prin relaţia: $\rho = m/V$, unde "m" este masa nucleului. Deoarece masa protonului şi a neutronului are valoarea: $m_p \approx m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$Kg, rezultă că $\rho \approx 10^{17}$Kg/m^3. Comparând această densitate cu cea a corpurilor macroscopice, de exemplu cu densitatea apei ($\rho = 10^3$Kg/m^3), constatăm că aceasta are o valoare foarte mare (de 10^{15} ori mai mare!).

Nucleul este un sistem microscopic cu sarcină electrică pozitivă. Constituenţii săi fiind protonii (cu sarcină electrică pozitivă) şi neutronii (fără sarcină electrică), nucleul va fi întotdeauna pozitiv din punct de vedere electric.

Constituenţii nucleului (protonii şi neutronii) se numesc nucleoni. Se notează cu Z numărul protonilor dintr-un nucleu, cu N numărul neutronilor din nucleu şi cu A = Z + N numărul total al nucleonilor din nucleul dat. Valoarea sarcinii electrice a nucleului este egală cu suma sarcinilor protonilor ce intră în compoziția lui: $Q_{nucleu} = +(Ze)$.

Nucleul este un sistem stabil. Această stabilitate nu poate fi explicată numai pe baza interacțiunilor electromagnetice dintre nucleoni. Într-adevăr, deoarece sarcinile electrice de acelaşi tip (semn) se resping, iar cele de semn contrar se atrag (experiența confirmă acest fenomen), ar rezulta că forța de respingere dintre protonii unui nucleu (încărcați pozitiv) ar trebui să ducă la dezmembrarea nucleului!

Deci, stabilitatea nucleului trebuie explicată admițând ipoteza că între nucleonii din nucleu trebuie să existe un nou tip de interacție fundamentală, numită **interacție nucleară** (interacție tare), care este o forță de atracție mult mai puternică dacât interacția electrostatică dintre nucleoni.

Definiția atomului: *Atomul este cel mai mic sistem fizic stabil în constituția căruia intră nucleul şi particule elementare de tip electroni.*

Proprietăți ale atomului: Atomul este format dintr-un nucleu, în jurul căruia gravitează un nor de electroni, aflați la distanțe mari de nucleu, comparativ cu dimensiunea nucleului. Diametrul atomului este de ordinul a 10^{-10}m.

Numărul electronilor dintr-un atom este egal cu numărul Z al protonilor din nucleul atomului respectiv, ceea ce implică faptul că **atomii sunt sisteme fizice neutre din punct de vedere electric** (suma algebrică a tuturor sarcinilor elementare dintr-un atom este egală cu zero).

Stabilitatea atomului este asigurată de interacțiile electromagnetice dintre nucleu, cu sarcina +(Ze), şi sarcina electrică negativă a norului electronic, -(Ze). Deşi electronii sunt atraşi de sarcina pozitivă a nucleului, este posibil să fie scoşi din atom cu o anumită cheltuială de energie din exterior, unul, doi, sau mai mulți electroni (atom ionizat o dată, de două ori, etc...).

Reciproc, este posibil ca un atom să prindă în "capcana electrică" a nucleului unul sau mai mulți electroni (atomii devin ioni încărcați cu sarcină negativă spre deosebire de primul caz când ionii sunt încărcați cu sarcină pozitivă). Faptul că atomii pot pierde sau câştiga electroni are o importanță crucială în explicarea fenomenelor electromagnetice.

Definiția moleculei: *Molecula este cel mai mic sistem fizic stabil în structura căreia intră mai mulți atomi.*

Proprietăţi ale moleculei: Numărul şi tipul de atomi ce participă la formarea moleculelor determină o mare varietate a acestora. Stabilitatea moleculelor este determinată, de asemenea, de interacţiile electromagnetice dintre constituenţii electrici din edificiul moleculei.
În starea normală moleculele sunt neutre din punct de vedere electric. În anumite situaţii excepţionale, moleculele pot pierde sau dobândi electroni devenind ioni moleculari pozitivi, respectiv negativi.

Definiţia substanţei: *Substanţa la scară macroscopică reprezintă materia pe care o percepem la nivel macroscopic, în diferite stări de agregare.*

Proprietăţi ale substanţei: Substanţa este formată dintr-un număr foarte mare de atomi şi molecule.

În **stările de agregare condensate** (starea lichidă şi solidă) distanţa dintre atomii vecini este de ordinul a 10^{-9}m.

Între starea solidă şi cea lichidă există unele deosebiri privind:

– Ordonarea spaţială a atomilor: în starea solidă cristalină există o ordine la distanţă mare (macroscopică), iar în starea lichidă există doar o ordine locală, pe distanţe ce cuprind doar primii vecini ai fiecărui atom (vecinii de ordinul întâi).

– Mobilitatea atomilor: în starea solidă atomii execută oscilaţii în jurul poziţiilor lor de echilibru fixe, iar în starea lichidă atomii se pot deplasa unii faţă de alţii pe distanţe macroscopice (ceea ce explică fluiditatea lichidelor).

În **starea de agregare gazoasă** distanţa dintre moleculele vecine (sau atomii vecini) este cam de 10 ori mai mare decât în cazul stărilor de agregare solidă şi lichidă.
La aceste distanţe interacţiile intermoleculare (sau dintre atomi) este aproximativ nulă, fapt care imprimă acestora o mişcare haotică şi independentă.

Starea de agregare, numită plasmă, reprezintă un gaz puternic ionizat format din ioni pozitivi şi electroni, care, în ansamblu, este electric neutră. Majoritatea substanţei din Univers (din stelele active, cozile cometelor) se găseşte în stare de plasmă.
Plasma este considerată ca fiind a patra stare de agregare a substanţei.
La temperaturi de 10^{7}K toate substanţele pot fi aduse în stare de plasmă.

Corpurile macroscopice pot fi **electrizate** prin diferite metode; un exemplu ar fi metoda electrizării prin frecare. La o vergea de sticlă frecată cu mătase, un număr întreg de electroni trec de pe sticlă pe

mătase. Sticla se încarcă (electrizează) pozitiv, iar mătasea se încarcă (electrizează) negativ.

Dacă frecăm o vergea de ebonită cu blană de pisică, un număr întreg de electroni trec de pe blană pe ebonită. Blana rămâne încărcată pozitiv, iar ebonita se încarcă cu sarcină negativă.

1.4. Conductori şi izolatori.

***Definiţia conductorilor**: Conductorii sunt substanţe în interiorul cărora există particule cu sarcină electrică capabilă să se deplaseze prin substanţă pe distanţe macroscopice. Particulele încărcate electric din conductori se numesc **purtători liberi de sarcină**.*

Observaţie: Orice sarcină în exces, transmisă punctual conductorului, nu rămâne poziţionată în locul respectiv ci se repartizează, instantaneu, pe toată suprafaţa conductorului. Exemple de conductoare: metalele, electroliţii, gazele ionizate.

Metalele sunt conductori de clasa întâi. Purtătorii de sarcină electrică din metale sunt electronii liberi denumiţi şi **electroni de conducţie**.

Electroliţii sunt conductori de clasa a doua. Purtătorii de sarcină electrică sunt **ionii liberi** de ambele semne.

Gazele ionizate sunt conductori de clasa a doua. Purtătorii de sarcină electrică sunt **ionii** de ambele semne şi **electronii**.

***Definiţia semiconductorilor**: Semiconductorii sunt substanţe cu concentraţii ale purtătorilor de sarcină electrică de $10^4 \div 10^5$ ori mai mică decât în metale. Purtătorii de sarcină pot fi **electronii** (negativi) sau **golurile** (pozitivi).*

***Definiţia izolatorilor (dielectricilor)**: Izolatorii sunt substanţe fără purtători liberi de sarcină electrică. Sarcinile electrice din dielectrici sunt legate de atomii sau moleculele de care aparţin şi se numesc **sarcini electrice legate**.*

Sarcinile electrice legate se pot deplasa pe distanţe foarte mici de ordinul a 10^{-10}m (1Å = 10^{-10}m), ceea ce are ca efect **polarizarea dielectricului**. Orice sarcină în exces comunicată izolatorului într-un punct al acestuia rămâne localizată, deci nu se repartizează pe toată suprafaţa acestuia ca la conductori.

1.5. Sarcina electrică.

***Definiţia modernă a sarcinii electrice**: Sarcina electrică este o mărime fizică cuantificată, relativist invariantă care în sistemele izolate se conservă.*

Proprietăţi ale sarcinii electrice:

Cuantificarea sarcinii electrice. Sarcina netă a oricărui corp este egală cu suma algebrică a sarcinilor particulelor elementare din care este constituit corpul respectiv.

Deoarece singurele particule elementare încărcate din atomi sunt protonii cu sarcina +e şi electronii cu sarcina -e, rezultă că valoarea sumei algebrice a sarcinilor oricărui corp trebuie să fie un multiplu întreg al sarcinii elementare "e".

Sarcina elementară "e" reprezintă cuanta de sarcină electrică.
Dacă Q este sarcina electrică netă a unui corp macroscopic atunci vom putea scrie: $Q = \pm Ne$, $N = 0, 1, 2, 3,...$

a) Caracterul discret al sarcinii electrice este evident pentru particule microscopice. Ex: Na^+, Cl^-, Cu^{2+},...

b) Caracterul discret al sarcinii electrice se estompează (aparent sarcina electrică variază continuu) în cazul corpurilor macroscopice încărcate: o sarcină electrică în plus sau în minus nu poate modifica vizibil sarcina Q a corpului, pentru care valoarea numărului N este foarte mare (de ordinul 10^n).

Invarianţa relativistă a sarcinii electrice. Fie o particulă elementară cu masa de repaus m_0, viteza v şi sarcina electrică q. Presupunem că viteza particulei este foarte mare (comparabilă cu viteza luminii în vid, c).

Conform teoriei relativităţii, la aceasta viteză, masa particulei (masa de mişcare sau sarcina gravitaţională) $m = m_0/(1-\beta^2)^{1/2}$, unde $\beta = v/c$.

Cu alte cuvinte, masa particulei variază cu viteza. Deci, *masa nu este invariantă* în teoria relativităţii.

Spre deosebire de masă, sarcina electrică a unei particule elementare are aceeaşi valoare, indiferent de viteza cu care se deplasează: *sarcina electrică este relativist invariantă.*

Experienţe dintre cele mai sensibile nu au putut detecta variaţia sarcinii electrice cu viteza. În concluzie: *În orice sistem de referinţă inerţial în care s-ar măsura sarcina electrică se obţine acelaşi rezultat.*

Conservarea sarcinii electrice. *Într-un sistem izolat, sarcina electrică totală, adică suma algebrică a sarcinilor pozitive şi negative, se conservă (rămâne constantă).*

Printr-un sistem izolat se înţelege că nici un fel de substanţă nu traversează graniţele ce delimitează sistemul, deci nu se schimbă sarcină electrică cu exteriorul.

Observaţie: Lumina poate interacţiona cu sistemul, fără a afecta acest principiu, deoarece *fotonul este neutru din punct de vedere electric.*

Legea conservării sarcinii poate fi formulată ca un postulat sau ca o lege empirică, verificată de toate observaţiile fără excepţie. Această lege este tot atât de fundamentală pentru înţelegerea fenomenelor naturii ca şi celelalte legi de conservare ale fizicii: impulsului, momentului cinetic, a energiei, etc...

Exemple care atestă legea conservării sarcinii electrice:

a) În procesele de dezintegrare radioactivă a nucleelor *suma sarcinilor nucleului şi particulei ce rezultă în urma dezintegrării este egală cu sarcina nucleului ce se dezintegrează.*

Exemplu: dezintegrarea α se poate scrie sub forma:

$$_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{2}He^{4} + {}_{Z-2}Y^{A-4},$$
$$_{88}Ra^{226} \rightarrow {}_{2}He^{4} + {}_{86}Rn^{222}.$$

b) În reacţiile nucleare suma sarcinilor nucleelor ce intră în reacţie este egală cu suma sarcinilor nucleelor ce rezultă din reacţii.

Exemplu: $_{Z}X^{A} + {}_{2}He^{4} \rightarrow {}_{Z+2}Y^{A+4},$

$$_{5}B^{10} + {}_{2}He^{4} \rightarrow {}_{7}N^{14}.$$

c) În procesul de electrizare prin frecare sarcina pozitivă netă cu care rămâne încărcată sticla frecată cu mătase este egală cu sarcina negativă cu care se încarcă mătasea. Din faptul că $1e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}C$ rezultă: $1C = e/1{,}602 \cdot 10^{-19} = 6{,}24 \cdot 10^{18}e$.

Unitatea de sarcină electrică în sistemul internaţional de unităţi de măsură este Coulombul egal cu sarcina a 6,24·10^18 electroni

Concluzie: Mişcarea particulelor clasice de substanţă este descrisă de mecanica clasică newtoniană şi de mecanica clasică relativistă.

Mişcarea particulelor cuantice (microparticule) este descrisă de mecanica cuantică nerelativistă şi relativistă.

Mişcarea materiei–substanţă poate fi descrisă de mecanica clasică sau de mecanícă cuantică.

1.6. Materia sub formă de câmp (materie–câmp).

Mecanica newtoniană nu poate descrie şi explica orice fenomen al naturii. De exemplu, studiul fenomenelor electromagnetice, care nu necesită pentru manifestarea lor existenţa materiei sub formă de substanţă, nu poate fi studiată de mecanica newtoniană.

Fenomenele electromagnetice pot fi descrise cu ajutorul unei forme speciale, diferite de existenţa şi manifestarea materiei: **câmpul electormagnetic**.

Materia–câmp (câmpul electromagnetic) nu poate fi descrisă de legile mecanicii newtoniene, ci de **ecuaţiile lui Maxwell**.

Teoria care are la bază ecuaţiile lui Maxwell se numeşte **electrodinamică clasică**.

Câmpul (materia–câmp) este generat de sarcinile electrice în repaus şi în mişcare, acţionând, la rândul său, asupra sarcinilor electrice.

Câmpul electromagnetic are două componente: câmpul electric şi câmpul magnetic.

Definiţia câmpului electric: *Partea din câmpul electromagnetic care acţionează cu o forţă asupra sarcinilor electrice aflate în repaus sau în mişcare în câmpul electromagnetic se numeşte câmp electric.*

Câmpul electric generat de sarcina electrică aflată numai în repaus se numeşte câmp electrostatic.

Definiţia câmpului magnetic: *Partea din câmpul electromagnetic care acţionează cu o forţă suplimentară numai asupra sarcinilor electrice aflate în mişcare în câmpul electromagnetic se numeşte câmp magnetic.*

Prin urmare, câmpul electric este generat de sarcinele electrice aflate în mişcare sau în repaus, iar câmpul magnetic este generat numai de sarcinele electrice aflate în mişcare.

Câmpurile electrice sau magnetice generate de sarcini electrice (sau de curenţi electrici) variabile în timp sunt variabile în timp.

Un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic variabil în timp şi reciproc. Aceste câmpuri electrice şi magnetice variabile în timp ce se generează reciproc coexistă în acelaşi punct din spaţiu şi în acelaşi moment (sunt în fază), formând câmpul electromagnetic.

Manifestarea lui reală sub formă de câmp electric pur sau câmp magnetic pur depinde de sistemul de referinţă inerţial din care se face observaţia.

Materia–câmp ca şi materia–substanţă este caracterizată prin energie, impuls, moment cinetic, etc...

1.7. Legea lui Coulomb.

Interacţia dintre sarcinile electrice punctiforme aflate în repaus este descrisă de **legea lui Coulomb** denumită şi **legea fundamentală a electrostaticii**. O altă formă a acestei legi este cunoscută sub numele de **teorema lui Gauss**. Sub formă scalară şi atunci când sarcinile care interacţionează sunt plasate în vid, legea lui Coulomb se prezintă astfel:

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}}.$$

Enunţul acestei legi este următorul (forma scalară):

Două sarcini electrice punctiforme în repaus (corpuri punctiforme electrizate), situate în vid, interacţionează cu o forţă a cărei mărime F este direct proporţională cu produsul mărimilor celor două sarcini electrice q_1 şi q_2 şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele.

Observaţie: Legea lui Coulomb este valabilă pentru obiecte încărcate electric (cu purtători de sarcină electrică) ale căror dimensiuni sunt mult mai mici decât distanţa dintre ele. Se spune că ea este validă numai pentru *sarcini punctiforme.*

Valoarea numerică a constantei care apare în forma matematică a legii lui Coulomb exprimată în S.I. este:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2},$$

ε_0 reprezentând o constantă universală numită *permitivitatea electrică a vidului*, $\varepsilon_0=8,8542\ 10^{-12}$F/m.

Dacă sarcinile punctiforme se află într-un mediu oarecare legea lui Coulomb se scrie astfel:

Forma scalară: $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}$; Forma vectorială: $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}\cdot\vec{n}$,

unde ε este o constantă de material numită permitivitatea mediului.

Cele două sarcini electrice sunt considerate în repaus (staţionare) pentru că dacă acestea s-ar afla în mişcare ar apărea în plus forţe de natură magnetică, de care ne vom ocupa în capitolul 3.

Sub formă vectorială forţa coulombiană de interacţie, $\vec{F}_{12}$, dintre sarcinile q_1 şi q_2 situate la distanţa $\vec{r}$ în vid are una dintre formele următoare: $\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}\cdot\vec{r}_{12}$ sau $\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}\cdot\vec{n}$.

Vectorul $\vec{n}$ este prin definiţie versorul vectorului de poziţie $\vec{r}_{12}=\vec{r}$ având originea în sarcina q_1 şi vârful în sarcina q_2. Expresia matematică a versorului $\vec{n}$ este: $\vec{n}=\vec{r}/|\vec{r}|$ în care $|\vec{r}|$ este modulul vectorului $\vec{r}$ şi are expresia: $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, x, y, z fiind coordonatele sarcinii q_2 (v. fig.1.1).

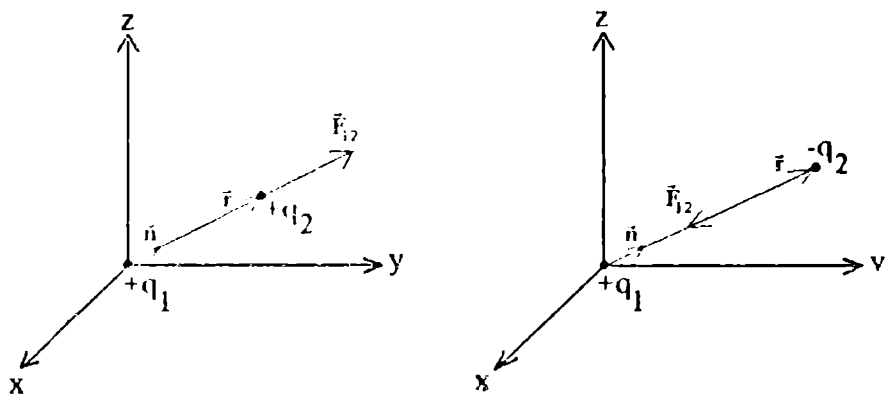


Fig. 1.1

Caracteristicile forţei $\vec{F}_{12}$ sunt următoarele:

a) Este direct proporţională cu produsul $q_1 q_2$.

b) Este invers proporţională cu pătratul distanţei dintre sarcinile q_1 şi q_2.

c) Este o forţă care acţionează de-a lungul dreptei care trece prin sarcinile q_1 şi q_2, fiind, deci, o *forţă de tip central.*

d) Este o forţă centrală repulsivă dacă $q_1 \cdot q_2 > 0$ (sarcinile au acelaşi semn).

e) Este o forţă centrală atractivă dacă $q_1 \cdot q_2 < 0$ (sarcinile au semne opuse).

Cele două desene de mai sus arată că dacă forţa este paralelă cu vectorul de poziţie $\vec{r}$ sarcinile se resping, iar dacă suportul vectorului forţă este antiparalel cu vectorul de poziţie, sarcinile q_1 şi q_2 se atrag. În primul caz forţa $\vec{F}_{12}$ se consideră *pozitivă*, iar în al doilea caz se consideră *negativă.*

În concluzie, legea lui Coulomb arată că: două sarcini electrice de acelaşi semn se resping, iar două sarcini electrice de semn contrar se atrag.

f) Din caracterul de forţă centrală, din mecanică, rezultă şi alte proprietăţi ale forţei coulombiene:

- f_1) Traiectoria pe care o poate descrie sarcina q_2 este întotdeauna plană.
- f_2) Vectorul moment cinetic, $\vec{L}$, al prticulei q_2 se conservă în timpul mişcării acesteia.
- f_3) Vectorul viteză areolară, $\vec{\Omega}$, a particulei q_2 se conservă.
- f_4) Forţa centrală, $\vec{F}_{12}$, nedepinzând explicit de timp, este o *forţă conservativă.*

g) Forţele coulombiene satisfac legea a treia a lui Newton.

Într-adevăr, fie $\vec{F}_{12}$ forţa cu care q_1 acţionează asupra lui q_2 şi fie $\vec{F}_{21}$ forţa cu care sarcina q_2 acţionează asupra sarcinii q_1. În acest caz:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{n} = -\vec{F}_{21}$$

$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|$, iar cele două forţe sunt orientate în sens invers (v. fig.1.2.a).

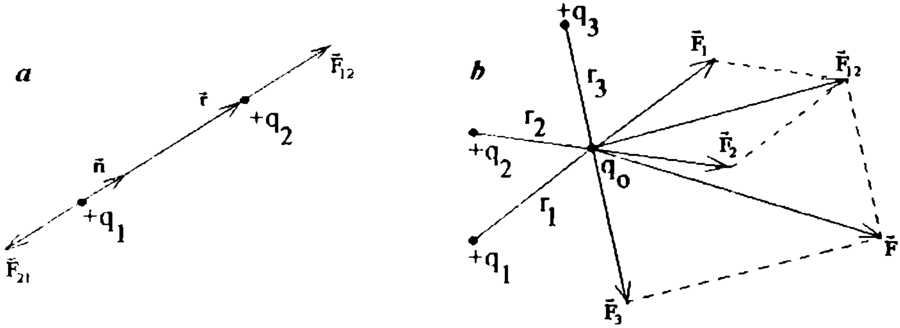


Fig. 1.2

h) Forțele coulombiene satisfac **principiul suprapunerii** (**principiul superpoziției**).

Fie sarcinile q_1, q_2, q_3,...., q_n situate la distanțele r_1, r_2, r_3,..., r_n de o sarcină oarecare q_0, atunci forța rezultantă $\vec F$, ce acționează asupra sarcinii q_0 din partea sistemului format din cele n sarcini este egală cu suma vectorială a forțelor cu care acționează independent, fiecare sarcină asupra lui q_0 (v. fig. 1.2.b, pentru cazul particular n = 3).

Matematic acest principiu se scrie:

$$\vec F = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i \text{ , cu } \vec F_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i q_0}{r_i^2}\cdot\vec n_i .$$

În cazul din desen putem scrie:

$$\vec F_{12} = \vec F_1 + \vec F_2 , \quad \vec F_{12} + \vec F_3 = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 = \vec F .$$

i) Forța de interacție electrostatică este extrem de slabă. Fie două sarcini q_1 = -e și q_2 = +e (de exemplu, un electron și un proton) aflate la distanța $r=10^{-2}$m. În acest caz:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1{,}6^2\cdot 10^{-38}}{(10^{-2})^2} = -2{,}3\cdot 10^{-24}\,\mathrm{N} .$$

j) Forța de atracție gravitațională este neglijabilă în raport cu forța de interacție electrică.

Fie un electron cu masa $m_e = 9\,10^{-31}$Kg și un proton cu masa m_p = $=1{,}66\,10^{-27}$Kg aflați la distanța 10^{-2}m. Cunoscând constanta atracției universale $\gamma = 6{,}67\,10^{-11}$, se poate calcula forța de atracție gravitațională:

$$F = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{9\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}}{(10^{-2})^2} = 9{,}6\cdot 10^{-64}\,\mathrm{N} .$$

Forța electrică F_e este: $F_e = -2{,}3\,10^{-24}$N și deci: $F_e/F = 2{,}4\,10^{+39}$.

Concluzie: Pentru particulele electron şi proton interacţia electrostatică este mai puternică decât cea gravitaţională de peste 10^{39} ori. Deci, în domeniul microparticulelor cu sarcină electrică, forţa (interacţiunea) gravitaţională se poate neglija în comparaţie cu interacţiunea electrostatică.

În domeniul corpurilor macroscopice cu masă foarte mare (cum sunt corpurile cereşti), care sunt neutre din punct de vedere electric, interacţia electrostatică dintre ele se poate neglija comparativ cu forţa gravitaţională.

Densitatea de sarcină electrică:

Sarcina electrică Q poate fi distribuită neuniform unidimensional (pe fire), bidimensional (pe suprafeţe) sau tridimensional (în volumul corpurilor).

a) Densitatea medie liniară şi densitatea liniară se definesc astfel:

- *densitatea medie liniară:* $\lambda_m = \dfrac{\Delta q}{\Delta l}$,

- *densitatea liniară de sarcină:* $\lambda = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l} = \dfrac{dq}{dl}$.

b) Densitatea medie superficială şi densitatea superficială de sarcină se definesc astfel:

- *densitatea medie superficială:* $\sigma_m = \dfrac{\Delta q}{\Delta s}$,

- *densitatea superficială de sarcină:* $\sigma = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta s} = \dfrac{dq}{ds}$.

c) Densitatea medie volumică şi densitatea volumică de sarcină se definesc astfel ($d\tau$ reprezintă elementul infinitezimal volumic):

- *densitatea medie volumică:* $\rho_m = \dfrac{\Delta q}{\Delta \tau}$,

- *densitatea volumică de sarcină:* $\rho = \lim\limits_{\Delta \tau \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta \tau} = \dfrac{dq}{d\tau}$.

Dacă sarcina q este distribuită uniform în lungime, în suprafaţă şi în volum, atunci:

$\lambda = q/l$ = sarcina unităţii de lungime,

$\sigma = q/s$ = sarcina unităţii de suprafaţă,

$\rho = q/\tau$ = sarcina unităţii de volum.

Unităţile de măsură sunt următoarele:

$[\lambda]_{S.I.} = C/m$, $[\sigma]_{S.I.} = C/m^2$, $[\rho]_{S.I.} = C/m^3$.

În ipoteza că dl, ds, dτ sunt suficient de mici, elementele de sarcină: $dq = \lambda dl$, $dq = \sigma ds$, $dq = \rho d\tau$ se pot considera sarcini punctiforme care pot satisface legea lui Coulomb.

Observaţie: Influenţele (interacţiile) nu se pot propaga mai repede decât cu o anumită viteză fundamentală c, viteza luminii.
De aceea nu este posibil să ştim unde se află sarcina şi la ce distanţă în momentul prezent în care se "simte" interacţia.

Singurul lucru care poate afecta câmpul de forţe coulombiene într-un loc şi la un moment dat este comportarea sarcinilor în trecut. Întârzierea în timp (timpul retardat, notat cu r'/c) este timpul necesar pentru a se ajunge, cu viteza c, de la o sarcină electrică Q până în punctul P unde se află cealaltă sarcină electrică q (deci, unde se determină interacţia). r' din raportul r'/c reprezintă poziţia unde se afla sarcina atunci când informaţia (efectul de interacţie) care ajunge în punctul P "părăsea" sarcina Q.

Să presupunem că sarcina Q ar emite semnale luminoase şi că lumina ar putea sosi în P cu viteza c. Atunci când am privi sarcina Q, nu am vedea-o unde se află acum, ci unde era la un moment de timp anterior $t' = t - r'/c$.

Sub forma cea mai generală, forţa de interacţie dintre cele două sarcini Q şi q se poate scrie (fără demonstraţie):

$$\vec{F} = \frac{-Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{\vec{n}'}{r'^2} + \frac{r'}{c}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{n}'}{r'^2}\right) + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2\vec{n}'}{dt^2}\right]$$

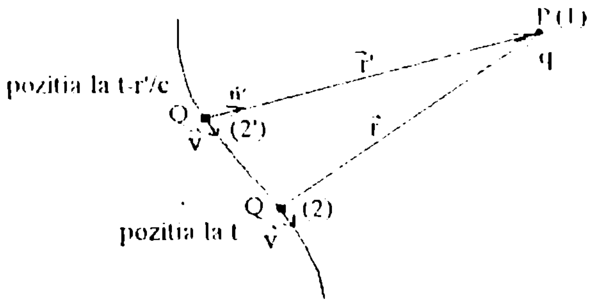


Fig. 1.3

În această relaţie intervine direcţia aparentă $\vec{n}'$(direcţia retardată) şi distanţa retardată r'. Primul termen reprezintă legea lui Coulomb. Al doilea termen, calitativ vorbind, se datorește faptului că natura ar încerca să ţină seama de faptul că efectul este retardat. Acest termen reprezintă o corecţie la termenul coulombian retardat, egală cu variaţia acestuia în unitatea de timp şi înmulţită cu retardarea care intervine. Există şi un al treilea termen de corecţie, şi anume derivata a doua, în raport cu timpul t, a vectorului unitate în direcţia sarcinii.

1.8. Câmpul electric

Definiţia câmpului electric: *Câmpul electric (electrostatic) este o formă suis generis de existenţă în spaţiu şi timp a materiei, a cărei prezenţă se manifestă printr-o forţă de natură coulombiană ce acţionează asupra oricărei sarcini electrice care se găseşte în spaţiul cu câmp electric.*

1.8.1. Modelul acţiunii la distanţă şi al acţiunii din aproape în aproape

Legea lui Coulomb care descrie exact interacţiunea dintre sarcini electrice punctiforme nu explică mecanismul prin care o sarcină q situată la o distanţă r de sarcina Q "simte" forţa cu care Q acţionează asupra lui q (sau invers). Fizica clasică nu menţionează cât timp trebuie să treacă pentru ca forţa generată de Q să ajungă în punctul în care se află q şi presupune că forţa electrică se propagă instantaneu la orice distanţă, adică cu viteză infinită. *Aceasta este ipoteza acţiunii la distanţă a interacţiunilor.* Cu alte cuvinte, dacă r s-ar micşora cu o anumită valoare Δr atunci noua forţă de interacţie (de respingere) F' cu care +Q acţionează asupra lui +q este *sesizată instantaneu* de aceasta din urmă. Această ipoteză este admisă fără nici o explicaţie.

$$F'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{(r-\Delta r)^2}.$$

Teoria relativităţii arată, în schimb, faptul că *viteza maximă de propagare a semnalelor (interacţiunilor) în Univers este finită şi egală cu viteza luminii în vid, c.*

Fizica modernă arată că modelul acțiunii la distanță nu este valabil și este înlocuit cu *modelul acțiunii din aproape în aproape*, prin intermediul câmpului electromagnetic care se propagă cu viteză finită, egală cu viteza luminii în vid, c.
Conform acestui model în exemplul anterior sarcina +q va sesiza scăderea distanței r cu Δr după un timp finit egal ca valoare cu timpul necesar luminii să ajungă din punctul A în punctul B (v. fig.1.4).

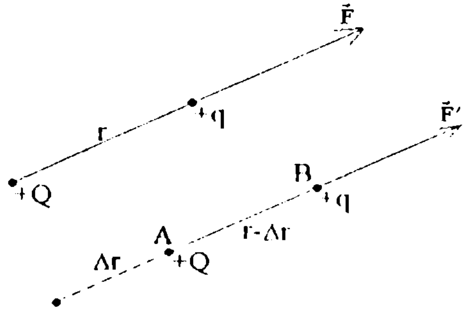


Fig.1.4

Mecanismul acțiunii din aproape în aproape a sarcinii Q asupra sarcinii q este următorul:

a) Sarcina Q generează în jurul ei un câmp electric, care se propagă în tot spațiul cu viteza luminii, c.

b) După ce câmpul electric generat de Q a apărut și în locul unde se află situată sarcina q, acesta acționează asupra sarcinii q cu o forță dată de legea lui Coulomb:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \vec{n}}.$$

Observație: Sarcinile electrostatice q_i, i = 1,2,...,n, dintr-un sistem de sarcini, conțin un număr întreg de sarcini elementare *e*. Dacă se va ține seama de principiul superpoziției efectelor liniare de interacție ale acestor sarcini elementare, se deduce că reuniunea tuturor interacțiilor sarcinilor elementare conduce la efectul final de interacție globală a sarcinilor q_i. Deci, dacă se înțelege mecanismul interacției a doi electroni se poate explica și cum interacționează ionii de același semn sau de semn contrar sau corpurile macroscopice încărcate electrostatic pe baza mecanismului acțiunii din aproape în aproape.

La baza interacției a doi electroni se află procesele virtuale de schimb fotonic.

Pentru înţelegerea unui proces virtual se apelează la relaţia de nedeterminare: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$. În acest caz, nu este vorba numai despre nedeterminare ci şi despre o limitare care apare în timp: Δt reprezintă durata stării a cărei energie se măsoară. Prin urmare, cu cât este mai mică durata Δt, cu atât energia va fi mai imprecis determinată. În concluzie, putem privi ΔE ca o fluctuaţie (o abatere de la valoarea normală) a energiei unui sistem cuantic (compus, de exemplu, dintr-un electron şi un foton), cu condiţia ca această fluctuaţie să dureze numai $\Delta t = \dfrac{\hbar}{\Delta E}$ şi nu mai mult! Acest raţionament se poate aplica tocmai unui proces de tipul $e^- \rightarrow e^- + \gamma^0$ care ar sta la baza explicării interacţiei electrostatice dintre doi electroni. Deşi se pare că intră în contradicţie cu legea conservării energiei, acest proces este posibil cu condiţia ca fotonul γ^0 să existe doar virtual, adică să apară şi să dispară foarte repede, într-un interval de timp $\tau \leq \dfrac{\hbar}{\Delta E}$, ΔE fiind energia lui, $\Delta E = \hbar\omega$. Un proces analog are loc şi cu celălalt electron. Electronii îşi vor "pasa" continuu unul altuia un foton virtual, respingându-se reciproc, realizându-se astfel două procese virtuale cuplate de schimb fotonic. Procesul este atât de rapid, încât legea conservării energiei nu este deloc deranjată.

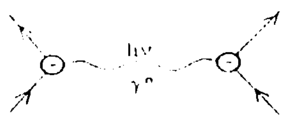


Fig. 1.5

Acest tip de proces virtual de schimb de fotoni stă la baza tuturor interacţiilor electromagnetice.

1.8.2. Vectorul câmp electric al unei sarcini punctiforme. Principiul superpoziţiei pentru vectorul câmp electric.

Prin definiţie, vectorul câmp electric generat de sarcina punctiformă Q la distanţa r are expresia următoare:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{n}}.$$

Modulul său este : $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$.

E este direct proporțional cu sarcina Q și invers proporțional cu r^2.

Valoarea (modulul) vectorului câmp electric al sarcinii Q, într-un punct din spațiu ce o înconjoară, depinde atât de valoarea sarcinii Q care îl generează, cât și de distanța r de la Q până la punctul respectiv.

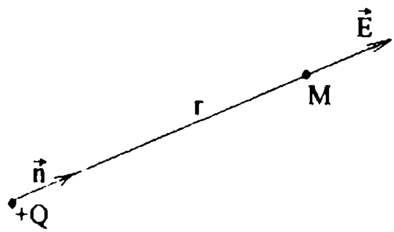


Fig. 1.6

Sarcina de probă q_0 reprezintă sarcină cu care se stabilește dacă într-un punct din spațiu există un câmp electric sau nu.

Cerințele sarcinii de probă sunt:

a) să fie pozitivă;

b) să fie atât de mică încât câmpul electric propriu să nu modifice câmpul electric existent în spațiu înainte de aducere ei în câmp.

Pentru a arăta legătura dintre vectorul câmp electric $\vec{E}$ și vectorul forță de interacție coulombiană, $\vec{F}$, se consideră o sarcină de probă q_0 plasată într-un punct M, unde vectorul câmp electric $\vec{E}$ este dat de relația de definiție.

Conform legii lui Coulomb putem scrie următoarele:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r^2} \cdot \vec{n} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{n} \right) \cdot q_0 = \vec{E} \cdot q_0 \text{, deci: } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Dacă în relația anterioară se pune q_0=1C, atunci rezultă definiția:

> ***Vectorul câmp electric $\vec{E}$ într-un punct din spațiu este egal cu forța $\vec{F}$ ce acționează asupra unității de sarcină pozitivă q_0 = +1C aflată în punctul respectiv.***

Matematic, intensitatea câmpului electric se poate defini astfel:

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

pentru a sugera cerinţa (b) ca sarcina de probă, q_0, să fie atât de mică încât să nu perturbe câmpul electric existent, care trebuie determinat.

Unitatea de măsură în sistemul internaţional pentru vectorul câmp electric rezultă din relaţia de definiţie:

$$[E]_{S.I.} = [F]_{S.I.}/[q_0]_{S.I.} = N/C = \text{newton/coulomb}.$$

1.8.3. Vectorul câmp electric al unui sistem de n sarcini punctiforme

Fie n sarcini pozitive punctiforme în vid q_1, q_2, q_3,...., q_n situate la distanţele r_1, r_2, r_3,...,r_n de o sarcină de probă q_0.

Conform principiului suprapunerii se poate scrie expresia forţei rezultante coulombiene $\vec{F}$ ce acţionează asupra sarcinii de probă q_0:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \cdot \vec{n}_i \text{, unde: } \vec{n}_i = \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = \frac{\vec{r}_i}{r_i}.$$

Din această relaţie rezultă prin împărţirea cu q_0 că vectorul câmp electric rezultant în punctul în care se află sarcina de probă are valoarea:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{n}_i .$$

Din această relaţie rezultă *principiul suprapunerii* pentru vectorul câmp electric $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \cdot \vec{n}_1 + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \cdot \vec{n}_2 + \ldots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} \cdot \vec{n}_n = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i .$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i .$$

Principiul suprapunerii: *Acţiunile unor vectori câmp electric care există în acelaşi timp într-un punct din spaţiu, se suprapun, fiind egale cu acţiunea unui vector câmp electric egal cu suma vectorială a acestor vectori câmp electric.*

Concluzie: Concluzia asupra suprapunerii liniare a câmpurilor în vid este că în domeniul clasic de dimensiuni şi la intensităţi ale câmpului realizabile există o evidenţă abundentă a valabilităţii suprapunerii liniare şi lipsesc argumente împotriva ei. În domeniul atomic şi subatomic există efecte cuantice neliniare a căror origine se află în cuplajul dintre particulele încărcate şi câmpul electromagnetic. Ele modifică interacţiile dintre particulele încărcate şi provoacă interacţii între câmpurile electromagnetice chiar dacă sunt absente particulele fizice.

1.8.4. Câmpul dipolului electric

Definiţia dipolului electric: *Două sarcini punctiforme, egale în modul şi de semn opus, situate la distanţa "a" una faţă de alta formează un sistem care se numeşte* ***dipol electric****. Dreapta care trece prin cele două sarcini se numeşte* ***axa dipolului electric****.*

Definiţia momentului dipolului electric: *Momentul unui dipol electric este o mărime vectorială notată cu* $\vec{p}$, *egală cu produsul uneia dintre sarcinile dipolului şi vectorul* $\vec{a}$, *dus de la sarcina "-q" la sarcina "+q":* $\vec{p} = q\,\vec{a}$.

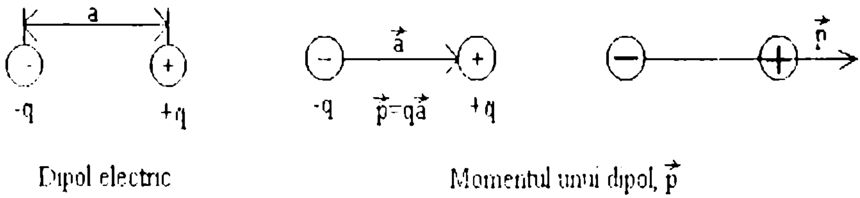


Fig. 1.7

Mărimea vectorului câmp electric a unui dipol electric într-un punct P din spaţiu se determină în funcţie de poziţia punctului P faţă de dipol.

a) Punctul P se află pe prelungirea axei dipolului.

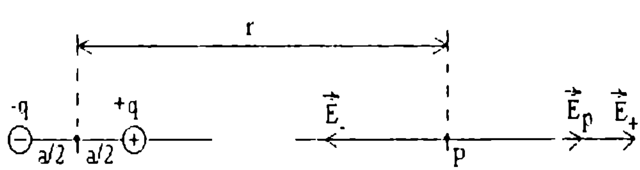


Fig. 1.8.

$$\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \text{sau} \quad \vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\left(r-\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\vec{n}_+ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\left(r+\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\vec{n}_-,$$

în care $\vec{E}_+$ este vectorul câmp electric creat de sarcina +q în punctul P, iar $\vec{E}_-$ este vectorul câmp electric creat de sarcina -q în punctul P.

Conform principiului suprapunerii, $\vec{E}_p$, vectorul câmp rezultant, este suma vectorilor câmp electric $\vec{E}_+$ şi $\vec{E}_-$

Pentru deducerea modulului vectorului $\vec{E}_p$ ridicăm la pătrat vectorul $\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$:

$$E_p^2 = E_+^2 + E_-^2 + 2\vec{E}_+\cdot\vec{E}_- = E_+^2 + E_-^2 + 2E_+\cdot E_-\cdot\cos\left(\vec{E}_+,\vec{E}_-\right).$$

Deoarece $\vec{E}_+$ şi $\vec{E}_-$ sunt vectori antiparaleli atunci rezultă că: $\cos(\vec{E}_+,\vec{E}_-)=\cos\pi=-1$ şi deci $E_p^2 = E_+^2 + E_-^2 - 2E_+\cdot E_- = \left(E_+ - E_-\right)^2 \Rightarrow$

$$\left|\vec{E}_p\right| = \sqrt{E_p^2} = \sqrt{\left(E_+ - E_-\right)^2} = \left|E_+ - E_-\right|.$$

Deoarece $E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\left(r-\frac{a}{2}\right)^2}$ şi $E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\left(r+\frac{a}{2}\right)^2}$ rezultă:

$$E_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left|\frac{1}{\left(r-\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{a}{2}\right)^2}\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2ar}{\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)^2}.$$

Prin urmare, vectorul rezultant $\vec{E}_p$ are direcţia axei dipolului. Sensul vectorului $\vec{E}_p$ este dirijat de la -q către +q. Modulul lui $\vec{E}_p$ este:

$$E_p = \frac{2qar}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)^2}.$$

Caz particular: Punctul P se află pe axa dipolului la o distanţă mare de centrul acestuia: r>>a. În acest caz:

$$E_p = \frac{2qar}{4\pi\varepsilon_0 r^4} = \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

în care p=qa este modulul vectorului moment al dipolului electric. Deci:

$$\boxed{E_p = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

Deci, E_p, modulul vectorului câmp electric al dipolului, este direct proporţional cu mărimea momentului dipolului p şi invers proporţional cu cubul distanţei r.

b) Punctul P este situat pe normala ce trece prin centrul dipolului.

Vectorii câmp electric $\vec{E}_+$ şi $\vec{E}_-$ nu sunt coliniari, iar vectorul câmp rezultant $\vec{E}_p$ este egal cu suma vectorială a vectorului câmp $\vec{E}_+$ şi $\vec{E}_-$: $\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$.

Deoarece $r_+=r_-$ rezultă că $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-|$ şi, deci, $|\vec{E}_p|$ este egal cu lungimea diagonalei rombului ale cărui laturi sunt egale cu $|\vec{E}_+|$ şi $|\vec{E}_-|$.

Prin ridicarea la pătrat a relaţiei $\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$, rezultă:

$$E_p^2 = E_+^2 + E_-^2 + 2\vec{E}_+ \cdot \vec{E}_- = 2E_+^2 + 2E_+^2 \cdot \cos 2\alpha = 2E_+^2(1+\cos 2\alpha) = 4E_+^2 \cdot \cos^2\alpha$$

unde s-a utilizat formula: $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ (v. anexa).

Rezultă: $E_p = 2E_+ \cdot \cos\alpha = 2\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2}\cos\alpha$.

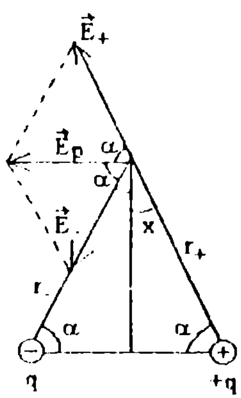


Fig. 1.9

Deoarece $\cos\alpha = a/(2r_+)$ rezultă: $E_p = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3}$, unde p=aq reprezintă modulul momentului de dipol electric.

În plus, se observă că $\vec{E}_p \perp \vec{r}$ (α+x=π/2). Sensul lui $\vec{E}_p$ este de la sarcina +q către sarcina -q.

Caz particular: Punctul P este foarte îndepărtat de dipol (r >>a). Rezultă că: $r_+ = r_- \approx r$ şi deci:

$$\boxed{E_p = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}.$$

c) Punctul P este arbitrar şi îndepărtat de dipol (r >>a).

Descompunem momentul de dipol $\vec{p}$ în două componente: $\vec{p}_1$ paralel cu $\vec{r}$ şi $\vec{p}_2$ perpendicular pe $\vec{r}$. Din figură rezultă: $p_1 = p\cos\theta$, $p_2 = p\sin\theta$.

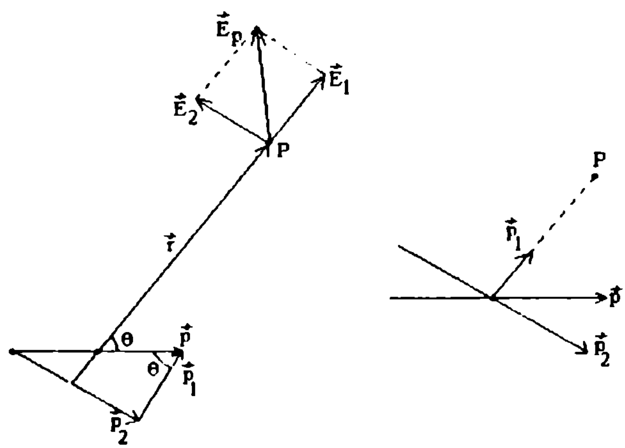


Fig. 1.10

Punctul P se află în prelungirea axei dipolului $\vec{p}_1$ având câmpul dat de formula $E_{p_1} = \dfrac{2p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ şi pe normala la axa dipolului $\vec{p}_2$, având câmpul dat de formula $E_{p_2} = \dfrac{p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. Deci: $E_1 = \dfrac{2p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{2p\cos\theta}{r^3}$ şi $E_2 = \dfrac{p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{p\sin\theta}{r^3}$ şi deoarece: $\vec{E}_2 \perp \vec{E}_1$ rezultă că

$E_P = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$. Prin urmare,

$$\boxed{E_r = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cdot\cos^2\theta + 1}}$$

reprezintă modulul câmpului rezultant într-un punct oarecare îndepărtat de dipol. Din formulele încadrate rezultă următoarea concluzie:

Intensitatea vectorului câmp electric generat de dipolul electric, într-un punct îndepărtat de dipol, este direct proporţională cu modulul p al momentului dipolului, invers proporţională cu puterea a treia a distanţei r de la centrul dipolului la punctul în care se calculează câmpul şi depinde de unghiul θ ***format de axa dipolului cu direcţia vectorului de poziţie*** $\vec{r}$.

Fără a demonstra putem preciza că în urma dezvoltării multipolare (în momente de unipol, dipol, şi quadripol) a potenţialului electrostatic creat de o distribuţie oarecare de sarcini electrice în spaţiu se deduce potenţialul unui dipol electric, $\vec{p}$, într-un punct al cărui vector de poziţie este $\vec{r}$:

$$\varphi(r) = \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Pentru a deduce de aici expresia vectorială a câmpului electric generat de un dipol electric se utilizează relaţia dintre câmpul şi potenţialul electric:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Deoarece gradientul este un operator de derivare, rezultă:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\cdot\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{p}) + (\vec{r}\cdot\vec{p})\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

Cum pentru o distribuţie dată, momentul de dipol electric este un vector constant, rezultă:

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{p}) = \vec{p} \qquad \text{şi folosind}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_r = -3\frac{\vec{r}}{r^5},$$

rezultă expresia sub formă vectorială pentru câmpul electrostatic creat de un dipol electric într-un punct din spaţiu ce are vectorul de poziţie $\vec{r}$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})\cdot\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

Dacă un dipol electric format din două sarcini +q şi -q aflate la distanţa *d* una de alta se găseşte într-un câmp electric uniform, asupra celor două sarcini vor acţiona două forţe egale şi de sens contrar, paralele cu direcţia câmpului. Datorită acestor forţe, asupra dipolului va acţiona un cuplu de rotaţie:

$$\vec{N} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}\ .$$

Când dipolul este orientat de-a lungul liniilor câmpului electric, deci când vectorii $\vec{p}$ şi $\vec{E}$ au acelaşi sens, cuplul de rotaţie se anulează.

1.8.5. Reprezentarea vectorului câmp electric prin linii de câmp.

Când am definit vectorul câmp electric $\vec{E}$ al unei sarcini punctiforme +Q am constatat că într-un punct M arbitrar din spaţiu situat la distanţa r faţă de sarcina Q, acesta are expresia:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{n}\ .$$

Deci fiecărui punct aflat în câmpul electric generat de sarcină I se poate ataşa un vector $\vec{E}$. Prin urmare, câmpul electric este un câmp vectorial.

Definiţia liniei de câmp electric: *Se numeşte linie de câmp electric orice curbă din spaţiul cu câmp, care are ca tangentă în fiecare punct un vector câmp electric* $\vec{E}$.

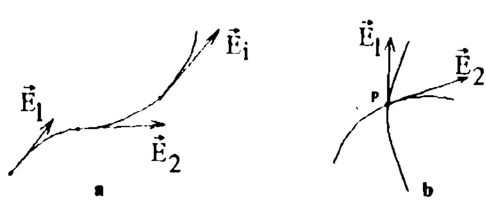


Fig.1.11

Proprietate a liniei de câmp: *Prin orice punct al spaţiului trece o linie de câmp şi numai una (liniile de câmp electric nu se pot intersecta).*

Consecinţă: Această proprietate antrenează faptul că fiecărui punct din spaţiu cu câmp electric i se poate ataşa un vector câmp electric $\vec{E}$ şi numai unul.

Demonstraţia proprietăţii: Prin reducere la absurd, se presupune că există un punct P căruia i se pot ataşa doi vectori, $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$ (v. fig.1.11.b). Dacă acest lucru ar fi posibil înseamnă că prin punctul P se pot duce două linii de câmp, astfel încât $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$ să fie tangenţi în P la acestea. Însă acest lucru este absurd, deoarece contrazice proprietatea a două linii de câmp de a nu se putea intersecta într-un punct.

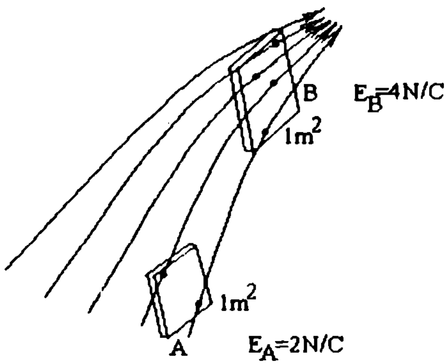


Fig.1.12

Convenţia cu privire la trasarea liniilor de câmp electric: ***Liniile de câmp electric se trasează astfel încât în orice regiune din spaţiu numărul liniilor de câmp ce străbat o suprafaţă normală la linii egală cu unitatea (1m²), să fie egală cu modulul vectorului câmp electric în regiunea respectivă.***

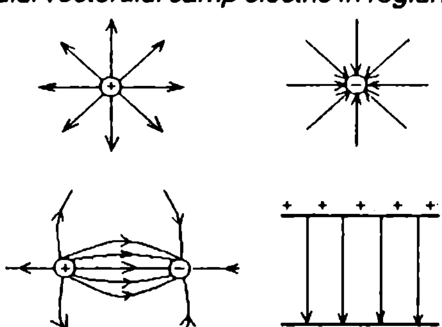


Fig.1.13

Spectrul liniilor de câmp electric (v. fig.1.13) este descris în continuare:

a) *Sarcina electrică punctiformă pozitivă:* liniile de câmp pornesc radial din punctul unde se află sarcina şi continuă până la infinit. Vectorul câmp electric $\vec{E}$ fiind tangent la linie, în acest caz suportul său coincide cu linia. Sensul lui $\vec{E}$ este de la sarcina pozitivă spre infinit.

b) *Sarcina electrică punctiformă negativă:* liniile de câmp pornesc radial de la infinit şi converg în punctul unde se află sarcina negativă. Suportul vectorului câmp electric $\vec{E}$, fiind tangent la linie, coincide cu linia de câmp. Sensul lui $\vec{E}$ este de la infinit spre sarcina negativă.

c) *Dipolul electric:* liniile câmpului electric încep pe sarcina pozitivă şi se termină pe sarcina negativă.

d) *Condensatorul plan încărcat:* liniile câmpului electric sunt segmente paralele şi echidistante (câmp omogen), care pornesc de la armătura încărcată pozitiv spre armătura încărcată negativ.

1.9. Fluxul câmpului electric.

Definiţia fluxului electric: *Numărul liniilor de câmp electric care* ***traversează*** *o suprafaţă S arbitrară* ***aşezată*** *perpendicular pe liniile de* ***câmp se numeşte*** *flux al câmpului electric prin suprafaţa S. Fluxul electric* ***este*** *o mărime scalară.*

a) Fluxul câmpului electric omogen ($\vec{E}$=constant) printr-o suprafaţă S normală la linii.

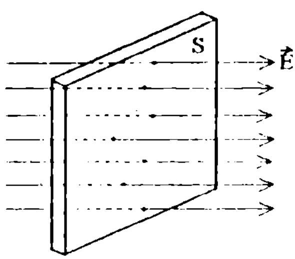


Fig. 1.14

Deoarece $|\vec{E}|$ reprezintă numărul de linii de câmp ce străbat o unitate de suprafaţă aparţinând lui S şi deoarece liniile de câmp sunt paralele şi echidistante (câmp omogen), atunci numărul total de linii care străbat suprafaţa S este: $\Phi_E = E \cdot S$.

Unitatea de măsură în S.I. pentru fluxul electric este:

$[\Phi]_{S.I.} = [E]_{S.I.} [S]_{S.I.} = Nm^2/C$.

b) Câmpul electric omogen, iar vectorul $\vec{E}$ face un unghi θ cu versorul $\vec{n}$ al normalei la suprafaţa S.

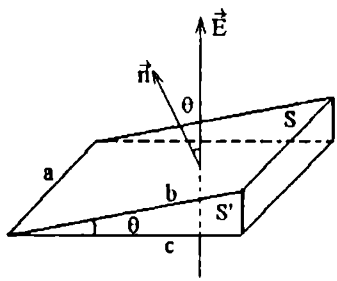


Fig.1.15

Cazul se reduce la cel precedent dacă se observă că prin S', reprezentând proiecţia suprafeţei S pe planul perpendicular la liniile de câmp, trece acelaşi număr de linii de câmp ca şi prin S. Cu alte cuvinte:

$$\Phi_E^{S'} = \Phi_E^{S'}.$$

În virtutea cazului (a) $\Phi_E^{S'} = E \cdot S'$. Din figură rezultă că: S' = ac = =ab cosθ = S cosθ (unde s-a presupus că suprafeţele S şi S' sunt dreptunghice).

Deci: Φ_E = ES cosθ. Deoarece suprafaţa S are ataşat versorul $\vec{n}$ devine suprafaţă orientată şi deci: $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$.

Deoarece $\vec{E} \cdot \vec{S} = |\vec{E}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\theta = E \cdot S \cdot \cos\theta$ putem scrie în final expresia fluxului câmpului electric prin suprafaţa S ca fiind produsul scalar dintre vectorii câmp electric $\vec{E}$ şi suprafaţă orientată $\vec{S}$:

$$\boxed{\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{S}}$$

Observaţie: Dacă $\theta = \pi/2$ (S este paralelă cu liniile câmpului electric), atunci fluxul electric Φ_E = ES cos(π/2) = 0 (nici o linie de câmp nu traversează suprafaţa S).

c) Câmp electric neomogen traversând o suprafaţă care nu este plană, S.

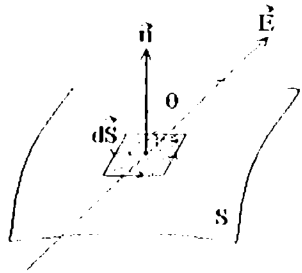


Fig. 1.16

Fie un element de suprafaţă infinitezimal orientat $d\vec{s}$ aparţinând suprafeţei S, care are proprietatea că vectorul câmp electric $\vec{E}$ prin orice punct al acesteia este constant (câmp electric omogen) şi face un unghi θ cu versorul normalei $\vec{n}$ ataşată acestei suprafeţe.

Fluxul elementar $d\Phi_E$ corespunzător acestei suprafeţe elementare $d\vec{s}$ se calculează după relaţia de la cazul (b):

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot ds = E \cdot ds \cdot \cos\theta$$

Integrând această relaţie pe întreaga suprafaţă dată, S, rezultă fluxul total prin aceasta:

$$\boxed{\Phi_E = \iint_S d\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S E \cdot ds \cdot \cos\theta}.$$

Observaţie: Versorul $\vec{n}$ se duce la suprafaţa ds astfel încât, alegând un sens convenţional de parcurgere a acesteia, acesta să aibă ca sens acela dat de **regula burghiului**.

d) Fluxul câmpului electric neomogen printr-o suprafaţă închisă. Formula dedusă la punctul (c) se poate aplica şi în acest caz particular cu următoarele precizări:

1) normala la suprafaţa închisă S se duce întotdeauna în exteriorul acesteia;
2) fluxul printr-o suprafaţă închisă se marchează cu un cerculeţ aplicat la simbolul pentru integrală. Prin urmare:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oiint_S E \cdot ds \cdot \cos\theta$$

Teorema adunării fluxurilor electrice: *Fluxul printr-o suprafață oarecare S datorat mai multor vectori câmp electric:* $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, ..., $\vec{E}_n$, *este egal cu suma algebrică a fluxurilor datorate acestor vectori câmp electric.*

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + ... + \Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i .$$

Demonstrație: Conform *principiului suprapunerii* vectorilor câmp electric putem scrie: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$. Utilizând formula încadrată de la punctul (c), rezultă următoarele:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \iint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \Phi_1 + \Phi_2 + ... + \Phi_n ,$$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + ... + \Phi_n . \qquad \text{(q.e.d)}$$

1.10. Legea (teorema) lui Gauss pentru electrostatică

1.10.1. Cazul suprafeței sferice. Forma matematică a legii lui Gauss

Fie o suprafață închisă S de formă sferică, de rază r, având în centru o sarcină punctiformă pozitivă +q.

Modulul vectorului câmp electric al sarcinii +q calculat într-un punct arbitrar M al suprafeței S de rază r este constant și are valoarea: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$. Vectorul câmp electric este: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{n}$, în care $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ este versorul vectorului $\vec{E}$, coliniar cu vectorul $\vec{r}$ și deci paralel cu vectorul $\vec{E}$ și perpendicular în orice punct la suprafața sferică (v. fig.1.17).

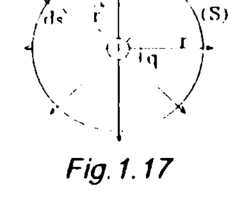


Fig.1.17

Să calculăm acum fluxul total Φ_E prin suprafaţa închisă S:

$$\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{n}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{n}\cdot\vec{n}\cdot ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint\!\!\!\oint_{(S)} ds$$

$$\Phi_E = \frac{qS}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

(am utilizat: $\vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{n}|\,|\vec{n}|\cos 0^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ şi $S_{sferă} = 4\pi r^2$). În concluzie:

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

reprezintă *expresia matematică a legii lui Gauss pentru electrostatică.*

1.10.2. Enunţurile legii lui Gauss. Cazul unei suprafeţe oarecare

a) Fluxul vectorului câmp electric $\vec{E}$ al unei sarcini punctiforme +q, care se află în interiorul unei suprafeţe închise S', de formă oarecare, prin suprafaţa respectivă, este egal cu fluxul prin suprafaţa sferică S centrată pe sarcină (v. fig.1.18).

Într-adevăr, se vede că numărul total de linii de câmp emise de sarcină, care traversează suprafaţa sferică S este egal cu numărul liniilor de câmp ce străbat suprafaţa dată S' de formă oarecare. Deci, se pot da următoarele enunţuri ale legii lui Gauss:

Fluxul vectorului câmp electric $\vec{E}$ al unei sarcini electrice q pozitive punctiforme aşezată în vid şi în interiorul unei suprafeţe oarecare închisă este egal cu raportul dintre sarcina q şi permitivitatea vidului.

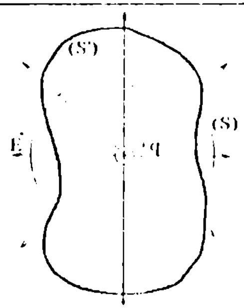


Fig.1.18

Numărul liniilor de câmp electric emise de sarcina +q plasată în interiorul unei suprafeţei închise este egal cu raportul q/ε_o.

Observaţie: Suprafaţa închisă S' se numeşte **gaussiană**.

Caz particular: Dacă sarcina +q =1C, atunci numărul liniilor de câmp emise de această sarcină şi care traversează suprafaţa S' închisă este $1/\varepsilon_o$.

b) O sarcină negativă "-q" situată în interiorul unei suprafeţe închise S', nu emite, ci captează de la infinit (q/ε_o) linii de câmp, lucru care se scrie astfel: $\Phi_E = -q/\varepsilon_o$.

Fluxul unei sarcini pozitive +q, aflată în interiorul lui S', este pozitiv $\Phi_E = +q/\varepsilon_o$, iar fluxul unei sarcini negative -q, aflată în interiorul lui S', este negativ $\Phi_E = -q/\varepsilon_o$.

c) Dacă în interiorul suprafeţei S' se află un sistem de n sarcini punctiforme pozitive şi negative, de sarcină netă egală cu suma algebrică a celor n sarcini, $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$, atunci legea lui Gauss devine: $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$. Dacă suma algebrică este nulă, Q=0, atunci, evident, $\Phi_E = 0$.

Deci, se poate formula legea lui Gauss sub forma următoare:

Fluxul vectorului câmp electric $\vec{E}$ printr-o suprafaţă închisă este egal cu sarcina netă din interiorul suprafeţei raportată la valoarea constantă a permitivităţii dielectrice a vidului, ε_o.

d) Dacă sarcinile electrice sunt în exteriorul suprafeţei închise S', fluxul vectorului câmp electric al fiecărei sarcini în parte (pozitivă sau negativă) este nul. Demonstraţia este indicată pe cale grafică în figura 1.19.

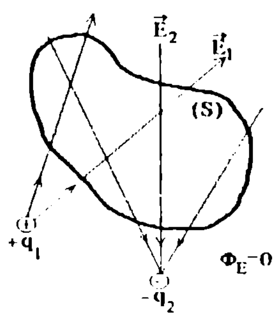
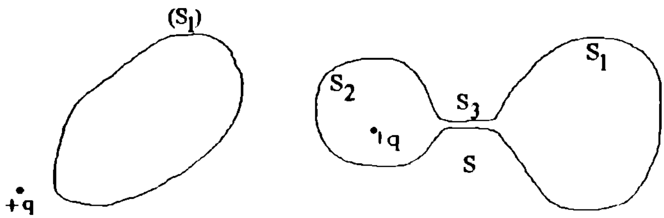


Fig. 1.19

Pentru aceasta considerăm o suprafaţă S închisă arbitrară şi, de exemplu, două sarcini punctiforme, q_1 şi $-q_2$, una pozitivă iar cealaltă negativă, aflate în exteriorul suprafeţei S. Deoarece, în acest caz, orice linie de câmp care intră în interiorul lui S, trebuie să iasă, rezultă că numărul total de linii generate de o sarcină şi care traversează suprafaţa S intrând (număr prin convenţie negativ) este egal şi de semn contrar cu numărul liniilor care traversează suprafaţa S ieşind din aceasta (număr prin convenţie pozitiv).

Deci suma algebrică a acestor două numere (fluxul total al unei sarcini exterioare lui S) este, evident, zero: $\Phi_E = 0$.

e) O altă demonstraţie a legii lui Gauss pentru cazul în care sarcina +q nu aparţine domeniului delimitat de suprafaţa S_1 examinat la punctul (d) este prezentată în continuare (v. fig.1.20.a).



a b

Fig. 1.20

Să arătăm că fluxul sarcinii +q prin suprafaţa S_1 este egal cu zero:

$$\oint\!\!\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = 0 .$$

În acest scop vom considera o suprafaţă S_2 de formă arbitrară, care delimitează un volum ce conţine sarcina +q şi care comunică cu volumul delimitat de suprafaţa S_1 printr-o regiune de volum neglijabil delimitat de suprafaţa S_3 (v. fig.1.20.b). Să notăm cu S suprafaţa totală obţinută: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \approx S_1 \cup S_2$, ($S_3$ se neglijează).

Deoarece sarcina +q se află în interiorul suprafeţei S, se poate aplica legea lui Gauss de la subcapitolul 1.10.2.a. Prin urmare se poate scrie:

$$\oint\!\!\oint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} .$$

Având în vedere că $S = S_1 \cup S_2$, integrala de mai sus se poate descompune în alte două:

$$\oiint_{S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oiint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s}_1 + \oiint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}_2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Aplicând din nou legea lui Gauss de la 1.10.2.a în cazul suprafeţei S_2, în interiorul căreia se află sarcina +q, rezultă:

$$\oiint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}_2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Înlocuind acest rezultat în relaţia precedentă, se obţine rezultatul căutat:

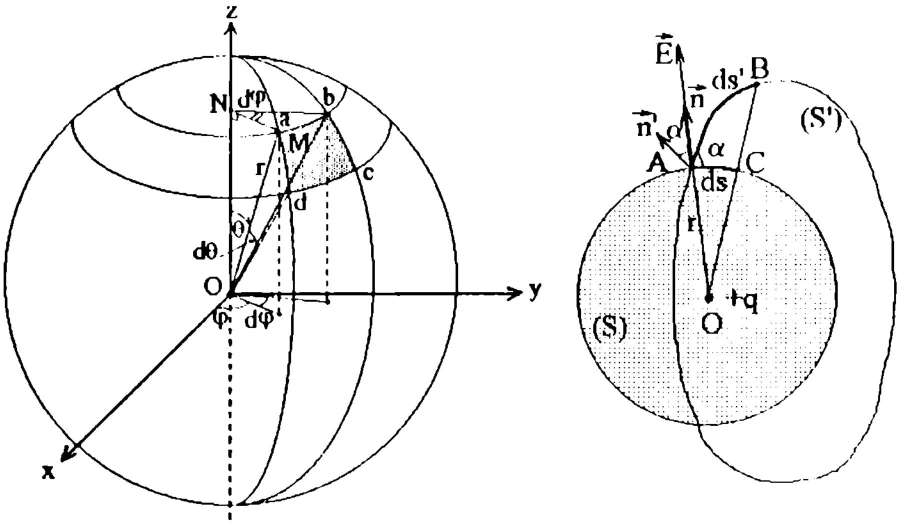
$$\oiint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s}_1 = 0.$$

f) În continuare prezentăm o nouă demonstraţie a legii lui Gauss pentru cazul sarcinii +q ce aparţine volumului delimitat de suprafaţa S, caz examinat la punctul a.

În acest scop vom introduce mai întâi conceptul de *element de suprafaţă sferic (diferenţial)* în coordonate sferice.

Fie coordonatele sferice r, θ, φ ($r \in [0,\infty)$; $\theta \in [0,\pi]$; $\varphi \in [0,2\pi]$), ale unui punct *M* arbitrar aflat pe o suprafaţă sferică de rază dată r (v. fig.1.21.a). Se consideră creşterile infinitezimale dθ şi dφ ale coordonatelor sferice θ şi φ. Cele două meridiane şi paralele definesc pe suprafaţa sferei un *element de suprafaţă* ds cu laturile egale cu *ab* şi *cd*. Pornind de la triunghiurile dreptunghice *OaN*, *Oad* şi *ONb* segmentele *aN*, *ab* şi *ad* pot fi exprimate în coordonate sferice astfel: din triunghiul dreptunghic *OaN* rezultă *aN* = r sinθ. Unghiul cu vârful în *N* fiind egal cu dφ, din triunghiul *aNb* rezultă că *ab* = *aN*dφ = r sinθ dφ. Din triunghiul *Oda* care are unghiul din *O* egal cu dθ rezultă: ad = r dθ. Prin urmare, elementul de suprafaţă în coordonate sferice ds = *ab ad* = $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Acest rezultat va fi utilizat în demonstrarea legii lui Gauss.

Demonstraţia legii lui Gauss: Se consideră o sarcină punctiformă +q care se află în interiorul unui volum arbitrar delimitat de suprafaţa închisă S' (v. fig.1.21.b). Fie elementul de suprafaţă orientat $d\vec{s}' = ds'\cdot\vec{n}'$, care aparţine ariei S'. Vectorul $\vec{n}'$ este versorul suprafeţei ds' şi este, prin definiţie, perpendicular pe ds'. Considerăm o suprafaţă sferică S de rază r, care trece prin punctul A şi este centrată pe sarcina +q. Dacă se unesc punctele A şi B cu centrul sferei S, pe suprafaţa acesteia se pune în evidenţă elementul de suprafaţă orientat $d\vec{s} = ds\cdot\vec{n}$, versorul $\vec{n}$ fiind perpendicular pe suprafaţa ds şi în acelaşi timp coliniar cu vectorul câmp electric $\vec{E}$, care are originea în punctul O. Prin urmare, $\vec{E} = E \cdot \vec{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{n}$. Deoarece ds este proiecţia ortogonală a lui ds' pe suprafaţa sferică S, se poate scrie $ds = ds' \cos\alpha$. α reprezintă unghiul dintre versorii $\vec{n}$ şi $\vec{n}'$ şi este egal cu unghiul *BAC* din triunghiul dreptunghic curbiliniu *BAC* (unghiuri cu laturi perpendiculare).



a b

Fig. 1.21

Fluxul câmpului electric emis de sarcina +q prin suprafaţa S' este prin definiţie dat de integrala:

$$\Phi_{S'} = \oiint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S'} \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{r^2} \cdot ds' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S'} \frac{ds' \cdot \cos\alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S'} \frac{ds}{r^2}.$$

În conformitate cu observaţia matematică făcută anterior putem scrie în coordonate sferice expresia lui ds:

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

în care coordonatele sferice θ şi φ sunt definite în intervalele următoare: $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Prin urmare, după simplificarea cu r^2, fluxul Φ_s devine:

$$\Phi_{S'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S'} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

În concluzie, rezultă expresia matematică a legil lui Gauss:

$$\boxed{\Phi_{S'} = \frac{q}{\varepsilon_0}}.$$

***Corolar**: Dacă în interiorul suprafeței închise se află n sarcini electrice, q_1, q_2, ..., q_n, având în vedere că fluxul câmpului electric este o mărime aditivă, atunci fluxul total $\Phi_{s'}$ creat de cele n sarcini va fi:*

$$\Phi_{S'} = \Phi_{S'}(q_1) + \Phi_{S'}(q_2) + ... + \Phi_{S'}(q_n) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 + ... + q_n) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Concluzie: Fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă nu trebuie să depindă de dimensiunile și forma ei. Aceasta se explică prin faptul că intensitatea câmpului electric este invers proporțională cu pătratul distanței.

Legea lui Gauss este o lege fundamentală a interacțiunilor electrostatice echivalentă cu legea lui Coulomb. Cele două legi nu sunt independente, ci reprezintă una și aceeași lege exprimată în moduri diferite. Există o diferență, neesențială aici, dar importantă la studiul câmpurilor sarcinilor în mișcare. Legea lui Gauss este valabilă pentru o clasă mai largă de câmpuri decât cel electrostatic. În particular, un câmp fără simetrie sferică, poate satisface legea lui Gauss. Deci această lege nu implică simetria sferică a câmpului unei surse punctiforme care în legea lui Coulomb era evidentă.

Această lege a lui Gauss relevă legătura dintre câmp și sursele sale, în mod opus legii lui Coulomb. Dacă sunt date sarcinile, legea lui Coulomb indică cum să se determine câmpul într-o regiune precizată, însă cu legea lui Gauss se poate determina sarcina dacă se cunoaște câmpul. În plus, legea lui Gauss reprezintă un instrument analitic util în rezolvarea problemelor mai complicate.

1.10.3. Legea lui Gauss sub formă integrală și diferențială pentru distribuții discrete și continue de sarcini

a) Cazul distribuțiilor discrete de sarcină aflate în interiorul unei suprafețe închise S.

Fluxul vectorului câmp electric $\vec{E}$, printr-o suprafaţă S oarecare închisă, are expresia:

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

În virtutea teoremei lui Gauss, fluxul Φ_E are pentru cazul unui sistem de n sarcini discrete $q_1, q_2, \ldots, q_n$, expresia următoare:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \quad \text{şi deci} \quad \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau_S} \rho d\tau,$$

(forma integrală a legii lui Gauss)

Dacă utilizăm teorema Gauss-Ostrogradski:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\tau$$

pe care o combinăm cu relaţia anterioară, în final, se va obţine:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(forma diferenţială a legii lui Gauss).

b) Cazul distribuţiilor continue de sarcină aflate în interiorul unei suprafeţe închise S.

Sarcina netă Q din interiorul suprafeţei gaussiene poate fi distribuită continuu cu o densitate liniară λ, superficială σ, sau volumică ρ:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}, \quad \sigma = \frac{dQ}{ds}, \quad \rho = \frac{dQ}{d\tau}.$$

Prin urmare: $dQ = \lambda dl$, $dQ = \sigma ds$ şi $dQ = \rho d\tau$. Prin integrare rezultă următoarele expresii pentru sarcina totală liniară Q_l, superficială Q_S şi volumică Q_τ:

$$Q_l = \int_{(l)} \lambda dl, \quad Q_S = \iint_{(S)} \sigma ds \quad \text{şi} \quad Q_\tau = \iiint_{(\tau)} \rho d\tau.$$

În acest caz, *legea lui Gauss* se scrie *sub formă integrală:*

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{(l)} \lambda dl}, \quad \boxed{\oint\!\!\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{(S)} \sigma ds}, \quad \boxed{\oint\!\!\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(\tau)} \rho d\tau},$$

şi *sub formă diferenţială* (urmând acelaşi raţionament ca la punctul *a)*) pentru cazul distribuţiei volumice de sarcină electrică:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}.$$

1.11. Energia potențială a sarcinii q_o în câmpul sarcinii Q

1.11.1. Lucrul produs de o forță coulombiană asupra unei sarcini de probă punctuale

a) Lucrul elementar.

Fie o sarcină de probă q_0, care se deplasează pe o traiectorie oarecare într-un câmp electrostatic $\vec{E}$ produs de o sarcină electrică punctiformă Q, între punctele A și B, sub acțiunea forței coulombiene $\vec{F}$ (v. fig.1.22).

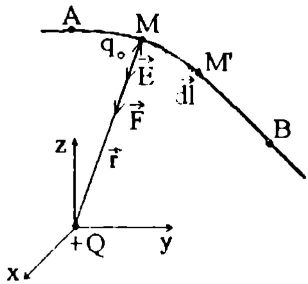


Fig.1.22

Fie $\vec{E}$ vectorul câmp electric în punctul M, $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_o}$ și fie vectorul deplasare elementară (infinit de mic) $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$ a sarcinii q_o.

Observație: $d\vec{l}$ este notat adesea cu $d\vec{r}$. Dacă $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ este vectorul de poziție al punctului M, de coordonate x, y, z, în care se află sarcina q_o, atunci $d\vec{r} \equiv d\vec{l}$ este diferențiala acestui vector, $d\vec{r} \equiv d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$.

Lucrul elementar dW corespunzător acestei deplasări elementare este, prin definiție, expresia: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_o\vec{E} \cdot d\vec{l}$

b) Lucrul finit, total sau integral, efectuat de forța $\vec{F}$ la deplasarea sarcinii q_o de la A la B are expresia:

$$W_{AB} = \int_A^B dW = q_o \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Integrala curbilinie (integrala de linie) notată cu $C_{\overset{\frown}{AB}} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ reprezintă circulaţia vectorului câmp electric $\vec{E}$ de-a lungul arcului de curbă $\overset{\frown}{AB}$. Deci, $W_{\overset{\frown}{AB}} = q_0 C_{\overset{\frown}{AB}}$. Prin urmare:

Prin deplasarea unei sarcini punctiforme de-a lungul unei traiectorii situată într-un câmp electric se produce un lucru egal cu produsul dintre sarcina electrică şi circulaţia vectorului câmp electric de-a lungul acelei traiectorii.

1.11.2. Conservativitatea forţei de tip coulombian.

***Definiţie**: O forţă $\vec{F}$ este conservativă dacă există o funcţie scalară U(x,y,z), care nu depinde explicit de timp, denumită funcţie de forţă astfel încât:*

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z},\quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

În cazul nostru, F_x, F_y, F_z sunt componentele scalare ale forţei coulombiene:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq_0}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r},\quad F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r^3}x,\quad F_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r^3}y,\quad F_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r^3}z.$$

Cu alte cuvinte (se mai spune că forţa $\vec{F}$ derivă din funcţia U),

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}U}.$$

***Teoremă**: Forţa de interacţie electrostatică de tip coulombian, este o forţă conservativă.*

***Demonstraţie**:* Deoarece $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şi $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, atunci $F_x = k\frac{x}{r^3}$, $F_y = k\frac{y}{r^3}$, $F_z = k\frac{z}{r^3}$, $k = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}$.

Forţa $\vec{F}$ este, conform definiţiei, conservativă dacă există funcţia U=U(x,y,z) astfel încât: $\frac{\partial U}{\partial x} = k\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = k\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial U}{\partial z} = k\frac{z}{r^3}$.

Înmulţind cele trei egalităţi cu dx, dy, dz şi adunându-le, rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = k\frac{xdx + ydy + zdz}{r^3}.$$

Ţinând cont că membrul stâng reprezintă prin definiţie diferenţiala totală, dU, a funcţiei U(x,y,z) şi că numărătorul din membrul drept se poate scrie sub forma:

$$xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2}d\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{2}d\left(r^2\right) = \frac{1}{2}2r \cdot dr = r \cdot dr,$$

rezultă: $dU = \frac{r \cdot dr}{r^3} \cdot k = \frac{dr}{r^2} \cdot k$. Prin integrare rezultă:

$$U = \int dU = k\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{k}{r} + C$$

deci, $U(r) = -\frac{k}{r} + C$, sau $U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r} + C$, unde C reprezintă o constantă arbitrară de integrare.

Prin urmare forţa coulombiană, $\vec{F}$, este conservativă.

Proprietăţile lucrului efectuat de forţa conservativă coulombiană:

a) Lucrul elementar dW al forţei coulombiene este egal cu diferenţiala totală exactă a funcţiei de forţă U, dU, din care derivă forţa coulombiană $\vec{F}$.

Demonstraţie: Lucrul elementar este $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ unde:

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad \text{şi} \quad d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}, \text{ iar}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz = dU;$$

$$dW=dU.$$

b) *Lucrul efectuat de forţa coulombiană $\vec{F}$ de-a lungul unei curbe, între două puncte arbitrare aparţinând acesteia, nu depinde de forma* *curbei, ci numai de coordonatele punctelor arbitrare alese pe curbă. Lucrul, în acest caz, este o funcţie de stare.*

Demonstraţie: Pornim de la expresia lucrului elementar: dW=dU. Integrând această egalitate între punctele arbitrare A şi B ale curbei obţinem (v fig.1.22):

$$W_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} dW = \int_A^B dU = U\big|_A^B = U(B) - U(A) = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).$$

Notând variaţia funcţiei U, ΔU = U(B) - U(A), rezultă:

$$W_{\overset{\frown}{AB}} = \Delta U = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Prin urmare, lucrul forţei coulombiene $\vec{F}$ nu depinde de forma curbei care trece prin punctele A şi B arbitrare, ci numai de coordonatele lor.

c) *Lucrul forţei coulombiene calculat pe o curbă închisă este egal cu zero.*

Demonstraţie: Deoarece pentru o curbă deschisă (A≠B) se poate scrie $W_{\overset{\frown}{AB}} = U(B) - U(A)$ rezultă că în cazul unei curbe închise (A=B) se poate scrie $W_{\overset{\frown}{AB}} = U(B) - U(A) = 0$. Deoarece $W_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ reprezintă circulaţia vectorului forţă de-a lungul curbei $\overset{\frown}{AB}$, în cazul în care curba este închisă rezultă: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, unde semnul $\oint$ reprezintă integrala curbilinie pe o curbă închisă.

1.11.3. Energia potenţială a unei sarcini aflată sub acţiunea unei forţe de tip coulombian. Energia potenţială de interacţie dintre două sarcini electrice

Definiţie: *Energia potenţială a sarcinii q_0 aflată la distanţa r de sarcina punctiformă Q este o mărime scalară care se notează cu $E_p(r)$ şi este egală cu funcţia de forţă U(r) luată cu semn schimbat din care derivă forţa de tip coulombian* $\vec{F}$ *:*

$$E_p(r) = -U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r} - C.$$

Observaţie: Constanta arbitrară de integrare C poate fi determinată dacă se admite valabilă din punct de vedere fizic următoarea condiţie: pentru $r \to \infty$, $E_p(\infty) = 0$. Rezultă, deci, $C = 0$.

În general, energia potenţială de interacţiune dintre două sarcini în vid Q_1, Q_2 punctiforme se scrie sub forma:

$$\boxed{E_p(r_{12}) = \pm \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}$$

unde r_{12} este distanţa dintre sarcinile punctiforme Q_1 şi Q_2.

Dacă sarcinile Q_1 şi Q_2 au acelaşi semn E_p este pozitivă, iar în caz contrar aceasta este negativă.

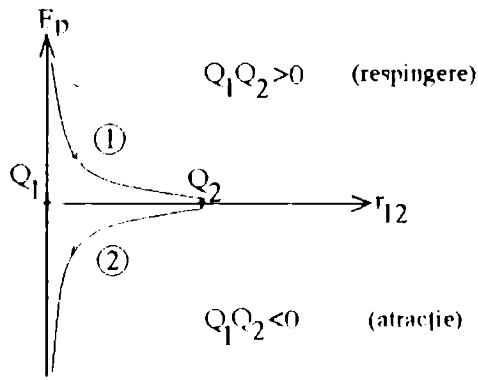


Fig. 1.23

Reprezentarea grafică a dependenţei energiei potenţiale de interacţiune a două sarcini în funcţie de distanţa dintre ele este dată în figura 1.23. Cele două curbe reprezintă hiperbole echilatere.

Curba (1) corespunde cazului $Q_1Q_2 > 0$ (sarcinile au aceleaşi semn). Curba (2) corespunde cazului $Q_1Q_2 < 0$ (sarcinile sunt semn contrar). Din analiza curbelor (1) şi (2) din figură rezultă că energia potenţială E_p de interacţiune reciprocă dintre două sarcini punctiforme Q_1, Q_2 nu are extreme (minime) cea ce înseamnă că sistemul celor două sarcini nu se poate găsi în echilibru stabil pentru nici o valoare a distanţei r_{12} dintre ele.

Cu alte cuvinte, sarcinile cu acelaşi semn se vor respinge până la infinit, iar sarcinile de semne contrare se vor atrage până ajung la contact, neutralizându-se reciproc. Dacă sarcinile nu sunt egale în valoare absolută, neutralizarea se produce parţial.

Proprietatea de aditivitate a energiei potențiale de interacție electrostatică: *Energia potențială de interacție a unui sistem de mai multe sarcini punctiforme este egală cu suma energiilor potențiale a interacțiunii reciproce dintre toate perechile de sarcini.*

a) Cazul sistemului format din 3 sarcini electrice punctiforme Q_1, Q_2, Q_3:

$$E_p = E_p(1,2) + E_p(1,3) + E_p(2,3),$$

$$E_p = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}.$$

b) Energia de interacție electrostatică a unui sistem de n sarcini electrice punctiforme.

Considerăm mai întâi interacțiunea dintre sarcina q_i oarecare a sistemului cu toate celelalte sarcini:

$$E_p^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_iq_1}{r_{i1}} + \frac{q_iq_2}{r_{i2}} + \ldots + \frac{q_iq_n}{r_{in}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}.$$

La însumare se exclude indicele j=i deoarece sarcina i nu poate interacționa cu ea însăși.

Energia potențială totală E_p a sistemului se obține ținând cont de faptul că pentru fiecare sarcină din sistemul celor n sarcini putem scrie câte o expresie similară ca pentru sarcina q_i. Cu alte cuvinte:

$$E_p = E_p^{(1)} + E_p^{(2)} + \ldots + E_p^{(i)} + \ldots + E_p^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} E_p^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}.$$

Pentru a nu include în sumă de două ori energia unei perechi de sarcini, odată cu energia interacțiunii sarcinii i cu sarcina j și a doua oară cu energia de interacțiune dintre sarcina j cu sarcina i, la însumare luăm numai termenii cu i<j.

1.12. Potențialul câmpului electrostatic

1.12.1. Potențialul câmpului sarcinii punctiforme

Definiție: *Potențialul câmpului electric al unei sarcini punctiforme Q într-un punct arbitrar al câmpului electrostatic reprezintă raportul dintre energia potențială a unei sarcini punctiforme q_o în acel punct și sarcina respectivă.*

Uzual, se notează cu litera V sau cu litera grecească φ.

Potenţialul este o mărime fizică scalară care este funcţie numai de punctul în care este definit. Câmpul electrostatic poate fi caracterizat atât de potenţialul V cât şi de vectorul câmp electric $\vec{E}$.

Cantitativ, conceptul de potenţial se introduce astfel. Fie o sarcină Q punctiformă, care creează în jurul său un câmp electric caracterizat în fiecare punct de vectorul câmp electric $\vec{E}$. Fie o sarcină liberă punctiformă q_o aflată în câmpul electrostatic $\vec{E}$ la distanţa r de sarcina Q într-un punct M al acestuia. Energia potenţială de interacţie electrostatică dintre cele două sarcini este:

$$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r}.$$

Conform definiţiei conceptului de potenţial V acesta are expresia:

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r},$$

unde V(r) reprezintă potenţialul câmpului sarcinii electrice punctiforme Q într-un punct situat la distanţa r de sarcină.

1.12.2. Diferenţa de potenţial dintre două puncte. Tensiunea electrică U_{AB}

Fie E_p^A şi E_p^B energiile potenţiale ale sarcinii punctiforme q_o libere în punctele A, respectiv B aflate în câmpul electrostatic al sarcinii punctiforme Q generatoare de câmp.

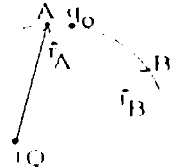


Fig. 1.24

Să calculăm mărimea fizică $E_p^A - E_p^B$=scăderea energiei potențiale a sarcinii între cele două puncte, A și B. Să evaluăm pentru aceasta $E_p(A)$ și $E_p(B)$: $E_p(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r_A}$, $E_p(B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r_B}$.

Prin urmare: $E_p(A) - E_p(B) = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = W_{\widehat{AB}}$. Împărțind această relație cu q_0 rezultă:

$$\frac{W_{\widehat{AB}}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = V(A) - V(B) \equiv U_{AB}.$$

***Definiție:** Mărimea următoare*

$$\boxed{U_{AB} = \frac{W_{\widehat{AB}}}{q_0} \equiv V(A) - V(B) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

poartă denumirea de diferență de potențial electric scalar dintre punctele A și B sau tensiunea electrică dintre cele două puncte și reprezintă, deci, câtul dintre lucrul efectuat de câmp pentru a deplasa sarcina q_0 între două puncte A și B și sarcina q_0.

1.12.3. Lucrul efectuat de forța câmpului electric pentru deplasarea sarcinii q_0

Lucrul efectuat de forța câmpului electric pentru deplasarea sarcinii q_0 din punctul A în punctul B exprimat în funcție de diferența de potențial între cele două puncte A și B rezultă din subcapitolul anterior (1.12.2.):

$$\boxed{W_{\widehat{AB}} = q_0[V(A) - V(B)]} \quad (*)$$

Concluzie: Lucrul efectuat de forța electrică la deplasarea sarcinii q_0 din punctul cu potențialul V(A) până în punctul cu potențialul V(B) este egal cu produsul dintre sarcina q_0 și diferența de potențial V(A)-V(B).

1.12.4. Unitatea de măsură în S.I. pentru diferenţa de potenţial

Unitatea de măsură în S.I. pentru diferenţa de potenţial electric scalar se numeşte volt (V). Pentru a găsi definiţia voltului utilizăm relaţia:

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \frac{W_{\widehat{AB}}}{q_o}.$$

Deci $\langle U_{AB}\rangle_{S.I} = \langle W_{AB}\rangle_{S.I.} / \langle q_o\rangle_{S.I.}$ sau 1Volt = 1J/1C.
Diferenţa de potenţial electric scalar dintre două puncte din câmp este de 1 volt dacă la deplasarea sarcinii egală cu 1C între cele două puncte se efectuează un lucru mecanic egal cu 1J.

1.12.5. Potenţialul absolut al unui punct din câmp

Porninm de la relaţia lucrului între două puncte A, B (*) şi de la expresia $W_{\widehat{AB}} = q_0 \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ rezultă că diferenţa de potenţial $U_{AB} \equiv V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ poate fi calculată (cunoscută) dacă se cunoaşte câmpul $\vec{E}$, dar nu se pot calcula (cunoaşte) valorile V(A) şi V(B) ale potenţialului în cele două puncte A şi B.

Pentru a calcula valoarea potenţialului V(B), de exemplu, trebuie luat potenţialul celuilalt punct V(A) ca potenţial de referinţă cunoscut. Putem, deci, scrie:

$$V(B) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} + V(A).$$

Prin convenţie se consideră că punctul de referinţă A se află la infinit şi are un potenţial egal cu zero: $V_{ref}(\infty)=0$. Prin urmare:

$$V(B) = -q_o \int_\infty^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_\infty^B \vec{F}\cdot d\vec{l} \equiv -W_{\widehat{\infty,B}} \text{ şi } q_o = 1C.$$

Deci, potenţialul absolut al unui punct este egal cu lucrul efectuat de forţa câmpului pentru a aduce sarcina pozitivă, egală cu unitatea q_o = =1C de la infinit până la punctul dat al câmpului, luat cu semn schimbat.

1.12.6. Relația dintre vectorul câmp electric $\vec{E}$ și potențialul electric scalar V

Pornind de la formula diferenței de potențial electric scalar U_{AB} dintre două puncte A și B: $U_{AB} \equiv V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Ținând cont de faptul că:

$$-\int_A^B dV = -V\Big|_A^B = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Fie E_x, E_y, E_z și dx, dy,dz, componentele scalare ale vectorilor câmp electric $\vec{E}$ și deplasare elementară $d\vec{l}$ într-un sistem de axe rectangulare de coordonate carteziene. Deci:

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k}, \ d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

Relația $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ devine $dV = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$.

Deoarece potențialul V este funcție de punct, deci de coordonatele x, y, z, și dV reprezintă *diferențiala totală exactă* a funcției V(x,y,z):

$$dV(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \equiv dV$$

prin înlocuirea acesteia în cea de dinainte rezultă relațiile:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Cu alte cuvinte:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} = \mathrm{grad} V(x,y,z) = -\vec{\nabla} V(x,y,z)$$

în care simbolul $\vec{\nabla}$ (nabla) reprezintă operatorul vectorial gradient (sau operatorul lui Hamilton): $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$. De obicei acest operator apare în diverse cărți fără săgeată: ∇.

Relația care exprimă legătura dintre vectorul câmp electric $\vec{E}$ ***și mărimea scalară, funcția potențial electric scalar V(x,y,z), este:***

$$\vec{E} = -\mathrm{grad} V(x,y,z) = -\vec{\nabla} V(x,y,z)$$

Relația arată că vectorul câmp electric $\vec{E}$ derivă dintr-un potențial V(x,y,z), cu alte cuvinte $\vec{E}$ este un câmp (vector) conservativ.

Semnul minus arată că o sarcină pozitivă se deplasează în sensul descreșterii câmpului electric $\vec{E}$. Pentru ca sarcina să se deplaseze în sens contrar lui $\vec{E}$, este necesar să se cheltuiască lucru mecanic.

1.12.7. Expresiile vectorului câmp electric $\vec{E}$ și a potențialului V în cazul unor distribuții de sarcini

a) Expresiile vectorului câmp electric $\vec{E}$.

- **Cazul distribuției discrete de sarcini.**

Fie q_1, q_2, q_3, ..., q_n un sistem de n sarcini discrete și M un punct arbitrar în spațiu. Fie $\vec{E}_1, \vec{E}_2, ..., \vec{E}_n$ vectorii câmp electric corespunzători creați de cele n sarcini punctiforme în punctul M.

Conform *principiului superpoziției*, vectorul câmp electric total (rezultant) $\vec{E}$ reprezintă *suma vectorială* a vectorilor $\vec{E}_1, \vec{E}_2, ..., \vec{E}_n$. Deci:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i.$$

(Principiul superpoziției pentru câmpul electric în cazul unei distribuții discrete de sarcini).

- **Cazul distribuției continue de sarcini: liniară, superficială și volumică.**

Dacă sarcinile sunt distribuite continuu pe o curbă C, o suprafață S sau un volum τ cu densitățile liniară, superficială și volumică λ, σ, ρ atunci sarcinile elementare corespunzătoare λdl, σds, ρdτ vor genera într-un punct dat M aflat la distanța r, vectorii câmp electric elementar $d\vec{E}$ corespunzători:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^3} \cdot \vec{r}\,, \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma ds}{r^3} \cdot \vec{r}\,, \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho d\tau}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Vectorii câmp electric $\vec{E}$ în punctul dat M generați de *sarcinile totale* de pe curba C, suprafața S și volumul τ se obțin prin integrare:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r}\,, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r^3} \vec{r}\,, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho d\tau}{r^3} \vec{r}$$

(Principiul superpoziției câmpurilor electrice pentru distribuții continue de sarcini).

b) **Expresiile potenţialului electric scalar.**

♦ **Cazul distribuţiei discrete de sarcini.**

Fie q_1, q_2, ..., q_n, *n* sarcini punctiforme aflate în punctele P_1, P_2, ...P_n, dintr-o regiune finită a spaţiului. Potenţialul într-un punct oarecare M, faţă de care sarcinile se află la distanţele r_1, r_2, ..r_n, va fi egal cu *suma algebrică* a potenţialelor datorate fiecărei sarcini în parte în punctul M:

$$V_M = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_1} + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

(Principiul superpoziţiei potenţialelor pentru o distribuţie discretă de sarcini).

♦ **Distribuţii continue de sarcini: liniare, superficiale, şi volumice.**

Fie distribuţiile de sarcină: liniară, de densitate liniară λ, superficială, de densitate superficială σ şi volumică, de densitate voliumică ρ. Potenţialele elementare dV produse într-un punct M din spaţiu de sarcinile elementare λdl, σds şi $\rho d\tau$ sunt:

$$dV_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r}, \quad dV_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds}{r}, \quad dV_\tau = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\tau}{r}$$

unde: dl este elementul de lungime, ds este elementul de suprafaţă, $d\tau$ este elementul de volum, iar r reprezintă distanţa de la sarcina elementară respectivă, la punctul M. Expresia potenţialului total V în cele 3 cazuri se obţine prin integrare, integralele fiind extinse pe curba C, suprafaţa S şi volumul τ:

$$V_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C\frac{\lambda dl}{r}, \quad V_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\frac{\sigma ds}{r}, \quad V_\tau = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\tau\frac{\rho d\tau}{r}$$

(Principiul superpoziţiei pentru funcţia potenţial în cazul unei distribuţii continue de sarcini).

1.12.8. Ecuaţiile locale şi integrale ale vectorului câmp electric $\vec{E}$ **şi ale potenţialului electrostatic V.**

Definiţii: *1. Relaţiile dintre derivatele parţiale ale vectorului câmp electric* $\vec{E}$*, sau ale potenţialului electric scalar V şi densitatea volumică de sarcină* ρ *într-un punct considerat şi în vecinătatea acestuia, se numesc* ***ecuaţii locale****.*

2. Relațiile în care intervin valorile vectorului câmp electric $\vec{E}$ sau ale potențialului electric scalar V, pe care le au într-o regiune din spațiu, se numesc ***ecuații integrale.***

a) Rotorul vectorului câmp electric $\vec{E}$. Rotorul vectorului $\vec{E} = -\mathrm{grad}V$. Teorema lui Stokes.

***Definiție**: Rotorul vectorului câmp electric $\vec{E}$, rot$\vec{E}$, rprezintă un vector definit astfel:*

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cdot \vec{k}.$$

Mărimea rot$\vec{E}$ se poate exprima prin intemediul unui determinant de ordin trei în modul următor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix},$$

unde operatorul notat cu nabla este: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Într-adevăr, produsul vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{E}$, dintre operatorul notat cu nabla și $\vec{E}$, scris sub formă de determinant, pe componente, se reduce la definiția vectorului rot$\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}, \text{ în care } \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}.$$

- **Rotorul vectorului $\vec{E} = -\mathrm{grad}V$.**

***Teoremă**: Un câmp electrostatic de vector $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ este un câmp de rotor nul. Deci, dacă $\vec{E} = -\mathrm{grad}V$ rezultă că $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$.*

Demonstrație: Să calculăm expresia rot$\vec{E}$ în care:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}. \text{ Deci: } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Într-adevăr,

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{i}\cdot\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right) - \vec{j}\cdot\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}\right) + \vec{k}\cdot\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\right) = 0$$

(Am utilizat faptul că funcţia V=V(x,y,z) fiind, prin ipoteză, diferenţiabilă, în virtutea teoremei lui Schwartz nu contează ordinea de derivare parţială în raport cu variabilele x, y, z).

***Teorema lui Stokes** (fără demonstraţie): Fie o curbă* Γ *închisă situată într-o regiune cu câmp electric de intensitate* $\vec{E}$ *şi o suprafaţă* S_Γ *arbitrară care se sprijină pe curba* Γ. *Fluxul vectorului* $\mathrm{rot}\vec{E}$ *prin suprafaţa* S_Γ *este egal cu circulaţia vectorului câmp electric* $\vec{E}$ *de-a lungul curbei închise* Γ.

$$\Phi^{(S_\Gamma)}_{\mathrm{rot}\vec{E}} = C^{(\Gamma)}_{\vec{E}} \quad \text{sau} \quad \iint_{S_\Gamma}(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{s} = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l}.$$

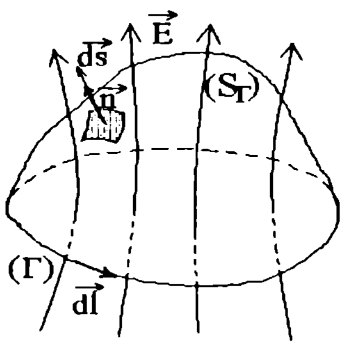


Fig.1.25

***Consecinţă a teoremei lui Stokes**:*

În teorema lui Stokes vom scrie că:

(A) $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$, fapt stabilit mai înainte şi, deci, rezultă că

(B) $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$.

Ecuaţia (A) este un exemplu de ecuaţie locală, iar ecuaţia (B) reprezintă forma integrală a relaţiei (A).

b) Divergența vectorului câmp electric $\vec{E}$.
Teorema lui Gauss-Ostrogradski.
Ecuația lui Poisson pentru vectorul câmpului electric

***Definiție**: Divergența vectorului $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$ reprezintă o mărime scalară definită astfel:*

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Mărimea $\mathrm{div}\vec{E}$ se poate reprezenta ca produsul scalar dintre operatorul vectorial $\vec{\nabla}$ și vectorul $\vec{E}$ astfel: $\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$.

***Demonstrație**:* Putem scrie $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$ și $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Produsul scalar dintre cei doi vectori (forma analitică) este: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{E}$.

***Teorema Gauss-Ostrogradski** (fără demostrație): **Fie o suprafață închisă S care mărginește în interiorul său volumul τ_s și în care se presupune că se află sarcina electrică Q distribuită în volum. Fluxul vectorului câmp electric $\vec{E}$, generat de sarcina electrică Q, prin suprafața S este egal cu integrala de volum din divergența vectorului $\vec{E}$** extinsă la întreg volumul τ_s:*

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot d\tau$$

Consecință a teoremei lui Gauss-Ostrogradski.
Ecuația lui Poisson

Deoarece în interiorul suprafeței S se află o sarcină Q distribuită în volumul τ_s și având densitatea ρ, atunci putem scrie:

$\rho = \dfrac{dQ}{d\tau} \Rightarrow Q = \iiint_{\tau_s} \rho d\tau$. Pe de altă parte, conform legii lui Gauss sub formă integrală $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, se poate scrie: $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau_s} \rho d\tau$.

Deci, $\iiint_{\tau_s} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = \iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\tau$ ceea ce implică:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}.$$

Explicit ecuaţia lui Poisson (ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi) se mai poate scrie astfel:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Aceasta reprezintă o *ecuaţie locală* a vectorului câmp electric $\vec{E}$, care se numeşte ***ecuaţia lui Poisson*** pentru vectorul câmp electric $\vec{E}$.

Caz particular: Dacă în interiorul suprafeţei S nu există sarcini ($\rho = 0$) atunci $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, ceea ce implică $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Cu alte cuvinte fluxul vectorului câmp electric $\vec{E}$ prin suprafaţa S închisă, care nu conţine sarcini electrice, este nul. Un câmp electric $\vec{E}$ cu această proprietate se spune că este *de flux conservativ*. Câmpurile vectoriale (vectorii) cu proprietatea că sunt conservative se numesc ***câmpuri laplaciene***.

c) Ecuaţia lui Poisson şi ecuaţia lui Laplace pentru potenţialul electrostatic scalar.

Deoarece vectorul $\vec{E}$ derivă din funcţia potenţial V putem scrie $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Introducem $\vec{E}$ în ecuaţia lui Poisson $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ şi rezultă:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla} V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (*).$$

Pe de altă parte:

$$\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}V\right)=\vec{\nabla}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)=-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\Delta V\,,$$

în care expresia: $\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ reprezintă *laplaceanul* funcţiei $V(x,y,z)$. Deci, putem scrie relaţia (*) astfel: $\boxed{\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$, sau $\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, sau sub formă explicită:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}\quad (^{**}).$$

Relaţia (**) reprezintă o ecuaţie locală de ordinul doi cu derivate parţiale pentru potenţialul electrostatic scalar V denumită ***ecuaţia lui Poisson***.

Caz particular: Dacă nu există sarcini electrice (ρ = 0) rezultă $\Delta V=0$, care este o ecuaţie locală a potenţialului electrostatic scalar (**Ecuaţia lui Laplace**). Scrisă explicit aceasta are forma următoare:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0},$$

sau $\nabla^2 V=0$, sau $\Delta V=0$.

1.13. Câmpul electrostatic în mediile macroscopice

Aşa cum o să se observe în capitolul următor, unii electroni dintr-un conductor sunt liberi să se deplaseze printre ionii pozitivi relativ fixaţi în nodurile reţelei atunci când conductorul este plasat într-un câmp electric extern. Alta este situaţia când se consideră un material izolator în câmp electric exterior. În acest caz, electronii nu au această libertate de mişcare. Ei sunt puternic legaţi de nucleele atomilor constituenţi, astfel încât în absenţa unui câmp electric exterior, datorită mişcării lor rapide pe orbitele din jurul nucleului, fiecare atom este neutru din punct de vedere electric. Dacă aceşti atomi sunt introduşi într-un câmp electric omogen $\vec{E}$, simetria norilor electronici este perturbată. Centrul sarcinilor negative nu se mai suprapune peste centrul nucleului, iar un asemenea atom va prezenta un moment electric de dipol indus şi se va denumi *atom polarizat*, iar dipolul asociat va fi un dipol indus de câmpul electric extern. Între momentul electric dipolar asociat atomului polarizat, $\vec{p}$, şi câmpul electric extern, $\vec{E}$, există o proporţionalitate valabilă doar pentru câmpuri electrice (perturbaţii electrice) relativ mici:

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E} \quad (1),$$

unde constanta α este o mărime caracteristică fiecărui atom care se numeşte *polarizabilitate atomică*.

***Definiţie**: Proprietatea atomilor de a dobândi un moment electric dipolar atunci când sunt introduşi într-un câmp electric exterior se numeşte polarizaţie atomică.*

Pentru moleculele nepolare fenomenul de polarizaţie se poate descrie în mod similar. În câmp electric exterior, în astfel de molecule se induc momente electrice dipolare asemănătoare. Aceste constatări sunt valabile şi în cazul moleculelor polare pentru care cele două centre de sarcină nu coincid, adică pentru moleculele care posedă un moment dipolar permanent în absenţa unui câmp electric exterior lor (*Ex.*: HCl, HBr, NH_3, H_2O, ...). Între moleculele care nu posedă moment electric dipolar permanent (molecule nepolare) se disting două categorii: molecule cu o simetrie sferică (înaltă) şi molecule cu simetrie mai joasă.

În cazul moleculelor cu simetrie sferică (*Ex.*: CH_4, BCl_3, ...) valoarea momentului de dipol indus, în primă aproximaţie, nu depinde de direcţia câmpului exterior. Pentru aceste molecule este valabilă relaţia (1), însă polarizabilitatea moleculară α nu este egală cu suma polarizabilităţii atomilor constituenţi. Această diferenţă este atribuită deformării norilor electronici ai atomilor constituenţi în urma formării moleculei şi ea a fost folosită pentru a se stabili structura diferitelor molecule.

În cazul unor molecule ce au o simetrie mai joasă decât cea sferică, polarizarea moleculei depinde de direcţia câmpului electric aplicat (*Ex.*: CO_2) şi este diferită de aceasta.

***Definiţie**: Direcţia după care se dispune vectorul rezultant $\vec{p}$ se numeşte direcţie de uşoară polarizare.*

Prin urmare, polarizabilitatea unei molecule nu este o simplă mărime scalară, ci este compusă dintr-un ansamblu de coeficienţi scalari ce exprmă o dependenţă liniară între componentele vectorului $\vec{p}$ şi cele ale vectorului $\vec{E}$: $\vec{p} = \hat{T}_p \cdot \vec{E}$ (2), unde $\hat{T}_p$ se numeşte tensorul polarizabilitate electrică şi are componentele:

$$\hat{T}_p = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

Valorile componentelor acestui tensor sunt funcţie de modul de alegere al sistemului de coordonate în raport cu axele de simetrie ale moleculei.

În cazul moleculelor polare formate din mai mulţi atomi, momentul dipolar permanent asociat lor poate fi considerat ca rezultatul compunerii momentelor dipolare ale unor molecule biatomice. Valoarea momentului de dipol al unei molecule multiatomice este funcţie de unghiul dintre momentele dipolare asociate perechilor de atomi din moleculă.

Un material (mediu macroscopic) oarecare poate fi considerat ca un ansamblu format dintr-un număr foarte mare de atomi şi molecule. Aplicarea unui câmp electric exterior unui material omogen produce polarizarea atomilor sau a moleculelor respective. Dacă fiecare dipol indus are momentul electric dipolar $\vec{p}$, iar densitatea de dipoli în unitatea de volum este egală cu N, momentul dipolar asociat unui element de volum infinitezimal $d\tau$ din material, ce conţine $N d\tau$ dipoli orientaţi paralel, este egal cu $\vec{p} \cdot N \cdot d\tau$. Produsul $\vec{p} \cdot N$ se numeşte *densitate de polarizare* (sau *polarizare*) şi se notează cu $\vec{P}$. Orientarea paralelă a acestor dipoli atomici (moleculari) conduce la concluzia că rămân necompensate doar sarcinile de pe suprafaţa materialului, cele din interior compensându-se reciproc.

***Definiţie**: Sarcinile care apar pe suprafaţa materialului plasat în câmp electric extern se numesc sarcini de polarizare sau sarcini legate.*

Se poate arăta că datorită compensării câmpurilor electrice create de sarcinile electrice din moleculele sau atomii polarizaţi, câmpul electric în interiorul materialului polarizat, $\vec{E}_p$, este echivalent cu cel creat de cele două distribuţii superficiale de sarcină.

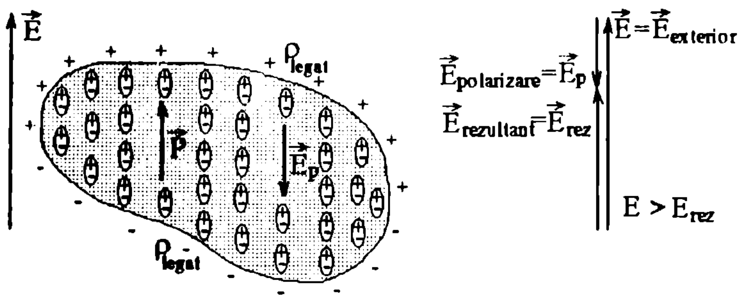


Fig. 1.26

Câmpul electric din interiorul materialului $\vec{E}_p$ este o mărime macroscopică **şi este** orientat antiparalel cu densitatea de polarizare $\vec{P}$. **Câmpul electric polarizant** extern, $\vec{E}$, se va suprapune peste cel creat de **materialul polarizat**, $\vec{E}_p$, atât în interiorul cât şi în afara lui, conducând **la un câmp** electric rezultant $\vec{E}_{rez}$:

$$\vec{E}_{rez} = \vec{E} + \vec{E}_p \quad (3).$$

După cum se **observă** din figura 1.26, în modul, $|\vec{E}_{rez}| < |\vec{E}|$.

Fie un **număr real** pozitiv şi nenul, k, astfel încât să transformăm inegalitatea **anterioară** în egalitate:

$$E_{rez} = \frac{1}{k} \cdot E \quad (4).$$

Putem **considera** că acest câmp electric extern, $\vec{E}$, în care este plasat **materialul** este **generat** de o sarcină punctiformă Q. Deci:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (5), \text{ iar } \quad E_{rez} = \frac{1}{k} \cdot E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{4\pi k\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (6).$$

Mărimea $\varepsilon = k\varepsilon_0$ se numeşte permitivitate electrică a materialului şi este o constantă caracteristică materialului. De obicei, numărul k se notează cu ε_r. Mărimea ε_0 reprezintă permitivitatea electrică a spaţiului vid.

Prin urmare, alături de sarcina Q generatoare de câmp electric, care constituie cauza perturbaţiei electrice, există şi sarcinile legate sau de polarizare, care constituie efectul perturbaţiei.

Este util să se facă distincţia între sarcina externă Q şi sarcinile de polarizare din material. Asupra primeia există un oarecare grad de control: sarcina poate fi adăugată sau îndepărtată (variată) şi adesea este denumită *sarcină liberă*. Celelalte sarcini care sunt părţi integrale ale atomilor sau moleculelor materialului sunt *sarcini legate* sau *sarcini structurale*. Acestea nu sunt mobile dar sunt mai mult sau mai puţin elastic legate şi contribuie prin micile lor deplasări la polarizarea materialului.

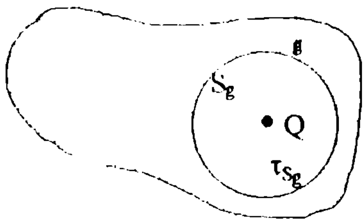


Fig. 1.27

Considerăm o gaussiană, g, sferică în material în jurul sarcinii Q. Suprafaţa acesteia este S_g, iar volumul delimitat de această suprafaţă închisă este τ_S (v. fig.1.27).

Sarcina globală din interiorul volumului materialului polarizat nu este Q ci Q/k.

În continuare, aplicăm legea lui Gauss pentru electrostatică pentru acest model:

$\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ (8), unde $\Phi_E = \oint\!\!\oint_{S_g} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint\!\!\oint_{S_g} k\cdot\vec{E}_{rez}\cdot d\vec{s}$, iar $Q = \iiint_{\tau_{S_g}} \rho_{liber}\cdot d\tau$, deci:

$$\oint\!\!\oint_{S_g} k\cdot\vec{E}_{rez}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau_{S_g}} \rho_{liber}\cdot d\tau \quad (9).$$

O relaţie integrală ca aceasta implică o relaţie locală între divergenţa câmpului vectorial $k\cdot\vec{E}_{rez}$ şi densitatea de sarcină liberă ρ_{liber} (se utilizează teorema Gauss-Ostrogradski):

$$\vec{\nabla}\cdot\left(k\cdot\vec{E}_{rez}\right) = \frac{\rho_{liber}}{\varepsilon_0} \quad (10).$$

Această relaţie ajută la identificarea rolului sarcinii izolate, deoarece k este presupus constant în tot mediul.

Într-un sistem oarecare, relaţia fundamentală între câmpul electric global (rezultant) şi densitatea de sarcină totală $\rho = \rho_{liber} + \rho_{legat}$ rămâne valabilă:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{rez} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{liber} + \rho_{legat}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (11).$$

Din ultimele două ecuaţii (10) şi (11) rezultă:

$$\vec{\nabla} \cdot (k - 1) \cdot \vec{E}_{rez} = -\frac{\rho_{legat}}{\varepsilon_0} \quad (12).$$

Se notează k-1 cu χ_e denumită susceptibilitate electrică a materialului respectiv, $k - 1 \equiv \chi_e$ (13), deci:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\chi_e \cdot \vec{E}_{rez}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{legat} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}_{rez}\right) = -\rho_{legat} \quad (14).$$

Mărimea vectorială $\varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}_{rez}$ se numeşte vectorul polarizare electrică a materialului:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}_{rez} \quad (15).$$

Ecuaţia diferenţială (14) devine:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{legat}} \quad (16).$$

Această ecuaţie nu depinde de condiţiile din altă parte a sistemului şi nici de modul în care este menţinută aranjarea particulară a sarcinilor legate (fiind o ecuaţie locală). Orice aranjament (structurare) de sarcină legată care are un anumit exces local, pe unitatea de volum, de protoni faţă de electroni trebuie să reprezinte o polarizare cu o anumită divergenţă. Astfel, ecuaţia trebuie să aibă loc în mod general.

Din ecuaţiile (11) şi (16) se obţine ecuaţia următoare:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}_{rez} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho_{liber}}{\varepsilon_0} \quad (17),$$

care este complet independentă de orice altă relaţie între $\vec{E}_{rez}$ şi $\vec{P}$. Ea nu este limitată numai la acele materiale, denumite dielectrici, în care $\vec{P}$ este proporţional cu $\vec{E}$.

Se obişnuieşte a se da combinaţiei liniare dintre vectorii $\vec{E}_{rez}$ şi $\vec{P}$, denumirea de vector *deplasare electrică* (sau vector *inducţie electrică*) care se notează cu $\vec{D}$:

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E}_{rez} + \vec{P} \qquad (18).$$

Ecuaţia următoare $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liber}}$ (19) are loc în orice situaţie în care mărimile macroscopice $\vec{P}$, $\vec{E}_{rez}$ şi ρ pot fi definite.

Se poate considera $\vec{D}$ drept un câmp vectorial a cărui sursă este distribuţia de sarcină liberă ρ_{liber}, aşa cum distribuţia de sarcină totală $\rho = \rho_{liber} + \rho_{legat}$ este sursa lui $\vec{E}_{rez}$.

Câmpul electrostatic $\vec{E}_{rez}$ este determinat în mod unic, cu excepţia adăugării unui câmp constant de distribuţie de sarcină ρ deoarece se poate completa legea $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{rez} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (20), cu condiţia universală $\vec{\nabla} \times \vec{E}_{rez} = 0$ (21) valabilă pentru câmpul electrostatic.

Nu este adevărat, în general, că $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$ (22). Astfel distribuţia de sarcină liberă nu este suficientă pentru a determina $\vec{D}$ din ecuaţia (19).

În plus, mai este necesară cunoaşterea condiţiilor de frontieră la interfaţa dintre diferite medii.

Considerăm diagrama schematică a frontierei dintre două medii distincte din figura 1.28. Se presupune că regiunea de frontieră conţine sarcini electrice superficial distribuite cu densitatea σ. Volumul τ_S este un domeniu cilindric imaginar infinitezimal gaussian ce intersectează interfaţa dintre cele două medii şi care are o suprafaţă totală S ce delimitează volumul τ_S. Normala $\vec{n}$ la suprafaţa de deasupra frontierei este îndreptată din mediul 1 spre mediul 2. Conturul dreptunghiular infinitezimal C, de grosime neglijabilă, este parţial într-un mediu şi parţial în celălalt şi este orientat perpendicular pe suprafaţa interfeţei astfel că normala la contur este tangentă la interfaţă.

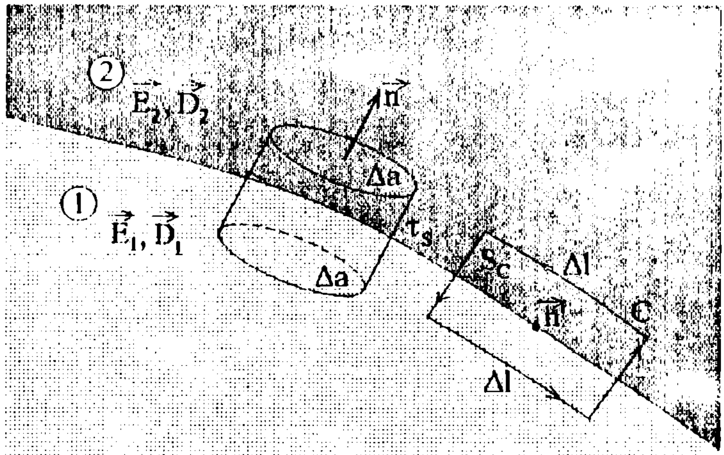


Fig. 1.28

În figura 1.28 versorul $\vec{n}'$ este orientat perpendicular pe planul figurii şi tangent la interfaţă.

Legea lui Gauss pentru medii macroscopice analoagă celei din subcapitolul 1.12.8 este:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot ds = \iiint_{\tau_s} \rho \cdot d\tau \qquad (23).$$

Având o înălţime neglijabilă, suprafaţa laterală a gaussienei cilindrice nu contribuie la calculul integralei din stânga în ecuaţia (23). Contribuie numai cele două baze de arie Δa care sunt paralele şi tangente la suprafaţa interfeţei. În acest caz:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot ds = \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} \cdot \Delta a\,, \text{ iar } \iiint_{\tau_s} \rho \cdot d\tau = \sigma \cdot \Delta a\,.$$

Astfel, relaţia care leagă *componentele normale* ale lui $\vec{D}$ în ambele zone ale frontierei este următoarea:

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = \sigma \qquad (24).$$

Se poate spune că discontinuitatea componentei normale a lui $\vec{D}$ în orice punct este dată de densitatea superficială de sarcină în acel punct.

Câmpul electrostatic fiind conservativ rezultă $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ sau sub forma integrală: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, unde C este curba infinitezimală de lățime neglijabilă construită în figura 1.28. Cum laturile curbei C de lungime Δl sunt paralele cu interfața, atunci:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{n}' \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \Delta l = [\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] \cdot \vec{n}' \cdot \Delta l \quad (25),$$

unde s-a utilizat o proprietate a produsului mixt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

Prin urmare, *componentele tangențiale* ale lui $\vec{E}$ de ambele părți ale frontierei sunt legate de relația:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (26),$$

care arată că, de-a curmezișul unei interfețe, componenta tangențială a lui $\vec{E}$ este continuă.

Concluzie: În concluzie, se pot scrie ***ecuațiile de stare*** pentru mediile macroscopice:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \cdot \vec{E}},$$

unde s-a renotat $\vec{E}_{rez}$ cu $\vec{E}$ și ***ecuațiile de trecere*** (sau condițiile de frontieră la trecerea dintr-un mediu în altul):

$$\boxed{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma} \quad \text{și} \quad \boxed{\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0}.$$

Materia poate fi polarizată, starea sa putând fi descrisă complet, atât timp cât câmpul macroscopic se consideră definit printr-o densitate de polarizare $\vec{P}$, care este și momentul dipolar pe unitatea de volum. Contribuția unei astfel de materii la câmpul electric $\vec{E}$ este identică cu aceea a unei distribuții de sarcină de densitate $\rho_{legat} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, existând în vid. În particular, la suprafața unei substanțe polarizate, unde există o discontinuitate în $\vec{P}$, aceasta se reduce la o sarcină superficială de densitate σ = -P. Dacă se adaugă orice distribuție de sarcină liberă care poate fi prezentă, câmpul electric este câmpul pe care această distribuție de sarcină totală l-ar produce în vid. Acesta este câmpul macroscopic, $\vec{E}$, atât în interiorul cât şi în afara mediului, cu menţiunea că în interiorul materiei este media spaţială a câmpului macroscopic adevărat.

***Definiţie**: Dacă $\vec{P}$ este proporţional cu $\vec{E}$ într-un material, atunci materialul se numeşte dielectric.*

***Observaţie**:* Sarcinile libere introduse într-un dielectric generează câmpuri electrice care au $1/\varepsilon_r$ din intensitatea pe care aceleaşi sarcini le-ar produce în vid.

Capitolul 2

ELECTROCINETICĂ

2.1. Curentul electric. Intensitatea curentului electric. Densitatea de curent electric

2.1.1. Definiţia curentului electric

Definiţie: *Mişcarea ordonată într-o singură direcţie a purtătorilor de sarcină electrică se numeşte curent electric.*

Curentul electric de conducţie apare când mişcarea ordonată a sarcinilor are loc în medii conductoare sau în vid.

Curentul de convecţie reprezintă mişcarea ordonată a sarcinilor electrice de pe un corp încărcat, odată cu mişcarea corpului.

Cauza apariţiei curentului electric de conducţie: *câmpul electric din conductor.* Sensul curentului electric coincide cu sensul vectorului câmp electric din conductor. Sensul curentului este acelaşi cu sensul deplasării în câmp a sarcinilor pozitive. (În câmp electric purtătorii de sarcină pozitivi se deplasează în sensul câmpului electric, iar cei negativi în sens opus lui).

Exemple de curent de conducţie: mişcarea electronilor liberi în metale, mişcarea electronilor de la catod la anod în tuburi electronice, mişcarea ordonată a ionilor în electroliţi.

2.1.2. Intensitatea curentului electric

Definiţie: *Intensitatea curentului electric printr-un conductor reprezintă sarcina electrică transportată de purtătorii de sarcină în unitatea de timp, prin orice secţiune transversală a conductorului, fiind o mărime fizică fundamentală de tip scalar în Sistemul Internaţional de unităţi.*

Intensitatea medie, I_m, a unui curent variabil în timp este definită ca fiind $I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, unde ΔQ este sarcina electrică ce trece printr-o secţiune transversală arbitrară a conductorului în intervalul de timp Δt.

Intensitatea instantanee, I, a unui curent variabil în timp este definită astfel: $I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \equiv \dot{Q}$, unde I reprezintă derivata cantităţii de sarcină Q = Q(t) în raport cu variabila timp t.

Curentul continuu (staţionar) reprezintă curentul electric a cărui intensitate şi direcţie nu se modifică în timp. Se notează tot cu litera I. Expresia lui I se obţine din condiţia I = constant. Deci I = dQ/dt = const. $\Rightarrow$ dQ = Idt $\Rightarrow$ Q = It sau I = Q/t. În acest caz, curentul transportă prin secţiunea conductorului aceeaşi cantitate de sarcină în fiecare secundă.

Unitatea de măsură pentru intensitatea curentului în S.I. este amperul.

Definiţia amperului: *Intensitatea unui curent electric constant (staţionar), care traversând doi conductori paraleli, rectilinii, infinit de lungi, de secţiune neglijabilă, situaţi în vid, la un metru distanţă unul de celălalt, dă naştere la o forţă de interacţiune magnetică între conductori de $2\,10^{-7}$ newtoni pe metru de lungime, se numeşte amper.*

2.1.3. Modulul vectorului densităţii de curent de conducţie. Intensitatea curentului în funcţie de densitatea de curent de conducţie

a) Cazul conductorului omogen, rectiliniu aflat într-un câmp electric exterior $\vec{E}$ şi versorul $\vec{n}$ paralel cu $\vec{v}$.

Ipoteză: În conductor se mişcă un singur tip de purtători de sarcină (electroni, de exemplu). Fie n concentraţia purtătorilor de sarcină (numărul de electroni din unitatea de volum a conductorului), q sarcina unui purtător şi $\vec{v}$ viteza în câmpul electric $\vec{E}$ în care se află conductorul, a fiecărui purtător de sarcină (se presupune că toţi purtătorii au aceeaşi viteză $\vec{v}$). Într-un interval de timp Δt toţi electronii vor străbate spaţiul $\Delta l = v \cdot \Delta t$; Δl constituie generatoarea cilindrului de volum $\Delta\tau = S \cdot \Delta l = S \cdot v \cdot \Delta t$; S reprezintă secţiunea transversală a conductorului. Numărul purtătorilor de sarcină din volumul $\Delta\tau$ este $\Delta N = n \cdot \Delta\tau =$

$=n \cdot S \cdot v \cdot \Delta t$. Sarcina totală transportată de aceştia este $\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot S \cdot v \cdot \Delta t$. Intensitatea curentului din conductor este: $I = \Delta Q/\Delta t = q \cdot n \cdot S \cdot v$.

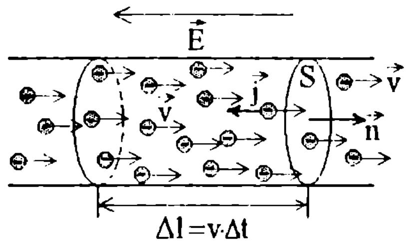


Fig.2.1

Mărimea notată cu $j = I/S = q\,n\,v$ defineşte valoarea (modulul) densităţii de curent din conductorul omogen cu un singur tip de purtători de sarcină.

***Definiţie**: Modulul vectorului densităţii de curent de conducţie este dat de raportul dintre intensitatea curentului electric şi suprafaţa situată normal pe direcţia curentului.*

sau

Densitatea de curent j este numeric egală cu intensitatea curentului electric I care străbate normal unitatea de suprafaţă.

$$\boxed{j = \frac{I}{S}}$$

Unitatea de măsură pentru j este: $\langle j \rangle_{S.I.} = A/m^2$.

Relaţia $I = j \cdot S$ care rezultă din definiţia pentru j, este valabilă în ipotezele: S este perpendicular pe vectorul $\vec{v}$ (deci şi pe $\vec{j}$) şi modulul lui $\vec{j}$ este constant în toate punctele secţiunii S.

***Definiţia vectorului densitate de curent de conducţie** $\vec{j}$: Densitatea de curent de conducţie este o mărime vectorială, care se notează cu $\vec{j}$, are modulul egal cu $j = nqv$, iar direcţia şi sensul coincide cu orientarea vectorului viteză, $\vec{v}$, al purtătorilor de sarcină dacă sarcina este pozitivă şi este de sens contrar dacă sarcina este negativă:*

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v}.$$

b) Conductor omogen şi rectiliniu aflat într-un câmp electric exterior de intensitate $\vec{E}$. Versorul $\vec{n}$ face un unghi θ cu $\vec{j} = \text{const}$. Intensitatea curentului de conducţie în funcţie de densitatea curentului de conducţie

În acest caz S' reprezintă proiecţia ortogonală a lui S pe un plan perpendicular pe conductor: $S' = S\cos\theta$. Pentru secţiunea S', normală la $\vec{j}$, este valabilă relaţia: $I = jS' = jS\cos\theta$. Prin definiţie vectorul suprafaţă orientată $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ şi deci relaţia $I=jS\cos\theta$ se scrie $\boxed{I = \vec{j} \cdot \vec{S}}$. Într-adevăr, produsul scalar este: $\vec{j} \cdot \vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot S = j \cdot S \cdot \cos\theta$ (v.figura 2.2).

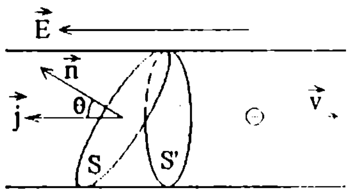


Fig.2.2

Deci, *intensitatea curentului I printr-un conductor omogen este egal cu produsul scalar dintre vectorul densitate de curent $\vec{j}$ şi vectorul $\vec{S}$.*

c) Conductor neomogen de formă oarecare aflat într-un câmp electric exterior de intensitate $\vec{E}$. Intensitatea curentului de conducţie în funcţie de densitatea de curent de conducţie

În conductorii neomogeni vectorul densitate de curent, $\vec{j}$, are valori şi orientări diferite în puncte diferite din conductor (v. figura 2.3). Delimităm în secţiunea S arbitrară dusă prin conductor un element de suprafaţă ds atât de mic încât $\vec{j}$ este constant în orice punct din ds. Intensitatea curentului prin ds va fi: $dI = \vec{j} \cdot d\vec{s}$.

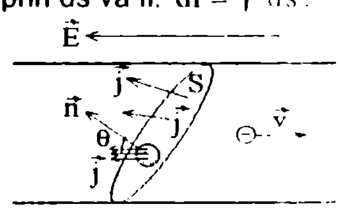


Fig.2.3

Intensitatea curentului prin întreaga secţiune S a conductorului neomogen se obţine prin integrare. Rezultă:

$$I = \int dI = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}.$$

Deci, *intensitatea curentului I printr-un conductor neomogen este egală cu fluxul vectorului densitate de curent de conducţie* $\vec{j}$ *prin suprafaţa secţiunii S considerate a conductorului.*

2.1.4. Ecuaţia de continuitate din electrocinetică

Fie o suprafaţă imaginară S închisă care delimitează volumul τ_s, în interiorul unui conductor neomogen de formă oarecare străbătut de un curent variabil caracterizat de densitatea de curent de conducţie: $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z, t)$ (v. figura 2.4).

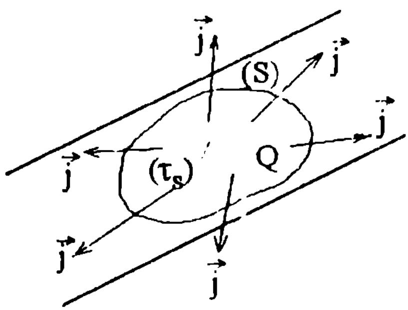


Fig.2.4

Fie densitatea volumică de sarcină $\rho(x, y, z, t)$, care depinde de punctele de coordonate (x, y, z) ale conductorului neomogen şi de timpul t. Sarcina totală Q din volumul τ_s este:

$$Q = \iiint_{\tau_s} \rho(x, y, z, t) d\tau$$

Putem, deci, scrie: $I = \oint\!\!\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$, unde $I = \dfrac{dQ'}{dt}$ reprezintă sarcina electrică dQ' ce iese din interiorul suprafeţei S în timpul dt.

In conformitate cu *principiul conservării sarcinii electrice*, sarcina ce iese din interiorul suprafeţei S, dQ' în intervalul dt, trebuie să fie egală cu sarcina cu care s-a micşorat sarcina totală Q din interiorul volumului τ_s în acelaşi interval de timp dt. Prin convenţie această cantitate se ia cu semnul minus: (-dQ).

Cu alte cuvinte, $\frac{dQ'}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$ reprezintă diminuarea sarcinii electrice din volumul delimitat de S.

Putem, deci, scrie: integrala $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt}$ reprezintă fluxul densităţii de curent prin suprafaţa S, care este egal cu diminuarea sarcinii electrice din interiorul suprafeţei S, în intervalul de timp dt.

Utilizând relaţia $Q = \iiint_{\tau_s} \rho(x, y, z, t) d\tau$ rezultă:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\tau_s} \rho(x, y, z, t) d\tau = -\iiint_{\tau_s} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau .$$

Deoarece volumul τ_s este constant prin ipoteză (limitele de integrare nu depind de timp), este posibilă operaţia de derivare parţială în raport cu timpul sub integrală.

Conform teoremei lui Gauss-Ostrogradski:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \cdot d\tau ,$$

rezultă

$$\iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \cdot d\tau = -\iiint_{\tau_s} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

ceea ce conduce la **ecuaţia de continuitate**:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

care este o *ecuaţie locală fundamentală a electrocineticii*. Aceasta exprimă legea conservării sarcinii electrice totale.

În cazul curentului electric staţionar, prin definiţie, densitatea de curent ρ în fiecare punct al conductorului nu depinde explicit de timp: ρ = = ρ(x,y,z). Matematic acest lucru se scrie: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Rezultă: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$.

Sensul fizic: În conductor nu există puncte din care "izvorăşte" densitate de curent $\vec{j}$ ($\mathrm{div}\vec{j} = 0$). Sarcina electrică ce intră în volumul τ oarecare din conductor în unitatea de timp este egală cu sarcina ce iese din acel volum în unitatea de timp prin suprafaţa S.

Observaţie: Intensitatea curentului de conducţie I şi densitatea curentului de conducţie j se notează uneori în literatură cu I_c, respectiv, j_c.

2.2. Teoria electronică a conducţiei în metale

2.2.1. Purtătorii de sarcină în metale. Modelul P. Drude şi G. A. Lorentz

Conform modelului Drude-Lorentz, purtătorii de sarcină în metale sunt electronii, iar teoria care explică procesul de conducţie pe această bază se numeşte teoria electronică a conducţiei metalelor.

Conform acestui model reţeaua cristalină a metalului este formată din ioni pozitivi şi electroni liberi, care provin din electronii de valenţă ai atomilor metalului aşezaţi în nodurile reţelei cristaline.

În absenţa câmpului electric exterior electronii liberi din metale se află într-o mişcare termică, haotică şi continuă cu viteza termică medie v_T.

Electronii liberi din metale se comportă ca moleculele unui gaz ideal; ansamblul electronilor liberi poate fi asimilat cu un "gaz de electroni", căruia i se pot aplica legile gazelor ideale.

Dacă la capetele conductorului metalic se menţine o diferenţă de potenţial V_1 - V_2, câmpul electric $\vec{E}$ ce apare în interiorul metalului imprimă electronilor liberi o mişcare suplimentară, ordonată, cu viteza medie $\vec{v}$ = viteza de curent = viteza de drift, având sens invers vectorului câmp electric $\vec{E}$.

Apariţia mişcării ordonate a electronilor este echivalentă cu apariţia în conductor a curentului electric.

Experimentul lui Rickie (1901).

Scopul: Demonstrarea faptului că purtătorii de sarcină în metale sunt electronii. Trecând timp de un an un curent electric printr-un cilindru format din trei bucăţi lipite între ele la baze, formate din Cu-Al-Cu. sarcina totală care a traversat suprafaţa de separare între două bucăţi, dacă aceasta ar fi fost purtată din ioni (Cu, Al) şi nu din electroni s-ar fi putut observa trecerea de material (ioni) dintr-un cilindru în altul.

Concluzie: În metale curentul nu apare în urma mişcării ionilor (de natură diferită în metale diferite), ci în urma mişcării altor particule, de aceeaşi natură în toate metalele, adică în urma mişcării orientate a electronilor.

2.2.2. Calculul vitezei termice medii a electronilor

La temperatura T=300K din relaţia:

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}38 \cdot 10^5 \, m/s$$

Viteza de drift a electronilor (viteza în curent), *v*, este pentru $j = 10^6 A/m^2$ = densitatea de curent maximă admisă în Cu, $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$, $n = 10^{29}$ electroni/m^3: $v = j/ne = 10^6/(10^{29} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 10^{-4}$ m/s. Deci $v \ll v_T$. ***Viteza de curent a electronilor este foarte mică (neglijabilă) faţă de viteza medie termică v_T.***

Observaţie: Nu trebuie confundată viteza în curent a electronilor cu viteza de transmitere a semnalului electric prin conductori. Se ştie că la închiderea întrerupătorului, situat la sute de km faţă de consumator, curentul se instalează instantaneu (practic) pe toată lungimea conductorului, de la generator la consumator. Ceea ce se instalează practic instantaneu în conductor este câmpul electric, care se propagă cu viteza luminii, *c*, în mediul conductor dat. Câmpul electric pune electronii în mişcare în mod instantaneu şi simultan pe toată lungimea conductorului.

Aşadar, viteza de transmisie a semnalului (câmpului) electric prin conductor, egală cu viteza luminii, nu coincide cu viteza de curent a electronilor.

2.2.3. Timp liber mediu dintre două ciocniri. Viteza medie în curent

În metale aflate în câmp electric mişcarea ordonată a electronilor este stânjenită de prezenţa ionilor reţelei metalului cu care se pot ciocni în mod întâmplător.

Presupunem că la capetele unui conductor metalic se aplică o diferență de potențial. Aceasta determină apariția în metal a unui câmp electric $\vec{E}$. Sub acțiunea forței $\vec{F} = e\vec{E}$ fiecare electron va avea o mişcare accelerată în timpul dintre două ciocniri succesive cu nodurile rețelei: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m}$, unde *e* este sarcina electronului, iar *m* este masa electronului. În intervalul de timp Δt_1 dintre două ciocniri succesive electronul parcurge spațiul $\Delta x_1 = \frac{a(\Delta t_1)^2}{2}$. În intervalul de timp Δt_2 dintre următoarele două ciocniri cu nodurile rețelei electronul parcurge spațiul $\Delta x_2 = \frac{a(\Delta t_2)^2}{2}$. În timpul total, $t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + ... + \Delta t_n$, electronul parcurge distanța totală $x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n = (a/2)((\Delta t_1)^2 + ... + (\Delta t_n)^2)$.

Viteza medie în curent a mişcării electronului este prin definiție: $\langle v \rangle = \frac{x}{t} = \frac{a}{2}\tau$ sau vectorial $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{a}}{2}\tau$, unde: $\tau = \frac{(\Delta t_1)^2 + ... + (\Delta t_n)^2}{t}$ reprezintă **timpul mediu dintre două ciocniri** sau **timpul liber mediu**.

2.2.4. Forma diferențială (locală) şi integrală a legii lui Ohm

a) Forma locală a legii lui Ohm.

Pornesc de la relațiile $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{a}}{2}\tau$ şi $\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$ şi rezultă:

$$\boxed{\langle \vec{v} \rangle = \frac{e\tau}{2m} \cdot \vec{F}}$$

care reprezintă **viteza medie a electronului**. Pe de altă parte vectorul densitate de curent de conducție este: $\vec{j} = ne\langle \vec{v} \rangle$ şi deci $\vec{j} = \frac{e^2 n\tau}{2m} \cdot \vec{E}$.

Prin urmare:

$$\boxed{\vec{j}(x,y,z) = \sigma\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{\rho}\vec{E}(x,y,z)},$$

unde: $\sigma = 1/\rho = e^2 n\tau/2m$, σ este conductivitatea electrică, iar ρ este rezistivitatea electrică. Aceste mărimi sunt constante caracteristice materialului din care este făcut conductorul.

Ecuaţia anterioară constituie *forma locală (diferenţială) a legii lui Ohm*, care se enunţă astfel:

În fiecare punct P(x,y,z) din conductor densitatea de curent de conducţie $\vec{j}$ este direct proporţională cu vectorul intensitate câmp electric $\vec{E}$ în acel punct. Sensul vectorului $\vec{j}$ coincide cu cel al vectorului $\vec{E}$.

b) Forma integrală a legii lui Ohm.

Considerăm un conductor omogen, de secţiune uniformă S şi de lungime l, prin care trece un curent de intensitate I constantă. Rezultă, deci, $\vec{E} = \overrightarrow{const.}$, deoarece $\vec{j} = \overrightarrow{const.}$ Purtătorii de sarcină se mişcă în interiorul conductorului sub acţiunea unui câmp electric constant de intensitate $\vec{E}$ care derivă dintr-un potenţial V.

Deci, $\vec{E}$ =-gradV, care, dacă se ia axa 0x ca în fig.2.5, se scrie astfel:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i}\text{. Sau } E_x \equiv E = -\frac{dV}{dx}\text{, } Edx=-dV \Rightarrow -\int_0^l dV = E\int_0^l dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(0)-V(l)=El \quad (1).$$

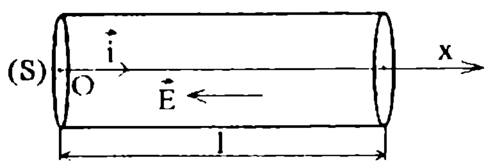


Fig.2.5

Notăm cu $V(0) = V_1$ şi $V(l) = V_2$ potenţialele punctelor celor două suprafeţe extreme ale conductorului şi presupunem că $V_1 > V_2$. Scriind legea lui Ohm sub formă locală $j = \sigma E = I/S$ (2) prin eliminarea lui E din relaţiile (1) şi (2) rezultă:

$$\sigma\frac{V_1 - V_2}{l} = \frac{I}{S} \quad \text{sau} \quad I = \frac{S\sigma(V_1 - V_2)}{l}$$

unde mărimea $R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} = \rho\frac{l}{S}$ reprezintă rezistența electrică a conductorului omogen şi de secțiune uniformă, $V_1 - V_2 = U$ = tensiunea electrică dintre cele două suprafețe extreme. Deci,

$$\boxed{I = \frac{U}{R}}$$

reprezintă *legea lui Ohm sub formă integrală*, care se enunță astfel:

Intensitatea curentului electric care străbate o porțiune de circuit, dintr-un conductor omogen, este direct proporțională cu diferența de potențial aplicată la capetele acelei porțiuni de circuit şi invers proporțională cu rezistența electrică a porțiunii de circuit.

2.2.5. Rezistența electrică a unei porțiuni de conductor. Unități de măsură. Cauzele rezistenței electrice

Definiție: *Rezistența electrică R a unei porțiuni de conductor este o mărime fizică scalară derivată, direct proporțională cu lungimea conductorului, invers proporțională cu aria secțiunii transversale a conductorului şi depinde prin rezistivitatea ρ de natura materalului din care este confecționat conductorul:*

$$R = \rho\frac{l}{S}.$$

Cauze: Rezistența electrică R a unui conductor este determinată de faptul că în mişcarea lor, electronii suferă ciocniri cu ionii rețelei cristaline a conductorului. Aceste ciocniri frânează mişcarea electronilor, jucând rolul unei forțe de frecare specifică.

Unitatea de măsură în S.I. pentru rezistența electrică **R** este **ohm-ul** (Ω), iar unitatea de măsură în S.I. pentru rezistivitatea ρ este **ohm-metru** (**Ω·m**).

Definiție: *Un ohm reprezintă rezistența electrică dintre două puncte ale unui conductor când aplicarea unei tensiuni electrice constante de un volt între cele două puncte, determină un curent de un amper prin conductor, dacă acesta nu este sediul unor tensiuni electromotoare. Relația de definiție este* $R = U/I$; $\langle R\rangle_{S.I.} = 1V/1A = 1\Omega$.

Definiție: *Un ohm-metru este egal cu rezistivitatea materialului omogen şi izotrop al unui conductor cu lungimea de 1m şi aria secțiunii drepte de 1m², care are rezistența electrică de 1Ω. Relația de definiție este:* $\rho = RS/l$; $\langle\rho\rangle_{S.I.} = 1m^2 \cdot 1\Omega/1m = 1\Omega m$.

2.3. Energia curentului electric de conducție. Legea lui Joule-Lenz sub formă integrală şi diferențială

a) Prima forma integrală a legii Joule-Lenz.

Sub prima formă integrală (fără demonstrație), această lege caracterizează cantitatea de energie (căldură), W, disipată de un conductor având rezistența electrică R, în timpul t, când acesta este parcurs de un curent electric de intensitate I:

$$W = R\,I^2 t,\quad R = \rho\, l/S,$$

unde: ρ este rezistivitatea electrică a conductorului, σ = 1/ρ este conductivitatea electrică a conductorului, l este lungimea conductorului, iar S – aria secțiunii transversale a conductorului.

b) Forma diferențială a legii Joule-Lenz.

Demonstrație: Fie un element de lungime infinitezimal dl din conductorul electric. Rezistența electrică a acestui element va fi dată de relația: dR = ρ dl/S, obținută prin diferențierea relației R = ρ l/S, păstrând S şi ρ constante.

Energia disipată prin efect Joule de elementul de conductor dl în timpul t prin care circulă curentul electric de intensitate I se obține prin diferențierea relației $W = R\,I^2 t$ în raport cu R, rezultând: $dW = dR\,I^2 t$. Prin urmare, făcând înlocuirea lui dR, rezultă:

$$dW = \rho \cdot \frac{dl}{S} \cdot I^2 \cdot t\,.$$

Dacă cuentul electric de intensitate I se caracterizează prin densitatea de curent j, I = j S, atunci relația anterioară se transcrie astfel:

$$dW = \rho \cdot \frac{dl}{S} \cdot j^2 \cdot S \cdot t = \frac{1}{\sigma} \cdot dl \cdot j^2 \cdot S \cdot t\,.$$

Având în vedere, în continuare, relația:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}\,,$$

unde $\vec{E}$ reprezintă vectorul câmp electric din interiorul conductorului, care constituie *legea lui Ohm sub formă diferenţială,* egalitatea anterioară se rescrie:

$$dW = \sigma \cdot E^2 \cdot S \cdot dl \cdot t\,.$$

Deoarece $S\,dl = d\tau$ reprezintă volumul porţiunii de conductor de secţiune S şi lungime dl rezultă: $dW = \sigma \cdot E^2 \cdot t \cdot d\tau$.

***Definiţie**: Densitatea de energie, w, disipată de conductor*

$w = \dfrac{dW}{d\tau}$*, cu unitatea de măsură* $\langle w \rangle_{S.I.} = \dfrac{J}{m^3}$,

reprezintă energia degajată (disipată) în unitatea de volum din conductor.

Prin urmare, rezultă: $\boxed{w = \sigma \cdot E^2 \cdot t}$ care reprezintă *forma diferenţială a legii Joule-Lenz.*

c) A doua formă integrală a legii Joule-Lenz

A două formă integrală a legii Joule-Lenz echivalentă cu cealaltă se obţine din relaţia de definiţie, $w = \dfrac{dW}{d\tau}$. Prin integrare, rezultă:

$$\boxed{W \equiv \iiint_{\tau_S} dw = \sigma \cdot t \cdot \iiint_{\tau_S} E^2 \cdot d\tau}.$$

d) A treia formă integrală a legii Joule-Lenz.

A treia formă integrală a legii Joule-Lenz se obţine derivând parţial relaţia anterioară în raport cu timpul, t:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = \sigma \cdot \iiint_{\tau_S} E^2 \cdot d\tau},$$

unde $\dfrac{\partial W}{\partial t}$ = rata de variaţie în timp = viteza de variaţie reprezintă căldura (energia) dezvoltată în unitatea de timp prin efect Joule în volumul τ_s mărginit de suprafaţa S, traversat de câmpul electric de intensitate $\vec{E}$.

2.4. Tensiunea electromotoare

2.4.1. Punerea problemei. Conceptele de generator şi forţă imprimată

a) Într-un conductor are loc deplasarea ordonată a purtătorilor de sarcină electrică (există un curent electric), atât timp cât în acesta există un câmp electric caracterizat de vectorul $\vec{E}$.

Experiment:

Fie două sfere metalice 1 şi 2 încărcate cu sarcinile $+Q_1$, respectiv $-Q_2$ şi având potenţialele V_1, respectiv V_2. Între sferele 1 şi 2 există diferenţa de potenţial $V_1 - V_2 > 0$ şi un câmp electrostatic caracterizat de vectorul câmp electric $\vec{E}_e$ (v. figura 2.6.a, b, c).

Dacă legăm sferele cu conductorul C, electronii liberi din acesta vor începe să se deplaseze ordonat sub acţiunea câmpului $\vec{E}_e$, având viteza dirijată în sensul opus vectorului $\vec{E}_e$. Acest curent electric se menţine atâta timp cât este necesar pentru ca sarcinile aflate pe cele două sfere să se neutralizeze reciproc.

După aceasta, potenţialele celor două sfere devin egale în valoare, iar câmpul electric dispare.

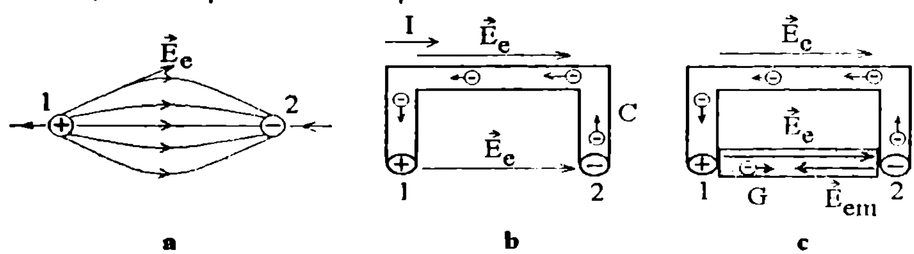


Fig.2.6

Generatorul. În vederea menţinerii unui curent constant prin C se închide circuitul prin intermediul unui dispozitiv numit generator (sursă) G. Rolul lui G este de a menţine constantă diferenţa de potenţial V_1-V_2, prin readucerea electronilor de la sfera 1 la sfera 2 cu debitul cu care aceştia circulă de la sfera 2 la sfera 1 prin conductorul C (circuitul exterior al generatorului).

b) În generator electronii circulă de la borna + spre borna -, în sens invers forţei electrice $\vec{F}_e = -e\vec{E}_e$ a câmpului electrostatic şi care nu reprezintă, deci, cauza mişcării acestora.

***Definiţie**: Forţa care determină mişcarea electronilor în interiorul generatorului de la borna + la borna - în sens invers vectorului $\vec{E}_e$ se numeşte **forţă electromotoare, forţă indusă,** sau **forţă imprimată**. Se notează cu $\vec{F}_{em}$, iar vectorul câmp electromotor se defineşte astfel:*

$$\vec{E}_{em} = \frac{\vec{F}_{em}}{q}.$$

Forţa electromotoare (e.m.) are drept cauză, cel mai frecvent, *energia degajată în reacţiile chimice din generator.* În interiorul lui G apare un vector câmp electric total:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_{em}.$$

Dacă prin conductorul C nu trece curent electric (circuit deschis) în interiorul generatorului $\vec{E}_e + \vec{E}_{em} = 0$.

Dacă circuitul este închis, sub influenţa câmpului $E = E_{em} - E_e > 0$ ($E_{em} > E_e$) electronii se vor deplasa în interiorul generatorului G de la borna 1 la borna 2 în sens invers vectorului $\vec{F}_e = -e\vec{E}_e$, menţinându-se astfel constante diferenţa de potenţial V_1-V_2, precum şi valoarea curentului în conductorul C.

2.4.2. Tensiunea electrică şi tensiunea electromotoare

a) Căderea de tensiune (U) dintre două puncte ale unui circuit electric închis

***Definiţie**: Lucrul efectuat de forţa câmpului electric total din circuit, $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_{em}$, pentru deplasarea unităţii de sarcină electrică pozitivă între două puncte date a şi b ale circuitului reprezintă tensiunea electrică (diferenţa de potenţial) dintre acele puncte.*

Matematic, aceasta se scrie astfel:

$$U_{ab} = \frac{W_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \left(\vec{E}_e + \vec{E}_{em}\right) \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}$$

b) Diferenţa de potenţial între două puncte ale unui circuit închis

***Definiţie**: Lucrul efectuat de forţa câmpului electrostatic $\vec{E}_e$, pentru deplasarea unităţii de sarcină pozitivă între două puncte a şi b ale circuitului reprezintă diferenţa de potenţial între cele două puncte.*

Matematic, aceasta se scrie astfel:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{W_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l}\,.$$

c) Tensiunea electromotoare (t.e.m) $\mathcal{E}$ între două puncte ale unui circuit

***Definiție**: Lucrul efectuat de forța câmpului electromotor $\vec{E}_{em}$, pentru deplasarea unității de sarcină pozitivă între două puncte date a și b ale circuitului constituie tensiunea electromotoare între cele două puncte.*

Matematic, aceasta se poate scrie astfel: $\mathcal{E}_{ab} = \frac{W_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}\,.$

d) Relația dintre U_{ab}, V_{ab}, și $\mathcal{E}_{ab}$

Din relațiile scrise anterior se deduce relația de legătură:

$$U_{ab} = V_{ab} + \mathcal{E}_{ab}.$$

Căderea de tensiune între două puncte a și b ale unui circuit închis este egală cu suma dintre diferența de potențial și tensiunea electromotoare (t.e.m.) între cele două puncte.

e) Căderea de tensiune pe întreg circuitul închis.

Considerăm relația pentru U_{ab} în care facem ca "a" și "b" să coincidă cu bornele generatorului:

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} \quad \text{și a≡b.}$$

Deoarece vectorul câmp electric $\vec{E}_e$ este conservativ, circulația acestuia pe o curbă închisă este zero:

$$\oint_C \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = 0$$

și deci în acest caz relația pentru U_{ab} devine:

$$U_{ab} = \mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} \quad \text{și a≡b.}$$

Cu alte cuvinte, *într-un circuit electric închis tensiunea electromotoare (t.e.m.) este egală cu circulația vectorului câmp electromotor, $\vec{E}_{em}$, calculată pe conturul închis C al circuitului.*

Capitolul 3

MAGNETISM

3.1. Noţiunea de câmp magnetic

3.1.1. Forţele de natură magnetică

a) Constatări experimentale.

Experimental s-a constatat că între doi conductori paraleli parcurşi de un curent electric continuu se manifestă:

- forţe de atracţie dacă curenţii în conductori au acelaşi sens;
- forţe de respingere dacă curenţii au sens opus.

b) Natura forţelor magnetice.

Să stabilim natura forţelor de interacţie dintre conductorii parcurşi de curenţi electrici. Deoarece sarcina pozitivă totală a ionilor din nodurile reţelei cristaline a conductorului este egală în valoare absolută cu sarcina negativă a electronilor liberi, în ansamblu conductorii rămân neutri din punct de vedere electric, indiferent dacă electronii liberi participă sau nu la mişcare în curentul care circulă prin aceştia.

În concluzie, conductorii fiind neutri (chiar parcurşi de curenţi) câmpul electric generat de aceştia este egal cu zero. Deci, forţa de natură electrică dintre ei este, de asemenea, nulă.

***Definiţie:** Forţa care se manifestă între conductorii parcurşi de curent electric continuu se numeşte forţă magnetică.*

Denumirea provine de la faptul că asupra unui conductor parcurs de curent, aflat în vecinătatea unui magnet, acţionează o forţă de aceeaşi natură ca între doi curenţi. Existenţa forţei magnetice nu poate fi explicată pe baza mecanicii newtoniene. În mecanica newtoniană existenţa forţelor este însoţită de existenţa acceleraţiilor, pe când mişcarea în curent a electronilor este uniformă. Mecanica relativistă poate explica originea forţei magnetice.

3.1.2. Câmpul magnetic. Caracteristici

Definiţie: *Câmpul magnetic (c.m.) este o formă de existenţă a materiei care se manifestă prin acţiunea cu o forţă de natură magnetică asupra sarcinilor electrice în mişcare, deci şi asupra curenţilor electrici.*

Interacţiunile magnetice se transmit de la un punct din spaţiu la altul cu viteză finită, din aproape în aproape, prin intermediul câmpului magnetic. Viteza de propagare a interacţiunii magnetice este egală cu viteza "c" a luminii în spaţiu liber (în vid). Interacţiunea magnetică între două sarcini electrice în mişcare se realizează astfel:
- în prima etapă, sarcina în mişcare q_o generează în jurul ei un câmp magnetic, care se propagă cu viteza luminii în spaţiu;
- în a doua etapă, când câmpul magnetic s-a propagat până la locul sarcinii a doua, q, aflată în mişcare, prin sarcina q_o acţionează asupra sarcinii q o forţă magnetică $\vec{F}_m$.

Într-o regiune din spaţiu există un *câmp magnetic*, dacă introducând în acea regiune o spiră circulară de dimensiuni mici parcursă de un curent constant (buclă de curent) sau un ac magnetic suspendat (magnetometru), asupra lor se exercită forţe, care nu există în absenţa acestui câmp. Câmpul magnetic se caracterizează în fiecare punct din spaţiu prin vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$ şi prin vectorul câmp magnetic $\vec{H}$ (excitaţie magnetică) tangenţi la linia de câmp magnetic ($\vec{B} = \mu\vec{H}$, pentru vid: $\vec{B} = \mu_o\vec{H}$, $\mu=\mu_r\mu_o$, $\mu_o=4\pi\cdot10^{-7}$ H/m, μ_o reprezintă permeabilitatea magnetică a vidului).

3.1.3. Legea lui Lorentz. Legea forţei electromagnetice (magnetice)

Din considerente experimentale rezultă că: forţa cu care acţionează o mulţime de sarcini punctuale q_i ce se deplasează cu vitezele $\vec{v}_i$ asupra unei alte sarcini punctuale q aflată în mişcare cu viteza $\vec{v}$ are expresia următoare: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$. Această relaţie constituie forma matematică a *legii lui Lorentz*. Primul termen $\vec{F}_c = q\vec{E}$ se numeşte forţă electrică; vectorul $\vec{E}$ descrie câmpul electric creat de sarcinile q_i în punctul în care se află sarcina q. Termenul al doilea $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ se numeşte *forţă magnetică*. Vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$ caracterizează câmpul magnetic în punctul în care se află sarcina q, produs de sarcinile q_i aflate în mişcare.

Forţa $\vec{F}_m$ depinde de sarcina q şi există numai dacă atât sarcinile q_i care acţionează cât şi sarcina care suferă acţiunea q sunt în mişcare; $\vec{F}_m$ este deci o *forţă electrodinamică*.

Caracteristicile forţei magnetice $\vec{F}_m$:

Mărimea (modulul): $\left|\vec{F}_m\right| = qvB\sin\alpha$, unde α este unghiul dintre vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$.

$$F_m = \left|\vec{v} \times \vec{B}\right| = \begin{cases} vB & ,\text{daca} \quad \vec{v} \perp \vec{B} \\ vB\sin\alpha & ,\text{daca} \quad \alpha = \left(\vec{v}, \vec{B}\right) \neq 0,\ \alpha \text{ este oarecare} \\ 0 & ,\text{daca} \quad \vec{v} \parallel \vec{B} \end{cases}$$

Direcţia: $\vec{F}_m$ este un vector perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$.

Sensul: este dat de regula mâinii drepte. Dacă degetele mâinii drepte deschise sunt orientate în sensul vectorului $\vec{B}$, în aşa fel încât degetul mare să fie orientat în direcţia vectorului viteză $\vec{v}$ a sarcinii, atunci vectorul forţă $\vec{F}_m$ iese din palmă, dacă q > 0, şi din dosul palmei, dacă q < 0.

3.1.4. Liniile câmpului magnetic

Câmpul magnetic este un câmp vectorial: fiecărui punct din spaţiul cu câmp magnetic i se poate ataşa un vector $\vec{B}$, numit vectorul inducţie magnetică.

Definiţie: Linia din câmp cu proprietatea că are ca tangentă în orice punct al ei un vector câmp magnetic $\vec{B}$ *se numeşte linie de câmp magnetic.*

Proprietățile liniei de câmp magnetic:

a) Printr-un punct din spațiu poate trece o singură linie de câmp, deci liniile de câmp magnetic (ca și cele de câmp electric) nu se pot intersecta.

b) Liniile câmpului magnetic sunt curbe închise (spre deosebire de liniile câmpului electrostatic).

c) Liniile de câmp sunt curbe orientate. Orientarea liniei este dată de orientarea polului nord al unui ac magnetic de busolă plasat în punctul respectiv.

d) Un fascicul de linii de câmp care se sprijină pe un contur închis formează un tub de câmp. În orice secțiune a tubului de câmp, numărul liniilor de câmp este constant (v. fig.3.1). Tuburile de câmp pot avea secțiune transversală variabilă. Acestea pot fi de două feluri: *câmp convergent* (v. fig.3.1.a), *câmp divergent* (v. fig.3.1.b). *Câmpul omogen* se caracterizează printr-o secțiune constantă a tubului de câmp (v. fig.3.1.c).

Consecință: Liniile câmpului magnetic omogen sunt paralele și echidistante.

Pornind de la expresia forței Lorentz se poate deduce unitatea de măsură în S.I. pentru inducția câmpului magnetic: *tesla.*

$$\langle B\rangle_{S.I.} = (1N \cdot 1s)/(1C \cdot 1m) = 1N/(1A \cdot 1m) = 1T.$$

O altă unitate de măsură frecvent utilizată este gauss (Gs). Între cele două unități există relația: $1T=10^4$Gs.

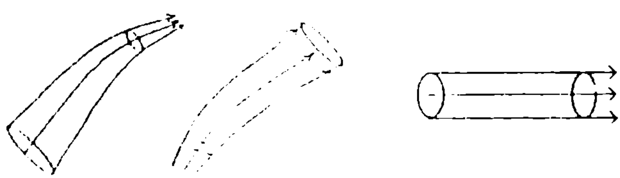


Fig.3.1

3.1.5. Fluxul câmpului magnetic

a) În cazul în care câmpul magnetic este *omogen*, iar suprafața S este normală la liniile de câmp fluxul câmpului magnetic este: $\Phi_B = B \cdot S$.

b) În cazul în care câmpul magnetic este *omogen*, iar normala $\vec{n}$ la suprafața S face un unghi α cu liniile de câmp, fluxul câmpului magnetic este:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S = B \cdot S \cdot \cos\alpha\,;$$

c) În cazul în care câmpul magnetic este *neomogen*, iar suprafaţa S nu este plană, *fluxul magnetic elementar*, $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{s}$ corespunde unei suprafeţe orientate mici $d\vec{s}$ cu proprietatea că în orice punct al acesteia $\vec{B} = \text{const}$.

Fluxul total (integral): $\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S B ds \cos\alpha$.

d) Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafaţă închisă:

$$\Phi_B = \oint\!\!\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint\!\!\oint_S B ds \cos\alpha$$

Unitatea de măsură a fluxului magnetic în S.I. se numeşte *weber*, cu simbolul Wb:

$$1\text{Wb} = 1\text{T}\, 1\text{m}^2.$$

3.1.6. Legea lui Gauss pentru câmpul magnetic

a) Forma integrală a legii lui Gauss.

Câmpul magnetic, spre deosebire de câmpul electrostatic, *se caracterizează prin linii de câmp închise.* Cu alte cuvinte, orice linie de câmp magnetic, care intră într-o suprafaţă închisă S, trebuie să iasă din aceasta, ceea ce înseamnă că fluxul Φ_B al inducţiei câmpului magnetic prin suprafaţa S închisă este egal cu zero.

Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafaţă închisă este nul.

$$\Phi_B = \oint\!\!\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Observaţie: Legea lui Gauss este satisfăcută şi de câmpurile magnetice variabile în timp, (nu numai de cele statice) precum şi de cele neomogene (nu numai de cele omogene). Această lege argumentează inexistenţa monopolilor magnetici.

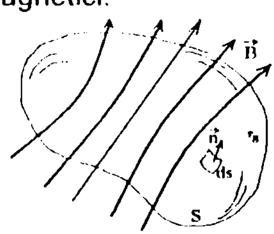


Fig. 3.2

b) Forma diferenţială a legii lui Gauss.

Pentru a se obţine legea lui Gauss sub această formă se aplică teorema Gauss-Ostrogradski : $\oiint\limits_{S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint\limits_{V_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot d\tau$, care împreună cu relaţia anterioară: $\Phi_B = \oiint\limits_{S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$, conduce la: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$. Aceasta reprezintă *forma diferenţială a legii lui Gauss.* Aici, ds este elementul de arie de pe suprafaţa S, iar dτ este elementul de volum din volumul τ_S delimitat de suprafaţa închisă S. Elementul de arie ds se consideră a avea orientare şi se reliefează acest lucru printr-un versor orientat $\vec{n}$ normal pe elementul de arie, astfel că: $d\vec{s} = \vec{n} \cdot ds$ (v. fig.3.2). Nabla, $\vec{\nabla}$, reprezintă un operator denumit *divergenţă* şi care se mai notează cu *div.* Aplicat unui vector, cum este vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$, rezultatul este un scalar (un număr) fapt sugerat de modul de scriere analog produsului scalar: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv \mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{scalar}$.

c) Consecinţă a legii lui Gauss:

Lemă: *Fie (S') o suprafaţa arbitrară ce se sprijină pe curba (C) care închide o suprafaţă (S). Atunci, în valoare absolută:* $\Phi_{S'}^{\vec{B}} = \Phi_S^{\vec{B}}$.

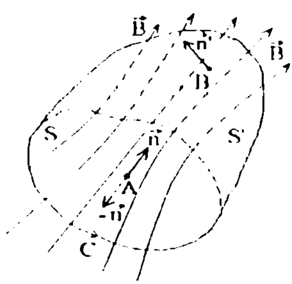


Fig.3.3

Demonstraţie: Fie suprafaţa S arbitrară mărginită de curba închisă (C). Pe această curbă se sprijină o suprafaţă arbitrară S', astfel încât reuniunea S ∪ S' = Σ reprezintă o suprafaţă închisă ce delimitează un volum τ_Σ. După regula burghiului drept, asociem suprafeţei S versorul $\vec{n}$ într-un punct oarecare A şi îndreptat în sus.

Versorul $\vec{n}'$ într-un punct oarecare B al suprafeţei S' va fi orientat după regula burghiului drept spre exteriorul suprafeţei S'.

Convenţie referitoare la normala (versorul) dusă într-un punct arbitrar la o suprafaţă închisă: Normala într-un punct oarecare aparţinând la o suprafaţă închisă este orientată întotdeauna spre regiunea pozitivă a suprafeţei, adică spre exteriorul ei.

În cazul problemei de faţă, versorul dus în punctul A care respectă această convenţie va fi orientat în sens opus lui $\vec{n}$, adică: $-\vec{n}$. Pentru a arăta că fluxul câmpului magnetic prin (S) este egal cu fluxul câmpului magnetic prin (S'), scriem teorema lui Gauss pentru magnetostatică, relativ la suprafaţa închisă Σ:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \quad d\vec{s} \in \Sigma.$$

Deoarece $\Sigma = S \cup S'$, rezultă: $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s}\,' = 0$, unde $d\vec{s} \in S$, $d\vec{s}\,' \in S'$, $d\vec{s} = ds \cdot (-\vec{n})$. Prin urmare: $-\iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s}\,' = 0$.

Cu alte cuvinte: $\Phi_{S'}^{\vec{B}} = \Phi_{S}^{\vec{B}}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

3.2. Acţiunea câmpului magnetic asupra curentului electric

3.2.1. Vectorul element de curent

Fie o porţiune de lungime dl dintr-un conductor subţire, atât de mică încât sarcina totală dQ a purtătorilor de curent din interiorul lui poate fi considerată punctiformă.

Definiţie: *Dacă intensitatea curentului electric prin conductor este I, atunci elementul de curent se defineşte prin vectorul* $I d\vec{l}$, *având modulul egal cu produsul dintre intensitatea curentului I şi lungimea dl a porţiunii de conductor. Sensul vectorului este, prin convenţie, acelaşi cu sensul curentului I în conductor.*

3.2.2. Legea lui Laplace

a) Forma diferenţială a forţei magnetice (legii lui Laplace) ce acţionează asupra unui element de curent.

Fie un conductor parcurs de un curent I, pe care definim un element de curent $I d\vec{l}$. Presupunem că conductorul se află într-un câmp magnetic omogen de inducţie $\vec{B}$ (v. fig.3.4).

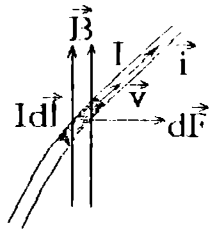


Fig.3.4

Expresia forței elementare $d\vec{F}$ cu care acționează câmpul magnetic omogen de inducție $\vec{B}$ asupra sarcinii dQ conținută în elementul de curent $Id\vec{l}$, în conformitate cu relația lui Lorentz este:

$$d\vec{F} = dQ \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

unde $\vec{v}$ reprezintă viteza în curent a purtătorilor de sarcină din conductor. Dacă aria secțiunii transversale a conductorului este S, sarcina unui purtător de curent q, iar concentrația lor este n, atunci sarcina totală din elementul de curent este dQ = n · qS dl. Se poate scrie succesiv:

$$d\vec{F} = n \cdot q \cdot S \cdot dl \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right).$$

Deoarece viteza $\vec{v}$ a electronilor este în lungul conductorului deci de-a lungul elementului de lungime dl, putem scrie

$dl \cdot \vec{v} = dl \cdot \left(v \cdot \vec{i}\right) = v \cdot \left(dl \cdot \vec{i}\right) = v \cdot d\vec{l}$ unde $\vec{i}$ reprezintă versorul lui $d\vec{l}$.

$$d\vec{F} = dQ \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right),\ I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = Idt\ ;\ \ d\vec{F} = Idt\left(\vec{v} \times \vec{B}\right);$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt};\ \ d\vec{l} = \vec{v}dt\ ;\ \ d\vec{F} = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$$

În concluzie, putem formula *legea (forța) lui Laplace sub forma diferențială:*

Legea lui Laplace*: Asupra elementului de curent* $Id\vec{l}$ *aflat în câmpul magnetic omogen* $\vec{B}$, *acționează forța elementară* $d\vec{F} = I \cdot \left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)$. *Aceasta este dirijată perpendicular pe planul format de vectorii* $Id\vec{l}$ *și* $\vec{B}$, *iar sensul forței* $d\vec{F}$ *este același cu al produsului vectorial* $d\vec{l} \times \vec{B}$.

Cazuri particulare:

Dacă elementul de curent $I d\vec{l}$ este paralel cu vectorul $\vec{B}$, atunci $\left|d\vec{l} \times \vec{B}\right| = dl \cdot B \cdot \sin 0^{\circ} = 0$ şi, deci, forţa magnetică $d\vec{F}$ este zero.

Dacă $I d\vec{l}$ este perpendicular pe $\vec{B}$, atunci:
$\left|d\vec{l} \times \vec{B}\right| = dl \cdot B = \max$ şi deci forţa dF este maximă, $dF = I \cdot dl \cdot B$.

b) Forma integrală a forţei magnetice (legii lui Laplace) ce acţionează asupra unui curent liniar finit de lungime L

Fie un conductor rectiliniu de lungime L parcurs de un curent electric de intensitate I=const. şi care se află într-un câmp magnetic omogen de inducţie magnetică $\vec{B} = \overrightarrow{const}$. Pentru a obţine expresia forţei magnetice ce acţionează asupra întregului conductor trebuie efectuată suma vectorială (integrala) a tuturor forţelor elementare:

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{F} = \int_0^L d\vec{F} = I\int_0^L d\vec{l} \times \vec{B}.$$

În continuare să scriem vectorul $d\vec{l} \times \vec{B}$ prin versorul său $\vec{n}$, în care α este unghiul dintre vectorul $\vec{B}$ şi conductorul aflat în câmp magnetic:

$$d\vec{l} \times \vec{B} = \left|d\vec{l} \times \vec{B}\right| \cdot \vec{n} = dl \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot \vec{n}$$

Rezultă: $\vec{F} = I \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot \vec{n} \int_0^L dl = I \cdot B \cdot L \cdot \sin\alpha \cdot \vec{n} = I \cdot \left(\vec{L} \times \vec{B}\right)$.

$\vec{F} = I\left(\vec{L} \times \vec{B}\right)$ reprezintă *forma integrală a legii (forţei) lui Laplace* pentru un curent liniar de lungime L (legea lui Laplace).

Modulul forţei Laplace: F = I L B sinα.

Direcţia forţei Laplace este perpendiculara pe planul format de vectorii $\vec{L}$ şi $\vec{B}$.

Sensul este dat de regula burghiului drept (v. fig.3.5.a).

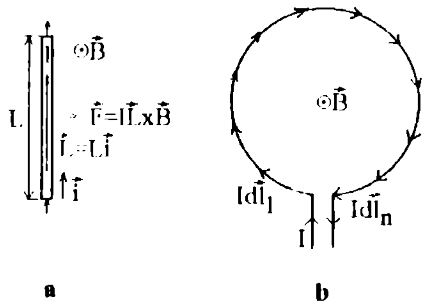


Fig.3.5

c) Aplicaţie la legea lui Laplace: Forţa magnetică Laplace ce acţionează asupra unui curent închis aflat în câmp magnetic omogen de inducţie constantă

Împărţim conductorul închis în elemente de curent $I d\vec{l}_i$, I = 1, 2, ..., n asupra cărora vor acţiona forţele magnetice elementare $d\vec{F}_i$ a căror rezultantă vectorială este:

$$\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + ... + d\vec{F}_n = I d\vec{l}_1 \times \vec{B} + I d\vec{l}_2 \times \vec{B} + ... + I d\vec{l}_n \times \vec{B}$$

Deci:

$$\vec{F} = I\left(d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2 + ... + d\vec{l}_n\right) \times \vec{B}.$$

Deoarece suma $d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2 + ... + d\vec{l}_n = 0$ (Rezultanta a n vectori care formează o linie poligonală închisă este zero), rezultă $\vec{F} = 0$ (v. fig3.5.b).

Concluzie: *Forţa magnetică ce acţionează asupra unui circuit închis aflat în câmp magnetic omogen este nulă.*

3.2.3. Câmpul magnetic al unei sarcini electrice punctiforme aflate în mişcare

Fie un punct P, aflat la momentul t la distanţa instantanee $\vec{r}(t)$ de sarcina q, aflată în mişcare cu viteza $\vec{v}(t)$, care generează câmpul magnetic $\vec{B}(t)$ (v. fig.3.6).

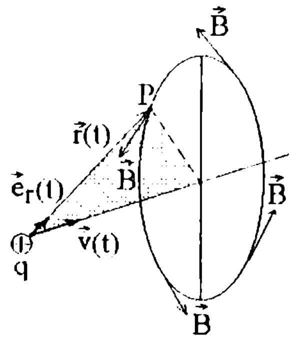


Fig.3.6

Fie $\vec{e}_r(t)$ versorul vectorului de poziţie $\vec{r}(t)$, dus de la sarcina q la punctul P. Expresia vectorului inducţie magnetică $\vec{B}(t)$ ce caracterizează câmpul magnetic al sarcinii punctiforme q, în punctul P, are forma următoare (fără demonstraţie):

$$\boxed{\vec{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{e}_r}{[r(t)]^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{[r(t)]^3}}, \quad (*)$$

unde $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$.

***Concluzie**: Inducţia câmpului magnetic $\vec{B}$ generat de o sarcină punctiformă q, mobilă într-un punct oarecare P este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{e}_r$ şi este orientat în sensul vectorului produs vectorial $\vec{v} \times \vec{e}_r$.*

3.2.4. Legea lui Biot-Savart-Laplace

a) Forma diferenţială a legii lui Biot-Savart-Laplace

Această lege exprimă inducţia câmpului magnetic generat de un element de curent. Fie un conductor de o formă oarecare parcurs de un curent electric de intensitate I. Fie elementul de curent $Id\vec{l}$ aparţinând conductorului şi P un punct arbitrar din spaţiu. Dacă r(t) este distanţa la un moment dat de la elementul de curent la punctul P şi $\vec{e}_r(t)$ este versorul vectorului de poziţie $\vec{r}(t)$, atunci vectorul inducţie a câmpului magnetic elementar, $d\vec{B}$, generat de elementul de curent $Id\vec{l}$ în punctul P are expresia următoare:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

(Legea Biot-Savart-Laplace)

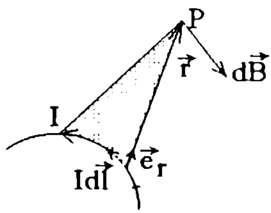


Fig.3.7

Demonstraţie: Din relaţia (*) de mai sus rezultă:

$$d\vec{B} = k \cdot dq \frac{\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \cdot I \cdot dt \frac{\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \cdot I \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \cdot I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

unde dq este sarcina electrică cuprinsă în elementul dl, iar $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$.

Această lege furnizează valoarea şi orientarea vectorului $d\vec{B}$ (inducţia câmpului magnetic elementar) generat de elementul de curent $Id\vec{l}$, într-un punct P situat la distanţa r = r(t) de elementul de curent. Acesta este perpendicular pe planul format de vectorii $d\vec{l}$ şi versorul $\vec{e}_r$ al vectorului de poziţie corespunzător punctului P. Sensul lui $d\vec{B}$ este dat de regula burghiului.

b) Forma integrală a legii lui Biot-Savart-Laplace

Fie un conductor oarecare de lungime finită L, parcurs de un curent electric de intensitate I. Câmpul magnetic de inducţie $\vec{B}$ creat de conductor în punctul P arbitrar din spaţiu se obţine prin integrarea relaţiei anterioare. Prin urmare, *forma integrală a legii Biot-Savart-Laplace* are următoarea expresie:

$$\vec{B} = \int_0^L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Integrala se extinde asupra întregii lungimi, L, a conductorului. Orientarea lui $\vec{B}$ în punctul P depinde de forma conductorului şi coincide cu orientarea rezultantei tuturor vectorilor elementari $d\vec{B}$ generaţi de elementele de curent din care este constituit conductorul.

c) Aplicaţii ale legii lui Biot-Savart-Laplace.

- **Inducţia magnetică produsă de o spiră circulară de rază R în centrul acesteia.**

Fie o spiră conductoare de rază R parcursă de un curent electric de intensitate constantă, I.

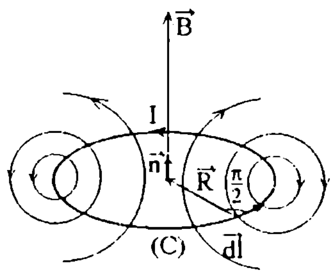


Fig.3.8

Aplicăm legea lui Biot-Savart-Laplace sub formă integrală:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$d\vec{l} \times \vec{R} = \left|d\vec{l} \times \vec{R}\right| \cdot \vec{n}$, unde $\vec{n}$ este versorul normal la planul spirei,

$$\left|d\vec{l} \times \vec{R}\right| = dl \cdot R \cdot \sin\frac{\pi}{2} = dl \cdot R \text{, deci:}$$

$$\vec{B} = \vec{n} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot \oint_C dl = \vec{n} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \vec{n} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Prin urmare, inducţia câmpului magnetic în centrul spirei de rază R este direct proporţională cu intensitatea curentului prin spiră şi invers proporţională cu raza acesteia. Sensul câmpului $\vec{B}$ este dat de regula burghiului drept, iar direcţia este dată de normala la planul spirei.

- **Inducţia magnetică produsă de un fir liniar, infinit de lung, parcurs de un curent I constant, într-un punct exterior lui.**

Fie un conductor rectiliniu, infinit de lung, parcurs de un curent electric constant de intensitate I şi un punct P situat la distanţa b faţă de conductor (v. fig.3.9). Să calculăm inducţia magnetică în punctu P.

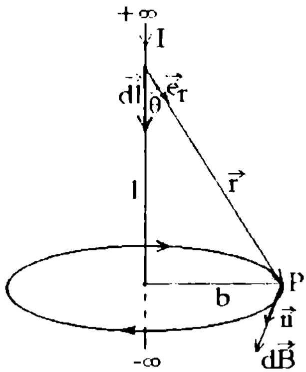


Fig.3.9

Utilizând formula Biot-Savart-Laplace rezultă următoarele:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (^{**}), \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\left| d\vec{l} \times \vec{e}_r \right|}{r^2} \cdot \vec{n},$$

unde $d\vec{l} \times \vec{e}_r = \left| d\vec{l} \times \vec{e}_r \right| \cdot \vec{n}$, iar $\vec{n}$ este versorul vectorului $d\vec{l} \times \vec{e}_r$.

Deoarece $\left| d\vec{l} \times \vec{e}_r \right| = dl \cdot \sin\theta$ şi $tg\theta = b/l$, $l = b/tg\theta = b(\cos\theta)/(\sin\theta)$ rezultă: $dl = -b(d\theta)/(\sin^2\theta)$. Pe de altă parte, din figura 3.9 rezultă că $r^2 = l^2 + b^2 = b^2/\sin^2\theta$. Deci din (**) rezultă:

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cdot \vec{n}}{4\pi b} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \vec{n} \cdot \cos\theta \Big|_0^{\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \cdot \vec{n}$$

(la "+∞" unghiul $\theta=\pi$, iar la "-∞" unghiul $\theta=0$), deci: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \cdot \vec{n}$.

Modulul inducţiei câmpului magnetic este, prin urmare, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$, direcţia este dată de tangenta în punctul P la linia de câmp magnetic care trece prin P, iar sensul se stabileşte cu regula burghiului drept.

Concluzie: Inducţia câmpului magnetic al curentului liniar, infinit de lung, într-un punct din spaţiu este direct proporţională cu intensitatea curentului electric şi invers proporţională cu distanţa de la axa conductorului la punctul considerat.

Liniile câmpului magnetic al curentului rectiliniu, infinit de lung, sunt cercuri concentrice în plane perpendiculare la conductor şi centrate pe axa conductorului.

Sensul liniei de câmp este dat de regula burghiului drept: se roteşte burghiul astfel încât acesta să avanseze în sensul curentului din conductor. Sensul de rotaţie al mânerului burghiului dă sensul liniei de câmp magnetic.

3.2.5. Legea lui Ampère din electromagnetism

a) Prima formă integrală a legii lui Ampère.

Legea lui Ampère reprezintă una din legile fundamentale ale electromagnetismului.

Fie un conductor infinit, rectiliniu, parcurs de un curent de intensitate I. Acest curent creează în jurul conductorului un câmp magnetic ale cărui linii sunt cercuri concentrice şi este caracterizat în fiecare punct de vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$ tangent la linia de câmp. Legea lui Ampère are următoarea formă matematică:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0, & \text{daca conturul C nu incercuieste curentul I} \\ \mu_0 I, & \text{daca conturul C incercuieste curentul I} \end{cases} \qquad (***)$$

unde $\mathcal{E}$ (tensiunea magnetomotoare) reprezintă circulaţia vectorului inducţie magnetică a unui câmp staţionar $\vec{B}$, pe un contur C închis din spaţiu.

Demonstraţie:

α) Conturul de integrare C nu încercuieşte curentul I.

Fie un contur de integrare particular *abcda* închis, în câmpul magnetic produs de curentul electric I, care intră în pagină normal pe aceasta (v. fig.3.10). Descompunem, în continuare, integrala pe conturul închis C în patru inegrale:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{\overset{\frown}{ab}} \vec{B}\cdot d\vec{l}_1 + \int_{\overset{\frown}{bc}} \vec{B}\cdot d\vec{l}_2 + \int_{\overset{\frown}{cd}} \vec{B}\cdot d\vec{l}_3 + \int_{\overset{\frown}{da}} \vec{B}\cdot d\vec{l}_4$$

Deoarece pe punctele segmentelor *ab* şi *cd* ale conturului este îndeplinită condiţia $\vec{B}\perp d\vec{l}_1$ şi $\vec{B}\perp d\vec{l}_3$ rezultă $\vec{B}\cdot d\vec{l}_1 = B\cdot dl_1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$, respectiv $\vec{B}\cdot d\vec{l}_3 = B\cdot dl_3\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (v. fig.3.10).

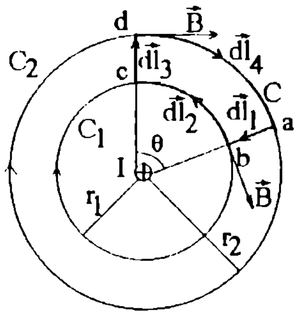


Fig.3.10

Deci, $\int\limits_{\widehat{ab}}\vec{B}\cdot d\vec{l}_1 = \int\limits_{\widehat{cd}}\vec{B}\cdot d\vec{l}_3 = 0$. Pe arcul de cerc *bc* vectorii $\vec{B}$ şi $d\vec{l}_2$ sunt antiparaleli, $\vec{B}\cdot d\vec{l}_2 = B\cdot dl_2\cos\pi = -B\cdot dl_2$, iar $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$ (a se vedea punctul (c) din subcapitolul 3.24).

Deci, $\int\limits_{\widehat{bc}}\vec{B}\cdot d\vec{l}_2 = -\int\limits_{\widehat{bc}}B\cdot dl_2 = -B\int\limits_{\widehat{bc}}dl_2 = -Bl_2 = -Br_1\theta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\theta$,

unde l_2 reprezintă lungimea arcului *bc*, iar θ unghiul la centru.

Pe arcul de cerc *da* vectorii $\vec{B}$ şi $d\vec{l}_4$ sunt paraleli, $\vec{B}\cdot d\vec{l}_4 = Bdl_4\cos 0 = Bdl_4$, iar $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$.

Deci, $\int\limits_{\widehat{da}}\vec{B}\cdot d\vec{l}_4 = \int\limits_{\widehat{da}}B\cdot dl_4 = B\int\limits_{\widehat{da}}dl_4 = B\cdot l_4 = B\cdot r_2\cdot\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\theta$, unde l_4 reprezintă lungimea arcului de cerc *da*. Rezultă că:

$$\oint\limits_{C}\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0.$$

β) Conturul de integrare încercuieşte curentul I.

Cel mai simplu contur care încercuieşte curentul este un cerc de rază $r_2 = r$ (o linie de câmp) C_2 (v. fig.3.10). Deoarece $\vec{B}$ este tangent în orice punct al cercului putem scrie:

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_2} B \cdot dl \cdot \cos 0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \oint_{C_2} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie:

1) Deoarece orice curbă din planul normal la curent poate fi descompusă într-o infinitate de *drumuri radiale* şi de *arce de cerc*, relaţia (***) este adevărată *indiferent de forma conturului* (chiar dacă conturul este o curbă care nu este plană).

2) Dacă conturul de integrare C încercuieşte mai mulţi curenţi de direcţie şi sens diferite, atunci în relaţia (***) intră *suma algebrică* a acestor curenţi $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$, iar legea lui Ampère se enunţă astfel:

Circulaţia vectorului inducţiei magnetice pe un contur închis este egală cu produsul dintre constanta universală μ_0 şi suma algebrică a curenţilor electrici încercuiţi de conturul de integrare C.

$$\mathcal{C} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k$$

şi $\mathcal{C}=0$

dacă conturul C nu încercuieşte curenţii.

Constanta universală μ_0 se numeşte *permeabilitatea magnetică a vidului* şi are valoarea următoare: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

b) A doua formă integrală a legii lui Ampère.

Dacă conductorul este masic şi printr-o suprafaţă S arbitrară din acesta circulă un curent variabil I a cărui intensitate este dată în funcţie de densitatea de curent $j = j(x, y, z)$, $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$, atunci rezultă *legea lui Ampère sub forma integrală:*

Circulaţia vectorului inducţie magnetică $\vec{B}$ pe curba închisă C, care înconjoară curentul I, este egală cu produsul dintre permeabilitatea magnetică a vidului, μ_0, şi fluxul vectorului densitate de curent $\vec{j}$ calculat pe o suprafaţă S_c arbitrară care se sprijină pe conturul de integrare C.

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

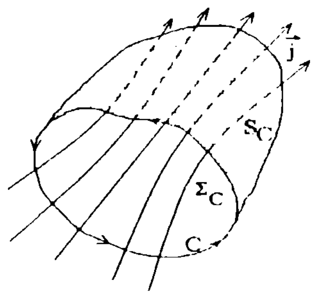


Fig. 3.11

Suprafaţa S_C, străbătută de distribuţia cuntinuă de curent de densitate $\vec{j}(x,y,z)$, pe care se calculează integrala din membrul drept, are o formă arbitrară şi se sprijină pe conturul închis de integrare (curba C). Această suprafaţă este diferită de cea mărginită (subântinsă) de curba C şi notată în figura 3.11 cu Σ_c.

c) Forma diferenţială a legii lui Ampère.

Pentru a obţine legea lui Ampère sub *formă diferenţială* sau *locală* se va aplica teorema lui Stokes, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s}$, în relaţia anterioară (a doua formă integrală a legii lui Ampère):

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s}, \text{ de unde:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

unde *nabla*, $\vec{\nabla}$, reprezintă operatorul *rotor* care se aplică unei mărimi fizice vectoriale reprezentată aici prin vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$ şi care se mai notează cu *rot*. Aplicat unui vector, operatorul rotor este tot un vector, fapt sugerat de modul de scriere analog produsului vectorial:

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \overrightarrow{\text{vector}}$. S_C reprezintă suprafaţa S pe care se calculeazază integrala anterioară şi care se "sprijină" pe conturul închis de formă oarecare C.

Din cele două relaţii rezultă *legea lui Ampère sub forma diferenţială:*

Rotorul vectorului inducţie magnetică este proporţional cu vectorul densitatea de curent $\vec{j}$***, având aceeaşi orientare cu aceasta:*** $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Aceasta este cea mai simplă şi cea mai generală expresie care leagă inducţia câmpului magnetic ($\vec{B}$) de purtătorii de sarcină în mişcare ($\vec{j}$), care constituie sursele lui.

3.3. Fenomene electromagnetice variabile în timp

3.3.1. Legea inducţiei lui Faraday

a) Constatări experimentale.

Se apropie polul nord al unui magnet de o spiră conductoare închisă. În circuit apare un curent indus I_i, pus în evidenţă de un galvanometru G, inclus în circuit. Vectorii inducţie magnetică al magnetului şi al curentului indus sunt ilustrate prin linii de câmp, iar sensul curentului indus printr-o săgeată. Curentul I_i dispare când magnetul nu se mai deplasează.

Se îndepărtează de spiră polul nord al magnetului. În spiră apare un curent electric indus I_i de sens opus celui de la experimentul anterior. Acul galvanometrului va devia în direcţie opusă.

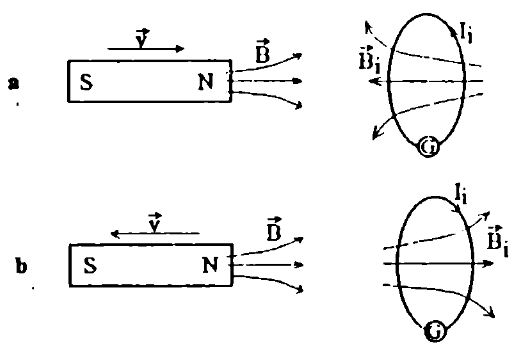


Fig. 3.12

Experienţelor anterioare le este caracteristic faptul că are loc o variaţie a fluxului câmpului magnetic ce străbate suprafaţa mărginită de spiră. În primul experiment, fluxul creşte, iar în al doilea, fluxul scade.

Concluzia lui Faraday:

Într-un circuit conductor închis se induce un curent ori de câte ori variază fluxul câmpului magnetic prin suprafaţa mărginită de conturul circuitului.

Definiţia 1: *Curentul electric generat (excitat) de câmpul magnetic, într-un circuit închis fără sursă, se numeşte curent de inducţie, iar fenomenul de producere a curentului electric cu ajutorul câmpului magnetic se numeşte inducţie electromagnetică.*

Definiţia 2: *Tensiunea electromotoare (t.e.m.), $\mathcal{E}_i$, care determină existenţa curentului electric indus I_i se numeşte tensiune electromotoare indusă.*

b) Legea inducţiei a lui Faraday pentru un circuit.

α) Prima formă diferenţială a legii lui Faraday.

Enunţul legii inducţiei lui Faraday este următorul:

Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variaţie a fluxului câmpului magnetic, luată cu semn schimbat

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = -\dot{\Phi}(t)$$

Această lege este universal valabilă. O altă formulare posibilă poate fi şi următoarea:

Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu derivata fluxului câmpului magnetic în raport cu timpul luată cu semn schimbat.

Demonstaţie: În cele ce urmează este prezentată demonstraţia legii lui Faraday sub formă diferenţială.

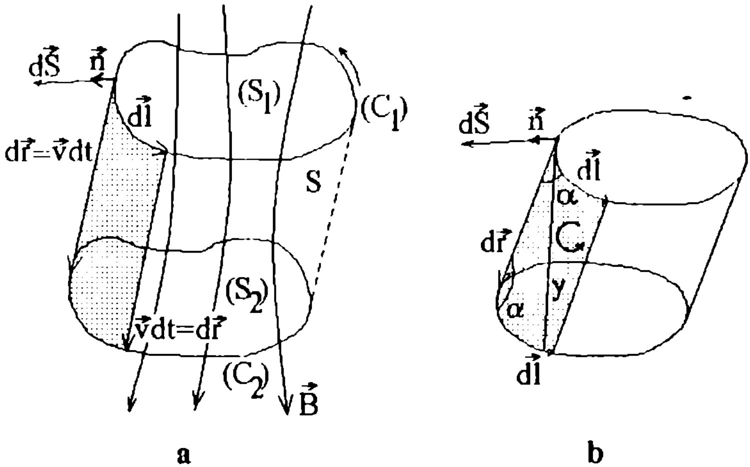


Fig. 3.13

Presupunem un câmp magnetic $\vec{B}$ neomogen şi constant în timp (adică, sursele care îl generează sunt staţionare). Considerăm că circuitul C de formă oarecare din figura 3.13.a se deplasează din poziţia (C_1) în poziţia (C_2) în intervalul de timp dt. Un element oarecare $d\vec{l}$ din conturul (C_1) se va deplasa în intervalul de timp dt cu viteza $\vec{v}$, parcurgând distanţa $d\vec{r}$. Fie (S_1) suprafaţa mărginită de conturul (C_1), iar (S_2) suprafaţa mărginită de conturul (C_2).

Fluxul inducţiei câmpului magnetic prin suprafaţa (S_1), la momentul de timp t, este:

$$\Phi(t) = \iint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{s}\,,\quad ds \in S_1.$$

În virtutea lemei demonstrată în subcapitolul 3.1.6.c putem scrie următoarele (v. fig.3.13.a):

$$\iint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \iint_{S\cup S_1} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \iint_{S} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \iint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{s}\,,$$

unde $\Sigma = S_1 \cup S$, suprafaţa Σ sprijinindu-se pe S_2. Deci, putem scrie:

$$\Phi(t+dt) \equiv \iint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \Phi(t) + \iint_{S} \vec{B}\cdot d\vec{s}\,,$$

unde $\Phi(t+dt)-\Phi(t)=d\Phi$ reprezintă *variația elementară* a fluxului magnetic în timpul dt. Elementul de arie $d\vec{s}\in S$. Deoarece (v.fig.3.13.b):

$$d\vec{s}=ds\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot dl\cdot dr\cdot\sin\alpha=\vec{n}\cdot dl\cdot v\cdot dt\cdot\sin\alpha,$$

$$d\vec{s}\equiv\vec{n}\left|\vec{v}\cdot dt\times d\vec{l}\right|=\vec{n}\left|\vec{v}\times d\vec{l}\right|dt=\left(\vec{v}\times d\vec{l}\right)dt,$$

relația scrisă anterior devine:

$$\iint_S\vec{B}\cdot d\vec{s}=dt\oint_{C_1}\left(\vec{v}\times d\vec{l}\right)\cdot\vec{B}=-dt\oint_{C_1}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)d\vec{l}=-dt\oint_{C_1}\vec{E}_i\cdot d\vec{l},$$

unde s-a folosit în ultima egalitate următoarea proprietate a produsului mixt:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right).$$

Datorită deplasării elementului de circuit $d\vec{l}$ în câmp magnetic de inducție $\vec{B}$ cu viteza $\vec{v}$, asupra sarcinilor electrice conținute în acest element de circuit acționează o forță Lorentz $\vec{F}_L=e\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$.

Având în vedere că tensiunea electromotoare (t.e.m.) este definită prin circulația forței ce acționează asupra unității de sarcină $\vec{E}_i=\dfrac{\vec{F}_L}{|e|}=-\vec{v}\times\vec{B}$, unde $\vec{E}_i$ reprezintă câmpul electric indus în circuit, rezultă:

$$\iint_S\vec{B}\cdot d\vec{s}=-dt\oint_{C_1}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-dt\cdot\mathcal{E}_i,$$

unde $\mathcal{E}_i$ este t.e.m. indusă în circuitul (C_1): $\mathcal{E}_i=\oint_{C_1}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}$, $\vec{E}_i$ este câmpul electric indus. Prin urmare: $d\Phi=\iint_S\vec{B}\cdot d\vec{s}=-dt\cdot\mathcal{E}_i$.

În consecință:

$$\boxed{\mathcal{E}_i=-\frac{d\Phi}{dt}}.$$

Am demonstrat astfel că tensiunea indusă într-un circuit aflat în mișcare este egală cu viteza de variație a fluxului câmpului magnetic printr-o suprafață mărginită de circuitul considerat. Acest enunț constituie *legea inducției a lui Faraday* sub formă diferențială sau locală. Legea lui Lenz explică existența semnului minus din legea lui Faraday.

***Legea lui Lenz**: Sensul curentului electric indus, I_i, este în aşa fel, încât inducţia câmpului magnetic propriu, $\vec{B}_i$, tinde să anihileze variaţia fluxului magnetic care produce curentul I_i.*

O altă formulare posibilă ar putea fi şi următoarea:

Curentul electric indus are sensul în care câmpul magnetic generat de el se opune variaţiei câmpului magnetic inductor.

β) Forma integrală a legii lui Faraday.

Fie un circuit închis format dintr-o spiră conductoare, care se află în repaus şi de care se apropie (sau se depărtează) polul nord al unui magnet permanent. În spiră apare o mişcare ordonată a electronilor (curent indus), având drept cauză un câmp electric indus $\vec{E}_i$ a cărui apariţie este determinată în virtutea legii lui Faraday de variaţia fluxului câmpului magnetic.

Tensiunea electromotoare (t.e.m.) indusă $\mathcal{E}_i$ în circuit este:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Pe de altă parte, expresia t.e.m. de-a lungul circuitului închis C are expresia: $\mathcal{E}_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ = circulaţia vectorului câmp electric indus $\vec{E}_i$ de-a lungul spirei conductoare. Din punct de vedere fizic $\mathcal{E}_i$ reprezintă lucrul efectuat de câmpul electric indus $\vec{E}_i$ pentru deplasarea unităţii de sarcină pozitivă de-a lungul circuitului dat C.

Deoarece $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$, rezultă:

$$\mathcal{E}_i \equiv \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

unde S reprezintă suprafaţa spirei conductoare, iar C este curba care închide această suprafaţă; S este fixă deoarece spira este în repaus prin ipoteză. S-a utilizat aici următoarea teoremă din analiza matematică:

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx = \frac{d\beta}{dt} f[\beta(t),t] - \frac{d\alpha}{dt} f[\alpha(t),t] + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

Dacă limitele de integrare nu depind de variabila timp t, (ca în cazul nostru) atunci:

$$\frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Prin urmare, în acest caz se poate scrie:

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dx = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial f}{\partial t}dx$$

Acest lucru a fost utilizat pentru a scrie forma integrală a legii lui Faraday în cazul în care se consideră S fixă.

Dacă $\vec{B} = \vec{B}(t; x, y, z)$ atunci: $\dfrac{d\vec{B}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Forma integrală a legii lui Faraday este:

$$\boxed{\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{s}}.$$

γ) A doua formă diferenţială a legii lui Faraday.

Forma diferenţială a legii lui Faraday se poate scrie utilizând teorema lui Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

în felul următor:

$$\mathcal{E}_i \equiv \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \mathrm{rot}\vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}, \text{ rezultă } \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.$$

***Observaţie**:* Dacă $\vec{B}$ nu este funcţie numai de timp, t, ci şi de poziţie, (de coordonatele x, y, z) atunci $\dfrac{d\vec{B}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

c) Câmp electric neconservativ. Caracteristici.

***Definiţie**: Vectorul câmp electric,* $\vec{E}_i$, *asociat cu variaţia în timp a vectorului câmp magnetic,* $\vec{B}(t)$, *nu este conservativ deoarece circulaţia sa pe un contur închis nu este nulă,*

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \neq 0 .$$

Un astfel de vector electric, $\vec{E}_i$, se numeşte *indus, imprimat sau electromotor.*

Observaţie: În ecuaţiile lui Maxwell care vor urma în capitolul 4 câmpul electric neconservativ $\vec{E}_i$ va fi notat fără indicele "i" fără ca să existe pericolul confuziei dintre acesta şi câmpul electric de natură electrostatică, notat la fel.

Caracteristici:

- Câmpul magnetic variabil în timp $\vec{B}(t)$ generează câmpul electric neconservativ $\vec{E}_i$, adică: $\mathcal{E}_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \neq 0$.

- Pentru apariţia câmpului electric indus $\vec{E}_i$ la variaţia în timp a câmpului magnetic $\vec{B}(t)$ nu este necesară prezenţa circuitului exterior. Câmpul electric $\vec{E}_i$ apare şi în vid.

- Apariţia curentului indus I_i presupune, spre deosebire de curentul de deplasare, existenţa unui mediu conductor, cu purtători de sarcină capabili să se deplaseze ordonat sub influenţa câmpului electric indus $\vec{E}_i$. În esenţă, t.e.m. ($\mathcal{E}_i$) indusă într-un circuit este rezultatul separării în conductori a sarcinilor de semn opus sub influenţa câmpului electric indus $\vec{E}_i$.

- Liniile câmpului electric indus $\vec{E}_i$ neconservativ sunt curbe închise. Dacă, de exemplu, câmpul magnetic omogen $\vec{B}(t)$ creşte ($\dot{\vec{B}}(t) > 0$) atunci liniile de câmp electric sunt cercuri concentrice în plane normale la liniile câmpului magnetic, care înconjoară liniile acestuia (v. fig.3.14).

- Sensul liniilor câmpului indus este dat de legea (regula) lui Lenz.

- În figurile 3.14.a şi b în care $\vec{B}(t)$ descreşte, respectiv, creşte, este prezentat sensul liniilor de câmp electric indus corespunzător.

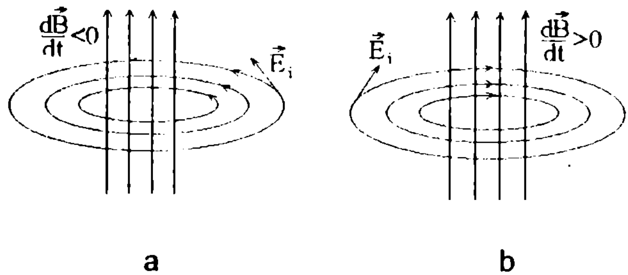


Fig.3.14

3.3.2. Inducţia magnetoelectrică

a) Încărcarea unui condensator. Circuit RC în curent continuu.

Experiment:

Să urmărim modul în care se încarcă condensatorul C între plăcile căruia este vid prin rezistorul R, când în circuit se află sursa de tensiune electromotoare, $\mathcal{E}$. Dacă comutatorul K este inchis, tensiunea electromotoare a sursei creează în circuit un curent electric i(t) variabil, placa superioară a condensatorului încărcându-se pozitiv, iar placa inferioară, negativ (v. fig.3.15).

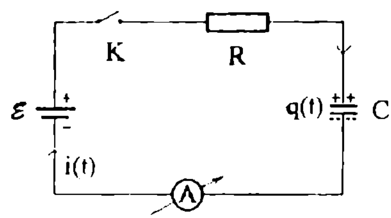


Fig.3.15

Experienţa arată că încărcarea condensatorului nu are loc instantaneu ci într-un timp finit, intensitatea curentului electric i(t) fiind maximă la momentul iniţial t = 0, $i_{(t=0)} = i(0) = I_0$, (momentul când se închide circuitul) şi scade exponenţial apoi către zero după un timp suficient de lung (matematic, $t \to \infty$).

Expresia matematică a curentului i(t) se află astfel: notând cu u_c = q/C diferenţa de potenţial la un moment dat t, de la bornele condensatorului C, legea a 2-a a lui Kirchhoff conduce la ecuaţia

$\mathcal{E}$ - u_c – iR = 0 sau $\mathcal{E}$ = iR + q/C. Mărimile $\mathcal{E}$, R şi C sunt constante, iar i şi q sunt mărimi variabile în timp. La momentul t=0, la închiderea comutatorului, condensatorul este considerat complet descărcat, adică $u_C(0) = 0$ şi singura tensiune în circuit este tensiunea electromotoare $\mathcal{E}$ a sursei. Deci, intensitatea iniţială a curentului, i(0) = I_o este dată de ecuaţia $\mathcal{E} = u_C(0) + i(0) \cdot R = i(0) \cdot R = I_o R$, de unde rezultă $I_o = \mathcal{E}/R$. Derivând ecuaţia $\mathcal{E}$ = iR + q/C în raport cu timpul t şi înlocuind I = dq/dt, rezultă:

$$\frac{di}{dt}R = -\frac{i}{C} \text{ sau } \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}; \ (u_{c(t=0)} = u_c(0) = 0).$$

Integrând acum această ecuaţie între momentele t = 0, când I = I_o şi t > > 0, când intensitatea curentului electric este I, rezultă:

$$\int_{I_o}^{i}\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \ln(i)-\ln(I_o)=-t/RC,$$

de unde:

$$\boxed{i(t) = I_o \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

Concluzie:

La închiderea unui circuit de curent continuu care conţine un rezistor R (de rezistenţă electrică egală cu R) şi un condensator C (de capacitate electrică egală cu C), intensitatea curentului este maximă la momentul iniţial t = 0 şi scade exponenţial către zero când t → ∞.

Să calculăm în continuare variaţia în timp a sarcinii electrice pe condensator. Pentru un interval de timp suficient de mare i(t) scade exponenţial la zero, i(t → ∞) = 0, iar sarcina de pe armătura condensatorului capătă o valoare maximă Q: q(t → ∞) = Q. Aceste două condiţii permit scrierea relaţiei $\mathcal{E}$ = Q/C. Într-adevăr, la un moment de timp, t, oarecare putem scrie: $\mathcal{E} = i(t) \cdot R + q(t)/C$. Pentru t → ∞ această relaţie devine: $\mathcal{E} = i(t \to \infty) \cdot R + q(t \to \infty)/C$ sau $\mathcal{E}$ = Q/C. De unde Q = =$\mathcal{E}$C. Cele două relaţii obţinute $\mathcal{E} = I_o \cdot R$ şi Q = $\mathcal{E}$C vor fi utilizate în continuare la calculul variaţiei în timp a sarcinii electrice pe condensator.

Deoarece, în conformitate cu cele amintite mai sus, $I_o = \mathcal{E}/R$ şi $Q = \mathcal{E}C$, după înlocuirea relaţiei $i(t) = I_o \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ în $\mathcal{E} = i(t) \cdot R + q(t)/C$ se obţine expresia următoare: $\boxed{q(t) = Q\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]}$.

b) Expresia intensităţii câmpului electric între armăturile unui condensator încărcat.

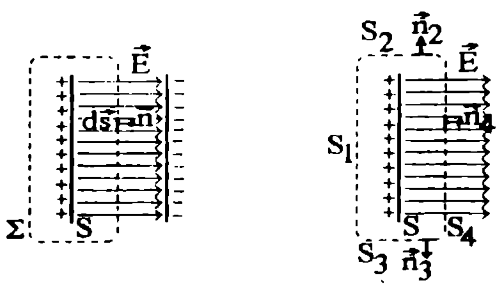
În continuare, utilizăm legea lui Gauss, $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_o}$, pentru a deduce expresia intensităţii câmpului electric, $\vec{E}$, dintre plăcile unui condensator (unde este vid) încărcat electric şi calculăm separat produsul:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = (E \cdot \vec{n}) \cdot (ds \cdot \vec{n}) = E \cdot ds, \text{ E=constant.}$$

Aplicând teorema lui Gauss de mai sus, rezultă succesiv:

$$\oiint_{\Sigma} E \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E \oiint_{\Sigma} ds = E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{q}{S\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}, \text{ unde: } \sigma = \frac{q}{S}.$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}}.$$



a b

Fig.3.16

Observaţie: Urmărind figura 3.16 rezultă:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

unde:

$$\Sigma=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4.$$

Câmpul electric care traversează S_1 este nul, iar $\vec{E}\perp\vec{S}_2$, $\vec{E}\perp\vec{S}_3$, $\vec{E}\parallel\vec{S}_4$. Prin urmare: $\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{s}=0+0+0+E\iint_{S_4}ds=ES_4=ES$, unde S_4=S.

c) Curentul de deplasare.

Întrebare: Cum este posibil trecerea curentului electric continuu printr-un circuit electric întrerupt de un condensator, între armăturile acestuia fiind vid?

Răspuns: Pe măsură ce condensatorul se încarcă, între plăcile lui apare un câmp electric crescător $\vec{E}(t)$. Intensitatea curentului electric dintre armăturile condensatorului poate fi explicată prin variaţia câmpului electric $\vec{E}(t)$ dintre ele.

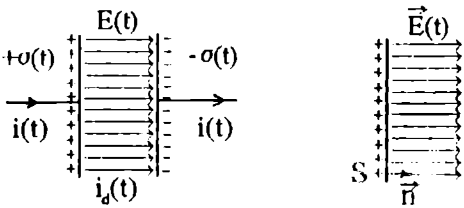


Fig.3.17

$$\vec{S}=\vec{n}S,\ \vec{E}=\vec{n}S,\ \text{deci: } \vec{S}\cdot\vec{E}=SE$$

Într-adevăr, deoarece intensitatea curentului electric i trebuie să fie aceeaşi în toate punctele circuitului neramificat, oricare ar fi t, (v. fig.3.17), rezultă că intensitatea curentului de conducţie i(t) din firele care duc la plăcile condensatorului la orice moment, t, trebuie să fie egală cu intensitatea curentului electric $I_d(t)$ dintre plăcile condensatorului (care nu este de conducţie): $i(t) = I_d(t)$.

Să găsim în continuare expresia lui I_d dintre armături.

Dacă aria unei armături a condensatorului este S şi densitatea instantanee de sarcină superficială este $\sigma(t)$, atunci valoarea instantanee a sarcinii electrice pe fiecare placă este: $q(t)=\sigma(t)\cdot S$. Deoarece vectorii $\vec{S}=S\cdot\vec{n}$ şi $\vec{E}=E\cdot\vec{n}$ au acelaşi versor $\vec{n}$, rezultă: $\vec{S}\cdot\vec{E}=S\cdot E$. Pe de altă parte, având în vedere că expresia intensităţii câmpului electric $\vec{E}$ între plăcile unui condensator este, în modul, E = $=\sigma/\varepsilon_o$ rezultă că $q(t)=\varepsilon_o\cdot\vec{E}(t)\cdot\vec{S}=\varepsilon_o\cdot E(t)\cdot S$. Deoarece intensitatea curentului de conducţie are expresia I = dq/dt şi i(t) = $I_d(t)$ rezultă: $I_d(t)=\varepsilon_o\vec{S}\frac{d\vec{E}(t)}{dt}$. Întrucât se derivează $\vec{E}(t)$ numai în raport cu variabila t şi, în general $\vec{E}(x,y,z;t)$, se înlocuieşte $\frac{d}{dt}$ cu $\frac{\partial}{\partial t}$ (derivata parţială în raport cu t): $I_d=\varepsilon_o\vec{S}\frac{\partial\vec{E}(t)}{\partial t}$.

Acest curent se numeşte *curent de deplasare*, iar intensitatea lui o vom nota în cele ce urmează cu I_d.

Dacă curentul de deplasare este repartizat neuniform pe suprafaţa S, elementului de suprafaţă infinitezimal ds îi revine curentul de deplasare dI_d, iar curentul I_d prin suprafaţa S se obţine prin integrare:

$$I_d=\int_0^{I_d} dI_d=\iint_S \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{s}.$$

Pe de altă parte se ştie că $I_d=\iint_S \vec{j}_d\cdot d\vec{s}$ şi comparând cele două expresii ale lui I_d rezultă expresia densităţii curentului de deplasare în vid $\vec{j}_d$:

$$\boxed{\vec{j}_d(t)=\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}(t)}{\partial t}}.$$

Observaţie: Din expresia curentului de deplasare rezultă că curentul existent între plăcile condensatorului *nu este de conducţie*. Acesta depinde, după cum se cunoaşte, de concentraţia n a purtătorilor de sarcină, de modulul vitezei v şi sarcina q a acestora: I = n · v · q · S. Expresia curentului de deplasare arată, în schimb, că acest curent depinde de viteza de variaţie a intensităţii câmpului electric, $\partial\vec{E}/\partial t$, dintre plăci.

d) Fenomenul de inducţie magnetoelectrică. Legea lui Maxwell.

Curentul de conducţie, i, care circulă prin conductorul care leagă condensatorul de sursa de tensiune electromotoare $\mathcal{E}$ este înconjurat de linii de câmp magnetic, care sunt cercuri concentrice cu centrul pe axul firului şi se află în plane normale la fir (v. fig.3.18).

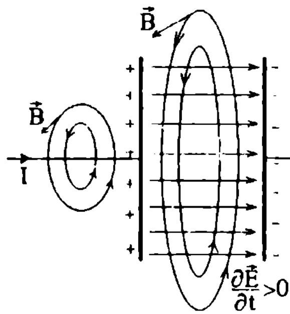


Fig.3.18

Întrebare: Curentul de deplasare I_d nu generează câmp magnetic ca şi curentul de conducţie I?

Răspuns: Curentul de deplsare I_d, al cărui conţinut fizic este câmpul electric variabil în timp, generează un câmp magnetic, asemenea curentului de conducţie i,

$$\boxed{I_d(t) = \varepsilon_o \vec{S} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}}.$$

Definiţie: *Fenomenul de producere a câmpului magnetic, de către un câmp electric variabil în timp se numeşte inducţie magnetoelectrică (m.e.), ce reprezintă fenomenul invers fenomenului de inducţie electromagnetică (e.m.).*

Legea lui Maxwell: *Orice câmp electric* $\vec{E}(t)$ *variabil în timp generează în spaţiul înconjurător un câmp magnetic* $\vec{B}(t)$ *variabil în timp, numit câmp magnetic indus.*

Sensul liniilor câmpului magnetic indus (v. fig.3.19).

Dacă câmpul electric variază crescător, atunci liniile câmpului magnetic indus înconjoară liniile câmpului electric inductor în sensul în care ele înconjoară un curent electric ce are sensul câmpului electric şi invers.

Dacă $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} > 0$, atunci câmpul electric este crescător, iar dacă $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} < 0$, atunci câmpul electric este descrescător.

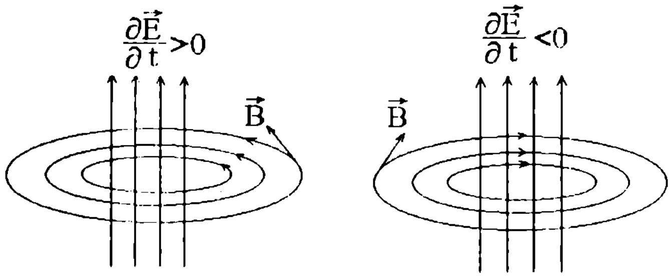


Fig.3.19.

3.4. Câmpul magnetic în materie

Atomii sunt caracterizaţi printr-un moment cinetic total căruia îi este asociat momentul magnetic $\vec{m}$. Valoarea acestor momente poate fi egală cu zero pentru unii atomi. Pe de altă parte, fiecare moment magnetic generează în jurul său un câmp magnetic. În general, dacă substanţa nu este în câmp magnetic, momentele magnetice ale atomilor sunt orientate cu probabilitate egală în toate direcţiile. Ca urmare, câmpul magnetic generat de mulţimea momentelor magnetice ale atomilor dintr-o bucată de material este egal cu zero. Plasând substanţa în câmp magnetic, toţi atomii capătă moment magnetic nenul, asupra căruia câmpul acţionează cu un cuplu de forţe care tinde să orienteze toate momentele magnetice paralel cu direcţia câmpului. Chiar dacă orientarea momentelor nu este perfectă din cauza agitaţiei termice, există o orientare preferenţială în direcţia câmpului. Se spune că în câmp magnetic substanţa se magnetizează şi că substanţa magnetizată generează un câmp magnetic propriu. Substanţa magnetizată se caracterizează prin *vectorul magnetizare* $\vec{M}$.

Vectorul magnetizare $\vec{M}$ se defineşte ca suma vectorială a momentelor magnetice din unitatea de volum a substanţei plasată într-un câmp magnetic exterior. Unitatea de măsură în S.I. prin care se exprimă magnetizarea este A/m.

Întreg materialul poate fi divizat în volume infinitezimale $d\tau$. Dacă substanţa este omogen constituită dintr-un singur tip de atomi având momentele magnetice orientate paralel cu câmpul magnetic exterior atunci: $\vec{M} = n \cdot \vec{m}$, unde n este numărul momentelor magnetice din unitatea de volum. Momentul magnetic elementar al unui element de volum $d\tau$ este:

$$d\vec{M} = n \cdot \vec{m} \cdot d\tau \quad (1).$$

Fiecărui moment magnetic elementar $d\vec{M}$ i se poate asocia o buclă de curent electric de magnetizare astfel încât $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_m$, unde $\vec{j}_m$ reprezintă densitatea curentului de magnetizare din interiorul materialului. În continuare, remarcând simetria ce există între fenomenele electrice din dielectrici şi fenomenele magnetice din materialele magnetizate, se poate calcula câmpul magnetic total într-un material magnetizat.

Considerăm un material de formă cilindrică care este magnetizat de un câmp magnetic exterior de inducţie $\vec{B}_0$ creat de un solenoid bobinat pe cilindru, cu N spire pe unitatea de lungime, iar intensitatea curentului prin spirele lui este $I_{conducţie}$.

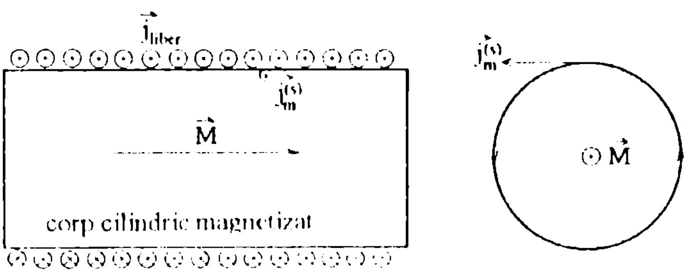


Fig.3.20

Dacă $N\,I_{conducţie}$ reprezintă intensitatea curentului ce revine unităţii de lungime a solenoidului, atunci:

$$B_0 = \mu_0 \cdot N \cdot I_{conductie} \quad (2).$$

Echivalând curentul de magnetizare ce "curge" pe suprafaţa materialului cilindric cu un "solenoid", se exprimă câmpul magnetic creat de acesta, astfel:

$$B_m = \mu_0 I_m^{(s)} = \mu_0 M \quad (3),$$

unde $I_m^{(s)}$ este curentul ce revine unităţii de lungime a solenoidului.

Câmpul total în materialul magnetizat uniform este egal cu suma vectorială a câmpurilor $\vec{B}_0$ creat de solenoidul propriu-zis şi $\vec{B}_m$ creat de "solenoidul" curentului de magnetizare:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} \quad (4).$$

În concluzie, sursele câmpului magnetic total din interiorul unui material magnetizat sunt curenţii de conducţie şi curenţii de magnetizare. Curenţii de conducţie se mai numesc şi *curenţi liberi* şi există un oarecare control asupra lor: pot fi produşi, opriţi, măsuraţi, etc. Spre deosebire de aceştia, curenţii de magnetizare sunt curenţii asociaţi momentelor magnetice sau moleculare, incluzând momentul magnetic intrinsec al particulelor cu spin. Aceşti curenţi sunt denumiţi *curenţi legaţi* sau *curenţi moleculari* şi nu există un control asupra lor.

Densitatea de curent $\vec{j}_m$ este media macroscopică a curenţilor legaţi:

$$\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (5).$$

La o suprafaţă unde $\vec{M}$ este discontinuu, ca marginea materialului magnetizat de formă cilindrică, există o densitate de curent superficial $\vec{j}_m^{(s)}$ care reprezintă tot un curent legat.

În legea lui Ampère prezentată în subcapitolul 3.2.5. s-a avut în vedere numai curenţii liberi, $\vec{j}_{liber}$, deşi nu s-a făcut nici o precizare privind tipul de curent implicat. În cazul mediilor magnetizate trebuie să se înţeleagă prin densitatea de curent $\vec{j}$ o densitate totală:

$$\vec{j} = \vec{j}_{legat} + \vec{j}_{liber} \quad (6),$$

unde:

$$\vec{j}_{liber} = \vec{j}_{conductie},$$

iar

$$\vec{j}_{legat} = \vec{j}_m + \vec{j}_m^{(s)} = \vec{j}_{magnetizare} \quad (7).$$

Deci, în astfel de medii, legea lui Ampère se rescrie:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\left(\vec{j}_{liber} + \vec{j}_{legat}\right) \quad (8).$$

Rotorul se exprimă funcţie de derivatele spaţiale ale lui $\vec{B}$. În consecinţă, ecuaţia (8) nu are sens pentru punctele din spaţiu în care $\vec{B}$ are discontinuităţi, adică pe suprafaţa laterală a cilindrului magnetizat luat în consideraţie. Cum densitatea curentului de magnetizare superficial $\vec{j}_m^{(s)}$ este definit tocmai pe suprafaţa laterală a cilindrului, în ecuaţia (8) nu vom lua $\vec{j}_{legat} = \vec{j}_m^{(s)} + \vec{j}_m$ ci numai $\vec{j}_{legat} = \vec{j}_m$.

Deci: $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{legat}$ (9). Înlocuind (9) în (8) se obţine:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \left(\vec{j}_{liber} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) \quad (10),$$

sau

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{liber} \quad (10').$$

Se poate astfel defini, în fiecare punct din spaţiu, mărimea fizică vectorială *intensitate a câmpului magnetic* ale cărei surse sunt doar curenţii liberi:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \quad (11).$$

Cele două mărimi $\vec{H}$ şi $\vec{M}$ au aceeaşi dimensiune şi se exprimă în aceleaşi unităţi de măsură: A/m.

Astfel, forma diferenţială a legii Ampère se rescrie în funcţie de intensitatea câmpului magnetic:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{liber} \quad (12),$$

iar forma integrală cu teorema lui Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{j}_{liber} \cdot d\vec{s} = I_{liber} \quad (13),$$

unde I_{liber} este intensitatea curentului electric liber încercuit de conturul de integrare C.

Relaţia (11) poate fi rescrisă sub forma următoare:

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \mu_o \vec{M} \quad (11').$$

Comparând (11') cu (4) rezultă că inducţia magnetică în interiorul solenoidului fără miez (plasat în vid) este:

$$\vec{B}_o = \mu_o \vec{H} \quad (14).$$

Materialele pentru care magnetizarea $\vec{M}$ este direct proporţională şi paralelă (sau antiparalelă) cu $\vec{H}$, adică pentru care există numărul real $\chi_m \neq 0$ astfel încât:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad (15)$$

se numesc *materiale magnetice liniare, omogene şi izotrope.*

Constanta de proporţionalitate χ_m se numeşte *susceptibilitate magnetică* şi este o mărime fizică adimensională.
Înlocuind relaţia (15) în (11') se obţine:

$$\vec{B} = \mu_o(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_o\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \qquad (16),$$

unde mărimea fizică adimensională $\mu_r \equiv 1+\chi_m$ se numeşte *permeabilitate magnetică relativă* a materialului (mediului) magnetic, iar $\mu=\mu_o\mu_r$ se numeşte *permeabilitate magnetică absolută* a mediului respectiv.

Pentru materialele liniare, omogene şi izotrope, μ_r este o constantă de material.

Ţinând cont de (16) şi de faptul că densitatea curenţilor liberi este nulă în material, ecuaţia $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (17) se poate scrie astfel:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0 \qquad (18).$$

Ecuaţia (18) este valabilă numai în lipsa curenţilor liberi. În prezenţa acestora $\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\neq 0$ chiar dacă, întotdeauna, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$! Pentru materialele liniare, omogene şi izotrope, din ecuaţiile (17), (18) şi (11) rezultă:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{M}=0 \qquad (19).$$

Acest rezultat poate fi interpretat ca fiind condiţia necesară şi suficientă ca materialul caracterizat de magnetizarea $\vec{M}$ să fie liniar, omogen şi izotrop.

Aşadar, vectorul $\vec{H}$ definit în (11) este corelat cu curentul liber aşa cum $\vec{B}$ este corelat cu curentul total, legat plus cel liber. Paralela nu este totuşi completă, deoarece avem mereu $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, în timp ce $\vec{H}$ nu are în mod necesar divergenţa nulă.

Pentru majoritatea substanţelor magnetice liniare şi izotrope, χ_m<<1. Susceptibilitatea magnetică χ_m poate fi pozitivă sau negativă.

Mediile (materialele) pentru care $\chi_m<0$ se numesc *diamagnetice*, iar cele pentru care $\chi_m>0$ se numesc *paramagnetice.*

Susceptibilitatea materialelor diamagnetice nu depinde de temperatură. Pentru aceste substanţe vectorul magnetizare $\vec{M}$ este orientat antiparalel cu câmpul magnetizator $\vec{B}_0$ ceea ce face ca substanţele diamagnetice să fie respinse din câmpul magnetic. De asemenea, câmpul magnetic total (rezultant) în diamagnetice este mai mic decât câmpul magnetizator $\vec{B}_0$. Pentru aceste substanţe se poate lua mereu $\mu_r = 1$ deoarece $\chi_m \sim -10^{-9}$.

Diamagnetismul este propriu tuturor substanţelor. Cu toate acestea, el se poate manifesta numai în cazul substanţelor ai căror atomi nu posedă moment magnetic permanent. În cazul în care atomii substanţei au moment magnetic permanent, valoarea acestuia este mai mare decât valoarea momentului magnetic indus de câmpul magnetic extern de inducţie $\vec{B}_0$ şi îl maschează pe acesta din urmă.

Susceptibilitatea substanţelor paramagnetice depinde de temperatură invers proporţional după o lege cunoscută sub denumirea de *legea lui Curie:*

$$\chi_m = \frac{C}{T} \qquad (20),$$

unde C e o constantă numită constanta Curie.

Pentru substanţele paramagnetice ordinul de mărime pentru susceptibilitatea magnetică este $\chi_m \sim +10^{-7}$. Deşi aceasta este mai mare de 100 de ori decât susceptibilitatea diamagneticelor şi în acest caz $\chi_m \ll 1$ şi se poate lua $\mu_r \approx 1$.

O altă categorie de materiale sunt cele feromagnetice, care nu sunt liniare, iar unele nu sunt nici izotrope. Aceste substanţe reacţionează la câmpul magnetic extern $\vec{B}_0$ într-un mod specific, cu totul diferit de cel descris în cazul diamagneticelor şi paramagneticelor, valoarea magnetizării fiind mult mai mare. Toate materialele feromagnetice îşi pierd proprietăţile când sunt încălzite peste o anumită temperatură critică, caracteristică fiecărei substanţe, numită temperatura Curie, când se comportă ca materialele paramagnetice. Prin răcire sub punctul Curie ele îşi recapătă proprietăţile feromagnetice.

Nefiind materiale liniare, dependenţa B = B(H) nu este liniară şi este caracteristică fiecărei substanţe în parte.

În feromagnetice poate exista o magnetizare nenulă chiar şi în lipsa câmpului magnetizator $\vec{B}_0$ extern. Pentru aceste substanţe χ_m este mare şi creşte foarte repede cu B_0, iar la valori mari ale acestuia χ_m atinge o valoare de saturaţie constantă. De aceea $\mu_r > 1$.

Pentru caracterizarea câmpului magnetic în materiale magnetice, alături de relaţiile

$$B = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\chi_m\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

este necesară şi impunerea condiţiilor de frontieră la interfaţa dintre diferite medii magnetice.

Considerăm diagrama schematică a frontierei dintre două medii diferite din figura 3.21. Regiunea de frontieră este presupusă că poartă densităţi de curent superficial $\vec{j}$. Volumul τ este un domeniu gaussian cilindric infinitezimal, jumătate într-un mediu, jumătate în celălalt, cu normala $\vec{n}$ la suprafaţa de deasupra frontierei îndreptată din mediul 1 spre mediul 2. Conturul dreptunghiular infinitezimal C, de grosime neglijabilă este parţial într-un mediu şi parţial în celălalt şi este orientat perpendicular pe suprafaţa interfeţei astfel că normala la suprafaţa subîntinsă de contur, $\vec{n}'$, este tangentă interfeţei.

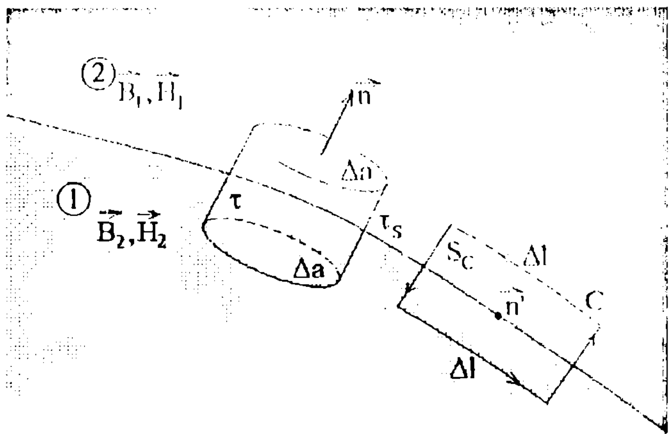


Fig.3.21

Din legea lui Gauss pentru magnetism rezultă:

$$\oiint_{S_\tau} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot ds = 0 \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (21)$$

unde S_τ este suprafaţa gaussienei ce delimitează volumul τ.

Conturul închis C delimitează o suprafaţă S_C deschisă, iar $d\vec{l}$ este elementul de linie al conturului C. $\vec{n}'$ reprezintă normala la suprafaţa S_C îndreptată în sensul dat de regula burghiului drept rotit în sensul de parcurs al conturului şi tangentă la suprafaţa interfeţei dintre cele două medii. Din legea lui Ampère rezultă:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n}' dS \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \qquad (22).$$

La limita cilindrului infinitezimal gaussian, suprafaţa laterală nu contribuie la calculul integralei din stânga expresiei din (21), contribuind numai bazele cilindrului care sunt paralele şi tangente la suprafaţa interfeţei notate cu Δa. Deci:

$$\oint\!\!\!\int_{S_e} \vec{B}\cdot\vec{n}\cdot dS = \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\cdot\vec{n}\cdot\Delta a = 0\text{, adică}$$

$$\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\cdot\vec{n} = 0 \qquad (23).$$

Prin urmare, componenta normală a lui $\vec{B}$ este continuă la trecerea dintr-un mediu magnetic în altul.

Bucla C infinitezimală poate fi utilizată pentru determinarea discontinuităţilor componentelor tangenţiale ale lui $\vec{H}$. Dacă laturile scurte ale conturului C au o lungime neglijabilă şi laturile lungi sunt ambele paralele cu suprafaţa şi au lungimea Δl, atunci integrala din stânga expresiei din (22) este:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \left(\vec{n}'\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\cdot\Delta l = \left[\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\right]\cdot\vec{n}'\cdot\Delta l \qquad (24)$$

unde s-a utilizat o proprietate a produsului mixt:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\,.$$

Partea din dreapta ecuaţiei sub forma integrală din (22) nu se anulează deoarece există o densitate de curent superficială $\vec{j}$:

$$\iint_{S_C} \vec{j}\cdot\vec{n}'\cdot dS = \vec{j}\cdot\vec{n}'\cdot\Delta l \qquad (25).$$

Din (22), (24) şi (25) rezultă relaţia care exprimă legătura dintre componentele tangenţiale ale lui $\vec{H}$ din ambele părţi ale frontierei:

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{j} \qquad (26).$$

În această ecuaţie se înţelege că densitatea de curent $\vec{j}$ are numai componente paralele cu suprafaţa interfeţei în fiecare punct. Componenta tangenţială a lui $\vec{H}$ este discontinuă cu mărimea $\vec{j}$ şi are direcţia paralelă cu $\vec{j}\times\vec{n}$.

În concluzie, pentru descrierea câmpului magnetic în medii macroscopice este necesar să se utilizeze *ecuaţia de stare*:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0\left(1+\chi_m\right)\cdot\vec{H}} \text{ sau } \boxed{\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}}$$

şi *ecuaţiile de trecere* (sau *condiţiile de frontieră* la trecerea dintr-un mediu în altul):

$$\boxed{\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\cdot\vec{n} = 0} \text{ şi } \boxed{\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{j}}.$$

În continuare, trebuie subliniată simetria existentă între mărimile ce caracterizează câmpul electric şi mărimile ce caracterizează câmpul magnetic în substanţă.

- Vectorului intensitate a câmpului electric, $\vec{E}$, ale cărui surse sunt sarcinile libere şi cele legate, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_o}\left(\rho_{liber}+\rho_{legat}\right)$, îi corespunde vectorul inducţie a câmpului magnetic, $\vec{B}$, ale cărui surse sunt curenţii liberi şi legaţi, $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\left(\vec{j}_{liber}+\vec{j}_{legat}\right)$.
- Vectorului polarizare electrică, $\vec{P}$, ale cărui surse sunt numai sarcinile legate, $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}=-\rho_{legat}$, îi corespunde vectorul magnetizare, $\vec{M}$, ale cărui surse sunt numai curenţii legaţi, $\vec{\nabla}\times\vec{M}=\vec{j}_{legat}$.
- Vectorului deplasare electrică, $\vec{D}$, ale cărui surse sunt numai sarcinile electrice libere, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{liber}$, îi corespunde vectorul intensitate a câmpului magnetic $\vec{H}$, ale cărui surse sunt numai curenţii liberi $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}_{liber}$.

În electromagnetism, vectori fundamentali se consideră a fi $\vec{E}$ şi $\vec{B}$. Sursele acestor vectori fiind sarcinile totale, respectiv curenţii totali, ei se pot defini în toate împrejurările. Din punct de vedere practic însă, sunt mai importanţi vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ deoarece $\vec{H}$ se calculează din $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}_{liber}$ cunoscând curenţii liberi, iar $\vec{E}$ din $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ cunoscând diferenţele de potenţial electric dintre două puncte accesibile măsurătorilor.

Capitolul 4

ELECTROMAGNETISM

4.1. Ecuaţiile fundamentale ale electromagnetismului

Pentru descrierea clasică a fenomenelor electromagnetice au fost stabilite următoarele patru *ecuaţii fundamentale:*

1) ***Legea lui Gauss din electrostatică:*** $\Phi_{\vec{E}} \equiv \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$, Q∈Int{S};

2) ***Legea lui Gauss din magnetostatică:*** $\Phi_{\vec{B}} \equiv \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$;

3) ***Legea lui Faraday:*** $\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$, dacă suprafaţa S_C este mobilă

şi $\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$, dacă suprafaţa S_C este fixă.

4) ***Legea lui Ampère:*** $\mathcal{B} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \Phi_{\vec{j}} = \mu_o I$, unde $\vec{j}$ intersectează suprafaţa S_C. Suprafaţa S_C este suprafaţa ce se sprijină pe curba închisă C pe care se calculează integrala curbilinie respectivă.

Aceste patru ecuaţii sunt aplicabile în spaţiul vid. În medii dielectrice ε_o se înlocuieşte cu produsul: $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$, iar în medii magnetice μ_o se înlocuieşte cu $\mu = \mu_o\mu_r$.

a) Legea Ampère-Maxwell

Dacă în a patra ecuaţie, care exprimă legea lui Ampère, vectorul densitate de curent de conducţie, $\vec{j}$, se înlocuieşte cu densitatea totală a curentului, $\vec{j}_t = \vec{j} + \vec{j}_d$, unde $\vec{j}_d$ reprezintă curentul de deplasare definit în subcapitolul 3.3.2. paragraful (c), se obţine legea Ampère-Maxwell:

$$\mathcal{C} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_C} \left(\vec{j} + \vec{j}_d\right) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(\iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_C} \vec{j}_d \cdot d\vec{s} \right) = \mu_0 \left(I + I_d\right).$$

Prin urmare:

$\mathcal{C} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\Phi_{\vec{j}} + \Phi_{\vec{j}_d}\right) = \mu_0 \left(\Phi_{\vec{j}} + \varepsilon_0 \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \right)$, indiferent dacă S_C este fixă sau mobilă şi

$$\mathcal{C} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\Phi_{\vec{j}} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) = \mu_0 \left(\Phi_{\vec{j}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\vec{E}}}{\partial t} \right),$$ dacă S_C este fixă.

În cazul în care suprafaţa de integrare (domeniul de integrare) S_C nu variază în timp (este fixă) derivata parţială în raport cu timpul poate fi scoasă în afara integralei; în caz contrar ea rămâne sub integrală.

b) Forma integrală a ecuaţiilor lui Maxwell în vid

Cele patru ecuaţii fundamentale scrise anterior sunt cunoscute sub numele de ecuaţiile lui Maxwell.

***Definiţie**: O regiune din spaţiu în care nu există sarcini electrice (q = 0 sau ρ = 0) şi curenţi de conducţie (I = 0 sau $\vec{j} = 0$) se numeşte mediu fără surse.*

Sistemul de ecuaţii următor:

1) $\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau_S} \rho \, d\tau}$;

2) $\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0}$;

3) $\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{s}}$, dacă S_C este mobilă sau

$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}$, dacă S_C este fixă;

4) $\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o \iint_{S_C} \vec{j}\cdot d\vec{s} + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_C} \vec{E}\cdot d\vec{s}}$, numai dacă S_C este fixă sau

$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o \iint_{S_C} \vec{j}\cdot d\vec{s} + \varepsilon_o\mu_o \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{s}}$, indiferent dacă S_C este mobilă ori fixă, se numeşte *sistemul ecuaţiilor lui Maxwell în vidul cu surse* ($\rho \neq$ *$\neq 0$ şi $j \neq 0$) sub formă integrală*.

După cum se observă, acestea *nu sunt simetrice* în raport cu $\vec{E}$ şi $\vec{B}$.

În vidul fără surse ($\rho = 0$ şi $j = 0$), ecuaţiile lui Maxwell sub formă integrală sunt:

1) $\boxed{\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0}$;

2) $\boxed{\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0}$;

3) $\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_C} \vec{B}\cdot d\vec{s}}$, dacă S_C este mobilă sau

$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}}$, dacă S_C este fixă;

4) $\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_C} \vec{E}\cdot d\vec{s}}$, numai dacă S_C este fixă sau

$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_o\mu_o \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{s}}$, în cazul general.

În acest caz, ecuaţiile *sunt simetrice* în raport cu $\vec{E}$ şi $\vec{B}$.

c) Forma diferenţială a ecuaţiilor lui Maxwell în vid.

Vom utiliza teoremele lui Gauss-Ostrogradski şi Stokes:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{a}\cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_S} (\vec{\nabla}\cdot\vec{a})\cdot d\tau\,, \qquad \oint_C \vec{a}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} (\vec{\nabla}\times\vec{a})\cdot d\vec{s}\,,$$

unde $\vec{a}$ reprezintă un câmp de vectori oarecare, în sistemele de ecuaţii de mai sus pentru a obţine ecuaţiile lui Maxwell sub forma diferenţială.

1) $\oiint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint\limits_{\tau_S} \mathrm{div}\vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{\tau_S} \rho d\tau \Rightarrow \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$;

2) $\oiint\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint\limits_{\tau_S} \mathrm{div}\vec{B} \cdot d\tau = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\vec{B} = 0$;

3) $\oint\limits_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint\limits_{S_C} \mathrm{rot}\vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint\limits_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$, dacă S_C este fixă $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$;

4) $\oint\limits_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint\limits_{S_C} \mathrm{rot}\vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint\limits_{S_C} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$, indiferent dacă S_C este fixă sau mobilă deoarece ne interesează numai cazul când derivata parţială este sub integrală $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_d \right) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$.

Observaţie: Ecuaţia Maxwell 3 sub formă diferenţială este valabilă numai în ipoteza în care suprafaţa S_C este imobilă (fixă); altfel, dacă S_C este mobilă, această ecuaţie a lui Maxwell este valabilă doar sub forma integrală.

Prin urmare, *ecuaţiile lui Maxwell în vidul cu surse ($\rho \neq 0$ şi $j \neq 0$) sub formă diferenţială sau locală sunt:*

1) $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$, 2) $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$,

3) $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$, 4) $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$

În vidul fără surse ($\rho = 0$ şi $j = 0$), ecuaţiile lui Maxwell sub formă diferenţială sau locală sunt:

1) $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0}$, 2) $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$,

3) $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$, 4) $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$.

Observaţie: Simetria acestor ecuaţii în $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ este o consecinţă nemijlocită a introducerii curentului de deplasare. Scrise în această formă, ultimele două ecuaţii ale lui Maxwell ne arată că în cazul unor câmpuri variabile există o dublă legătură cauzală între câmpul electric şi câmpul magnetic, legătură care condiţionează existenţa câmpului electromagnetic sub formă de unde electromagnetice în regiuni îndepărtate de sursele de sarcină electrică (unde ρ=0 şi j=0).

Proprietăţi: Ecuaţiile lui Maxwell *sunt omogene* în raport cu $\vec{E}$ şi $\vec{B}$. Acest lucru înseamnă că dacă $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt două soluţii pentru ecuaţiile de mai sus atunci şi $a \cdot \vec{E}$, $a \cdot \vec{B}$, reprezintă soluţii ale celor patru ecuaţii, *a* fiind o constantă arbitrară.

Ecuaţiile lui Maxwell *sunt liniare*. Dacă $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$ şi $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$ sunt două seturi de soluţii ale acestor ecuaţii, atunci combinaţiile liniare $a \cdot \vec{E}_1 + b \cdot \vec{E}_2$ şi $a \cdot \vec{B}_1 + b \cdot \vec{B}_2$ sunt de asemenea soluţii ale ecuaţiilor lui Maxwell, oricare ar fi constantele *a* şi *b*.

d) Sensul fizic al ecuaţiilor lui Maxwell

Ecuaţia (1) arată caracterul *potenţial* al câmpului electrostatic (divergenţa lui $\vec{E}$ este nenulă). Cu alte cuvinte, liniile câmpului electrostatic nu sunt închise. Această ecuaţie reprezintă o generalizare a legii lui Coulomb.

Ecuaţia (2) arată că în toate cazurile câmpul magnetic de inducţie $\vec{B}$ nu poate fi *potenţial*. Cu alte cuvinte liniile câmpului magnetic sunt întotdeauna închise (divergenţa lui $\vec{B}$ este nulă).

Ecuaţia (3) prevede existenţa unui *câmp electric solenoidal* $\vec{E}$ (rotorul lui $\vec{E}$ este nenul) cu linii de câmp închise produs de variaţia în timp a câmpului magnetic. În acest caz, $\vec{E} \perp \vec{B}$. Ecuaţia (3) constituie o generalizare a legii lui Faraday.

Ecuaţia (4) arată caracterul *solenoidal* al câmpului magnetic (rot $\vec{B} \neq 0$, linii de câmp închise) şi subliniază cauzele care îl produc: curentul electric de conducţie şi variaţia în timp a câmpului electric.

Observaţie: Ecuaţiile (3) şi (4) arată că între câmpul electric şi cel magnetic există o strânsă interdependenţă, liniile celor două câmpuri aflându-se în plane perpendiculare.

Din ecuaţia (4) se observă că variaţia în timp a câmpului electric produce un câmp magnetic solenoidal:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \text{rot}\vec{B} \neq 0 .$$

Din ecuaţia (3) se observă că variaţia în timp a câmpului magnetic determină apariţia unui câmp electric solenoidal:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \text{rot}\vec{E} \neq 0 .$$

e) Ecuaţiile lui Maxwell în cazul unui mediu material

Ecuaţiile lui Maxwell cu surse ($\rho \neq 0$ şi $j \neq 0$) pentru un mediu material oarecare în forma integrală şi diferenţială sunt următoarele:

1) $\boxed{\oint\!\!\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_S} \rho d\tau}$ (*forma integrală*),

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho}$ (*forma diferenţială*),

unde $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ reprezintă vectorul inducţiei câmpului electric (sau vectorul deplasare), χ_e susceptibilitatea electrică a mediului dielectric, ε_r permitivitatea electrică relativă a mediului dielectric, iar $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$ reprezintă vectorul polarizaţiei electrice a dielectricului respectiv;

2) $\boxed{\oint\!\!\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0}$ (*forma integrală*),

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$ (*forma diferenţială*),

unde $\vec{B}$ este vectorul inducţiei câmpului magnetic, $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, $\vec{H}$ reprezintă vectorul intensităţii câmpului magnetic, χ_m reprezintă susceptibilitatea magnetică a mediului respectiv, μ_r permeabilitatea magnetică a mediului, iar $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ reprezintă vectorul magnetizaţiei mediului respectiv;

3) $\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_{\vec{B}}}{\partial t}}$ (*forma integrală*), dacă suprafaţa S_C este mobilă,

$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}$ (*forma integrală*), dacă suprafaţa S_C este fixă;

$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (*forma diferenţială*), numai dacă suprafaţa S_C este fixă;

4) $\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_C} \vec{j}_d \cdot d\vec{s} = \Phi_{\vec{j}} + \Phi_{\vec{j}_d} = \iint_{S_C} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}}$ (*forma integrală*);

$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Phi_{\vec{j}} + \frac{\partial \Phi_{\vec{D}}}{\partial t}}$ (*forma integrală*), numai dacă suprafaţa S_C este fixă.

$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{j}_d}$ (*forma diferenţială*).

Ecuaţiile lui Maxwell fără surse (q=0 sau ρ=0 şi I=0 sau j=0) pentru un mediu material oarecare în forma integrală şi diferenţială sunt următoarele:

1) $\boxed{\Phi_{\vec{D}} = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0}$ (*forma integrală*),

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0}$ (*forma diferenţială*);

2) $\boxed{\Phi_{\vec{B}} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0}$ (*forma integrală*),

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$ (*forma diferenţială*);

3) $\boxed{\mathcal{E}_i \equiv \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_C}\vec{B}\cdot d\vec{s} \equiv -\frac{\partial \Phi_{\vec{B}}}{\partial t}}$ (*forma integrală*), dacă suprafaţa S_C este mobilă sau $\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}}$ (*forma integrală*), dacă suprafaţa S_C este fixă;

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (*forma diferenţială*), numai dacă suprafaţa S_C este fixă;

4) $\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_C}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s}}$ (*forma integrală*), sau

$\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_C}\vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \frac{\partial \Phi_{\vec{D}}}{\partial t}}$ (*forma integrală*), dacă suprafaţa S_C este fixă şi

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ (*forma diferenţială*).

f) Importanţa ecuaţiilor lui Maxwell

- Ecuaţiile lui Maxwell scot în evidenţă legătura indisolubilă care există între fenomenele electrice (prin câmpul electric $\vec{E}$) şi cele magnetice (prin câmpul magnetic $\vec{B}$).
- Pornind de la sistemul ecuaţiilor lui Maxwell se pot obţine toate relaţiile din electricitate şi magnetism şi, în plus, se pot prevedea noi fenomene electromagnetice.
- Aceste ecuaţii au pus în evidenţă o nouă legătură dintre electricitate şi magnetism: *inducţia magnetoelectrică*.
- Au prezis existenţa undelor electromagnetice şi natura electromagnetică a luminii.
- Au unificat pentru prima dată fenomenele de natură electrică cu cele de natură magnetică, sub forma teoriei clasice a electromagnetismului.

Contribuţia lui Maxwell pentru înţelegerea fenomenelor electromagnetice poate fi considerată una dintre cele mai înalte realizări atinse de om în procesul cunoaşterii. Prin aceste ecuaţii, Maxwell a realizat o sinteză a interacţiunilor electrice şi magnetice ce reprezintă una dintre cele mai importante sinteze în fizică.

4.2. Soluţiile ecuaţiilor lui Maxwell date sub formă generală. Potenţialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic. Transformări de etalon. Invarianţa de etalon sau de gradient

4.2.1. Relaţii de algebră vectorială utilizate

a) Dacă $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=0$ atunci $\vec{a}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ şi reciproc, dacă $\vec{a}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ atunci $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=0$, oricare ar fi vectorul $\vec{A}=\vec{A}(x,y,z;t)$.

b) Dacă $\vec{\nabla}\times\vec{a}=0$ rezultă $\vec{a}=\vec{\nabla}f(x,y,z;t)$ şi reciproc, dacă $\vec{a}=\vec{\nabla}f(x,y,z;t)$ atunci $\vec{\nabla}\times\vec{a}=0$, unde f=f(x,y,z;t) este o funcţie scalară arbitrară dependentă de x, y, z şi t.

c) $\vec{\nabla}\times(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda\vec{\nabla}\times\vec{a}+\mu\vec{\nabla}\times\vec{b}$, unde λ, μ sunt constante arbitrare,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right),$$

$$\vec{\nabla}(-V)=-\vec{\nabla}V.$$

4.2.2. Soluţiile ecuaţiilor lui Maxwell sub formă generală. Potenţialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic

Teoremă: Ecuaţiile lui Maxwell $\mathrm{div}\vec{B}=0$ *şi* $\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ *au următoarele soluţii:* $\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}$ *şi* $\vec{E}=-\mathrm{grad}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

Mărimea $\vec{A}$ se numeşte potenţialul vectorial al câmpului magnetic $\vec{B}$, iar V reprezintă potenţialul scalar al câmpului electric $\vec{E}$.

Mărimile $\vec{A}$ şi V sunt funcţii de parametrul timp t şi de punctul din spaţiu de coordonate x, y, z în care se calculează $\vec{E}$ şi $\vec{B}$: $\vec{A}(x,y,z;t)$, $V(x,y,z;t)$. $\vec{A}$ şi V se mai numesc potenţiale electrodinamice ale câmpului electromagnetic.

Demonstraţie: Prima ecuaţie Maxwell, $\operatorname{div}\vec{B}=0$, implică, dacă se utilizează relaţia (a) existenţa unui vector pe care, în continuare, îl vom nota cu $\vec{A}$ şi-l vom denumi *potenţial vectorial* (sau *potenţial magnetic vectorial*), astfel încât:

$$\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}.$$

A doua ecuaţie Maxwell, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, împreună cu relaţia anterioară, conduc la concluzia următoare dacă se utilizează relaţiile matematice (b) şi (c):

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=-\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}+\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \Rightarrow \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \text{ sau}$$

$$\boxed{\vec{E}=-\operatorname{grad}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}.$$

Relaţiile anterioare încadrate reprezintă o pereche de *soluţii ale ecuaţiilor lui Maxwell*.

4.2.3. Transformări de etalon. Invarianţa de etalon sau de gradient

Pornind de la egalitatea $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$ să arătăm că mărimea $\vec{A}$ din această ecuaţie *nu este unic determinată*.

Demonstraţie: Orice expresie de forma $\vec{A}+\vec{\nabla}f\equiv\vec{A}'$, unde f este o funcţie arbitrară depinzând de x, y, z, t, satisface, de asemenea, egalitatea $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$ obţinându-se aceeaşi formă pentru această relaţie.

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla} f\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, deoarece în conformitate cu relaţia matematică (b) avem: $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$.

De asemenea, ecuaţia $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ne arată că dacă înlocuim aici funcţia V cu $V - \dfrac{\partial f}{\partial t} \equiv V'$ şi $\vec{A}$ cu $\vec{A}'$ se obţine aceeaşi expresie pentru $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(V - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla} f\right) = -\vec{\nabla} V + \vec{\nabla}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} f\right).$$

Deoarece $\vec{\nabla}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} f\right)$ şi $\vec{\nabla}(\lambda \cdot f \pm \mu \cdot g) = \lambda \cdot \vec{\nabla} f \pm \mu \cdot \vec{\nabla} g$, cu μ şi λ constante arbitrare, rezultă: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ceea ce trebuie demonstrat. Prin urmare, nici mărimea V *nu este unic determinată*. Deci, potenţialele $\vec{A}$ şi V *nu sunt unice*, putându-se obţine *o infinitate* de potenţiale prin transformările:

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f},$$

$$\boxed{V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}},$$

numite *transformări etalon*. Aşa cum s-a văzut, acestea lasă neschimbat câmpul electromagnetic, adică expresiile lui $\vec{E}$ şi $\vec{B}$.

Definiţie: *Invarianţa câmpului electromagnetic la aceste transformări se numeşte invarianţa de etalon sau de gradient.*

4.3. Câmpul electromagnetic

Definiţie: *Ansamblul câmpurilor electric şi magnetic variabile în timp şi în spaţiu şi care se generează reciproc, se numeşte câmp electromagnetic. Perturbaţia electromagnetică are proprietatea că se poate propaga în spaţiu, inclusiv în spaţiul vid.*

Câmpul electromagnetic se poate reprezenta, de asemenea, cu ajutorul potenţialului vectorial $\vec{A}(\vec{r},t)$ (magnetic) şi a potenţialului scalar $V(\vec{r},t)$ (electric) care reprezintă potenţialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic.

4.3.1. Condiţia de etalonare al lui Lorentz. Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale ale lui Maxwell pentru mediul fără surse

***Notă matematică**: În analiza matematică vectorială sunt valabile **(fără demonstraţie)** următoarele relaţii:*

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)-\nabla^2\vec{a}\quad(\alpha),$$

unde $\nabla^2 V=\Delta V=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}V\right)=\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}V\right)$.

a) Condiţia de etalonare al lui Lorentz.

Se înlocuiesc mărimile $\vec{B}$ şi $\vec{E}$, definite prin relaţiile cunoscute:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\ \text{ şi }\ \vec{E}=-\mathrm{grad}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\quad(1),$$

în ecuaţia lui Maxwell scrisă în absenţa surselor (j = 0):

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\quad(2).$$

Rezultă: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$. Aplicând relaţia vectorială (α) se obţine:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}V+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\quad(3).$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}V\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)\ \text{ şi }\ \vec{\nabla}\left(u+v\right)=\vec{\nabla}u+\vec{\nabla}v\quad(3')$$

(fără demonstraţie), relaţia (3) se poate scrie succesiv:

$$-\nabla^2\vec{A}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\mu\varepsilon\vec{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0\quad(4),$$

$$-\nabla^2\vec{A}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right)+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0 \quad (5).$$

Deoarece mărimea $\vec{A}$ nu este unic determinată, avem latitudinea de a alege pe $\vec{A}$ cum dorim, dar cu respectarea condiţiei ca $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$. În cele ce urmează vom face acea selecţie pentru $\vec{A}$ astfel încât să avem îndeplinită relaţia:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}=0} \quad (6).$$

Egalitatea (6) se numeşte *condiţia de etalonare a lui Lorentz.*

b) Ecuaţia lui d'Alembert pentru potenţialul vectorial $\vec{A}$.

În aceste condiţii din (5) şi (6) se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul doi de tip hiperbolic cu derivate parţiale satisfăcută de potenţialul vectorial $\vec{A}$:

$$\Delta\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0 \quad (7),$$

Dacă introducem operatorul lui d'Alembert:

$$\Box\equiv\Delta-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (8),$$

atunci ecuaţia din (7) se scrie sub forma abreviată:

$$\Box\ \vec{A}=0 \ (9).$$

Această ecuaţie, (9), se numeşte *ecuaţia lui d'Alembert relativ la potenţialul vectorial* $\vec{A}$, care se poate scrie explicit astfel:

$$\boxed{\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0}.$$

Dacă $\vec{A}$ nu depinde explicit de timpul t (cazul staţionar) ecuaţia (9) devine

$$\Delta\vec{A}=0 \text{ sau } \nabla^2\vec{A}=0 \quad (9').$$

c) Ecuaţia lui d'Alembert pentru potenţialul scalar V.

Să obţinem, în continuare, ecuaţia corespunzătoare pentru potenţialul scalar V. Se porneşte de la ecuaţia lui Maxwell următoare (scrisă pentru un mediu fără surse):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad (10).$$

Deoarece:

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11),$$

rezultă:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (12).$$

Se poate arăta (fără demonstrație) că:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \right) = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \quad (13),$$

unde λ, μ sunt constante arbitrare

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{a}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad \text{şi} \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}V \right) = \Delta V = \nabla^2 V \quad (13').$$

Prin urmare relația (12) devine:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}V \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (14).$$

Se poate arăta (fără demonstrație) că:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \equiv \frac{\partial \left(\text{div} \vec{A} \right)}{\partial t} \quad (15).$$

În aceste condiții, dacă se ține seama de relația (α), de relația (15) şi de condiția de etalonare a lui Lorentz (6), ecuația (14) devine:

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0 \quad (16).$$

În concluzie: $\Delta V - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ sau $\Box V = 0$ (17). Această ecuație (17) se mai numeşte şi *ecuația lui d'Alembert relativ la potențialul scalar V*, care se poate scrie explicit astfel:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}.$$

Dacă V nu depinde explicit de timpul t (cazul staționar) ecuația (17) devine $\Delta V = 0$ sau $\nabla^2 V = 0$ (17').

Relațiile (9) şi (17) reprezintă ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale lui Maxwell pentru mediul liber (fără surse) relativ la potențialele vectorial $\vec{A}$ şi scalar V (sau ecuațiile lui d'Alembert relativ la mărimile $\vec{A}$ şi V).

4.3.2. Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale ale lui Maxwell pentru mediul cu surse

a) Ecuaţia diferenţială pentru potenţialul vectorial $\vec{A}$.

În ecuaţia lui Maxwell sub forma diferenţială pentru un mediu cu surse:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (1),$$

se înlocuiesc expresiile potenţialelor electrodinamice $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ şi

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2).$$

În acest caz (1) devine:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \mu\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \quad (3).$$

Deoarece (fără demonstraţie)

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} \quad (4),$$

ecuaţia (3) se scrie:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} + \mu\varepsilon\vec{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{j} \quad (5) \text{ sau}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \Delta\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{j} \quad (5').$$

Aplicând în (5') condiţia de etalonare a lui Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (6),$$

rezultă: $\Box\vec{A} = -\mu\vec{j}$ sau

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}} \quad (7).$$

Dacă potenţialul vectorial $\vec{A}$ nu depinde explicit de timp (regim staţionar), adică $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ este funcţie doar de coordonatele spaţiale, atunci ecuaţia (7) devine:

$$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j} \text{ sau } \nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \quad (7').$$

Ecuaţia (7') mai poartă denumirea de *ecuaţia lui Poisson pentru potenţialul vectorial* $\vec{A}$ *în regim staţionar.* Soluţia ecuaţiei lui Poisson (7') are forma următoare (fără demonstraţie):

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}}{r} d\tau \quad (8),$$

unde integrarea se face pe întregul volum τ caracterizat prin densitatea de curent $\vec{j}$, iar r este distanţa dintre elementul de volum $d\tau$ şi punctul în care se calculează potenţialul vectorial $\vec{A}$ (v. fig.4.1).

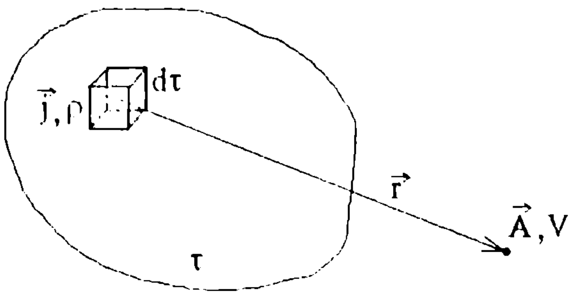


Fig. 4.1

b) Ecuaţia diferenţială pentru potenţialul scalar V.

În mod asemănător se obţine o ecuaţie pentru V. Pornind de la prima ecuaţie a lui Maxwell sub formă diferenţială scrisă pentru un mediu cu surse şi de la expresia lui $\vec{E}$ funcţie de $\vec{A}$ şi V:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \vec{E} = -\mathrm{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9),$$

se găseşte:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V\right) + \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}V\right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) =$$

$$= -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (9').$$

Dacă se recurge în (9') la condiţia de etalonare a lui Lorentz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, rezultă: $-\Delta V + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}$. Alte forme echivalente sunt: $\square V = -\rho/\varepsilon$, sau

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}} \quad (9'').$$

Dacă potenţialul scalar V nu depinde explicit de timp (regim staţionar), adică V = V(x,y,z) este funcţie doar de coordonatele spaţiale, atunci ecuaţia (9'') devine *ecuaţia lui Poisson relativ la potenţialul scalar V:*

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \text{ sau } \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (10).$$

Soluţia ecuaţiei lui Poisson (10) are forma următoare (fără demonstraţie):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau \quad (11),$$

unde ρ reprezintă densitatea volumică de sarcină electrică (v. fig.4.1).

Ecuaţiile (7) şi (9'') sau ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale ale lui Maxwell pentru un mediu cu surse, arată legătura dintre potenţialele electrodinamice $\vec{A}$ şi V ale câmpului electric şi magnetic, care se generează reciproc formând astfel câmpul electromagnetic, şi sursele care îi produc: densitatea de curent electric $\vec{j}$ şi densitatea de sarcină electrică ρ. Determinând astfel cele două potenţiale $\vec{A}$ şi V cu ajutorul relaţiei (7) şi (10) sau (7') şi (10) prin intermediul relaţiilor (2) se pot calcula vectorii $\vec{B}$ şi $\vec{E}$.

Capitolul 5

UNDE ELECTROMAGNETICE
OPTICĂ

5.1. Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale pentru intensitatea câmpului electric şi inducţia câmpului magnetic în cazul unui mediu fără surse. Ecuaţiile de propagare a undei electromagnetice într-un mediu fără surse.

Pentru a ajunge la ecuaţiile de propagare a undei electromagnetice într-un mediu fără surse, se porneşte de la ecuaţia lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1).$$

Se aplică operatorul "rotor" ecuaţiei (1):

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \quad (2).$$

Deoarece se presupune cunoscută relaţia vectorială următoarea:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \Delta\vec{E} \quad (3),$$

ecuaţia anterioară (2) devine:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \quad (4).$$

Se recurge, în continuare, la ecuaţiile lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \text{şi} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5).$$

Deoarece $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{E}) = \mathrm{grad}(0) = 0$, din (4) şi (5) rezultă:

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

care se mai poate scrie şi sub formele echivalente:

$$\Box \vec{E} = 0 \quad (6)$$

sau

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

(*Ecuaţia lui d'Alembert pentru câmpul electric* $\vec{E}$).

În mod analog se obţine ecuaţia pentru inducţia câmpului magnetic, pornind de la următoarea ecuaţie a lui Maxwell în care $\vec{j} = 0$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7).$$

Prin aplicarea în (7) a operatorului "rotor", se obţine:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad (8).$$

Deoarece: $\mathrm{rot}(c \cdot \vec{a}) = c \cdot \mathrm{rot}(\vec{a})$, c=const, $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{a})) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a}$ (fără demonstraţie) şi

$$\mathrm{rot}\left(\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu\varepsilon \cdot \mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}(\vec{E})) \quad (9),$$

rezultă din (8):

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \quad (10).$$

Având în vedere ecuaţiile lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{şi} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11),$$

egalitatea (10) devine:

$$\vec{\nabla} 0 - \Delta\vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (12).$$

Într-o formă echivalentă ecuaţia (12) se transcrie astfel:

$$\Box \vec{B} = 0 \quad (13)$$

sau

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

(*Ecuaţia lui d'Alembert pentru inducţia câmpului magnetic* $\vec{B}$).

Observaţie: Mărimile potenţial vectorial $\vec{A}$ şi potenţial scalar V satisfac acelaşi tip de ecuaţii: $\Box\vec{A} = 0$, $\Box V = 0$.

5.2. Comentarii de natură fizică privind ecuaţiile diferenţiale satisfăcute de $\vec{E}(\vec{r},t)$ şi $\vec{B}(\vec{r},t)$. Ecuaţiile de propagare a undelor electromagnetice.

a) Intensitatea câmpului electric $\vec{E}(\vec{r},t)$ şi inducţia câmpului magnetic $\vec{B}(\vec{r},t)$, ce caracterizează câmpul electromagnetic, satisfac acelaşi tip de ecuaţie diferenţială (d'Alembert) ca şi cele două potenţiale electrodinamice $\vec{A}(\vec{r},t)$ şi $V(\vec{r},t)$.

b) Acest tip de ecuaţie este similar cu cel reprezentat de ecuaţia de propagare a undelor mecanice:

$$\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0,$$

unde v este viteza de propagare a undelor mecanice în mediul respectiv, (care nu poate fi mediul vid), iar $\Psi(\vec{r},t)$ reprezintă elongaţia oscilaţiei în punctul de vector de poziţie $\vec{r}$, la momentul t.

c) Comparând cele patru ecuaţii diferenţiale de tip d'Alembert:

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = 0,\ \Box V(\vec{r},t) = 0,\ \Box\vec{E}(\vec{r},t) = 0,\ \Box\vec{B}(\vec{r},t) = 0,$$

cu ecuaţia de propagare a undelor mecanice $\Box\Psi(\vec{r},t) = 0$, Maxwell a constatat că perturbaţia (variaţia modulului acestora în timp) mărimilor $\vec{A}(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ sunt funcţii variabile în timp şi spaţiu, care descriu mărimi a căror perturbaţie (variaţia modulului acestora în timp) se propagă într-un mediu caracterizat de constantele de material ε şi μ cu o viteză dată de relaţia:

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon\mu \quad \text{sau} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Această constatare făcută de Maxwell în anul 1865 a constituit actul de naştere al teoriei undelor electromagnetice, care au fost confirmate experimental de Hertz.

d) Deci, când într-o regiune din spaţiu se creează un câmp electric variabil în timp, acesta generează la rândul său un câmp magnetic variabil în timp, şi reciproc, obţinându-se ansamblul numit câmp electromagnetic a cărui perturbaţie se propagă în spaţiu sub formă de unde electromagnetice cu viteza $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

e) La această constatare făcută de Maxwell, s-a adăugat încă una, tot a lui Maxwell, referitoare la natura electromagnetică a luminii. Maxwell a calculat viteza undelor electromagnetice *în vid:*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{9\cdot10^9\cdot4\cdot\pi\cdot10^{-7}}} \cong 3\cdot10^8\,m/s \equiv c\,,$$

unde c este cunoscută ca fiind viteza luminii în vid, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\,\dfrac{Nm^2}{C^2}$,

$$\mu_0 = 4\pi10^{-7}\,N/A^2\,.$$

Prin urmare, lumina este de natură electromagnetică.

5.3. Ecuaţia elongaţiei undei electromagnetice armonice plane tridimensionale.

a) Expresii matematice.

Forma complexă a elongaţiei unei unde plane tridimensionale (cazul vectorului câmp electric), într-un punct de vector de poziţie $\vec{r}$ şi la momentul t, este:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cdot\exp\left\{\pm i\left(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)\right\} \quad (1).$$

Forma reală a elongaţiei acestei unde se obţine pornind de la formele lui Euler:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\cdot\sin\alpha \quad (2)$$

(v. anexa). Deci relaţia (1) devine:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cdot\left[\cos(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0) \pm i\cdot\sin(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)\right] \quad (3).$$

Observaţie: În cele ce urmează convenim ca exponentul undei plane să fie luat cu semnul plus.

Forma reală a elongaţiei undei plane este, prin definiţie, egală cu partea reală sau imaginară a expresiei complexe (3) definite astfel:

Re $\left\{\vec{E}(\vec{r},t)\right\} = \vec{E}_0\cdot\cos\left(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$, sau

Im $\left\{\vec{E}(\vec{r},t)\right\} = \vec{E}_0\cdot\sin\left(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$.

De obicei, **Re** $\{\vec{E}(\vec{r},t)\}$ şi **Im** $\{\vec{E}(\vec{r},t)\}$ sunt notate, pentru simplitate, tot cu litera $\vec{E}(\vec{r},t)$.

Observaţie: Aceleaşi consideraţii sunt valabile şi pentru vectorul inducţie al câmpului magnetic: $\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\cdot\exp\{i(\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_0)\}$;

Deoarece calculele matematice se simplifică foarte mult, în practică, se preferă utilizarea formei complexe (1). De multe ori, faza iniţială este iniţializată cu valoarea zero ($\varphi_0 = 0$).

b) Semnificaţia fizică a mărimilor.

Semnificaţia fizică a mărimilor care intervin în relaţia (1) este următoarea:

- $\vec{E}(\vec{r},t)$ reprezintă *elongaţia undei electrice* în punctul de vector de poziţie $\vec{r}$ la momentul de timp t. Dacă punctul de vector de poziţie $\vec{r}$ se alege ca origine a unui sistem de coordonate, atunci $\vec{r}=0$ şi în acest caz avem $\vec{E}(t)=E_0\cdot e^{i\omega t}$ sau $\vec{E}(t)=\vec{E}_0\cdot\cos\omega t$, dacă alegem faza iniţială φ_0=0.
- $\vec{E}_0$ reprezintă *amplitudinea undei plane armonice*.
- $\Phi(\vec{r},t)=\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_0$ reprezintă *faza undei plane armonice*.
- ω este *pulsaţia undei*.
- $\vec{k}$ este *vectorul de undă* ce are direcţia şi sensul vitezei de deplasare $\vec{v}$ a undei. Modulul, k, al vectorului de undă se numeşte *număr de undă*.

Nu trebuie să se confunde vectorul de undă $\vec{k}$ cu versorul axei 0z notat uneori tot cu $\vec{k}$, $|\vec{k}|=1$.

c) Relaţii care intervin între mărimile enumerate.

Modulul vectorului de undă: $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$, unde λ este lungimea de undă a undei armonice plane.

Vectorul de undă: $\vec{k}=k\cdot\vec{n}=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{n}$, unde $\vec{n}$ reprezintă versorul vectorului $\vec{k}$.

Pulsaţia (frecvenţă unghiulară): $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, unde ν reprezintă frecvenţa de oscilaţie a undei, T este perioada de oscilaţie a undei.

Lungimea de undă a undei. $\lambda = vT$, unde v reprezintă viteza de fază a undei (viteza de deplasare a fazei undei).

Din relaţiile $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$ şi $\lambda = vT$ rezultă:

$$\frac{\omega}{k} = v \quad (4).$$

Dacă se scriu expresiile analitice pentru vectorii $\vec{k}$ şi $\vec{r}$:

$$\vec{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z, \quad \vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z,$$

unde $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ şi $\vec{e}_z$ reprezintă versorii asociaţi unui sistem de referinţă cartezian ($|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$), alţii decât cei notaţi până acum cu $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ pentru a se putea evita confuzia ultimului cu vectorul de undă (notat tot cu $\vec{k}$) şi a primului cu numărul complex imaginar i (care are proprietatea: $I^2 = -1$).

Atunci, produsul scalar $\vec{k} \cdot \vec{r}$ are expresia analitică următoare:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z \quad (5).$$

d) Suprafaţa de undă.

În procesul de propagare a unei unde plane (monocromatice) se poate întotdeauna găsi locul geometric al punctelor care au aceeaşi fază (se găsesc în fază), adică cu proprietatea următoare:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} \equiv c_1 \quad (6)$$

Pentru un t dat, $t=t_o$, ecuaţia (6) reprezintă ecuaţia unui plan în spaţiu:

$$\omega t_0 - k_x x - k_y y - k_z z \equiv c_1 \quad (7),$$

care are forma generală: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Totalitatea punctelor dintr-un astfel de plan definesc o suprafaţă denumită *suprafaţă de undă a undei plane*. În concluzie, se poate aborda următoare definiţie:

***Definiţie**: Locul geometric al punctelor din spaţiu (mediu) în care se propagă o perturbaţie, pentru care Ψ are la un moment dat "t_o" aceeaşi valoare constantă "a" este o suprafaţă, denumită suprafaţă de undă:* $\Psi \equiv$ $\equiv \Psi(x,y,z;t_o) =$ *contant. = a.*

Suprafaţa în care punctele oscilează în concordanţă de fază reprezintă o suprafaţă de undă.

e) Ecuația elongației unei unde electromagnetice armonice sferice progresive.

Dacă izvorul generator de unde electromagnetice (izvorul perturbației electromagnetice) are dimensiuni mici (punctuale) și viteza de propagare a perturbației în toate direcțiile este aceeași (mediul este izotrop) suprafața de undă a undei trebuie să aibă forma unei suprafețe sferice, de ecuație r = const., a cărei centru coincide cu izvorul. Într-un asemenea caz, unda electromagnetică se numește sferică. Suprafața de undă poate fi considerată ca fiind sferică dacă distanța r este mai mare sau egală cu de zece ori dimensiunile liniare ale izvorului.

Ecuația elongației unei asemenea unde sferice monocromatice are următoarea formă matematică (fără demonstrație):

$$\Psi(r,t)=\frac{A}{r}\cdot\sin\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)=\frac{A}{r}\cdot\sin(\omega t-kr) \quad (8),$$

sau

$$\Psi(r,t)=\frac{A}{r}\cdot\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)=\frac{A}{r}\cdot\cos(\omega t-kr) \quad (8'),$$

iar sub formă complexă: $\Psi(r,t)=\frac{A}{r}\cdot e^{i(\omega t-kr)}=\frac{A}{r}\cdot e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}$ (8").

Observație: Dacă în ecuația (8) *v* devine -*v* se obține ecuația undei armonice sferice regresive.

A este amplitudinea $\mathcal{A}$ =A/r la distanța r = 1m de sursă, iar $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ reprezintă distanța de la sursă la un punct arbitrar de coordonate (x,y,z) aparținând unei suprafețe de undă sferice oarecare, centrată pe sursă. Expresiile (8) și (8') arată că amplitudinea unei unde sferice $\mathcal{A}$ =A/r scade invers proporțional cu distanța r față de izvor și prin urmare, intensitatea undei, proporționale cu pătratul amplitudinii (a se vedea capitolul dedicat interferenței luminii), descrește cu pătratul distanței față de izvor. Dacă r devine suficient de mare, suprafața de undă sferică poate fi considerată aproximativ ca fiind plană. Orice dreaptă pornind din izvor constituie o *rază*. Orice rază este perpendiculară pe suprafața undei.

5.4. Soluţiile particulare ale ecuaţiilor de propagare a undelor electromagnetice pentru un mediu fără surse

Să demonstrăm că soluţiile particulare ale ecuaţiilor de propagare a undelor electromagnetice (când $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$),

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\vec{B} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1),$$

sunt de forma undelor armonice plane tridimensionale:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r})\}, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cdot \exp\{i(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r})\} \quad (2).$$

Printr-un calcul direct se arată că (2) verifică, de exemplu, ecuaţia de propagare a undelor electromagnetice $\square\vec{E} = 0$, şi $\square\vec{B} = 0$.
Într-adevăr, dacă se rescrie soluţia pentru câmpul electric sub forma:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\omega\cdot t - k_x\cdot x - k_y\cdot y - k_z\cdot z)\} \quad (2')$$

şi se evaluează expresia $\Delta\vec{E} = \nabla^2\vec{E}$ care apare în ecuaţia (1):

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} \quad (3),$$

se obţin pe rând derivatele spaţiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{E}}{\partial x} &= -i\cdot k_x\cdot\vec{E}; & \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} &= -k_x^2\vec{E}; \\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial y} &= -i\cdot k_y\cdot\vec{E}; & \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} &= -k_y^2\vec{E}; \quad (4) \\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial z} &= -i\cdot k_z\cdot\vec{E}; & \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} &= -k_z^2\vec{E}. \end{aligned}$$

Deoarece $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, prin adunarea relaţiilor (4) rezultă:

$$\Delta\vec{E} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\cdot\vec{E} = -k^2\cdot\vec{E} \quad (5).$$

În continuare vom evalua derivata temporală $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, care intervine în ecuaţia (1). Rezultă:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}, \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E} \quad (6).$$

Deoarece, $\omega^2 = k^2v^2$, după înlocuirea relaţiilor (5) şi (6) în (1) se obţine:

$$-k^2\vec{E}+\frac{1}{v^2}k^2v^2\vec{E}=0 \quad (7).$$

În concluzie (2) este o soluţie a ecuaţiei (1). Se arată la fel că (2) este o soluţie a celei de-a doua ecuaţie diferenţială din (1).

5.5. Proprietăţile undelor electromagnetice pentru un mediu fără surse.

a) Undele electromagnetice sunt unde transversale, adică vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt perpendiculari pe direcţia $\vec{k}$ de propagare a undei.

$$\vec{E}\perp\vec{k} \text{ sau } \vec{E}\perp\vec{v} \text{ şi } \vec{B}\perp\vec{k} \text{ sau } \vec{B}\perp\vec{k}$$

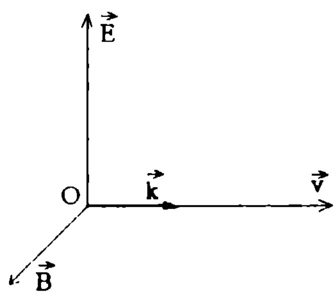


Fig. 5.1

Demonstraţie: Se porneşte de la expresia sub formă complexă a intensităţii câmpului electric:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cdot\exp\left\{i\left(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z\right)\right\} \quad (1),$$

care se derivează parţial în raport cu x, y, z:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}=-i\cdot k_x\cdot\vec{E},\quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial y}=-i\cdot k_y\cdot\vec{E},\quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial z}=-i\cdot k_z\cdot\vec{E} \quad (2).$$

După înmulţirea relaţiilor (2) cu versorii ortogonali $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ şi adunarea lor, rezultă:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\cdot\vec{e}_x+\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}\cdot\vec{e}_y+\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\cdot\vec{e}_z=-i\cdot\left(k_x\cdot\vec{e}_x+k_y\cdot\vec{e}_y+k_z\cdot\vec{e}_z\right)\cdot\vec{E}=-i\cdot\vec{k}\cdot\vec{E} \quad (3).$$

Întrucât $\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z$ şi deoarece $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$, din relaţia (3) se obţine:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}\left(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x\right) + \frac{\partial E_y}{\partial x}\left(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x\right) + \frac{\partial E_z}{\partial x}\left(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Analog: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial E_z}{\partial z}$.

Prin urmare:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \equiv \mathrm{div}\vec{E} \quad (4).$$

Substituind (4) în (3) se obţine relaţia: $\mathrm{div}\vec{E} = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E}$ sau

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E} \quad (4').$$

După simplificare cu vectorul $\vec{E}$ relaţia (4') devine:

$$\boxed{\vec{\nabla} = -i \cdot \vec{k}} \quad (5).$$

Analog, se arată că:

$$\mathrm{div}\vec{B} = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{B} \quad (6).$$

Deoarece mediul este, prin ipoteză, fără surse: ρ=0 şi $\vec{j} = 0$, ecuaţiile lui Maxwell, $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ şi $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, devin:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} \text{ şi } \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (7).$$

Atunci din ecuaţia (4') şi (6) se obţine:

$$-i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \text{ şi } -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8).$$

După simplificarea cu (-i) rezultă egalităţile importante:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \text{ şi } \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9).$$

Pe de altă parte, prin definiţie, produsele scalare:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = |\vec{k}| \cdot |\vec{E}| \cdot \cos\theta_1 \overset{(9)}{=} 0 \Rightarrow \cos\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \pi/2$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = |\vec{k}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta_2 \overset{(9)}{=} 0 \Rightarrow \cos\theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \pi/2.$$

Concluzia este $\vec{E} \perp \vec{k}$ şi $\vec{B} \perp \vec{k}$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt reciproc perpendiculari: $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Demonstraţie: Se porneşte de la ecuaţia lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

Deoarece $\vec{B}(\vec{r},t)$ se poate scrie sub forma unei unde armonice plane complexe,

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (11)$$

după efectuarea derivatei parțiale în raport cu t în relația (11):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (12),$$

ecuația (10) se scrie astfel:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (13).$$

Dar în virtutea relației (6), operatorul nabla se scrie, $\vec{\nabla} = -i \cdot \vec{k}$ care înlocuit în (13) conduce la relația:

$$-i \cdot \vec{k} \times \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{B} \;\Rightarrow\; \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (14).$$

Dacă se înmulțește scalar egalitatea (14) cu vectorul $\vec{E}$ se obține:

$$\vec{E} \cdot \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \omega \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (15).$$

Întrucât produsul mixt din stânga egalității (15) are doi factori identici, rezultă că acesta este egal cu zero. În concluzie:

$$\omega \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} \perp \vec{B},$$

ceea ce trebuie demonstrat.

c) Oscilațiile vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt în fază, adică, modulele lor $E(\vec{r},t)$ *și* $B(\vec{r},t)$ *ating concomitent și în aceleași puncte din spațiu valorile maxime, respectiv, minime.*

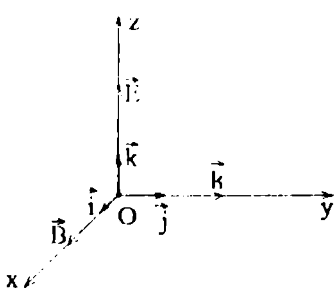


Fig.5.2

Demonstrația: Considerăm că unda electromagnetică se propagă în sensul axei y, iar vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt orientați ca în figura 5.2. Ținând seama de aceste orientări ale vectorilor, dacă se pleacă de la relația (14), se obține:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & E \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot k \cdot E \quad (15).$$

În acest caz relația (14), $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$, se va scrie astfel:

$$\vec{e}_x kE = \omega \vec{B} = \omega B \vec{e}_x \quad (16).$$

Rezultă:

$$KE = \omega B \quad (17).$$

Ținând seama de egalitatea

$$\omega/k = (2\pi/T) \cdot (\lambda/ 2\pi) = \lambda/T = v = 1/(\mu\varepsilon)^{1/2} \quad (18),$$

care este cunoscută, se obține:

$$E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} B \Rightarrow \sqrt{\varepsilon} E = \frac{B}{\sqrt{\mu}},$$

sau

$$\boxed{E = \frac{B}{v}} \quad (19).$$

Din relația (19) rezultă că dacă E = 0 atunci B = 0, sau dacă $E = E_{max}$ atunci $B = B_{max}$. Cu alte cuvinte vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ***oscilează în fază*** (sunt în concordanță de fază). În consecință, forma undei electromagnetice este (v. fig.5.3):

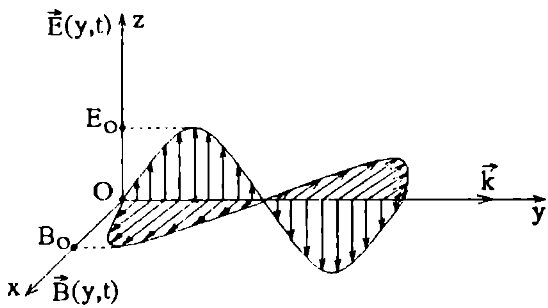


Fig.5.3

Cei trei vectori $\vec{E}$, $\vec{B}$ și $\vec{k}$ formează un triedru drept.

5.6. Energia undelor electromagnetice. Vectorul Poynting. Teorema Heaviside-Umov-Poynting

5.6.1. Energia undelor electromagnetice. Densitatea de energie electromagnetică

Ca şi în cazul altor tipuri de unde, undelor electromagnetice le putem asocia un transport de energie, deoarece câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ implică înmagazinarea de energie.

***Definiţie**: Considerăm o regiune din spaţiu a unui mediu material prin care se propagă o undă electromagnetică şi fie S o suprafaţă ce inchide în această regiune un volum τ_S. Dacă $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt câmpurile asociate undei electromagnetice, energia totală, $W_{e.m.}$, asociată undei electromagnetice din interiorul acestei suprafeţe este egală, prin definiţie, cu:*

$$W_{e.m.} = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_{\tau} \vec{E}^2 d\tau + \frac{1}{2\mu} \iiint_{\tau} \vec{B}^2 d\tau \quad (1),$$

unde

$$W_{el.} = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_{\tau} \vec{E}^2 d\tau \quad (2)$$

reprezintă energia înmagazinată în câmpul electric, iar

$$W_{mg.} = \frac{1}{2\mu} \iiint_{\tau} \vec{B}^2 d\tau \quad (2')$$

reprezintă energia înmagazinată în câmpul electric din unda electromagnetică ce străbate mediul material considerat.

Deoarece prin propagarea undei electromagnetice, valorile lui $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, în interiorul suprafeţei S, se modifică, se va modifica şi energia electromagnetică $W_{e.m.}$ din volumul τ.

Altfel spus, propagării undei electromagnetice i se asociază un transport de energie prin suprafaţa S.

În cazul spaţiului liber (vid) în relaţiile (1), (2) şi (2') constantele de material ε şi μ se vor înlocui cu ε_0 şi, respectiv, μ_0.

5.6.2. Densitatea de energie electromagnetică

Densitatea de energie electromagnetică $w_{e.m.}$ se defineşte astfel:

$$w_{e.m.} = \frac{dW_{e.m.}}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2 = w_{el.} + w_{mg.}, \quad (1')$$

unde

$$w_{el} = \frac{\varepsilon}{2}\vec{E}^2 \text{ şi } w_{mg.} = \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2 \quad (2'')$$

reprezintă densităţile de energie electrică, respectiv magnetică.

5.6.3. Definiţia vectorului Poynting. Semnificaţie fizică. Unitate de măsură

a) Definiţia vectorului Poynting.

***Definiţie**: Pentru a caracteriza transportul de energie electromagnetică vom defini un vector $\vec{\Pi}$, denumit vectorul Poynting:*

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} \quad (3).$$

Modulul vectorului Poynting

$$\left|\vec{\Pi}\right| \equiv \Pi = \frac{1}{\mu}\left|\vec{E} \times \vec{B}\right| = \frac{1}{\mu}E \cdot B \quad (4)$$

reprezintă din punct de vedere fizic densitatea fluxului de energie, adică energia transportată prin unitatea de arie a suprafeţei S normală la direcţia de propagare a undei în unitatea de timp.

Această interpretare rezultă din analiza dimensională a relaţiei (4) sau din unitatea de măsură a lui $\left|\vec{\Pi}\right|$. Astfel, dacă $d\vec{s}$ este un element de arie orientat al suprafeţei închise S, atunci produsul scalar (fluxul elementar al vectorului Poynting)

$$d\Phi_{\vec{\Pi}}^{S} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \Pi \cdot ds \cdot \cos\left(\vec{\Pi}, \vec{n}\right) = \Pi \cdot ds_{\vec{n}}\text{, unde } d\vec{s} = ds \cdot \vec{n} \quad (5)$$

reprezintă cantitatea de energie (elementară) electromagnetică, $dW_{e.m.}$, ce iese din suprafaţa închisă S, prin elementul de arie $d\vec{s}$, în unitatea de timp sau *fluxul elementar al energiei electromagnetice prin suprafaţa* $d\vec{s}$ ($ds_{\vec{n}} = ds \cdot \cos(\vec{\Pi}, \vec{n})$, $ds_{\vec{n}} \perp \vec{\Pi}$):

$$dW_{e.m} \equiv d\Phi_{\vec{\Pi}}^{S} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \Pi \cdot ds_{\vec{n}} \quad (6).$$

În acest caz, energia totală (integrală) electromagnetică, $W_{e.m}$, care iese prin suprafaţa închisă S, în unitatea de timp, sau fluxul energiei electromagnetice prin suprafaţa S, se obţine prin integrarea relaţiei (6):

$$W_{e.m.} = \oiint_S dW_{e.m.} = \oiint_S d\Phi_{\vec{\Pi}}^{S} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \Phi_{\vec{\Pi}}^{S} \quad (7)$$

şi este egală cu fluxul vectorului Poynting extins la suprafaţa închisă S.

b) Orientarea vectorului Poynting.

Vectorul $\vec{\Pi}$ este perpendicular pe planul vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ şi coincide ca direcţie şi sens cu vectorul viteză $\vec{v}$ al undei electromagnetice (sau cu vectorul de undă $\vec{k}$). Direcţia şi sensul vectorului $\vec{\Pi}$ arată direcţia şi sensul de propagare a energiei electromagnetice.

c) Unitatea de măsură în S.I. a modulului vectorului $\vec{\Pi}$.

Deoarece:

$$\Pi = \frac{\left|\vec{E} \times \vec{B}\right|}{\mu} = \frac{1}{\mu} E \cdot B, \ \left|\vec{E} \times \vec{B}\right| = E \cdot B \cdot \sin\frac{\pi}{2} = E \cdot B \quad (8)$$

şi dacă se au în vedere relaţiile cunoscute

$$B = \frac{\mu I}{2r} \text{ şi } E = \frac{U}{d} \quad (9),$$

rezultă:

$$\langle B \rangle = \langle \mu \rangle \frac{\langle I \rangle}{\langle r \rangle} \text{ şi } \langle E \rangle = \frac{\langle U \rangle}{\langle d \rangle} \quad (10).$$

Deci, unitatea de măsură în S.I. pentru Π este:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{\langle \mu \rangle} \cdot \langle E \rangle \cdot \langle B \rangle = \frac{1}{\langle \mu \rangle} \cdot \left(\frac{\langle U \rangle}{\langle d \rangle} \right) \cdot \langle \mu \rangle \cdot \left(\frac{\langle I \rangle}{\langle r \rangle} \right) = \frac{V \cdot A}{m^2} \quad (11).$$

Pe de altă parte, din expresia legii lui Joule-Lenz W=U·I·t rezultă:

$$\langle U \cdot I \rangle = \langle U \rangle \cdot \langle I \rangle = V \cdot A = \frac{\langle W \rangle}{\langle t \rangle} = \frac{J}{s} \quad (12).$$

Cu alte cuvinte,

$$V\ A = J/s \quad (13)$$

şi în concluzie:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{J}{m^2 s} = \frac{J/s}{m^2} = \frac{watt}{m^2} \quad (14).$$

Din relaţia (14) rezultă semnificaţia fizică a modulului vectorului Poynting ca fiind energia transferată prin unitatea de arie a suprafeţei S în unitatea de timp.

Prin urmare, vectorul Poynting are dimensiunea unei puteri pe unitatea de arie sau a unei energii pe unitatea de arie şi unitatea de timp, adică: $<\Pi>_{S.I.} = J/(s\ m^2) = watt/m^2$.

5.6.4. Teorema Heaviside-Umov-Poynting. Legea conservării energiei electromagnetice

***Legea conservării energiei electromagnetice**: Rata de scădere în timp (viteza de variaţie sau scădere în unitatea de timp) a energiei înmagazinate în câmpul electromagnetic care se propagă printr-un volum finit τ_S din spaţiu, mărginit de suprafaţa S, este egală cu fluxul vectorului Poynting (sau fluxul energiei electromagnetice) prin suprafaţa S plus pierderile prin efect Joule-Lenz care au loc în domeniul de volum τ_S.*

sau

Scăderea energiei electromagnetice în unitatea de timp $\left(-\frac{\partial W_{e.m}}{\partial t}\right)$ în domeniul considerat de volumul τ_S este egală cu suma dintre fluxul de energie electromagnetică $\Phi^S_{\vec{\Pi}}$ care străbate suprafaţa S ce mărgineşte volumul dat τ şi căldura degajată în domeniul respectiv în unitatea de timp prin efect Joule-Lenz, $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)$.

***Forma matematică a acestei legi**:* $\boxed{-\frac{\partial W_{e.m.}}{\partial t} = \Phi^S_{\vec{\Pi}} + \frac{\partial W}{\partial t}}$, unde $\Phi^S_{\vec{\Pi}} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$ reprezintă fluxul de energie electromagnetică ce străbate suprafaţa inchisă S (sau cantitatea de energie ce traversează suprafaţa S în unitatea de timp).

Demonstraţie: Se porneşte de la sistemul ecuaţiilor lui Maxwell sub formă diferenţială pentru un mediu cu surse ($\rho\neq0$, $j\neq0$). Prin ipoteză, mediul este considerat omogen şi izotrop, adică mărimile de material ε, μ şi σ sunt constante.

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (15), \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu\left(\vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \quad (16).$$

Dacă se înmulţeşte scalar prima ecuaţie cu $\vec{B}$ şi a doua ecuaţie cu $\vec{E}$, după scăderea acestora se obţine:

$$\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} = \mu\vec{E}\cdot\vec{j} + \varepsilon\mu\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (17).$$

Deoarece:

$$\varepsilon\mu\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \quad (18)$$

şi dacă se face apel la egalitatea vectorială

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} \quad (19)$$

(fără demonstraţie), după împărţirea cu μ, relaţia (17) devine:

$$\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = -\vec{E}\cdot\vec{j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu}\right) \quad (20).$$

Dacă se integrează egalitatea (20) pe domeniul de volum τ_S, mărginit de suprafaţa S, se obţine:

$$\frac{1}{\mu}\iiint_{\tau_S}\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot d\tau = -\iiint_{\tau_S}\vec{E}\cdot\vec{j}\cdot d\tau - \frac{1}{2}\iiint_{\tau_S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu}\right)\cdot d\tau \quad (21).$$

Având în vedere legea lui Ohm sub formă diferenţială $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, sub forma integrală a legii Joule-Lenz:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint_{\tau_S}\sigma\vec{E}^2 d\tau = \sigma\iiint_{\tau_S}\vec{E}^2 d\tau \quad (22)$$

relaţia (21) se va scrie astfel:

$$-\frac{1}{2}\iiint_{\tau_S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right)d\tau = \frac{1}{\mu}\iiint_{\tau_S}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\tau + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (23).$$

Deci volumul τ_S mărginit de suprafaţa S este considerat imobil (deci acesta nu depinde de t), atunci:

$$-\frac{1}{2}\iiint_{\tau_S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}^2+\frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right)d\tau=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau_S}\left(\varepsilon\vec{E}^2+\frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right)d\tau \quad \textbf{(24)}.$$

Deoarece, prin definiţie, mărimea:

$$W_{e.m.}=\frac{1}{2}\iiint_{\tau_S}\left(\varepsilon\vec{E}^2+\frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right)d\tau \quad (25)$$

reprezintă energia electromagnetică totală conţinută în volumul τ_S, iar vectorul $\vec{\Pi}=\frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}$ este vectorul Poynting asociat undei electromagnetice considerate. Dacă se ţine seama de (24), egalitatea (23) devine:

$$-\frac{\partial W_{e.m.}}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial t}+\iiint_{\tau_S}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}\right)d\tau \quad (26).$$

În continuare, în relaţia (26) vom utiliza teorema Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_{\tau_S}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}\right)d\tau=\oiint_S\vec{\Pi}\cdot d\vec{s}\equiv\Phi_{\vec{\Pi}}^S \quad (27).$$

Relaţia (26) devine:

$$\boxed{-\frac{\partial W_{e.m.}}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial t}+\Phi_{\vec{\Pi}}^S} \quad (28),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Expresia (28) reprezintă *legea conservării energiei* pentru câmpul electromagnetic. Din această teoremă rezultă că în cazul proceselor electromagnetice energia se conservă, putând să se transforme în alte forme de mişcare cum ar fi mişcarea termică.

5.7. Intensitatea undei electromagnetice armomice plane

***Definiţie**: Intensitatea I a undei electromagnetice este media temporală a valorii (modulului) vectorului Poynting asociat undei electromagnetice (u.e.m): I = <Π>.*

***Definiţia mediei temporale a unei funcţii periodice**: Fie funcţia f(t) periodică cu perioada T, adică f(t + T) = f(T) (1), T este un număr real. Media temporală pe intervalul de timp t = T, a funcţiei f(t) este prin definiţie:*

$$f(t) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad (2).$$

Observaţie: Nu trebuie să se confunde semnul "<>" de la media temporală, cu acelaşi semn de la definiţia unităţii de măsură a unei mărimi fizice.

5.7.1. Teoremele relativ la intensitatea undei electromagnetice plane

Teorema 1: *Modulul (valoare) vectorului Poynting are expresia următoare:* $\left|\vec{\Pi}\right| \equiv \Pi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2$.

Demonstraţie: Fie $\vec{\Pi}$ vectorul Poynting al unei unde electromagnetice caracterizată de vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} = \left|\vec{\Pi}\right| \cdot \vec{n} = \left|\frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B}\right| \cdot \vec{n} = \frac{1}{\mu}\left|\vec{E} \times \vec{B}\right| \cdot \vec{n} \quad (3),$$

unde $\vec{n}$ este versorul vectorului Poynting $\vec{\Pi}$. Deoarece $\vec{E} \perp \vec{B}$ rezultă că:

$$\left|\vec{E} \times \vec{B}\right| = E \cdot B \cdot \sin\frac{\pi}{2} = E \cdot B \quad (4)$$

şi prin urmare relaţia (3) devine:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu} \cdot E \cdot B \cdot \vec{n} \quad (5).$$

În continuare, ne prevalăm de relaţiile care ne arată că vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt în concordanţă de fază şi care au fost deja demonstraţi anterior:

$$B = \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot E \text{ sau } \frac{B}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = E \text{ sau } v \cdot B = E \quad (6).$$

În acest caz (6) devine:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \vec{E}^2 \cdot \vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 \cdot \vec{n} \quad (7).$$

Deoarece prin ipoteză vectorul intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ are forma unei unde armonice plane tridimensionale:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \quad (8),$$

substituind (8) în (7) se obţine:

$$\vec{\Pi} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \cdot \vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 \cdot \vec{n} \quad (9).$$

Întrucât $\vec{n}$ este versorul vectorului $\vec{\Pi}$ şi deci $|\vec{n}|=1$, valoarea (modulul) vectorului Poynting Π se poate scrie dacă se porneşte de la relaţiile (9) sub formele următoare:

$$\left|\vec{\Pi}\right| \equiv \Pi = \left|\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \cdot \vec{n}\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \cdot |\vec{n}| \quad (10),$$

Deci:

$$\Pi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 \quad (10').$$

Aici s-au folosit proprietăţile modulului şi faptul că mărimile $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$, $\vec{E}_0^2$ $\cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)$ sunt pozitive. Relaţia (10') demonstrează teorema 1.

Deoarece, prin definiţie, densitatea de energie electrică este $w_{el.} = \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}^2$, din (9) rezultă, de asemenea, că:

$$\left|\vec{\Pi}\right| \equiv \Pi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot w_{el} = 2 \cdot v \cdot w_{el} \quad (11).$$

***Teorema 2**: Intensitatea I a unei unde electromagnetice armonice plane tridimensionale este proporţională (~) cu pătratul amplitudinii $\vec{E}_0^2$ a vectorului intensitate a câmpului electric şi are expresia:* $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow I \sim \vec{E}_0^2$.

Demonstraţie: În virtutea relaţiei (10') şi a definiţiei intensităţii I a unei unde electromagnetice armonice se poate scrie:

$$I \equiv \langle \Pi \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \Pi dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \int_0^T \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) dt = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot J \quad (12),$$

unde T este perioada funcţiei periodice $\cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)$. Pentru a evalua integrala notată cu J care apare în (12) se va utiliza relaţia trigonometrică cunoscută:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (13)$$

(v. anexa). Rezultă:

$$J \equiv \int_0^T \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) dt = \int_0^T \frac{1 + \cos\left(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r}\right)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos\left(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r}\right) dt$$

deci:

$$J = \frac{T}{2} + J_1 \ (14).$$

În continuare vom arăta că integrala $J_1 = 0$. Într-adevăr,

$$J_1 = \int_0^T \cos\left(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r}\right) dt = \frac{1}{2\omega} \cdot \sin\left(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r}\right)\Big|_0^T =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot T - 2\vec{k} \cdot \vec{r}\right) - \sin\left(-2\vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right] \quad (15).$$

Deoarece sunt cunoscute relaţiile trigonometrice:

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin\alpha, \quad k = 2$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad (16),$$

rezultă imediat că: $J_1 = \frac{1}{2\omega}\left(-\sin 2\vec{k} \cdot \vec{r} + \sin 2\vec{k} \cdot \vec{r}\right) = 0$. Înlocuind $J = T/2$ în (12) rezultă că intensitatea undei electromagnetice $I = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţii: (relativ la conceptul de intensitate a undei electromagnetice)

1) În optică se întrebuinţează pentru intensitatea undei electromagnetice (intensitatea luminoasă, $\bar{I} = I$ mare cu bară deasupra) următoarea definiţie:

$$\bar{I} = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \left\langle \vec{E}_0^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\rangle \quad (17).$$

Efectuând integrala din expresia (17) se obţine, până la un factor egal cu $\sqrt{\varepsilon/\mu}$, aceeaşi expresie ca în teorema 2. Într-adevăr, rezultă relaţia

$$\bar{I} = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \frac{1}{T}\cdot\vec{E}_0^2\cdot\left\langle \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\rangle = \vec{E}_0^2\cdot\frac{1}{T}\cdot\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)dt = \frac{1}{T}\cdot\vec{E}_0^2\cdot I = \frac{1}{2}\cdot\vec{E}_0^2$$

(18), deoarece integrala I, care apare aici, are valoarea cunoscută dedusă anterior: I = T/2. Din cele spuse mai înainte (teorema 2) avem relaţia:

$$I = \left\langle \Pi \right\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\vec{E}_0^2 \quad (19),$$

ceea ce arată că cele două mărimi I şi $\bar{I}$ diferă una de alta doar prin factorul $\sqrt{\varepsilon/\mu}$: $I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\bar{I}$.

În abordarea subiectului relativ la interferenţa luminii, care va urma, se va utiliza pentru definiţia intensităţii luminoase relaţia (18)

$$\bar{I} = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\vec{E}_0^2 \quad (20).$$

În cele ce urmează, mărimea $\bar{I}$, chiar dacă diferă de I printr-un factor, va fi notată, în continuare, tot cu I.

2) Intensitatea undei electromagnetice (intensitatea câmpului luminos $\vec{E}$) este o mărime proporţională cu valoarea medie a energiei conţinută în unitatea de volum a câmpului electromagnetic, deci cu densitatea $w_{e.m.}$ de energie radiantă. Într-adevăr:

$$w_{e.m.} = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot\vec{E}^2 \quad (21),$$

şi deci $\bar{I} = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{2}{\varepsilon}\cdot w_{el} \right\rangle = \frac{2}{\varepsilon}\left\langle w_{el}\right\rangle \quad (22).$

Cu alte cuvinte:

$$\bar{I} \sim \left\langle w_{el}\right\rangle \quad (23).$$

3) Wiener a demonstrat experimental că în fenomenele luminoase vectorul inducţiei magnetice $\vec{B}$ din unda electromagnetică nu joacă nici un rol. Important este doar vectorul intensitate electrică $\vec{E}$ (vectorul luminos).

Capitolul 6

INTERFERENȚA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

6.1. Introducere

a) Definiția fenomenului de interferență.

Spre deosebire de undele mecanice la care rezultatul interferenței (suprapunerii) undelor se putea observa direct urmărind amplitudinea rezultantă, în cazul luminii, rezultatul interferenței se poate aprecia numai după intensitatea luminoasă I (definită anterior) în punctul respectiv. Ochiul sau orice receptor optic prezintă o anumită inerție și din acest motiv acestea vor sesiza doar acțiunea medie în timp a energiei undelor electromagnetice conținută în unitatea de volum a câmpului electromagnetic. (Prima definiție a fenomenului de interferență este generală, iar a doua este mai precisă).

***Definiția 1**: Prin interferența luminii se înțelege compunerea (suprapunerea) în același loc din spațiu a undelor electromagnetice provenite de la două sau de la un număr finit de surse coerente de radiație optică, ce oscilează după aceeași direcție și care au aceeași frecvență (sau aceeași lungime de undă).*

***Definiția 2**: Două unde luminoase de aceeași frecvență interferă într-un punct, dacă intensitatea luminoasă rezultantă, I, în acel punct nu este egală cu suma intensităților componente: $I \neq I_1 + I_2$, (când termenul de interferență este nenul).*

b) Condițiile necesare interferenței a două unde.

Pentru ca două unde electromagnetice să interfere este necesar ca ele să îndeplinească următoarele condiții:

- să se intersecteze într-o regiune din spațiu,
- să fie monocromatice (sau omogene),
- să îndeplinească condițiile de coerență,
- să aibă aceeași stare de polarizare.

c)Proprietățile mediei temporale.

Fie o funcție periodică f(t) de perioadă

T: $f(t + T) = f(t)$ (1).

Prin definiție, media temporală a funcției f(t) pe un interval de timp egal cu T este:

$$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot dt \quad (2).$$

Se demonstrează ușor următoarele proprietăți ale mediei temporale:

I. Dacă f(t), g(t) sunt două funcții periodice temporale având aceeași perioadă T, atunci:

$$\langle \alpha\cdot f(t) \pm \beta\cdot g(t)\rangle = \alpha\cdot\langle f(t)\rangle \pm \beta\cdot\langle g(t)\rangle \quad (3),$$

unde α, β sunt constante arbitrare. Caz particular:

$$\langle \alpha\cdot f(t)\rangle = \alpha\cdot\langle f(t)\rangle \ (4).$$

II. Dacă f(t), g(t) sunt două funcții periodice în timp având aceeași perioadă T, atunci:

$$\langle f(t)\cdot g(t)\rangle \neq \langle f(t)\rangle\cdot\langle g(t)\rangle \quad (5).$$

III. $\langle \alpha\rangle = \alpha$, unde α este o constantă.

6.2. Condiția necesară și suficientă de interferență. Termenul de interferență

a) Teorema care exprimă condiția de interferență.

Teoremă: *Condiția necesară și suficientă pentru ca două unde de aceeași frecvență, caracterizate de vectorii intensitate a câmpului electric (vectorii luminoși)* $\vec{E}_1(t)$ *și* $\vec{E}_2(t)$ *să interfere într-un anumit punct din spațiu este ca media temporală*

$$\langle \vec{E}_1(t)\cdot\vec{E}_2(t)\rangle \neq 0 \quad (1)$$

să fie nenulă.

Demostrație: Să arătăm necesitatea. Dacă relația (1) are loc, rezultă $I \neq I_1 + I_2$. Pentru aceasta, presupunem că într-un punct arbitrar P din spațiu există două unde electrice (de tip armonic) cu aceeași frecvență, caracterizate de vectorii intensitate a câmpului electric $\vec{E}_1(t)$ și $\vec{E}_2(t)$.

În conformitate cu *principiul superpoziției*, câmpul electric rezultant în acest punct va fi suma vectorială a intensităților câmpurilor $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$, adică:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (2).$$

Deoarece $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$ sunt funcții de timp și $\vec{E}$ va fi, de asemenea, funcție de timp.

Să evaluăm intensitatea I rezultantă a câmpului electric total $\vec{E}(t)$ în punctul P considerat. În acest scop reamintim definiția intensității undei electromagnetice (utilizată în optică) ca medie temporală a pătratului vectorului câmp electric:

$$I = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle \quad (3).$$

Prin urmare, intensitatea totală a luminii I în punctul dat P va fi:

$$I = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \left\langle \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 \right\rangle = \left\langle \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2 \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \quad (4).$$

Observație: Când se ridică la pătrat o sumă de doi vectori, termenul mixt se scrie ca un produs scalar a doi vectori. În acest caz:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cdot \cos(\widehat{\vec{E}_1, \vec{E}_2}) \quad (5).$$

Dacă vom utiliza în (4) proprietățile (3) și (4) din subcapitolul 6.1. ale mediei temporale, se obține:

$$I = \left\langle \vec{E}_1^2 \right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^2 \right\rangle + 2 \cdot \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \quad (6),$$

în care $I_1 = \left\langle \vec{E}_1^2 \right\rangle$ și $I_2 = \left\langle \vec{E}_2^2 \right\rangle$ reprezintă intensitățile luminoase pe care le-ar produce separat în punctul P vectorii $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$.

Examinând relația (6) se pot desprinde două situații distincte:

Situația 1: Dacă $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle = 0$, atunci $\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \left\langle \vec{E}_1^2 \right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^2 \right\rangle$ sau $I=I_1+I_2$. În virtutea definiției 2 care a fost dată interferenței, nu există interferență a celor două unde deoarece $I \neq I_1+I_2$.

Situația 2: Dacă $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \neq 0$, atunci $\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle \neq \left\langle \vec{E}_1^2 \right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^2 \right\rangle$ sau $I \neq I_1+I_2$. În acest caz cele două unde interferă, fiind îndeplinită definiția 2. Reciproca teoremei (suficiența) se demonstrează în mod similar.

Termenul $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle$, care apare în relația (6), se numește *termen de interferență*.

În concluzie, condiția necesară şi suficientă pentru ca două unde luminoase de aceeaşi frecvență să interfere într-un punct din spațiu este ca $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \neq 0$. Prin urmare: $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \neq 0 \;\Leftrightarrow\; I \neq I_1 + I_2$.

b) Cicumstanțele matematice de validitate ale condiției de interferență: $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \neq 0$.

Să explicităm produsul scalar care apare în inegalitatea $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \neq 0$:

$$\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle = \left\langle E_1 \cdot E_2 \cdot \cos\theta \right\rangle \neq 0 \quad (7).$$

Deoarece unghiul θ dintre vectorii $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$ este presupus constant, rezultă $\cos\theta$=constant şi atunci, în virtutea proprietății mediei $\left\langle \alpha \cdot f(t) \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle f(t) \right\rangle$, se poate scrie:

$$\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle = \cos\theta \cdot \left\langle E_1 \cdot E_2 \right\rangle \neq 0 \quad (8).$$

Examinând inegalitatea (8) se constată că aceasta este satisfăcută dacă sunt îndeplinite *simultan* două condiții:

$$\cos\theta \neq 0 \quad \text{şi} \quad \left\langle E_1 \cdot E_2 \right\rangle \neq 0 \quad (9).$$

În cele ce urmează vom admite că undele luminoase reprezentate de vectorii $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$ sunt *liniar polarizate*, cu alte cuvinte, $\vec{E}_1 \| \vec{E}_2$ sau $\theta = 0$ ceea ce implică:

$$\cos\theta = \cos 0 = 1 \neq 0 \quad (10).$$

Prin urmare, din (8) rezultă:

$$\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle = \left\langle E_1 \cdot E_2 \right\rangle \neq 0 \quad (11).$$

În concluzie, situațiile matematice de valabilitate pentru relația $\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \neq 0$ sunt următoarele:

$$\cos\theta \neq 0 \text{ şi } \left\langle E_1 \cdot E_2 \right\rangle \neq 0 \quad (12).$$

6.3. Definiția coerenței a două unde luminoase. Condiția de coerență a două unde luminoase

a) Diferența de fază şi de drum a două unde monocromatice

Să considerăm două surse luminoase punctiforme S_1 şi S_2 (v. fig. 6.1) care emit radiații de aceeaşi pulsație $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2\pi\nu$ (aceeaşi frecvență ν sau aceeași lungime de undă λ). Într-un punct P arbitrar din spațiu, elongațiile celor două unde $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$, prin ipoteză paralele ($\vec{E}_1 \| \vec{E}_2$), presupunem că au ecuațiile:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1,t) = \vec{E}_{1o}\cdot\cos(\omega t - \vec{k}_1\cdot\vec{r}_1), \quad \vec{E}_2(\vec{r}_2,t) = \vec{E}_{2o}\cdot\cos(\omega t - \vec{k}_2\cdot\vec{r}_2) \quad (1).$$

Pentru simplitatea calculelor vom considera că cele două unde au aceeași amplitudine

$$\vec{E}_o:\ \vec{E}_{1o} = \vec{E}_{2o} = \vec{E}_o = \text{constant.} \quad (2).$$

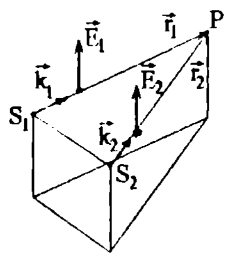


Fig. 6.1

Direcțiile de propagare a celor două unde sunt specificate de vectorii de undă $\vec{k}_1$ și $\vec{k}_2$, care au același modul (deoarece $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$):

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3).$$

În plus, cei doi vectori au aceeași direcție și sens cu vectorii de poziție $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ ai punctului P, față de sursele S_1 și S_2. De aceea:

$$\vec{k}_1\cdot\vec{r}_1 = k_1\cdot r_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot r_1 \equiv \varphi_1, \qquad \vec{k}_2\cdot\vec{r}_2 = k_2\cdot r_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot r_2 \equiv \varphi_2,$$

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k_1 = k_2 = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4).$$

În aceste condiții ecuațiile (1) se pot retranscrie astfel:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1,t) = \vec{E}_o\cdot\cos(\omega t - \varphi_1), \quad \vec{E}_2(\vec{r}_2,t) = \vec{E}_o\cdot\cos(\omega t - \varphi_2) \quad (5).$$

Dacă notăm cu ϕ_1 și ϕ_2 *fazele* celor două unde:

$$\phi_1 = \omega t - \varphi_1,\ \phi_2 = \omega t - \varphi_2,\ (6)$$

prin definiție, *diferența de fază* a celor două unde este:

$$\Delta\varphi = \phi_1 - \phi_2 = \omega t - \varphi_1 - (\omega t - \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 = k(r_2 - r_1) = k\Delta r = (2\pi/\lambda)\cdot\Delta r \quad (7).$$

În concluzie, $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\cdot\Delta r$, unde Δr reprezintă *diferența de drum* a celor două unde.

b) Definiția coerenței și condiția de coerență a două unde liniar polarizate, monocromatice (sau omogene) și armonice.

Să examinăm în ce situație matematică este valabilă condiția $\langle E_1 \cdot E_2 \rangle \neq 0$ la care am ajuns în subcapitolul 6.2. Deoarece cele două unde sunt considerate liniar polarizate ($\vec{E}_1 \| \vec{E}_2$), atunci prima condiție de interferență cos0=cos0=1≠0 este îndeplinită și prin urmare:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cdot \cos 0 = E_1 \cdot E_2 = E_0^2 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) \cdot \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (8).$$

Să evaluăm, pornind de la (8), media temporală a produsului $E_1 E_2$ și să vedem în ce condiții aceasta este diferită de zero:

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \langle E_0^2 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) \cdot \cos(\omega t - \varphi_2) \rangle \quad (9).$$

Pentru a evalua integrala care apare în (9) se utilizează relația trigonometrică cunoscută:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right] (10).$$

Rezultă:

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \langle \cos\left[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \left\{ \langle \cos\left[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] \rangle + \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle \right\} \quad (11).$$

În (11) s-a utilizat proprietatea mediei: $\langle f(t) + g(t) \rangle = \langle f(t) \rangle + \langle g(t) \rangle$.

În continuare, să arătăm că:

$$\langle \cos\left[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] \rangle = 0 \quad (12).$$

Într-adevăr:

$$\langle \cos\left[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos\left[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left\{ \frac{1}{2\omega} \cdot \sin\left[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] \right\} \Big|_0^T =$$

$$= \frac{1}{2\omega T} \cdot \left\{ \sin\left[2\omega T - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] - \sin\left[-(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \right\} \quad (13).$$

Întrucât:

$$2\omega T = 2 \cdot 2\pi\nu T = 4\pi = 2k\pi, \ k = 2;$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin\alpha; \ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad (14)$$

rezultă că integrala de mai sus are valoarea zero. În consecință:

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \frac{1}{2} E_o^2 \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = \frac{1}{2} E_o^2 \langle \cos \Delta\varphi \rangle \quad (15).$$

Definiția coerenței a două unde monocromatice: *Dacă diferența de fază $\Delta\varphi$ a două unde de aceeași frecvență, care se compun într-un punct din spațiu, este constantă în timp, se spune că cele două unde, respectiv cele două surse, sunt **coerente**:*

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{constant.} \quad (16)$$

(condiția de coerență).

Relația:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(r_2 - r_1) = (2\pi)\ \Delta r/\lambda = \text{constant.} \quad (17)$$

constituie *condiția de coerență* a două unde luminoase. În această ipoteză (15) devine:

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \frac{1}{2} E_o^2 \cdot \langle \cos \Delta\varphi \rangle = \frac{1}{2} E_o^2 \cos \Delta\varphi = \text{constant} \neq 0. \quad (18).$$

În concluzie, cele două unde monocromatice liniar polarizate interferă, adică $<E_1E_2> \neq 0$, dacă $\Delta\varphi$ = const., cu alte cuvinte în cazul în care acestea sunt și coerente. Din relația (18) mai rezultă că cos $\Delta\varphi$ = =constant $\neq 0$ dacă $\Delta\varphi \neq (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

6.4. Intensitatea luminoasă a două surse coerente într-un punct din spațiu.

Prin definiție, această mărime are expresia:

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle = \left\langle \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right)^2 \right\rangle = \langle \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2 \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2 \cdot \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle,$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (1).$$

Să scriem în continuare expresiile intensităților luminoase funcție de amplitudinile undelor care le produc (v. teorema 2, cap 5):

$$I_1 = \frac{1}{2} E_{1o}^2 \quad \text{și} \quad I_2 = \frac{1}{2} E_{2o}^2 \ (2).$$

Prin ipoteză, $E_{1o} = E_{2o} = E_o$ și $\vec{E}_1 \| \vec{E}_2$ (unde liniar polarizate). Prin urmare,

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cos(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = E_1 \cdot E_2 \cos 0 = E_1 E_2 \quad (3)$$

și

$$I = \frac{1}{2}E_o^2 + \frac{1}{2}E_o^2 + 2 \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle \quad (3').$$

În virtutea relației (15) $\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \langle \cos\Delta\varphi \rangle$. Putem, deci, scrie:

$$I = \frac{1}{2}E_0^2 + \frac{1}{2}E_0^2 + 2\frac{1}{2}E_0^2\langle \cos\Delta\varphi \rangle \quad (3'').$$

Deoarece cele două unde sunt coerente (prin ipoteză), $\Delta\varphi$ = constant, rezultă $\cos\Delta\varphi$ = constant $\neq 0$ și prin urmare:

$$\langle \cos\Delta\varphi \rangle = \cos\Delta\varphi \neq 0 \quad (4).$$

S-a utilizat aici proprietatea mediei temporale care afirmă că dacă α = =constant, atunci $\langle \alpha \rangle = \alpha$. Rezultă că intensitatea luminoasă totală I în punctul P se poate scrie astfel:

$$I = E_o^2(1 + \cos\Delta\varphi) \quad (5).$$

Dacă ne amintim relația trigonometrică pentru semiunghi:

$$\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\Delta\varphi}{2}} \quad (6),$$

expresia (5) se poate exprima astfel:

$$I = 2E_o^2 \cdot \cos^2\frac{\Delta\varphi}{2} = 2E_o^2 \cdot \cos^2\frac{k \cdot \Delta r}{2} = 2E_o^2\cos^2\frac{2\pi\Delta r}{2\lambda} = 2E_o^2 \cdot \cos^2\frac{\pi\Delta r}{\lambda} \quad (7).$$

Să comentăm din punct de vedere fizic relația (7):

$$I = 2E_o^2 \cdot \cos^2\frac{\pi\Delta r}{\lambda}. \quad (8)$$

a) Intensitatea luminoasă I va fi maximă în punctul P în cazul în care

$$\cos^2\frac{\pi\Delta r}{\lambda} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\pi\Delta r}{\lambda} = k\pi \; (9),$$

adică atunci când diferența de drum dintre cele două unde

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2k\frac{\lambda}{2} \quad (10),$$

unde k este un număr întreg (0, ±1, ±2, ±3,...). Intensitatea luminoasă, în acest caz, are valoarea:

$$I_{max} = 2E_o^2 \quad (11).$$

b) Intensitatea luminoasă atinge, în punctul dat P, valori minime dacă: $\cos^2\frac{\pi\Delta r}{\lambda}=0 \Rightarrow \frac{\pi\Delta r}{\lambda}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ adică, atunci când diferența de drum dintre cele două unde

$$\Delta r = r_1 - r_2 = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \quad (12).$$

Din relația (8) se obține: $\cos^2\frac{\pi\Delta r}{\lambda}=\cos^2(2k+1)\frac{\pi}{2}=0$ și prin urmare:

$$I_{min}=0 \quad (13).$$

***Drumul geometric și optic**: Diferența r_2 - r_1 este o diferență de drum geometric și reprezintă diferența dintre distanțele parcurse de razele de lumină în vid până în punctul dat.*

Dacă într-un mediu transparent având indicele de refracție n, lumina străbate o distanță r, produsul nr se numește drum optic și se notează cu:

$$(r) = nr \quad (14).$$

În acest caz condițiile de maxim și minim de interferență se vor transcrie astfel ($k \in \mathbf{Z}$):

Pentru maxime:

$$(\Delta r)_M = n\cdot\Delta r = n\cdot(r_2 - r_1) = 2k\frac{\lambda}{2} \quad (15)$$

și

Pentru minime:

$$(\Delta r)_m = n\cdot\Delta r = n\cdot(r_2 - r_1) = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (16).$$

Capitolul 7

DIFRACȚIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

7.1. Definițiile fenomenului de difracție. Descriere experimentală.

Un fenomen fizic important produs de lumină, care confirmă natura ondulatorie a acesteia, îl constituie *difracția*. Aceasta este specifică tuturor undelor (radiațiilor) electromagnetice.

În continuare prezentăm trei (a, b, c) definiții fenomenologice și una (d) cu un caracter mai exact ale fenomenului de difracție a undelor electromagnetice.

a) Prima definiție.

***Definiția 1**: Fenomenul de difracție constă, în esență, în devierea direcției de propagare rectilinie a undei electromagnetice în prezența unor obstacole (paravane, fante, grile, etc...).*

Astfel, unda electromagnetică poate pătrunde în spatele obstacolelor considerate opace pentru lungimea de undă a radiației utilizate.

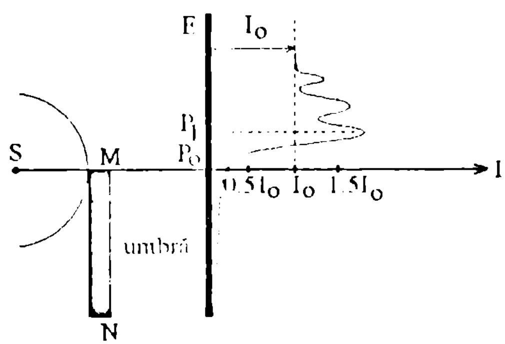


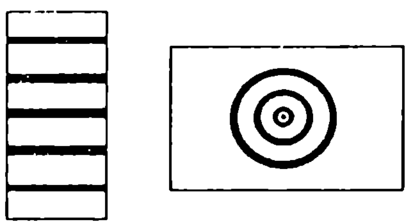
Fig. 7.1

Procesul poate fi urmărit uşor dacă se analizează modul de comportare al luminii în cazul plasării în drumul acesteia a unui paravan MN opac de forma unui semiplan (fig.7.1). Lumina care pleacă de la izvorul punctiform S în toate direcţiile şi care, în absenţa semiplanului MN ar da pe un ecran E o intensitate I_0 în punctul P_0, dă în prezenţa acestuia, tot în P_0, numai $0{,}25\,I_0$ (25% din I_0) scăzând continuu până la zero în regiunea de umbră. În zona (regiunea) luminoasă se obţin maxime şi minime de intensitate, primul maxim din P_1 depăşind valoarea I_0.

Cauza acestor fenomene complexe care apar la limita de separare dintre umbra geometrică (regiunea din umbră) şi lumina geometrică (regiunea luminoasă) este fenomenul de difracţie a luminii.

b) A doua definiţie.

Efecte asemănătoare se observă dacă o sursă punctiformă monocromatică (omogenă) luminează un plan opac în care este practicată o fantă dreptunghiulară sau un orificiu circular (apertură de formă circulară) de dimensiuni mici, comparabile cu lungimea de undă a radiaţiei electromagnetice incidente. Pe un ecran se observă franje luminoase în alternanţă cu franje întunecate de formă dreptunghiulară (franje liniare) şi, respectiv, franje inelare concentrice (inele de interferenţă concentrice) ca în figurile 7.2.a şi 7.2.b.



a b

Fig 7.2

***Definiţia 2**: Fenomenul de ocolire aparentă a obstacolelor opace de către lumină, când dimensiunile acestora sunt comparabile cu lungimea de undă a radiaţiei utilizate, este cunoscut sub numele de difracţie.*

c) A treia definiţie.

***Definiţia 3**: Fenomenul de apariţie a maximelor şi minimelor de intensitate luminoasă la limita de separare dintre zona luminoasă şi umbra geometrică se numeşte difracţie, iar maximele şi minimele respective sunt denumite franje de difracţie.*

Prezența franjelor luminoase sugerează posibilitatea interpretării lor ca un caz particular de interferență (admițând astfel natura ondulatorie a luminii) prin utilizarea principiului Huygens-Fresnel.

d) A patra definiție.

Indicele de refracție al unui mediu dielectric izotrop și omogen străbătut de o undă electromagnetică (radiație electromagnetică) se definește ca fiind raportul dintre viteza undei electromagnetice în vid ($c = 3 \cdot 10^8$m/s) și viteza ei în acel mediu (v):

$$n = \frac{c}{v}.$$

De asemenea, viteza undei în acel mediu dielectric depinde de lungimea de undă λ (sau de frecvența ν). Prin urmare, indicele de refracție al mediului, n, variază cu lungimea de undă λ (sau cu frecvența ν) corespunzătoare radiației electromagnetice: $n = n(\lambda)$. Acest fenomen se numește *dispersia* undei electromagnetice de către un mediu.

De exemplu, un mediu transparent ca aerul, pentru o undă electromagnetică omogenă din spectrul vizibil, are $n \approx 1$, iar un altul opac are $n \to \infty$. Un același obstacol poate fi opac pentru o radiație cu o anumită lungime de undă și transparent pentru o altă radiație care are o altă lungime de undă.

Putem defini gradientul indicelui de refracție al unui mediu dielectric neomogen dar izotrop după direcția 0x normală la vectorul de undă $\vec{k}$ (deci, perpendiculară pe direcția de propagare rectilinie în mediu a undei electromagnetice) ca fiind rezultatul limitei următoare:

$$\vec{\nabla} n = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta x} \cdot \vec{i} = \frac{dn}{dx} \cdot \vec{i} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla} n = \frac{dn}{dx} \cdot \vec{i},$$

adică valoarea limită a raportului dintre diferența a două valori distincte ale indicelui de refracție pentru același mediu străbătut de o undă monocromatică și distanța Δx dintre cele două zone ale mediului cu indicele n diferit înmulțit cu versorul $\vec{i}$ al axei 0x. Din punct de vedere matematic, la limită Δx tinde către zero ($\Delta x \to 0$), dar din punct de vedere fizic această distanță Δx foarte mică este comparabilă cu lungimea de undă a radiației utilizate (mai mică sau mai mare decât λ). Dacă pe astfel de distanțe mici indicele de refracție al mediului variază semnificativ (adică valoarea gradientului este considerabilă) atunci direcţia de propagare a undei electromagnetice este deviată şi are loc fenomenul de difracţie. Practic, dacă se ţine cont de pricipiul Huygens-Fresnel atât unda difractată (deviată de la direcţia ei rectilinie de propagare) în acea zonă ce prezintă un gradient puternic al indicelui de refracţie cât şi o undă nedeviată, ambele provenite din radiaţia iniţială, sunt două surse secundare coerente. Ele îndeplinesc condiţiile de interferenţă, se intersectează şi dau un fenomen de *interferenţă staţionară* care conduce la apariţia de maxime şi de minime ale intensităţii undei (descrisă în definiţiile anterioare).

***Definiţia 4**: Difracţia reprezintă fenomenul fizic de deviere a direcţiei de propagare rectilinie a undelor electromagnetice în prezenţa unor gradienţi puternici (pe distanţe comparabile cu lungimea de undă a radiaţiei) ai indicelui de refracţie, n, al mediului prin care se propagă undele respective.*

În concluzie, pentru o radiaţie electromagnetică cu o anumită lungime de undă (să spunem, din spectrul vizibil) paravanul MN (un semiplan din carton) descris în figura 7.1 este opac ($n_{MN} \rightarrow \infty$), iar în cealaltă parte este aer, deci un mediu transparent pentru radiaţie ($n \approx 1$). La frontiera dintre cele două medii (paravan şi aer), pe distanţe mici, comparabile cu lungimea de undă a radiaţiei, (pe o direcţie paralelă cu ecranul E), avem o neomogenitate, deci un gradient puternic al indicelui de refracţie (n variază de la ∞ la 1), care conduce la apariţia fenomenului de difracţie a radiaţiei utilizate. Adică, avem o deviere a undei luminoase în acea zonă. Aceasta se intersectează cu alta care nu este deviată, provenită de la acelaşi fascicul de lumină, de deasupra paravanului. Cele două unde pot interfera şi se obţine pe ecran figura de interferenţă cunoscută. Desigur că pentru o altă radiaţie cu o lungime de undă din spectrul de raze X, paravanul nu mai este opac, iar fenomenul de difracţie nu mai este vizibil.

Chiar dacă fenomenul de difracţie nu este foarte pronunţat, el tot poate exista şi în cazul unor medii dielectrice neomogene în care diferenţa Δn (de exemplu un $\Delta n \approx 0.6$) este mică, dar pe distanţe comparabile cu lungimea de undă a radiaţiei gradientul este totuşi mare.

f) Obiectivul teoriei difracţiei:

Obiectivul teoriei difracţiei este calcularea distribuţiei intensităţii luminoase dincolo de fronturile de undă distorsionate de obstacole pe care le întâlneşte radiaţia optică.

Teoria Fresnel a difracţiei se bazează pe principiul Huygens-Fresnel şi implică următoarele presupuneri:

- Fiecare punct al frontului de undă distorsionat emite unde sferice secundare;
- Suprapunerea undelor sferice secundare, cu luarea în consideraţie a fazei, constituie unda luminoasă care se propagă mai departe;
- Intensitatea luminoasă observată în orice punct din spaţiu este proporţională cu pătratul amplitudinii undei.

Caracteristica esenţială a obiectelor de difracţie (orificii circulare, fante dreptunghiulare sau ecrane opace) este aceea că nu deformează frontul de undă, ci doar îl "mutilează".

7.2. Principiul Huygens-Fresnel

Fenomenul difracţiei nu aputut fi explicat decât admiţând natura ondulatorie a luminii, pe baza principiului Huygens-Fresnel.

7.2.1. Enunţurile principiului Huygens-Fresnel

Enunţul 1: Orice front de undă poate fi considerat la un moment dat, t, ca o sursă de unde sferice secundare, având aceeaşi frecvenţă ν *(sau lungime de undă* λ*) ca şi unda incidentă, emise de fiecare punct a frontului de undă. Frontul de undă la un moment ulterior de timp t'>t este dat de înfăşurătoarea (suprafaţa tangentă a acestor unde) tuturor undelor secundare (**Principiul lui Huygens**).*

*Undele secundare sunt toate în fază (au aceeaşi fază), deci sunt coerente şi prin urmare pot interfera, deci, undele secundare sunt mutual interferente (**Postulatul lui Fresnel**).*

Principiul lui Huygens explică pătrunderea luminii în regiunea geometrică cu umbră, dar nu şi producerea franjelor de difracţie a cărei explicaţie este dată de completarea (postulatul) lui Fresnel. Următorul enunţ este echivalent cu primul.

Enunţul 2: *Orice punct de pe o suprafaţă de undă Σ la momentul t este centrul unei noi unde elementare astfel că înfăşurătoarea tuturor undelor elementare Σ' va fi o suprafaţă de undă la un moment ulterior t'. Undele elementare inverse (cele care se propagă spre sursă) nu se iau în continuare (**Principiul lui Huygens**; v. fig.7.3.a).*

*Excitaţia luminoasă într-un punct arbitrar P poate fi considerată ca rezultat al interferenţei tuturor undelor elementare emise de o suprafaţă de undă (**completarea lui Fresnel**; v. fig.7.3.b).*

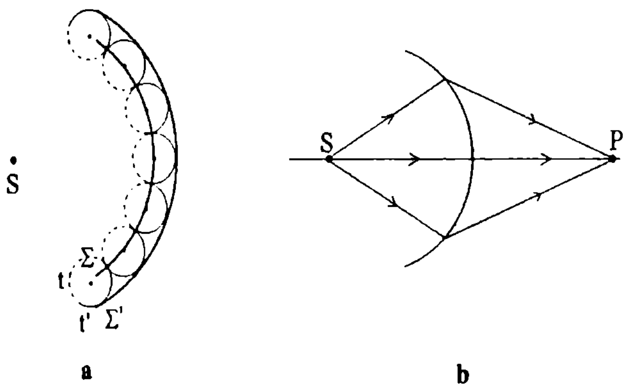


Fig.7.3

Observaţie: Sintagma "excitaţie luminoasă" din enunţul de mai sus poate fi înlocuită, în optică, prin una din sintagmele următoare: acţiune luminoasă, vibraţie luminoasă, intensitatea câmpului electric, oscilaţie luminoasă, perturbaţie luminoasă, elongaţia undei.

7.2.2. Explicaţia difracţiei undelor în spatele unui semiplan infinit şi în spatele unui disc finit cu ajutorul principiului lui Huygens

Putem deforma frontul de undă plan-paralel şi, deci, abate lumina de la o linie dreaptă deformând frontul undelor secundare, de exemplu cu ajutorul unui semiplan (v. fig.7.4). Introducerea semiplanului împiedică formarea undelor sferice secundare şi astfel se deformează frontul de undă. Un ecran E pus în spatele paravanului P va fi luminat în porţiunea OA, dar va fi luminat şi în regiunea de umbră geometrică OB.

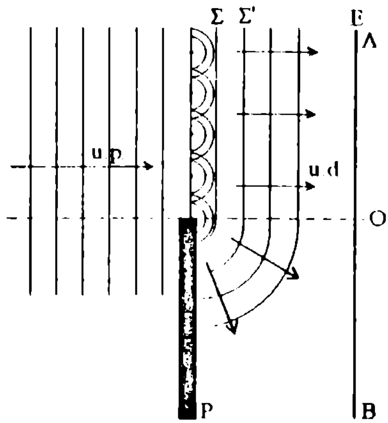


Fig. 7.4

Din figura 7.4 şi mai ales din figura 7.5 rezultă: *conceptul de rază de lumină este uitilizabil în mod aproximativ.* Aşa cum în realitate nu există punctul material, nu există nici raza de lumină.

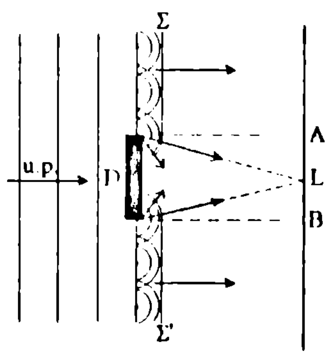


Fig. 7.5

Astfel, din fig.7.5 rezultă că dacă un disc este iluminat cu lumină provenită de la o sursă punctiformă foarte îndepărtată (pentru a avea unde plane) în mijlocul umbrei geometrice AB apare "paradoxal" o zonă luminoasă. Ocolirea obstacolelor de către lumină este, în acest mod, evidentă.

7.3. Forma matematică a principiului Huygens-Fresnel

Fie S o sursă punctiformă monocromatică (care emite lumină cu lungimea de undă λ) situată într-un mediu omogen (sau vid) şi fie B un punct în care ajunge lumina emisă în direcția SB (v. fig.7.6). Fie Σ poziția instantanee a unui front de undă sferică de rază R, care provine de la sursa punctiformă (ideală) S.

Conform principiului Huygens-Fresnel putem înlocui acțiunea sursei S în punctul B cu acțiunile punctelor de pe suprafața S considerate ca izvoare luminoase fictive coerente între ele şi distribuite continuu pe suprafața Σ, care au toate aceeaşi fază pe frontul de undă sferic Σ (echifază).

Dacă elongația vectorului intensitate a câmpului electric (vectorului luminos) pentru sursa S este reprezentată de relația $E_S(t) = E_0 \cdot \exp\{i\omega t\}$, unde E_0 reprezintă amplitudinea elongației în punctul S, atunci elongația unui punct M de pe suprafața Σ este:

$$E_M(R,t) = \frac{E_0}{R} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \quad (1)$$

(vezi expresia elongației undei sferice progresive în capitolul 5).

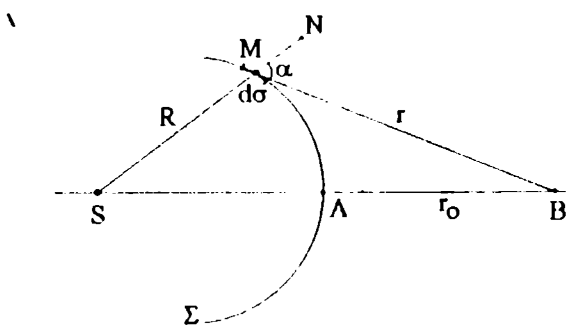


Fig. 7.6

Să considerăm un element de suprafață dσ suficient de mic pentru a fi asimilat cu punctul M, element care trimite vibrații (luminoase) către punctul de observație B. Distanța r fiind aceeaşi pentru toate punctele elementului dσ, ele pot fi considerate că oscilează în fază.

Utilizând postulatul lui Fresnel, oscilația în punctul B provenită de la elementul de suprafață dσ are elongația:

$$dE_B = f(\alpha) \cdot \frac{E_0}{R} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \cdot \frac{\exp\{-ikr\}}{r} \cdot d\sigma \quad (2).$$

Factorul de înclinare (oblicitate) f(α) a fost introdus de Fresnel pentru a exprima faptul că elongația vibrației în punctul B, dE_B, este dependentă şi de înclinarea dreptei MB faţă de normala N la suprafaţa Σ în M şi că nu există unde secundare de întoarcere.

Într-adevăr, acest factor scade continuu cu creşterea unghiului α, ia valoarea zero pentru $\theta = \pi$ şi este egal cu 1 pentru $\theta = 0$.

În teoria lui Kirchhoff $f(\alpha)$ are expresia următoare:

$$f(\alpha) = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \begin{cases} 1, & \text{daca} \quad \theta = 0 \\ 0, & \text{daca} \quad \theta = \pi \end{cases} \quad (3).$$

Elongaţia în punctul B, dE_B, este direct proporţională, de asemenea, cu mărimea elementului de suprafaţă $d\sigma$. Această elongaţie, sumă a acţiunilor tuturor punctelor suprafeţei de undă Σ (sumă echivalentă cu acţiunea directă a izvorului S) se va scrie astfel:

$$E_B = \iint_\Sigma dE_B = \frac{E_0}{R}\cdot \exp\{i(\omega t - kR)\}\cdot \iint_\Sigma \frac{\exp\{-ikr\}}{r}\cdot f(\alpha)\cdot d\sigma \quad (4).$$

Expresia (4) se numeşte *integrala de difracţie a lui Fresnel.*

7.4. Metoda zonelor lui Fresnel

Calculul direct al integralei de difracţie (4) fiind foarte complicat este mult mai simplu şi mai intuitiv să se utilizeze, pentru rezolvarea acesteia, *metoda zonelor lui Fresnel.*

Această metodă presupune trasarea unor suprafeţe sferice cu centrul în punctul B, de raze $r_m = r_0 + m\cdot\frac{\lambda}{2}$, $m \in \mathbf{N}$.

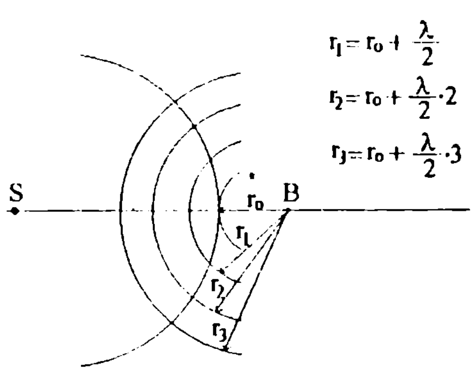


Fig.7.7

Din intersecţiile acestor suprafeţe sferice cu suprafaţa de undă sferică Σ, rezultă zonele Fresnel sau suprafeţele semiundă Fresnel (fig.7.7). Se observă că undele care ajung în B de la aceste zone sunt defazate cu:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2} = \pi,$$

deoarece pentru oricare zonă $\Delta r = r_m - r_{m-1} = \lambda/2$. Factorul de înclinare $f(\alpha)$ depinde de zona respectivă (adică de numărul *m*) şi se consideră *constant* în cadrul aceleaşi zone Fresnel.

Să arătăm, în continuare, cum se calculează integrala dublă (integrala de suprafaţă) care apare în relaţia (4) din subcapitolul 7.3.

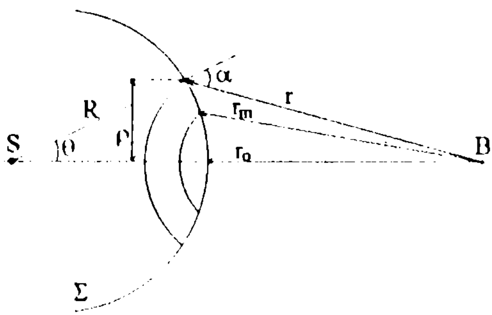


Fig.7.8

Din figura 7.8 rezultă, aplicând teorema cosinusului, relaţia următoare:

$$r^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R\cdot(R + r_0)\cdot\cos\theta.$$

Prin diferenţierea acestei relaţii, în care mărimile r şi θ sunt variabilele, rezultă:

$$2r\cdot dr = 2R\cdot(R + r_0)\cdot\sin\theta\cdot d\theta \text{ sau } r\cdot dr = R\cdot(R + r_0)\cdot\sin\theta\cdot d\theta \quad (1).$$

În continuare, vom folosi expresia (din analiză matematică) elementului de arie de pe suprafaţa sferică de rază R în coordonate sferice

$$(R, \theta, \varphi)\text{: } d\sigma = R^2\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi,\ \theta\in(0,\pi],\ \varphi\in(0,2\pi] \quad (2).$$

Utilizând (1) în (2) rezultă:

$$d\sigma = \frac{R}{R + r_0}\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi \quad (3).$$

Introducând elementul de arie $d\sigma$ în relaţia (4) din subcapitolul 7.3 putem calcula contribuţia zonei cu numărul de ordine *m* la elongaţia undei (vibraţiei) în punctul B:

$$E_{m,B} = \frac{E_0}{R} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \cdot f_m(\alpha) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r_{m-1}}^{r_m} \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{R}{R + r_0} \cdot r \cdot dr =$$

$$= \frac{E_0}{R + r_0} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \cdot 2\pi \cdot f_m(\alpha) \cdot \int_{r_{m-1}}^{r_m} e^{-ikr} \cdot dr \quad (4).$$

Deoarece $r_m = r_0 + m \cdot \frac{\lambda}{2}$ şi $r_{m-1} = r_0 + (m-1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, integrala I care apare în (4) poate fi evaluată astfel:

$$I = \int_{r_{m-1}}^{r_m} e^{-ikr} \cdot dr = -\frac{1}{ik} \cdot e^{-ikr} \Big|_{r_{m-1}}^{r_m} = -\frac{1}{ik} \cdot \left(e^{-ikr_m} - e^{-ikr_{m-1}}\right) = -\frac{1}{ik} \cdot \left[e^{-ik\left(r_0 + m\frac{\lambda}{2}\right)} - e^{-ik\left(r_0 + (m-1)\frac{\lambda}{2}\right)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{ik} \cdot e^{-ik\left(r_0 + m\frac{\lambda}{2}\right)} \left(1 - e^{ik\frac{\lambda}{2}}\right) = -\frac{1}{ik} \cdot e^{-ikr_0} \cdot e^{-ikm\frac{\lambda}{2}} \cdot \left(1 - e^{ik\frac{\lambda}{2}}\right) \quad (5).$$

Introducând în (5) valoarea numărului de undă $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, putem scrie:

$$e^{-ikm\frac{\lambda}{2}} \left(1 - e^{ik\frac{\lambda}{2}}\right) = e^{-im\pi} \cdot \left(1 - e^{i\pi}\right) \quad (6).$$

În (6) vom utiliza relaţia lui Euler:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \cdot \sin\alpha \quad (7).$$

Rezultă:

$$e^{-im\pi}\left(1 - e^{i\pi}\right) = \left(\cos m\pi - i \cdot \sin m\pi\right) \cdot \left(1 - \cos\pi - i \cdot \sin\pi\right) =$$

$$= \left[(-1)^m + 0\right] \cdot \left[1 - (-1) - 0\right] = 2 \cdot (-1)^m \qquad (8).$$

Prin urmare, valoarea integralei I este:

$$I = -\frac{2}{ik} \cdot (-1)^m \cdot e^{-ikr_0} \quad (9).$$

Aşadar, elongaţia undei în punctul B, datorită contribuţiei zonei cu numărul *m*, este:

$$E_{m,B} = -\frac{2\pi}{ik} \cdot f_m(\alpha) \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot 2(-1)^m \cdot \exp\{i[\omega t - k(R + r_0)]\},$$

$$E_{m,B} = \frac{2(-1)^{m+1}}{i} \cdot \lambda \cdot f_m(\alpha) \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot \exp\{-ik(R + r_0)\} \cdot \exp\{i\omega t\} \quad (10),$$

adică efectul luminos (elongaţia $E_{m,B}$) în punctul B dat de zona Fresnel cu numărul *m*, este caracterizat tot de ecuaţia unei oscilaţii armonice de amplitudine:

$$A_m = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot f_m(\alpha) \quad (11).$$

Deci, toate undele ajunse în B de la diferitele zone Fresnel au toate aceeaşi fază, dar amplitudinile sunt alternativ pozitive şi negative şi scad treptat cu creşterea lui *m*, datorită creşterii unghiului α, deci scăderii lui f_m.

Elongaţia undei rezultante în punctul B va fi egală cu suma contribuţiilor numărului total N de zone Fresnel (m=1, 2, 3, ..., N):

$$E_B = \sum_{m=1}^{N} E_{m,B} = \frac{2\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{-ik(R+r_0)} \cdot e^{i\omega t} \cdot \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \cdot f_m(\alpha) \quad (12).$$

Suma din relaţia (12) se poate explicita astfel:

$$\sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \cdot f_m = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots + (-1)^{N+1} \cdot f_N = \frac{f_1}{2} + \left(\frac{f_1}{2} - f_2 + \frac{f_3}{2}\right) + \left(\frac{f_3}{2} - f_4 + \frac{f_5}{2}\right) + \ldots \quad (13)$$

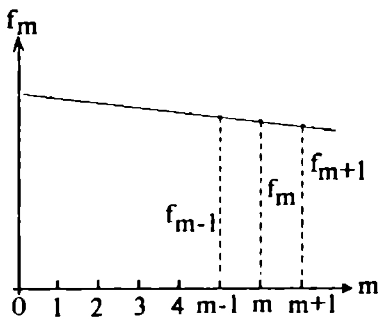


Fig.7.9

Mai departe, Fresnel a postulat că factorul de înclinare f_m descreşte încet şi liniar în funcţie de numărul de ordine *m* al zonelor Fresnel (v. fig.7.9): $f_m = a \cdot m + b$ (a, b constante).
De aici rezultă imediat egalitatea următoare:

$$f_m = \frac{f_{m-1} + f_{m+1}}{2} \quad (13').$$

Din acest motiv, parantezele din relaţia (13) se anulează. Se mai observă că dacă N este par ultimii doi termeni din suma (13) sunt $(1/2) \cdot (f_{N-1} - f_N)$.

De exemplu, dacă N = 4, ultimii doi termeni se scriu (1/2)·(f_3 - f_4). Dacă N este impar, ultimul termen al sumei este $f_N/2$. De exemplu, dacă N = 3, ultimul termen este $f_3/2$.

Din aceste considerente, elongația undei luminoase în punctul B se scrie astfel:

$$E_B = \left(\frac{2\lambda}{i}\right) E_o \cdot \frac{e^{i[\omega t - k(R+r_o)]}}{R+r_o} \cdot \begin{cases} \dfrac{f_1}{2} + \dfrac{f_{N-1}}{2} - f_N, & \text{daca N este par} \\ \dfrac{f_1}{2} + \dfrac{f_N}{2}, & \text{daca N este impar} \end{cases} \quad (14).$$

Egalitatea (14) se poate pune sub o formă finală mai simplă dacă se ține seama de faptul că f_m scade liniar în funcție de m. Această ipoteză conduce pentru zonele Fresnel imediat vecine la egalitatea aproximativă: $f_{m-1} \approx f_{m+1}$. Dar din relația (13') rezultă că:

$$f_m \approx f_{m+1} \approx f_{m-1} \quad (15).$$

Prin urmare, pentru m = N suma ($f_1/2$) + ($f_{N-1}/2$) - (f_N) care apare în (14) devine ($f_1/2$) - ($f_N/2$) și în final, după simplificare cu 2, elongația câmpului electric din B se scrie astfel:

$$E_B = \left(\frac{\lambda}{i}\right) \cdot E_o \cdot \frac{e^{i[\omega t - k(r+r_o)]}}{R+r_o} \cdot (f_1 \mp f_N) \quad (16),$$

(relația lui Fresnel).

Se observă că mărimea E_B depinde de numărul total de zone Fresnel, N. Matematic acest lucru se scrie: $E_{N,B}$. Semnul "minus" corespunde cazului în care *N este par*, iar semnul "plus" corespunde cazului în care *N este impar.*

7.5. Difracția printr-o apertură circulară (difracția Fresnel)

7.5.1. Expresia numărului total de zone Fresnel N în funcție de parametrii R, ρ, r_o și λ

Să considerăm o deschidere circulară de rază ρ (v. fig.7.10). Să arătăm, în continuare, că numărul total de zone Fresnel, N, depinde de mărimile R, ρ, r_o și λ și are expresia următoare:

$$N = \rho^2 \cdot \frac{R+r}{R\lambda r_o} \quad (1).$$

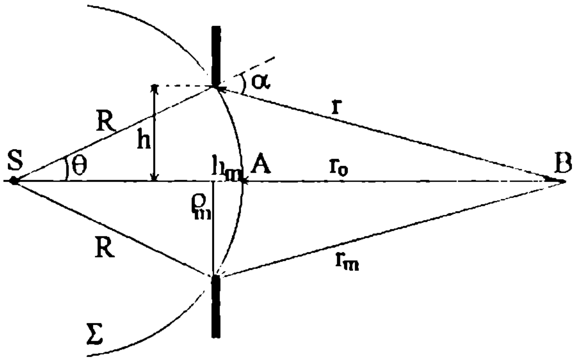


Fig.7.10

Demonstraţie: Din figura 7.10 rezultă:

$$\rho_m^2 = r_m^2 - (r_0 + h_m)^2 = r_m^2 - r_0^2 - 2r_0h_m - h_m^2 \quad (2),$$

de unde, pentru $h_m << r_0$, deci $h_m^2 << r_0^2$ (h_m^2 se neglijează faţă de r_0^2), se obţine:

$$\rho_m^2 = r_m^2 - r_0^2 - 2r_0h_m \quad (3).$$

Deoarece metoda zonelor Fresnel presupune $r_m = r_0 + m\dfrac{\lambda}{2}$ rezultă

$$r_m^2 = r_0^2 + mr_0\lambda + m^2\frac{\lambda^2}{4} \quad (4)$$

şi deoarece λ este mic ($\lambda<<1$, ceea ce presupune $\lambda^2<<1$, deci λ^2 se poate neglija), relaţia (4) devine:

$$r_m^2 - r_0^2 = mr_0\lambda \quad (5).$$

De asemenea, este evidentă din figura 7.10, relaţia următoare: $\rho_m^2 \equiv R^2 - (R - h_m)^2 = r_m^2 - (r_0 + h_m)^2$, de unde rezultă că:

$$h_m = \frac{r_m^2 - r_0^2}{2(R + r_0)} \quad (6).$$

Astfel, din relaţiile (3), (6) şi (5) se obţine:

$$\rho_m^2 = r_m^2 - r_0^2 - r_0\frac{r_m^2 - r_0^2}{R + r_0} \overset{(5)}{=} m\lambda\frac{Rr_0}{R + r_0} \quad (7).$$

Pentru m = N, putem scrie $\rho_m = \rho_N \equiv \rho$ şi deci din (7) se obţine:

$$\rho^2 = N\frac{Rr_0}{R + r_0}\lambda$$

de unde

$$\rho = \sqrt{N\lambda} \cdot \sqrt{\frac{Rr_0}{R + r_0}} \quad (8)$$

sau

$$N = \frac{\rho^2(R + r_0)}{Rr_0\lambda} \quad (9),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Caz particular: Dacă unda incidentă, care cade pe deschiderea circulară, este plană, adică $R \to \infty$, relația (9) conduce la valoarea:

$$N_{(R\to\infty)} = \lim_{R\to\infty}\frac{\rho^2(R + r_0)}{Rr_0\lambda} = \frac{\rho^2}{r_0\lambda} \quad (10).$$

În figura 7.11 este prezentată fotografia unei figuri de difracție a radiației provenită de la un laser He-Ne printr-o apertură circulară practicată într-un ecran opac.

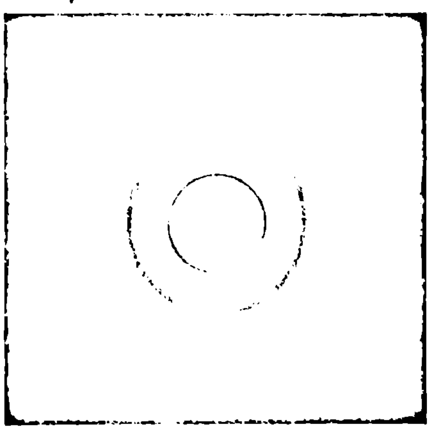


Fig. 7.11

7.5.2. Concluzii ale relației lui Fresnel

În cele ce urmează se va da explicația intensității luminoase a franjelor de difracție Fresnel cu ajutorul relație lui Fresnel.

a) Elongaţia undei rezultante în punctul B, E_B, când numărul de zone N este foarte mare (N →∞, paravanul lipseşte)

Aşa cum am văzut (relaţia lui Fresnel) elongaţia undei rezultante în punctul de observare B, E_B, are forma următoare (v. relaţia 16 din subcapitolul 7.4.):

$$E_{N,B} = \left(\frac{\lambda}{i}\right) \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i[\omega t - k(R + r_0)]} \cdot \left(f_1 \mp f_N\right) \quad (1),$$

depinzând de numărul N al zonelor Fresnel ($E_{N,B}$). Pentru N foarte mare (N → ∞) unghiul de difracţie Fresnel θ fiind, de asemenea mare, rezultă că factorul de oblicitate f_N trebuie să fie egal cu zero, deoarece acesta descreşte către zero, prin definiţie, dacă θ creşte la π.

Prin urmare, pentru N → ∞ f_N → 0 iar elongaţia undei rezultante (1) în punctul B devine:

$$E_{\infty,B} = \frac{\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot f_1 \cdot e^{i[\omega t - k(R + r_0)]} \quad (2).$$

b) Elongaţia undei rezultante în punctul B, E_B, când se consideră doar contribuţia primei zone Fresnel, N = 1

În acest caz, orificiul circular practicat în paravan are raza egală cu cea corespunzătoare primei zone Fresnel.

Pentru cazul impar (N = 1) suma $f_1 + f_N$ din relaţia (1) devine $f_1 + f_N = 2f_1$, iar relaţia (1) capătă forma următoare:

$$E_{1,B} = 2 \cdot \frac{\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot f_1 \cdot e^{i[\omega t - k(R + r_0)]} \quad (3).$$

c) Efectul direct al undei sferice emisă de sursa S în punctul B. Demonstraţia egalităţii: $\lambda f_1/I = 1$

Să scriem elongaţia undei sferice care ar ajunge direct în B de la sursa S. Aceasta are, la distanţa R + r_0 faţă de sursă, forma următoare (v. ecuaţia undei sferice progresive):

$$E_B = \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i[\omega t - k(R + r_0)]} \quad (4)$$

şi trebuie să fie identică cu cea obţinută la punctul (a) în relaţia (2), în cazul N → ∞. Cu alte cuvinte este necesar ca:

$$\frac{\lambda \cdot f_1}{i} = 1 \;\Rightarrow\; f_1 = \frac{i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (5).$$

Aşadar, undele secundare descrise de relaţia (2) vibrează cu un decalaj de fază $\Delta\varphi = \pi/2$ în raport cu unda principală (4). Adică:

$$E_{\infty,B} = \frac{1}{i} \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i\left[\omega t - k(R + r_0) + \frac{\pi}{2}\right]}.$$

Dacă se ţine seama de relaţia (5) expresiile pentru $E_{\infty,B}$ şi $E_{1,\infty}$ se scriu:

$$E_{\infty,B} = \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i[\omega t - k(R + r_0)]}, \quad E_{1,B} = \frac{2E_0}{R + r_0} \cdot e^{i[\omega t - k(R + r_0)]} \quad (6).$$

d) Să arătăm că prezenţa unui paravan prevăzut cu un orificiu circular a cărui rază este egală cu raza primei zone Fresnel (N = 1) conduce la mărirea intensităţii luminoase în punctul B de observaţie situat în spatele paravanului ($N \to \infty$). Într-adevăr, dacă se ţine seama de (5), expresiile $E_{\infty,B}$ şi $E_{1,\infty}$ se scriu ca în (6). Rezultă succesiv:

$$E_{1,B} = 2 \cdot E_{\infty,B} \Rightarrow E^2_{\infty,B} = 4 \cdot E^2_{\infty,B} \Rightarrow \left\langle E^2_{1,B} \right\rangle = 4 \cdot \left\langle E^2_{\infty,B} \right\rangle \Rightarrow I_{1,B} = 4 \cdot I_{\infty,B} \ (7).$$

e) Când în faţa sursei S se aşează un ecran cu o deschidere circulară care lasă libere un număr *impar* N de zone Fresnel (să presupunem N = 2n + 1, $n \in Z$), perturbaţia (elongaţia) undei în B este mai mare decât în cazul când ecranul ar lipsi, deoarece în relaţia (1) apare factorul sumă $(f_1 + f_{2n+1})$.

f) Când în faţa sursei S se aşează un ecran cu o deschidere circulară care lasă libere un număr *par* N de zone Fresnel (N = 2n, $n \in \mathbf{Z}$), perturbaţia (elongaţia) undei în B este mai mică decât în cazurile precedente, deoarece în relaţia (1) apare factorul diferenţă $(f_1 - f_{2n})$.

g) Pe măsură ce raza ρ a orificiului (aperturii) ecranului plasat în punctul B creşte se vor observa succesiv maxime şi minime ale intensităţii luminoase.

h) Se poate obţine pe ecran o intensitate luminoasă foarte mare dacă se acoperă toate zonele Fresnel *pare* <u>*sau*</u> *impare*. În acest caz, diferenţa de drum dintre undele provenite de la zonele vecine, *pare sau impare*, este egală cu λ şi se obţin *maxime de interferenţă*.

7.6. Difracţia Fraunhofer

Difracţia undelor sferice (raze de lumină divergente) este cunoscută sub numele de *difracţie Fresnel*, iar difracţia undelor plane (raze de lumină paralele) este cunoscută sub numele de *difracţie Fraunhofer*. În figura 7.12 se indică schematic experimentul de tip Fraunhofer. O sursă punctiformă de lumină de intensitate I se află în focarul lentilei L_1 (lentilă colimatoare). Între lentilele L_1 şi L_2 se află un ecran prevăzut cu o deschidere (sau mai multe) dreptunghiulară, circulară, sau de orice altă formă. Lumina deviată prin difracţie, sub diferite unghiuri (în figura 7.12, este prezentată lumina deviată sub unghiul β), este focalizată de lentila L_2 în diverse puncte ale ecranului E_2, aflat în planul focal al lentilei L_2.

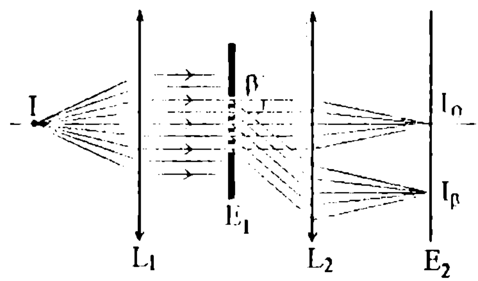


Fig.7.12

7.6.1. Elemente matematice utilizate

a) Elongaţia intensităţii câmpului electric al undei electromagnetice emisă de o sursă punctiformă

Elongaţia intensităţii câmpului electric al undei electromagnetice emisă de către o sursă punctiformă (ideală) de radiaţie monocromatică prezintă o dependenţă temporală în punctul în care se află sursa de radiaţie (r = 0) de forma următoare (unde r reprezintă distanţa de la sursă la un punct dat din spaţiu):

$$E(r,t) = E(0,t) = E(t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1),$$

unde $E(0,t) = E(t)$ este elongaţia (mărimea) intensităţii câmpului electric, la momentul de timp arbitrar t, E_0 este amplitudinea (valoarea maximă a elongaţiei) intensităţii câmpului electric, $\omega = 2\pi\nu$ este frecvenţa unghiulară (care se măsoară în radiani pe secundă), ν este frecvenţa radiaţiei optice (se măsoară în hertz), $\varphi = \omega t + \varphi_0$ este faza undei electromagnetice (se măsoară în radiani), iar φ_0 este faza iniţială (care, de obicei, se ia egală cu zero) a undei electromagnetice.

b) **Elongaţia intensităţii câmpului electric al undei electromagnetice într-un punct oarecare**

Într-un punct arbitrar P situat la distanţa r faţă de sursa monocromatică de radiaţie electromagnetică (r=const.) dependenţa temporală a intensităţii câmpului electric al undei electromagnetice este dată de expresia:

$$E(P,t) = E(r,t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi_0 - kr) \quad (2),$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă, $\varphi=\omega t+\varphi_0-kr$ este faza undei electromagnetice când aceasta a ajuns în punctul P, la distanţa r de sursa de radiaţie electromagnetică.

c) **Definiţia coerenţei a două surse monocromatice de radiaţie electromagnetică**

Fie două surse monocromatice ($k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$) de lumină aflate la distanţele r_1 şi, respectiv, r_2 faţă de punctul de observaţie P. Intensităţile câmpului electric al undelor electromagnetice provenite de la cele două surse de radiaţie optică vor fi date în punctul P de expresiile următoare:

$$E_1(r_1,t) = E_{10} \sin(\omega t + \varphi_{10} - kr_1) \quad (3),$$

$$E_2(r_2,t) = E_{20} \sin(\omega t + \varphi_{20} - kr_2) \quad (4),$$

unde $\varphi_1(t)=\omega t+\varphi_{1o}-kr_2$ este faza undelor în punctul P provenite de la prima sursă, iar $\varphi_2(t)=\omega t+\varphi_{2o}-kr_2$ este faza undelor din punctul P, care provin de la cealaltă sursă. Deoarece sursele sunt monocromatice rezultă că au aceeaşi lungime de undă şi, deci, şi acelaşi număr de undă: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$.

***Definiţie**: Două surse de radiaţie electromagnetică monocromatică (S_1 şi S_2) având aceeaşi frecvenţă $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (deci $\lambda_1 = =\lambda_2 = \lambda$) sunt coerente atunci când diferenţa de fază $\varphi_1-\varphi_2 = \Delta\varphi$ este o mărime constantă în timp, deci:*

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{2o} - \varphi_{1o} + k(r_1 - r_2) = const. \quad (5).$$

Cum r_1-r_2=const., condiţia (5) de coerenţă se scrie:

$$\varphi_{2o} - \varphi_{1o} = \text{const.} \quad (5').$$

***Definiţie**: Două surse de radiaţie electromagnetică de aceeaşi frecvenţă ν ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) sunt coerente dacă diferenţa fazelor iniţiale ale undelor emise de surse nu se modifică în timp:*

$$\varphi_{2o} - \varphi_{1o} = const. \quad (6).$$

d) Teorema lui Malus (fără demonstrație).

♦ **Drumul optic. Diferența de fază exprimată prin drumuri optice.**

Dacă în vid viteza undei electromagnetice este egală cu c, iar lungimea de undă este λ_0, în cazul unui mediu cu un indice de refracție n se poate scrie $v = c/n$. Deoarece, în vid, $\lambda_0 = cT$ (T reprezintă perioada de oscilație a intensității câmpului electric care este independentă de proprietățile optice ale mediului), iar în mediul cu indicele de refracție n, $\lambda = vT$ (unde v reprezintă viteza de propagare a undei electromagnetice în mediul respectiv), atunci rezultă că $\lambda = \lambda_0/n$. În conformitate cu acestea, dacă o undă parcurge drumul geometric r_1 într-un mediu de indice de refracție n_1 și drumul geometric r_2 în cel de-al doilea mediu de indice de refracție n_2, diferența de fază rezultată, $\Delta\varphi$, se va scrie astfel:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 = 2\pi\left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1}\right) \quad (7).$$

Deoarece $\lambda_2 = \lambda_0/n_2$ și $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ rezultă că

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{n_2 r_2 - n_1 r_1}{\lambda_0} \quad (8).$$

***Definiție**: Produsul dintre indicele de refracție și lungimea geometrică a drumului, se numește drum optic și se notează cu litera asociată drumului geometric plasată între paranteze rotunde, (r) (definiția drumului optic).*

Introducând notația $n_1 r_1 = (r_1)$ și $n_2 r_2 = (r_2)$ putem scrie expresia diferenței de fază a două unde sub forma următoare:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{(r_2) - (r_1)}{\lambda_0} \quad (9).$$

♦ **Drumuri tautocrone (echivalente).**

Dacă $(r_1) = (r_2)$ atunci din (9) rezultă $\Delta\varphi = 0$. În acest fel, două drumuri geometrice distincte r_1 și r_2 parcurse de două raze de lumină vor fi echivalente între ele din punct de vedere optic, cu alte cuvinte între ele nu va apărea nici o diferență de fază ($\Delta\varphi = 0$), dacă drumurile optice respective sunt egale: $(r_1) = (r_2)$.

***Definiție**: Dacă două drumuri geometrice neegale sunt parcurse de lumină în intervale de timp egale, atunci aceste drumuri se numesc tautocrone.*

♦ **Teorema lui Malus.**

Condiția de tautocronism este satisfăcută în particular de toate drumurile razelor de lumină care străbat un sistem optic oarecare, de exemplu o lentilă care formează o imagine S' a unui izvor S de lumină (v. fig.7.13).

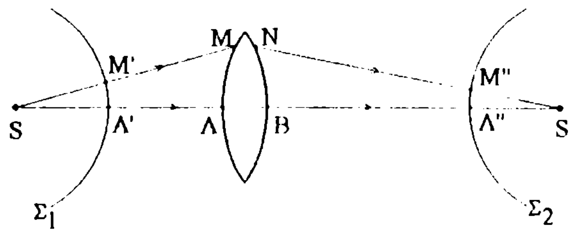


Fig.7.13

Într-adevăr, dacă diversele raze nu ar fi tautocrone, cele două părți ale undei luminoase, care se propagă pe cele două drumuri diferite, ar prezenta o diferență de fază și ar interfera în momentul intersectării în punctul S'. Însă, pentru a se obține un maxim luminos în S', care nu este altceva decât imaginea izvorului S, este necesar să se întâmple întărirea reciprocă a diverselor porțiuni ale undei, sosite în S' fără vreo diferență de fază (urmând drumuri tautocrone). În felul acesta, obținerea imaginii cu ajutorul unei lentile este un *efect de interferență.*

***Teoremă**: O lentilă (în general, un sistem optic) nu introduce nici o diferență de drum între diversele raze care conduc la formarea imaginii unui obiect (teorema lui Malus).*

Această teoremă se referă și la un sistem optic oarecare capabil să dea o imagine a izvorului S. Condiția de tautocronism se scrie astfel în figura 7.13: $SA + n\ AB + BS' = SM + n\ MN + NS'$.

***Observație**:* Dacă Σ_1 este o suprafață normală la razele din fasciculul incident atunci condiția de tautocronism se păstrează pentru toate punctele acestei suprafețe (de exemplu, M', A'):

$$M'M + n\ MN + NS' = A'A + n\ AB + BS',$$

punctul S (unde se află sursa) fiind un caz particular de suprafață ortogonală , Σ_1, având raza egală cu zero.

Dacă sursa S se află la infinit, suprafața ortogonală Σ_1 devine un plan perpendicular pe direcția razelor incidente.

Dacă Σ_2 este o suprafaţă normală la razele din fasciculul care iese din lentilă, condiţia de tautocronism se păstrează, de asemenea, pentru toate punctele care aparţin celor două suprafeţe Σ_1 şi Σ_2.
De aceea, teorema lui Malus se poate enunţa mai general astfel:

***Teorema lui Malus**: Oricare ar fi suprafeţele Σ_1 şi Σ_2 normale la toate razele luminoase din fascicul, acestea au proprietatea că drumul optic care separă cele două suprafeţe este acelaşi pentru toate razele. Aceste suprafeţe astfel definite se numesc suprafeţe de undă.*

Teorema lui Malus se va aplica în cele ce urmează în studiul fenomenului de difracţie Fraunhofer.

7.6.2. Difracţia Fraunhofer printr-o fantă dreptunghiulară

a) Studiu calitativ.

Să studiem difracţia undei plane monocromatice pe o fantă dreptunghiulară de lăţime b şi de lungime foarte mare în comparaţie cu b. Considerăm că unda cade normal pe planul fantei (v. fig.7.14), adică unghiul de incidenţă este zero.

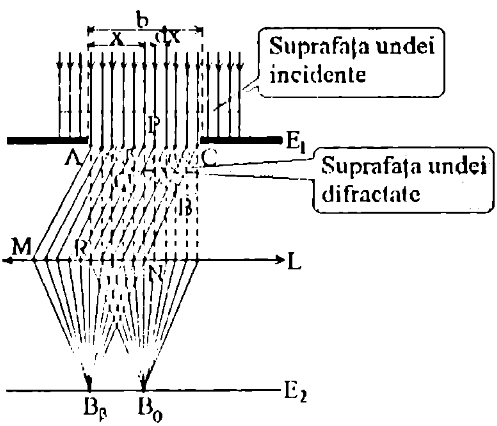


Fig.7.14

Lentila L focalizează lumina sub diferite unghiuri în diferite puncte ale ecranului E_2, aflat în planul focal al lentilei respective. Suprafeţele de undă ale undei plane incidente sunt plane paralele cu planul ecranului

E_1 în care s-a practicat fanta dreptunghiulară. Printre acestea una coincide cu ecranul E_1. Conform principiului Huygens-Fresnel, putem înlocui sursa de la infinit care generează unda plană incidentă pe fantă cu o infinitate de surse punctiforme sferice secundare distribuite continuu pe frontul undei plane aflate în dreptul fantei dreptunghiulare din ecranul E_1. Din aceste surse punctiforme elementare pornesc fascicule divergente de raze (v. fig.7.15), deci suprafețele de corespunzătoare sunt sferice. Razele perpendiculare pe planul fantei difractante sunt focalizate de lentila L într-un punct B_0 de pe ecranul E_2.

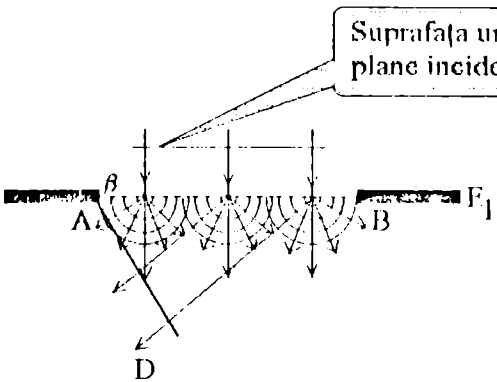


Fig.7.15

Oscilațiile surselor sferice elementare de pe frontul de undă aflat în dreptul fantei sunt în fază (au aceeași fază, $\varphi(t) = \omega t$), au aceeași amplitudine și rămân în fază, $\varphi(t,d) = \omega t - kd$, și cu aceeași amplitudine la distanțe d egale față de E_1.

Prin urmare, aceste surse îndeplinesc condiția de coerență, rezultând un maxim de interferență în punctul B_0. Pentru un alt punct de pe ecran B_β, oscilațiile produse de diferite puncte din dreptul fantei, *nu mai sunt în fază*. Pentru a ajunge în punctul B_β, razele trebuie să fie înclinate cu un unghi β față de normala la fantă. Undele secundare pornite de pe diferite puncte ale fantei ajung cu defazaje (diferite) cu atât mai mari cu cât punctul din fantă este mai apropiat de punctul C. Astfel, faza undelor pornite dintr-un punct P aflat la distanța x față de A ale căror raze fac unghiul β cu normala este: $\varphi(x,t) = \omega \cdot t - k \cdot x\sin\beta$.

De exemplu, oscilația pornită din punctul C ajunge în punctul B al planului AB cu o întârziere determinată de drumul optic suplimentar CB (față de oscilația din A) pe care trebuie să-l parcurgă: $CB = b\sin\beta$ și cu faza: $\varphi(t,b) = \omega \cdot t - k \cdot b \sin\beta$. Amplitudinea oscilației rezultante din punctul B_β, va depinde de diferența de drum dintre diferitele raze, care, pentru razele extreme ce traversează fanta este egală cu CB.

b) Studiul analitic al problemei difracției Fraunhofer pe o fantă dreptunghiulară

Să calculăm valorile intensităților luminoase (distribuția luminoasă) a diferitelor franje obținute în planul E_2. Pentru aceasta, să presupunem că am împărțit fanta difractantă în fâșii dreptunghiulare infinitezimale de lățime dx și paralele muchiile fantei. Dacă E_0 este amplitudinea undei emisă de întraga fantă de lărgime b atunci, elementului de lărgime dx îi corespunde amplitudinea $dE_x = (E_0/b)dx$ (prin "regula de trei simplă"). În felul acesta intensitatea elementară a câmpului electric dE dată de un element arbitrar dx, aparținând fantei, este descrisă de ecuația:

$$dE = dE_x \cdot \cos\omega t = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos\omega t \quad (1).$$

Deci, toate oscilațiile din planul fantei a elementelor de lărgime dx, considerate surse secundare de lumină, au aceeași fază (ωt) și aceeași amplitudine, $(E_0/b)dx$. Pentru a găsi acțiunea întregii fante este necesar să se țină seama de diferența de fază care caracterizează undele sosite în punctul de observație B_β, de la diversele elemente de lungime dx ale fantei. Pentru a afla această diferență de fază, se duce planul AB perpendicular pe direcția razelor difractate sub un unghi β.

În virtutea teoremei lui Malus lentila L nu introduce diferențe de fază suplimentare, razele AMB_β, și BNB_β, fiind tautocrome.

În felul acesta este suficient să se determine diferența de drum care apare de-a lungul parcursului dintre planul AC și planul AB. Din figura 7.13 rezultă că diferența de drum dintre undele provenite de la zona elementară dx de lângă punctul A (din marginea stângă a fantei) și cele provenite de la un punct oarecare P (situat la distanța x de punctul A) este: $PQ = x \sin\beta$.

Intensitatea câmpului electric al undei electromagnetice (perturbației luminoase) ajunsă din punctul arbitrar P de abscisă x din planul AC în punctul Q din planul AB, se va exprima prin ecuația (v. observațiile matematice făcute anterior) următoare:

$$dE_\beta(Q) = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos(\omega t - kx \cdot \sin\beta) \quad (2).$$

Perturbaţia luminoasă din punctul P se propagă, mai departe, ajungând în punctul de observaţie B_β, după ce a parcurs distanţa geometrică D = QR + RB sau distanţa optică d = (QR) + (RB).

În conformitate cu teorema lui Malus, distanţele optice dintre punctele planului AB, care este perpendicular pe direcţia razelor deviate prin difracţie cu un unghi β şi punctul B_β, trebuie să fie egale (tautocrone). Cu alte cuvinte:

$$(AM) + (MB_\beta) = (QR) + (RB_\beta) = (BN) + (NB_\beta) \equiv d \quad (3).$$

Prin urmare, perturbaţia luminoasă $dE_\beta(B_\beta)$, ajunsă în punctul de observaţie B_β va avea ecuaţia următoare (v. observaţiile matematice):

$$dE_\beta(B_\beta) = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos(\omega t - kx \cdot \sin\beta - kd) \quad (4),$$

în care termenul kd care apare în fază este constant fiind acelaşi pentru orice punct din planul AB.

În afară de aceasta, undele provenite de la diversele fâşii din fantă, prin ipoteză considerate egale în lăţime cu dx şi care ajung în B_β, sunt *interferente*, deoarece diferenţa de fază $(\Delta\varphi)_{B\beta}$ dintre acestea este *constantă în timp*, aşa cum vom arăta în cele ce urmează.

Fie două fâşii infinitezimale arbitrare i şi j de lărgimi egale dx_i = $=dx_j$ = dx aparţinând fantei de lărgime b. Fie x_i şi x_j abscisele acestor fâşii în raport cu punctul A din stânga fantei, considerat ca origine. Fazele undelor generate de cele două fâşii (emise de acestea) cu care ajung în punctul de observaţie B_β, sunt (v.relaţia 4):

$$\begin{cases} \varphi_i(B_\beta) = \omega t - kx_i \sin\beta - kd_1 \\ \varphi_j(B_\beta) = \omega t - kx_j \sin\beta - kd_2 \end{cases} \quad (5).$$

Deoarece, în virtutea teoremei lui Malus d_1=d_2=d şi deoarece n_j-n_i este constant (n_i şi n_j sunt cunoscute), atunci:

$$(\Delta\varphi)_{B_\beta} = \varphi_j - \varphi_i = k(x_i - x_j)\sin\beta - k(d_2 - d_1) = k(x_i - x_j)\sin\beta = \text{const.}$$

este îmdeplinită condiţia de coerenţă a două unde. În plus, diferenţa de fază $(\Delta\varphi)_{B\beta}$ este egală cu diferenţa de fază a undelor i şi j ajunse în planul AB, $(\Delta\varphi)_{AB}$, adică este constantă de-a lungul drumurilor optice d. În continuare, putem scrie utilizând relaţia (2):

$$(\Delta\varphi)_{AB} = (\omega t - kx_j \sin\beta) - (\omega t - kx_i \sin\beta) = k(x_i - x_j)\sin\beta.$$

Aceste unde, fiind coerente, interferă în punctul de observaţie B_φ, generând, în acest fel, maxime şi minime de interferenţă.

În concluzie, lentila L nu introduce diferenţe de fază suplimentare în sensul razelor difractate (Teorema lui Malus).

Ca urmare a coerenţei perturbaţiilor provenite de la toate benzile elementare de aceeaşi lăţime dx, perturbaţia rezultantă, $E_\beta(B_\beta)$, se va determina făcând suma expresiilor (4), adică se va exprima cu ajutorul unei integrale extinsă pe întreaga lăţime a fantei (pentru toate valorile x cuprinse între 0 şi b). Aşadar:

$$E_\beta(B_\beta) = \int_0^b dE_\beta = \int_0^b \frac{E_0}{b}\cdot\cos(\omega t - kx\cdot\sin\beta - kd)\cdot dx =$$

$$= \frac{E_0}{b}\cdot\frac{(-1)}{k\cdot\sin\beta}\cdot\sin(\omega t - kx\cdot\sin\beta - kd)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{E_0}{b}\cdot\frac{\sin(\omega t - kd) - \sin(\omega t - kb\cdot\sin\beta - kd)}{k\cdot\sin\beta} =$$

$$= 2\frac{E_0}{b}\cdot\cos\left(\omega t - \frac{kb}{2}\sin\beta - kd\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{kb\cdot\sin\beta}{2}\right)}{k\cdot\sin\beta},$$

sau

$$E_\beta(B_\beta) = E_0\cdot\frac{\sin\left(\frac{kb\cdot\sin\beta}{2}\right)}{\frac{kb}{2}\cdot\sin\beta}\cdot\cos\left(\omega t - \frac{kb}{2}\sin\beta - kd\right) \qquad (4),$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă.

Amplitudinea câmpului electric pentru unda care ajunge în B_β este:

$$\boxed{E_{0\beta}(B_\beta) = E_0\cdot\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\cdot\sin\beta\right)}{\frac{kb}{2}\cdot\sin\beta} = E_0\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\beta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\beta} = E_0\cdot\frac{\sin\delta(\beta)}{\delta(\beta)} = E_0\cdot\mathrm{sinc}\,\delta(\beta)},$$

unde $\delta(\beta) = \frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\beta$. Funcţia $\mathrm{sinc}\,\delta(\beta) = \frac{\sin\delta(\beta)}{\delta(\beta)}$ poartă numele de *sinus cardinal.*

Deoarece intensitatea luminoasă $I(B_\beta)$ se poate exprima cu ajutorul amplitudinii $E_{0\beta}(B_\beta)$ a câmpului electric $E_\beta(B_\beta)$ şi anume (vezi intensitatea undei armonice plane):

$$I_\beta(B_\beta) = \frac{1}{2}\cdot E_{0\beta}^2(B_\beta) \qquad (6),$$

putem scrie intensitatea undei difractate după unghiul β:

$$I_\beta(B_\beta) = \frac{1}{2}\cdot E_0^2 \cdot \sin c^2\delta(\beta) = \frac{1}{2}\cdot E_0^2 \cdot \frac{\sin^2\delta(\beta)}{\delta^2(\beta)} = I_0 \cdot \frac{\sin^2\delta(\beta)}{\delta^2(\beta)} \quad (7),$$

unde $I_0 = \frac{1}{2}E_0^2$ reprezintă intensitatea luminii care se propagă, de pe întreaga fantă, în direcția ce formează unghiul $\beta = 0$. Pentru $\varphi = 0$, $\delta(0) = \frac{\pi b}{\lambda}\cdot \sin 0 = 0$ și $I_{(\beta=0)} = I_0\frac{\sin 0}{0} = I_0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Din relația (7) rezultă că intensitatea luminii pe ecranul E_2 variază în funcție de unghiul β. Dacă intensitatea luminii este minimă, $I_\beta(B_\beta) = 0$, atunci este necesar ca $\sin^2\delta(\beta) = 0$. Această ecuație are rădăcinile: $\delta(\beta) = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\beta = m\pi \;\Rightarrow\; \sin\beta = m\frac{\lambda}{b}$, $m\in \mathbf{Z}$.

Deoarece unghiul de difracție β depinde, așa cum se observă, de numărul întreg *m denumit ordin de interferență*, putem scrie relația precedentă care reprezintă condițiile de minim pentru intensitatea luminii în B_β astfel:

$$\sin\beta_m = m\frac{\lambda}{b} \;\Rightarrow\; \beta_m = \mathrm{Arcsin}\left(m\frac{\lambda}{b}\right),\ m\in\mathbf{Z}.$$

Dacă $\delta(\beta) = 0$, respectiv $\sin\beta = 0$ sau $\beta = 0$, funcția $\sin c^2\delta = \frac{\sin^2 0}{0} = 1$ are un maxim (principal) și în acest caz, practic, întreaga intensitate a undei incidente se concentrează în maximul principal: $I_{(\beta=0)} = I_0$ (v. fig.7.16).

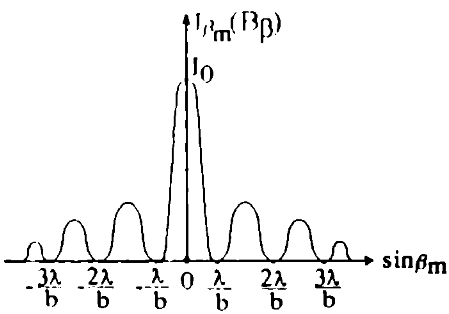


Fig.7.16

În analiza matematică se arată că maximele secundare ale funcției sinus cardinal la pătrat corespund direcțiilor (unghiurilor β) date de relația:

$$\frac{\pi b \cdot \sin\beta}{\lambda} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta_m = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{cu } m \in \mathbf{Z}.$$

Se observă că poziția maximelor, ca și a minimelor, depinde de dimensiunea *b* a fantei și de lungimea de undă a radiației incidente λ.

Maximul principal, foarte luminos, corespunde unghiului β = 0.

Maximele secundare corespund la intensități luminoase mult mai mici decât cea a maximului principal.

În fotografia 7.17 este prezentată figura de difracție a luminii provenită de la un laser He-Ne provocată de o fantă dreptunghiulară, iar în fotografia 7.18 se poate evidenția superpoziția fenomenelor de interferență cu cele de difracție pe două fante dreptunghiulare a luminii provenită de la un laser He-Ne, într-un dispozitiv Young.

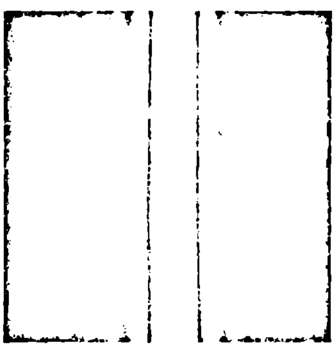


Fig. 7.17

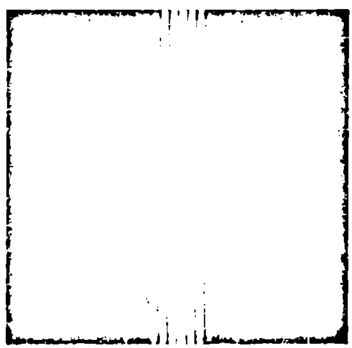


Fig. 7.18

7.6.3. Difracția Fraunhofer pe o rețea de difracție

a) Definiție. Caracteristici.

Rețeaua de difracție este constituită dintr-un număr mare de fante fine, paralele și echidistante, situate în același plan.

O caracteristică a acesteia este *constanta rețelei d*, care reprezintă distanța dintre două fante vecine. Inversul constantei rețelei reprezintă *numărul de franje pe unitatea de lungime, n.*

În mod obișnuit, o rețea de difracție se poate realiza trasând cu ajutorul unui diamant zgârieturi fine, paralele, pe o placă de sticlă sau de cuarț. Practic, zona dintre două zgârieturi consecutive de pe placă constituie fanta, sau zona transparentă pentru lumină, care are o lățime ξ. Zgârietura constituie zona opacă dintre fante, care are o lățime η.

Suma dintre η și ξ reprezintă tocmai constanta rețelei, $d = \xi + \eta$.

Cele mai utilizate rețele nu au mai mult de 500 trăsături/mm.

Există două categorii de rețele de difracție: *rețele de difracție prin transmisie*, realizate pe suporturi transparente și *rețele de difracție prin reflexie*, realizate pe suprafețe metalice reflectătoare (bine șlefuite).

b) Tratarea analitică a fenomenului de difracție Fraunhofer pe o rețea de difracție.

Distribuția intensității luminii în figura de difracție Fraunhofer obținută cu o rețea de difracție se obține calculând interferența undelor difractate de rețeaua de difracție.

Pentru aceasta să considerăm o rețea de transmisie formată din N fante (v. fig.7.19). Considerăm că lumina incide normal pe suprafața rețelei, ca în figura 7.19.

Dacă unda difractată de prima fantă are intensitatea câmpului elctric descrisă de ecuația:

$$E = E_0 \cos\omega t \quad (1),$$

atunci undele difractate de următoarele fante au între ele o *diferență de drum:*

$$\delta = d \sin\beta, \quad (2)$$

care corespunde diferenței de fază: $\Delta\varphi = k\delta = (2\pi/\lambda)\delta$.

Aici β reprezintă unghiul de difracție, adică unghiul făcut de razele difractate cu normala la rețea.

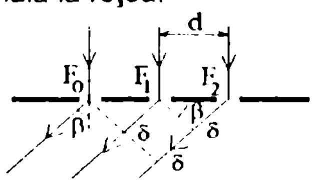


Fig.7.19

Câmpul electric rezultant (unda rezultantă), ce va determina figura de interferență (difracție) pe un ecran situat la distanță mare (teoretic ∞), se obține prin însumarea tuturor undelor emise de întreaga rețea de difracție:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_0 \cdot \cos(\omega t - n \cdot \Delta\varphi) \quad (3).$$

Calculul matematic care urmează, va fi mult uşurat dacă se transcrie relaţia (3) cu ajutorul numerelor complexe utilizând relaţia lui Euler, $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Deci, $\cos\alpha = \mathbf{Re}(e^{i\alpha})$. În cele ce urmează ne debarasăm de simbolul **Re** (partea reală) şi vom scrie $\cos\alpha = e^{i\alpha}$. Prin urmare relaţia (3) se scrie în complex astfel:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_0 \cdot e^{i(\omega t - n\cdot\Delta\varphi)} = E_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\cdot n\cdot\Delta\varphi} \quad (4),$$

unde suma este o progresie geometrică cu raţia $q = e^{-i\delta}$.

Suma unei progresii geometrice este: $S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$, unde n reprezintă numărul termenilor progresiei, iar a_1 — primul termen al progresiei.

Prin urmare, relaţia (4) se va scrie astfel dacă se ţine cont că n = N:

$$E = E_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \quad (5).$$

Amplitudinea intensităţii câmpului electric a undei rezultante este:

$$A = E_0 \cdot \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \quad (6)$$

şi, prin urmare, intensitatea luminoasă este furnizată de relaţia cunoscută:

$$I = \frac{|A|^2}{2} = \frac{E_0^2}{2} \cdot \left| \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \right|^2 = I_0 \cdot \left| \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \right|^2 \quad (7),$$

unde $I_0 = \frac{E_0^2}{2}$.

Dacă utilizăm în cele ce urmează relaţiile matematice următoare:

- Dacă Ψ este o funcţie complexă, modulul ei la pătrat este, prin definiţie, $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$, unde Ψ^* reprezintă complex-conjugata lui Ψ;
- Relaţia lui Euler: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$;
- Relaţia unghiului pe jumătate: $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$;

atunci în relaţia (6) sunt valabile transformările succesive ce urmează:

$$\left|e^{-i\Delta\varphi}-1\right|^2=\left(e^{-i\Delta\varphi}-1\right)\cdot\left(e^{+i\Delta\varphi}-1\right)=1-e^{+i\Delta\varphi}-e^{-i\Delta\varphi}+1=2\left(1-\frac{e^{i\Delta\varphi}+e^{-i\Delta\varphi}}{2}\right)=$$

$$=2\left(1-\cos\Delta\varphi\right)=4\cdot\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} \quad (8).$$

Aplicând relația (8) în relația (7) se obține:

$$\boxed{I=I_0\cdot\frac{\sin^2\frac{N\cdot\Delta\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}} \quad (9).$$

În analiza matematică se precizează că pentru intensitatea I *condițiile* necesare obținerii *de maxime principale* în relația (9) se realizează dacă:

$$\frac{\Delta\varphi}{2}=m\cdot\pi,\ m\in\mathbf{Z} \quad (10),$$

de unde, ținând seama de relațiile $\delta=d\cdot\sin\beta$ și $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta$, obținem:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\cdot\sin\beta=m\pi.$$

De aici se determină condiția de poziționare a maximelor:

$$\delta=d\sin\beta=m\lambda,\ m\in\mathbf{N} \quad (11).$$

Condițiile de minim ale intensității I se obțin dacă în (9) numărătorul este zero, iar numitorul nu, adică

$$\frac{N\cdot\Delta\varphi}{2}=p\cdot\pi,\ p\in\mathbf{N}^*,\ \text{sau}\ \frac{N}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\cdot\sin\beta=p\cdot\pi$$

de unde:

$$d\cdot\sin\beta=p\cdot\frac{\lambda}{N},\ p=1, 2, 3, \ldots, N-1 \quad (12),$$

în care p poate lua orice valoare naturală, dar nu multiplu de N, deoarece dacă p=mN se obține condiția (10) de maxim principal.

Deci, între două maxime principale există N-1 minime și N-2 maxime secundare (impuse de existența celor N-1 minime) de intensitate mult mai mică decât cea a maximelor principale.

De exemplu, o rețea care N = 5 fante produce o figură de difracție care prezintă între două maxime principale N – 1 = 4 minime ce separă N- 2 = 3 maxime secundare (v.fig.7.20).

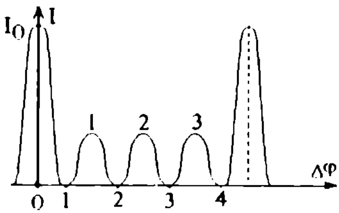


Fig.7.20

Cu cât numărul N de fante este mai mare cu atât maximele secundare devin mai slabe. Când acestea sunt practic invizibile fiecare maxim principal se prezintă ca o linie foarte fină pe un fond întunecat.

Datorită faptului că poziția maximelor principale depinde de lungimea de undă conform relației $d\sin\beta = m\lambda$, rețeaua de difracție iluminată cu un fascicul de lumină paralel și monocromatic poate fi utilizată în construcția instrumentelor spectrale.

Dacă lumina incidentă pe rețeaua de difracție (pe planul fantelor rețelei) nu este normală pe ea (razele de lumină incidente fac un unghi $\alpha \neq 0$), atunci *diferența de drum* δ dată de relația (2) se modifică astfel (v. fig.7.21):

$$\delta = d\ |\sin\alpha \pm \sin\varphi| \quad (2'),$$

unde d reprezintă constanta rețelei, α este unghiul de incidență, adică unghiul făcut de raza de lumină incidentă cu o normală la suprafața rețelei, iar β este unghiul de difracție. Semnul plus (+) corespunde cazului rețelelor de difracție care funcționează prin reflexie, iar semnul minus (-) corespunde cazului rețelelor de difracție care funcționează prin transmisie (este cazul tratat aici). Altfel spus, semnul plus corespunde situației în care razele de lumină incidentă și razele de lumină difractate sunt situate de aceeași parte a rețelei de difracție, iar semnul minus corespunde situației în care razele de lumină incidentă și razele de lumină difractate sunt situate de părți opuse ale rețelei de difracție.

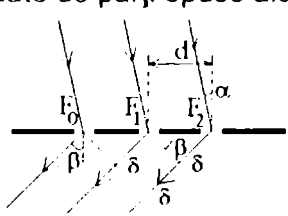


Fig.7.21

Pentru cazul interferenţei constructive, când se obţin maxime principale, din relaţiile (2') şi (11) rezultă ***ecuaţia reţelei de difracţie:***

$$\boxed{d \cdot |\sin\alpha \pm \sin\beta| = m \cdot \lambda}, \; m \in \mathbf{N} \quad (13).$$

Numărul întreg pozitiv, *m*, se numeşte ***ordin de interferenţă***. Folosind această ecuaţie, putem calcula unghiul de difracţie β al unui anumit ordin de interferenţă corespunzător radiaţiei incidente sub unghiul α şi cu lungimea de undă λ. Când ordinul de interferenţă este nul ($m = 0$), unghiul de incidenţă α este egal cu unghiul de difracţie β ($\alpha = \beta$), iar reţeaua de difracţie se comportă ca o oglindă, toate lungimile de undă ale luminii incidente suprapunându-se în ordinul zero de difracţie. Pentru toate celelalte ordine de interferenţă ($m \neq 0$) valoarea unghiului de difracţie β, corespunzător unui anumit ordin de interferenţă, depinde de lungimea de undă λ.

Reţeaua de difracţie formează, deci, spectrul de difracţie al luminii (radiaţiei electromagnetice) incidente, diferitele lungimi de undă prezente în lumina incidentă fiind difractate sub unghiuri diferite.

Observaţie: Din punct de vedere practic, aria trasată a reţelei de difracţie trebuie să fie suficient de mare pentru a intercepta toată lumina incidentă, chiar şi în cazul unei incidenţe unghiulare limită. De exemplu, dacă notăm cu *h* dimensiunea liniară a secţiunii transversale a unui fascicul de lumină, aria trasată trebuie să aibă înălţimea *h*, iar lăţimea $s = Nd$ trebuie să fie (fără demonstraţie):

$$s = \frac{h}{\cos\alpha_{max}} \quad (14),$$

unde α_{max} este valoarea maximă a unghiului de incidenţă. Dacă dimensiunile ariei trasate, specificate în fişa tehnică, sunt mai mici decât *h* şi, respectiv, *s*, intensitatea luminoasă din spectru va fi mult micşorată pe seama creşterii intensităţii luminii care apare în ordinul zero de interferenţă.

c) Dispersia

Una dintre concluziile prezentate în subparagraful precedent a fost că, pentru o aceeaşi valoare a unghiului de incidenţă α constant (rezultând $\sin\alpha$ = constant), valoarea unghiului de difracţie β, corespunzător unui anumit ordin de interferenţă, m, depinde de lungimea de undă λ a radiaţiei incidente. Această concluzie ne permite să derivăm ecuaţia reţelei (13) în raport cu λ şi să obţinem *dispersia unghiulară:*

$$\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)=\frac{m}{d\cdot\cos\beta} \quad (15).$$

Pare posibil deci să obţinem valori mari ale dispersiei, chiar şi în ordinul unu, folosind reţele de difracţie cu *d* foarte mic, ceea ce înseamnă un număr foarte mare de trăsături pe milimetru. Practica arată însă că dispersia reţelelor de difracţie este limitată de cel puţin doi factori. Primul dintre aceştia este definit de situaţia reală că nici unghiul de incidenţă şi nici unghiul de difracţie nu pot avea valori mai mari de 90°. Cel de-al doilea este definit de condiţia ca distanţa dintre două trăsături consecutive să nu fie mult prea mică în raport cu lungimea de undă a luminii. Când constanta reţelei este mică în raport cu lungimea de undă a radiaţiei incidente, reţeaua de difracţie se comportă ca o oglindă, mai mult reflectând lumina decât să o disperseze.

d) Puterea de separare

Definiţie: Puterea de separare sau puterea de rezolvare (rezoluţie), reprezentând o altă caracteristică importantă a reţelei de difracţie, a fost definită de Rayleigh drept capacitatea reţelei de difracţie de a separa două linii adiacente din spectru şi exprimată matematic prin (λ/Δλ), unde λ+Δλ este lungimea de undă a liniei spectrale care încă mai poate fi deosebită de linia spectrală cu lungimea de undă λ.

În funcţie de numărul total N de trăsături, de constanta reţelei de difracţie *d*, de lungimea de undă a radiaţiei incidente λ, de unghiul de incidenţă α şi de unghiul de difracţie β, puterea de separare a reţelei de difracţie este dată de expresia următoare (fără demonstraţie):

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)=\frac{N\cdot d\cdot(\sin\alpha\pm\sin\beta)}{\lambda}=m\cdot N \quad (16),$$

unde *m* reprezintă ordinul de interferenţă al reţelei. Se observă că puterea de separare a unei reţele de difracţie este cu atât mai mare, cu cât numărul total N de trăsături este mai mare, pentru o aceeaşi constantă a reţelei şi cu cât unghiul de incidenţă α este mai mare. Din punct de vedere practic obţinerea unei rezoluţii înalte, cu ajutorul reţelelor de difracţie, depinde de calitatea optică a suprafeţei reţelei, de uniformitatea spaţială a trăsăturilor şi de optica asociată reţelei de difracţie în cadrul sistemului optic în care aceasta a fost folosită. Orice abatere de la planietatea reţelei de difracţie plană conduce invariabil la micşorarea puterii de rezoluţie. Expresia (16), care defineşte puterea de separare a reţelei de difracţie, arată că, teoretic, aceasta poate fi făcută oricât de mare dacă numărul N de trăsături creşte (pentru o aceeaşi constantă a reţelei). Din punct de vedere practic, lăţimea *s* a reţelei de difracţie nu poate fi făcută mult prea mare. Din (16) şi (13) obţinem:

$$m\lambda = \frac{s}{N} \cdot (\sin\alpha \pm \sin\beta) \quad (17).$$

Deoarece ($\sin\alpha \pm \sin\beta$) poate lua valoarea maximă egală cu 2, valoarea maximă a puterii de separare a unei reţele de difracţie este:

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)_{max} = \frac{2s}{\lambda} \quad (18).$$

De exemplu, în cazul unei reţele de difracţie cu lăţimea egală cu 150mm (care este o valoare foarte mare, apropiată de valoarea limtă), puterea de separare maximă este egală cu 600000, în cazul unei lungimi de undă λ = 500nm.

Anexă

1. Relaţii matematice utile

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$$

$$\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cdot \sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos b$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\mathrm{tg}a \pm \mathrm{tg}b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}$$
$$\mathrm{tg}(a \pm b) = \frac{\mathrm{tg}a \pm \mathrm{tg}b}{1 \mp \mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b}$$
$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$
$$\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}$$
$$\sin x = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

2. Identităţi vectoriale

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \text{scalar}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B}) \cdot \vec{e} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Vmatrix} = \overrightarrow{\text{vector}}\text{, } \textit{de versor } \vec{e}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$
$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \cdot \left(\vec{B} \cdot \vec{D}\right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{D}\right) \cdot \left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right)$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Psi = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\Psi\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi+\Psi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{\nabla}\times\left(\Psi\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\Psi\times\vec{A}+\Psi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$
$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{A}+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$
$$\vec{\nabla}(u+v)=\vec{\nabla}u+\vec{\nabla}v$$
$$\vec{\nabla}(uv)=u\vec{\nabla}v+v\vec{\nabla}u$$
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}\left(u\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot\vec{\nabla}u+u\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$$
$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}\times\left(u\vec{A}\right)=\vec{\nabla}u\times\vec{A}+u\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$

3. Prefixele unităţilor de măsură

Factorul de multiplicare	*Prefixul*	*Simbolul*
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

$1Å=0.1nm=10^{-10}m$

4. Constante utile

Denumirea constantei	***Valoarea constantei***
Viteza luminii în vid:	$c=2.9979\times10^{8}$ m/s
Sarcina electrică fundamentală:	$e=1.60219\times10^{-19}$ C
Numărul lui Faraday:	$N_0e=96487$ C/mol
Constanta lui Planck:	$h=6.625\times10^{-34}$ J s
Constanta lui Planck redusă:	$\hbar=h/2\pi=1.054\times10^{-34}$ J s
Unitatea atomică de masă:	$1u=1.66\times10^{-27}$ Kg
Masa de repaus a electronului:	$m_e=9.1083\times10^{-31}$ Kg
Masa de repaus a neutronului:	$m_n=1.67474\times10^{-27}$ Kg
Masa de repaus a protonului:	$m_p=1.67243\times10^{-27}$ Kg
Magnetonul Bohr:	$\mu_B=0.9273\times10^{-23}$ Am^2
Magnetonul nuclear:	$\mu_N=0.5050\times10^{-26}$ Am^2
Momentul magnetic al electronului:	$\mu_e=1.001145\mu_B$
Momentul magnetic al protonului:	$\mu_p=2.7928\mu_N$
Momentul magnetic al neutronului:	$\mu_n=-1.9130\mu_N$
Constanta gravitaţională:	$\gamma=6.7\times10^{-11}$ N m^2/Kg^2
Acceleraţia gravitaţională la nivelul mării:	$g=9.8$ m/s^2
Prima rază Bohr:	$a_0=0.5292\times10^{-10}$ m
Numărul lui Avogadro:	$N_A=6.023\times10^{23}$ mol^{-1}
Constanta gazelor perfecte:	$R=8.3144$ J mol^{-1} K^{-1}
Constantă lui Boltzmann:	$k=1.380\times10^{-23}$ J/K
Permitivitatea electrică a vidului:	$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}$ F/m
Permeabilitatea magnetică a vidului:	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m
Lungimea de undă a unui foton cu energia de un electron-volt:	1.24×10^{-6} m.
Impedanţa vidului pentru undele electromagnetice:	377Ω

5. Factorii de transformare a unităţilor de energie

	ev	*erg*	*kcal/mol*	*cm^{-1}*	*K*	*u*
ev	1	1.602×10^{-12}	23.0609	8.0657×10^{3}	1.1605×10^{4}	3.675×10^{-2}
erg	6.242×10^{11}	1	1.439×10^{13}	5.034×10^{15}	7.244×10^{15}	2.294×10^{10}
kcal/mol	4.3363×10^{-2}	6.947×10^{-14}	1	3.4976×10^{2}	5.0323×10^{2}	1.5936×10^{-3}
cm^{-1}	1.2398×10^{-4}	1.986×10^{-16}	2.8591×10^{-3}	1	1.43879	4.5563×10^{-6}
K	8.617×10^{-5}	1.380×10^{-16}	1.9871×10^{-3}	6.9503×10^{-1}	1	3.1668×10^{-6}
u	27.2107	4.359×10^{-11}	6.2750×10^{2}	2.1947×10^{5}	3.1578×10^{5}	1

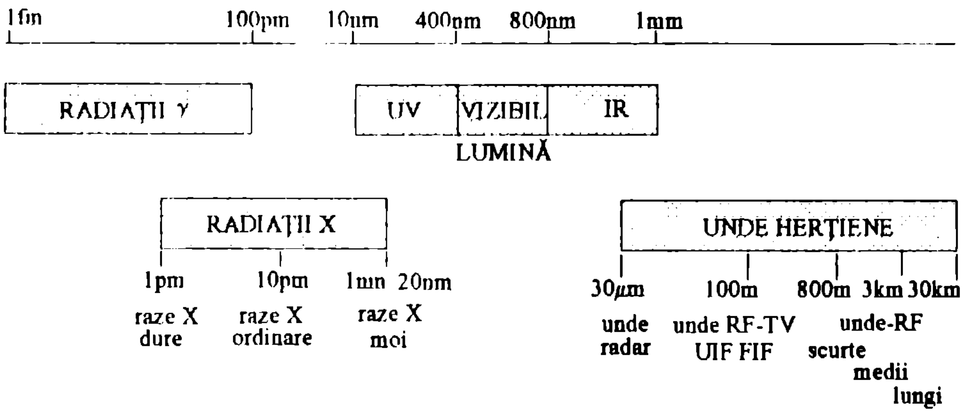
1KJ/mol=0.239Kcal/mol=10.36MeV=2.50GHz=83.5cm^{-1}=120K

6. Spectrul electromagnetic

Denumirea radiației electromagnetice (exemple)	*Ordin de mărime a frecvenței*	*Ordin de mărime a lungimii de undă*
Radiația X de frânare	$10^{23} \div 10^{24}$ Hz	$10^{-16} \div 10^{-15}$ m
Radiația gamma, γ	$10^{22} \div 10^{21}$ Hz	$10^{-14} \div 10^{-13}$ m
Radiația X caracteristică	$10^{18} \div 10^{19}$ Hz	$10^{-11} \div 10^{-8}$ m
Lumină ultravioletă	10^{15} Hz	10^{-7} m
Albastrul lămpii cu vapori Hg		4358 Å
Verdele lămpii cu vapori Hg		5461 Å
Galbenul lămpii cu vapori Hg		5770 Å
Lumina roșie – laser He-Ne		6328 Å
Infraroșu - radiația solară (T=6000K)	10^{14} Hz	10^{-6} m
Infraroșu - radiația la temp. camerei (T=300K)	10^{13} Hz	10^{-5} m
Infraroșu - radiație univers (T=3K)	10^{11} Hz	10^{-3} m
Microunde	$10^{9} \div 10^{10}$ Hz	$10^{-2} \div 10^{-1}$ m
Radiounde în televiziune și radio MF	$10^{7} \div 10^{8}$ Hz	$10^{0} \div 10^{1}$ m
Radiounde MA	$10^{5} \div 10^{6}$ Hz	$10^{2} \div 10^{3}$ m
Unde acustice (domeniul audio)	$10^{1} \div 10^{4}$ Hz	$10^{4} \div 10^{7}$ m

Pe scară logaritmică:

Domeniul	*logE (KJmol^{-1})*	*logν (Hz)*	*logλ*	*logλ^{-1} (cm^{-1})*
	+9	10^{21}	12pm	9
Radiații X				
	+6	10^{18}	9nm	
UV				6
	+3	10^{15}	6μm	
Vizbil				
				3
IR				
	0	12 10^{12}		
IR îndepărtat			3mm	
				0
Microunde	-3	9 10^{9}		
			0	
Radiofrecvență	-6	6 10^{6}		
Audio	-9	3 10^{3}	-3Km	
	-12	0	-6Mm	
	-15			



7. Mărimi electromagnetice principale şi unităţile de măsură în S.I.

Mărimea fizică	*Unitatea în S.I.*
Sarcina electrică, q:	1 C (coulomb)
Intensitatea câmpului electric, $\vec{E}$:	1 V/m=1 N/C
Potenţialul electric scalar, V:	1 V (volt)
Capacitatea electrică, C:	1 F (farad)
Intensitatea curentului electric, I:	1 A (ampere)
Densitatea de curent, $\vec{j}$:	1 A/m^2
Rezistenţa electrică, R:	1 Ω (ohm)
Rezistivitatea electrică, ρ:	1 Ωm
Inducţia câmpului magnetic, $\vec{B}$:	1 T (tesla)
Inductanţa, L:	1 H (henry)
Momentul electric, $\vec{p}$:	1 Cm
Polarizarea electrică, $\vec{P}$:	1 C/m^2
Inducţia câmpului electric, $\vec{D}$:	1 C/m^2
Momentul magnetic, $\vec{m}$:	1 A/m^2
Magnetizarea, $\vec{M}$:	1 A/m
Intensitatea câmpului magnetic, $\vec{H}$:	1 A/m
Fluxul magnetic, Φ_m:	1 Wb (weber)
Potenţialul magnetic vectorial, $\vec{A}$:	1 Tm

8. Alfabetul grecesc

Α, α	alfa,
Β, β	beta,
Γ, γ	gamma,
Δ, δ	delta,
Ε, ε	epsilon,
Ζ, ζ	zeta,
Η, η	eta,
Θ, θ, ϑ	teta,
Ι, ι	iota,
Κ, κ	kappa,
Λ, λ	lambda,
Μ, μ	miu,
Ν, ν	niu,
Ξ, ξ	xi,
Ο, ο	omicron,
Π, π	pi,
Ρ, ρ	rho,
Σ, σ	sigma,
Τ, τ	tau,
Υ, υ	iupsilon,
Φ, φ	fi,
Χ, χ	hi,
Ψ, ψ	psi,
Ω, ω	omega.

Bibliografie

- Benedek G. B., Villars F. M. H., "Physics with illustrative examples from medicine and biology. Electricity and Magnetism", vol. 3, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1979;
- Crawford F., "Waves–Berkeley Physics Course", vol. III, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983;
- Cristea Gh., Ardelean I., "Elemente fundamentale de fizică", Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1985.
- Feynman R. P., "Fizica Modernă – Electromagnetismul. Structura materiei.", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1970;
- Fred Gardial, "Traité d'Èlectricité – Électromagnétisme", vol. III, École Polytechmique Fédérale de Lausanne, Éditions Georgi, 1979;
- Jackson J. D., "Electrodinamică clasică", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1999;
- Müller L., Preda A., Moisil D., Anghelescu D., "Fizica", Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982;
- Nicula Al., Cristea Gh., Simon S., "Electricitate şi magnetism", Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982;
- Popescu Ioan-Ioviţ, Toader E., "Optica", Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989;
- Tudor T., "Bazele Opticii Coerente", Ed. Universităţii din Bucureşti, 1992;
- Tudovan V., "Electricitate şi magnetism", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984;
- Ţintea Hariton, "Optică şi Spectroscopie", Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

Tiparul s-a executat sub c-da 624/1999 la
Tipografia Editurii Universităţii din Bucureşti

DATA RESTITUIRII

26 NOV 2001	8 NOV 2004	
13 NOV 2002	9 NOV 2004	
16 NOV 2002	17 DEC 2004	
2 - DEC 2002	28 IAN 2005	25 IAN 2017
06 FEB 2003	28 IUN 2005	
10 IUN 2003	28 IUN 2005	27.02.2019
27 NOV 2003	19 IAN 2006	
5 APR 2004		27 MAR 2019
5 NOV 2004	3 IUL 201	22.04.2021
5 NOV 2004		24.04.2021
[illegible]	06.02.2016	15.05.2021

ISBN 973-575-428-2

Lei 34600